

2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 180005

參展科別 地球與環境科學

作品名稱 大紅斑與周邊擾動的糾葛

得獎獎項 三等獎

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 郭鴻基、王靖華

作者姓名 蘇軒漢、廖昱衡

關鍵詞 淺水模式、二維亂流及帶狀結構、正壓不穩定

作者簡介



我是蘇軒漢（右），高中時因緣際會下投入了地球科學的研究，很高興能有機會操作數值模式，在不斷的偵錯及修正理論間，逐步揭開木星大紅斑的神秘面紗，也加深了我對於大氣科學的理論知識。

我是師大附中的廖昱衡(左)，除了對科學有興趣，長時間投入在專題研究之外，我也熱衷於管樂，在這過程中享受音樂帶來的愉悅，同時也培養團隊合作的能力；另外我也喜愛健身，依靠自律和意志維持良好的生活作息及體態，同時也能找到在課業之餘有同樣愛好的同伴。我很喜歡和我得組員一起研究並為有機會參與國際科展感到高興。

摘要

在本實驗中，我們亟欲了解木星大紅斑其周圍不穩定之形成機制，意即探討大紅斑渦旋本身與其周邊風切帶之互動情形。第一、我們討論了風切帶之形成：有別於前人研究，我們使用全球準地轉淺水模式，在準地轉平衡的狀態下，渦旋會逐漸合併並緯向延伸，最終得出行星風系條帶狀僅為低頻波所產生之效應，且自轉越快帶狀越明顯；第二、透過克希霍夫渦旋理論，大紅斑始終能保持橫向的橢圓形結構且長軸不會旋轉係因為風切帶之加速效應；第三、我們使用淺水模式進行模擬實驗，發現大紅斑之非對稱西側擾動形成原因有二：一為大紅斑對風切帶之加速，以及木星低緯度風速較快加上風切帶之間具有渦度梯度形成之正壓不穩定效果。二來緯度越低則行星渦度越低，慣性不穩定易形成，即力學能差異越大不穩定越易形成，而此部份我們也以水工實驗展示。

Abstract

In this project, we want to know the formation mechanism of the instable structure which is located in the northwest side of Jupiter's Great Red Spot. More precisely, to discuss the interaction between vortex and its surrounding wind shear bands. First, different from the former research, we use numerical model and show the formation of planetary band structure only required the transmission of low frequency waves which is under a quasi-geostrophic condition. Secondly, by the acceleration of wind shear, the elliptical vortex could be equivalent to a round Kirchhoff vortex. In result, the Great Red Spot won't rotate but be able to maintain stability. Third, by the using of shallow water model, we find that the higher wind speed and the smaller planetary vorticity in lower latitude are essential to the instability which is located in the northwest side of the Great Red Spot. And it can be explained by inertial and barotropic instability. In addition, we conduct a hydraulic model experiment to show that the instability is proportional to the difference of kinetic energy.

壹、前言

一、研究動機

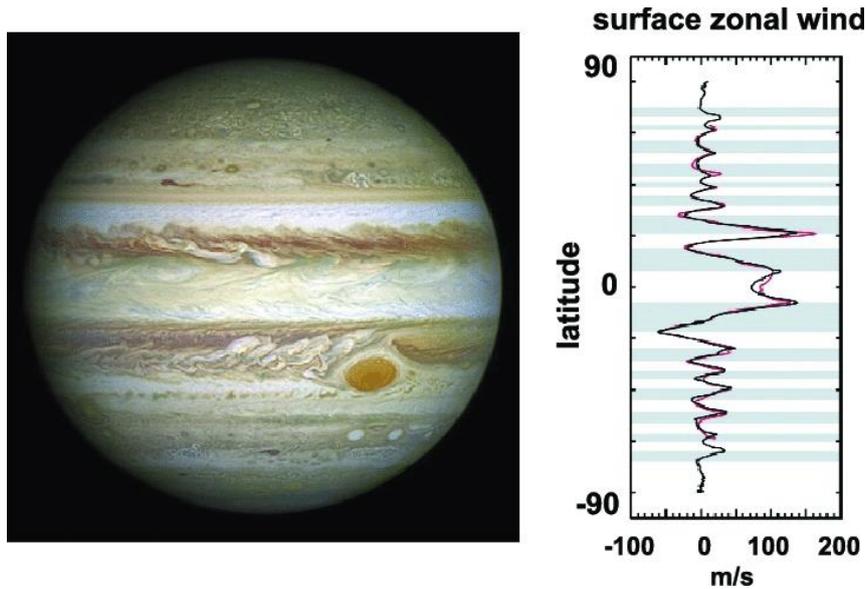
一直有許多研究探討木星的條狀構造與渦旋，但是目前對於其背後的物理仍未有定論。我們對木星大紅斑周圍渦流的擾動之觀測產生興趣。因此，本研究從非線性動力的觀點，以一個新的低頻率準地轉模式模擬大紅斑的環境，由整體環境場（條帶狀構造）和大紅斑的相互作用，乃至於其旁邊的不穩定性質以解析大紅斑渦流的奧秘。

二、研究目的

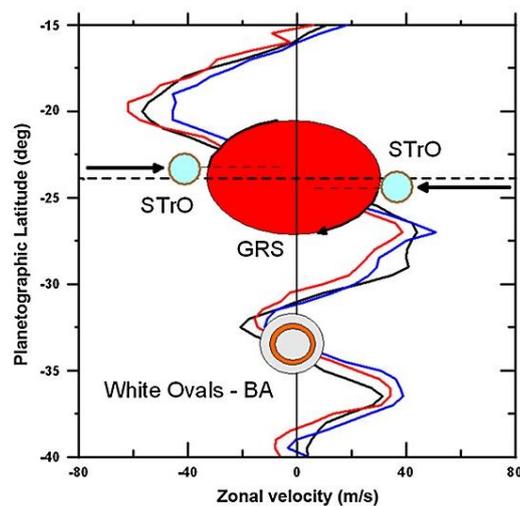
- (一) 討論木星帶狀結構的形成機制
- (二) 研究大紅斑穩定存在之原因
- (三) 模擬風切和渦旋的交互作用以探討大紅斑東西側擾動的不對稱性

三、文獻回顧

為了研究木星大紅斑，並且建立實驗初始場，我們首先蒐集了一些關於木星的數據。根據 Parisi 等人 (2021)，大紅斑之長軸約為 32000 公里，短軸為 16000 公里。此外，我們也需要了解木星條帶狀構造之風速，根據 Gary (2018)，我們得知木星具有低緯風速強之特徵，以及大紅斑附近之風速約為 100 公尺/秒之現象。此外，我們也參考了 Lavega 等人 (2001) 等人對於大紅斑周圍雲移動速度之分析 (圖二)，作為建立背景場之資料。而我們也認為，木星的緯風速較強之原因可能和其獨特的內熱結構有關 (Moritz 等人, 2005)。



圖一、木星緯向風場（相對於其磁場）風速圖（Gary，2018）



圖二、木星大紅斑周圍風場圖（Lavega 等人，2001）

蒐集完畢背景場資料後，便可開始探討木星大紅斑周圍的不穩定性質。

我們將此問題拆成兩種變因討論：風切帶與渦旋。最後統整並討論不穩定之形成機制。

（一）討論木星帶狀結構的形成機制

1. 理論

首先，由 Huang 等人（1998）的實驗，他們使用淺水波模式，以能量串跌（Energy Cascade）以及選擇性衰變（Selective Decay）的理論，

討論條帶狀構造之形成原因。由二維平流方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (\text{式 1})$$

其中， ζ 為渦度， u 為緯向風速， v 為經向風速

由此式可推導出（推導過程詳見附錄三）

$$\frac{dZ}{dt} = -2\mu P \quad (\text{式 2})$$

$$\frac{dK}{dt} = -2\mu Z \quad (\text{式 3})$$

其中 P 為渦度梯度平方， Z 為渦能， K 為動能

不難發現由於動能變率取決於渦能變率，渦能衰減量較多，而假設水平風是地轉非輻散，根據能量守恆，渦能與動能不變，再加上摩擦，動能守恆但渦能則遞減，最終造成渦旋合併朝大尺度發展，加上由於科氏力隨緯度之變化，也就是貝塔效應（Beta Effect）

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (\text{式 4})$$

根據上述，由於木星自轉快速及羅士培波能量的緯向傳遞，產生地轉風，因此任何在此旋轉坐標系的渦旋皆會漸漸像緯向延伸。此外，由於能量串迭（Energy Cascade），渦旋也會漸弱而互相合併，整體能量向低頻擴散。如此合併加上緯向延伸的現象，便產生了條帶狀構造。

2. 前人之實驗設計

Huang 等人（1998）的條帶狀化實驗使用了淺水模式，初始場設計為隨機渦旋場，討論整體環境在不同 ε (Lamb Parameter) 下的條帶狀形成情形，而

$$\varepsilon = \frac{r}{R_\lambda^2} = \frac{(f \cdot r)^2}{gH} \quad (\text{式 5})$$

r 為星球半徑， f 為科氏參數， g 為重力加速度， H 為大氣層厚度，且羅士培變形半徑為

$$R_\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f} = \frac{\text{淺水波波速}}{\text{科氏參數}} \quad (\text{式 6})$$

$$f = 2\omega \sin\varphi \quad (\text{式 7})$$

ω 為行星自轉速度， φ 為緯度

並且由於淺水模式之特性（詳見附錄一），積分式可表為下

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta t \cdot P(\zeta_n, u_n, v_n) \quad (\text{式 8})$$

淺水方程有三個方向的時變率

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (\text{式 9})$$

u 為緯向風速， v 為經向風速， h 為水位高。此外根據連續方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (\text{式 10})$$

其特性為可包含流體壓縮產生的高頻重力波。

3 · 前人之研究成果

Huang 等人（1998）發現由於選擇性衰變以及科氏力隨緯向之變化，隨機渦旋場將朝向緯向發展，最終形成條帶狀構造，惟由於使用模式涵蓋廣波段的特性，無法具體說明此現象係由於何種波之傳遞造成。

4 · 條帶狀數量之定義

根據

$$\varepsilon = \frac{r}{R_\lambda^2} = \frac{(f \cdot r)^2}{gH} \quad (\text{式 1})$$

羅士比半徑的意義為已知科氏參數，則某已知渦度之渦旋在某個大小以內可維持，意即在此範圍內的質點會受渦旋影響，此也為條帶狀的原理。（達成地轉，不互相影響）不過還需考慮不同緯度地球自轉差異的 Beta Plane（ β 效應），因此式子修正為 Rhine Scale，詳述如下：

在 Beta Plane 中，渦旋定義為：

$$q = \frac{2U}{r} + f_0 + \beta_0 r \quad (\text{式 11})$$

$$\beta_0 = 2\Omega \cos\varphi/a \quad (\text{式 12})$$

首項為相對渦度項，中間項為行星渦度項，末項為考慮不同緯度自轉差異項。而 Rhine Scale 定義為當

$$\frac{2U}{r} \approx \beta_0 r \quad (\text{式 13})$$

時，其中的 r 。

經計算，地球的 Rhine Scale 約為 2090 km（而不考慮自轉差異的羅士比變形半徑為約四千公里），意即兩極連線，若已達平衡，應只有 10 個渦旋（帶）。而木星的 Rhine Scale 約為 7722 km，兩極連線達平衡則應有 28 個帶狀構造。故我們預測結果應為木星環境下之條帶數較多。

二、研究大紅斑穩定存在之原因

由克希霍夫渦旋（Kirchhoff Vortex）可知，渦旋之旋轉強度由其周圍風場以及在渦旋邊界傳遞之羅士培波決定，而此速度可由下式表示

$$\omega = \frac{\zeta_0 ab}{(a+b)^2} \quad (\text{式 14})$$

ω 為渦旋旋轉之角速度， a 為渦旋長軸大小

b 為渦旋短軸大小， ζ_0 為渦旋之渦度大小

然而根據實際觀察，大紅斑的長短軸卻幾乎維持靜止無旋轉的狀態。我們發現，木星大紅斑周圍邊界風速似乎都差不多，因此我們認為可能是因為大紅斑上下條帶的流切使得其不旋轉，依然維持位渦守恆的狀態，此外也有可能是因為大紅斑的能量來源導致其內部其實是反能量串跌（能量由長波至短波）的狀態。（Farias 等人，2020）

根據理論，我們應可在長軸或短軸上加以風切，使其等效於正圓渦旋並使其不旋轉。

三、不穩定之形成機制

Nezlin 等人（1982）認為大紅斑周圍之不穩定係由於風切所造成的力學能差異形成了開爾文-亥姆霍茲不穩定性（Kelvin-Helmholtz instability，以下簡稱 KH 不穩定），然而，KH 不穩定之發生是取決於水平介面上下之流體密度差異（重力）以及流速差（慣性力），其可以理查遜數（Richardson Number）表示

$$R_i = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{\text{浮力}}{\text{慣性力}} \quad (\text{式 15})$$

g 為重力加速度， ρ 為流體密度， u 為流體速度

其中當 $R_i < \frac{1}{4}$ 時，KH 不穩定發生（推導詳見附錄四）

但是木星大紅斑之不穩定是發生於垂直介面上，為此我們認為其主要應還是為由水平風切及科氏力主導之慣性不穩定，如下

$$f \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right) < 0 \quad (\text{式 16})$$

左式為相對渦度，右式為行星渦度。

此不等式成立時，發生慣性不穩定（推導詳見附錄五）。而由於木星條帶狀構造間存在渦度梯度差異（Philip 等人，2011），前人也將正壓不穩定

（Read 等人，2019），正壓不穩定首先須滿足 $f - \frac{\partial u}{\partial y}$ 變號，以及

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left| \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right| dy > 0 \quad (\text{式 17})$$

時，正壓不穩定易發生。

貳、研究方法與過程

一、研究器材

（一）數據分析：

1. 哈伯望遠鏡拍攝的帶有大紅斑的木星圖片

2 · 影像處理軟體 SculptGL

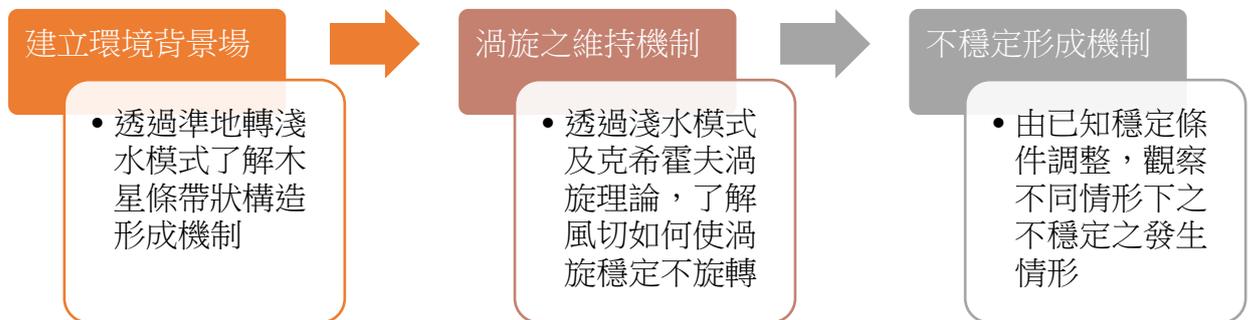
(二) 數值模式：

- 1 · 球座標準地轉模式
- 2 · 卡式座標淺水模式

(三) 水工實驗：

- 1 · 長方形壓克力容器
- 2 · 節流閥
- 3 · 小型抽水機
- 4 · 食用色素
- 5 · 水桶二個

二、研究方法



圖三、本報告之研究架構

(一) 實驗 1、討論木星帶狀結構的形成機制

為了深入理解木星之條帶狀構造是由於何種波之傳遞造成，我們使用準地轉淺水波模式 (Shallow Water Quasi-Geostrophic model, 簡稱 SWQG, 詳見附錄二), 不考慮小尺度的效應, 透過假設渦旋趨近地轉的情形下, 也就是只考慮壓力梯度力及科氏力, 不考慮擴散項 (小尺度), 只考慮長波低頻的效應, 給定初始渦場及渦旋, 並設定地球或木

星數據，以數值模式的方式模擬其渦度場變化。其特性為以位渦 q 為對象積分，預測及診斷方程式如下

$$\frac{\partial q}{\partial t} = J(\psi, q) = -u_g \frac{\partial q}{\partial x} - v_g \frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{式 18})$$

$$q = L(\psi) = \nabla^2 \psi - \alpha \psi \quad (\text{式 19})$$

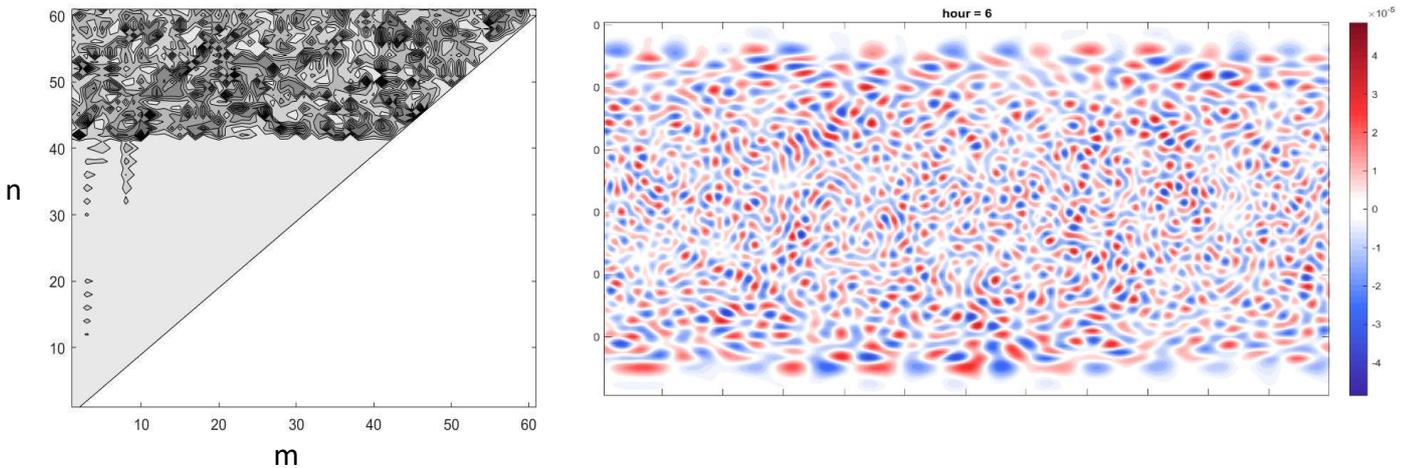
其中 q 為位渦，且

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

可知準地轉淺水模式之變化僅有單方向的 $\frac{\partial q}{\partial t}$ ，故可只運算低頻的波。

我們參考 Huang & Robinson (1998) 的條帶狀化實驗，他們使用淺水波模式，而我們使用準地轉模式，不含高頻率波，不考慮尺度較小的擴散項，只使用低頻率震盪。利用準地轉淺水波模式，以不同波數 ($k = 41 \sim 60$) 的球諧函數疊合以製造隨機渦旋的初始場，然後執行準地轉流模式，最後利用波譜分析球諧函數疊合出不同緯度具有的垂直及水平特徵。



左圖四：初始場（6小時）波數波譜分析圖，其中 m 為緯向波數， n 為總波數

右圖五：初始（0小時）渦場圖，單位 (s^{-1})

而我們設定參數如表一：

行星自轉角速度	Omega	7.292e-5	3.673e-4
行星半徑	a	6,371,000	6,991,1000
Lamb 參數	epsilon	0	0
重力場	g	9.8	24.8
擴散係數	kappa	1e4	1e4
高階擴散係數	Kappa2	1e34	1e34

表一：不同環境場的物理參數，左為地球，右為木星

接著調整參數，以模擬不同環境會使渦旋相互作用改變的因素差異。

改變參數細節如下：

1. 行星角速度、重力場及半徑：角速度所造成之科氏力在條帶狀過程十分重要，我們希望藉由模擬地球與木星的角速度比較差異。
2. Lamb 參數：地球半徑除以羅士比變形半徑值的平方，換句話說是重力波和自轉角速度效應的比值。
3. 擴散係數：由於數值模式預報的基礎為網格點，無法計算尺度過小的效應，進而隨著時步增加而累積能量，因此需藉由擴散釋放能量。

(二) 實驗 2-1、觀察能使渦旋穩定維持的環境

由於準地轉流渦旋（泰勒柱）的特性，其沿著垂直旋轉軸上的流動狀態均相同，且渦管不斷，故我們打算以二維的準地轉環境探討。

我們將以表一之數據為控制變因，改變初始場單顆渦旋之渦度，觀察其在不同羅士培數 R_o 下的羅士培波頻散情形。

R_o 之定義如下：

$$Ro = \frac{U}{f \cdot L} \quad (\text{式 } 20)$$

其中， U 為速度、 f 為科氏參數、 L 為環境長度（尺度）

（三）實驗 2-2、設計初始及環境場，觀察大紅斑動態

利用淺水波模式，植入環境場及大紅斑，對時間積分，觀察其結果。與準地轉最大的不同在於，淺水波模式考慮了黏滯力（剪力，類似摩擦力的效應）及非線性項。此種效應屬較小的力，然而此力於數值模式中卻會造成巨大的影響。此外，由於淺水波模式需要較大的運算量，因此我們使用實驗室的電腦遠端操作。

根據式 14，我們假設木星大紅斑長短軸（半徑）為（16000, 8000），且渦度為 $1e-5$ ，則根據公式得出其週期為 785.4 小時。

此外經計算，若我們設計風切為一正弦週期波，波長為 40000 公里，則風速極大值為 136m/s 時，渦旋短軸處可有 80m/s 之風切加速，如下式：

$$136 \text{ m/s} * \sin\left(\frac{8000\text{km}}{20000\text{km}} * \frac{\pi}{2}\right) = 80 \text{ m/s} \quad (\text{式 } 21)$$

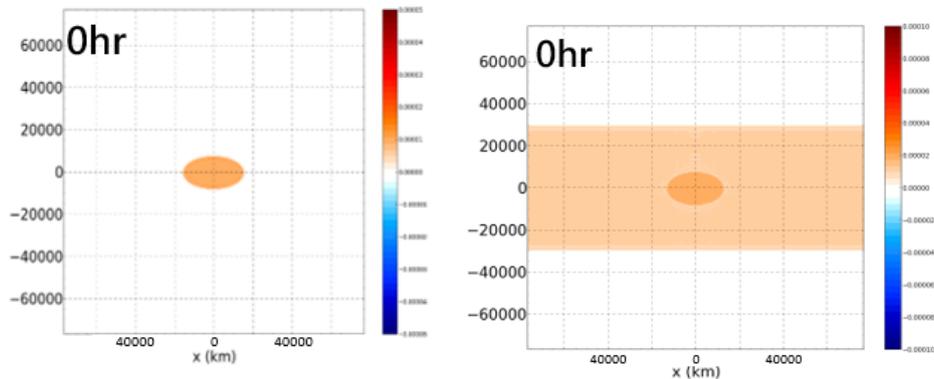
在此部分，我們欲探討在不同情形下渦旋的旋轉情形，為此我們設計了數個實驗，初始渦旋為長短軸 32000 比 16000 km 渦旋，其渦度為 $1e-5/s$ ，長軸速度為 160 m/s，短軸為 80 m/s，並且調整風切。

然而，本部分實驗之風切未能被渦旋影響並且相互互動。

（四）實驗 2-3、設計初始及環境場，背景風切以渦度條替代

由於若將風切以置放於背景的模式下，風切無法受到渦旋影響，為此我們設計在渦旋場中加入渦度帶。且由於渦度帶本身水平對稱，

並不會產生經向風切，理論上應可替代背景風切之效果，並可與渦旋相互作用。



左圖六、實驗 2-2，風切為背景風切

右圖七、實驗 2-3，風切為渦度場，等效於左圖

(五) 實驗 3-1、觀察能使 KH Instability 形成的環境

將長方形壓克力容器傾斜至一定角度以抽水機通入水（自來水）至半滿，接著以食鹽、食用色素與自來水配置有色鹽水，造成其與自來水有密度差（使得混合時有剪力 Shear Force），調整食鹽量控制濃度。將食鹽水透過節流閥降低速率從低處通入容器至全滿（使用節流閥的目的是為了避免流速過快造成兩溶液混合）。緩慢地將容器轉至水平，待溶液與容器及地面達水平後快速傾斜之並觀察兩溶液介面之變化，檢查是否產生 KH Instability。



圖八、水工實驗器材

由左到右依序為小型抽水機、長方形壓克力容器、節流閥

(六) 實驗 3-2、以淺水波模式模擬正壓不穩定

承實驗二，設定一個有木星條帶風切的環境場，植人大紅斑及其相關數據，並且加以上下各一個負渦度帶以觀察其周圍的不穩定。調整流切，觀察正壓不穩定於何處出現及強度。

首先，在原渦度帶上下各加以上下對稱的負渦度帶，分別為 $-1e-5/s$ 、 $-1.5e-5/s$ 、 $-2e-5/s$ 、 $-4e-5/s$ ，以製造不同程度的渦度梯度。接者使渦度帶為不對稱，下方渦度為 $-1e-5/s$ ，上方渦度帶則為下方 1 倍、1.5 倍、2 倍、4 倍。觀察對稱所得之結果是否吻合非對稱之結果。

此外，我們也計算正壓不穩定（詳見附錄六），即各網格點之

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left| \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right| dy \quad (\text{式 17})$$

觀察不穩定發生在何位置，以及在何種環境較易發生。

(七) 實驗 4-1、以淺水波模式模擬慣性不穩定

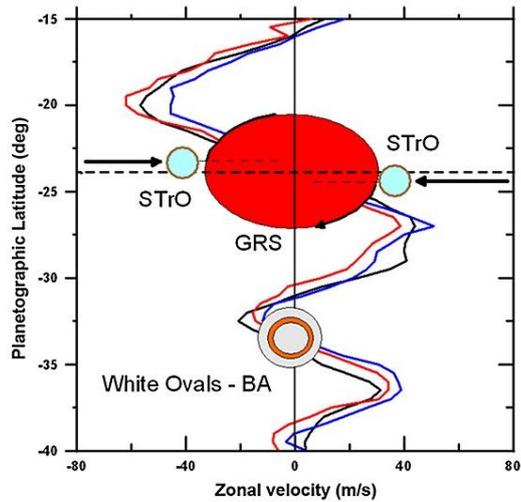
承實驗二以及實驗 3-2 之配置，除了正壓不穩定，我們也推測行星渦度亦為造成慣性不穩定之重要條件，為此改變背景渦度為木星緯度 30 度之行星渦度 $1.759e-4/s$ ，以及其 2 倍、3 倍、4 倍，觀察慣性不穩定出現之強度差異。我們也計算慣性不穩定（詳見附錄五）

$$f \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right) > 0 \quad (\text{式 16})$$

觀察不穩定發生在何位置，以及在何種環境較易發生。

(八) 實驗 4-2、模擬木星真實環境下之不穩定發生情形

我們參考 Lavega 等人對於大紅斑周圍風場之分析，推算出渦度以建立背景場，如下：



圖九、大紅斑周圍風場之分析 (Lavega 等人, 2001)

緯度 (單位: 南緯度)	風速 (以東為正, 單位: m/s)
15	+10
20	-55
27	+40
35	-20

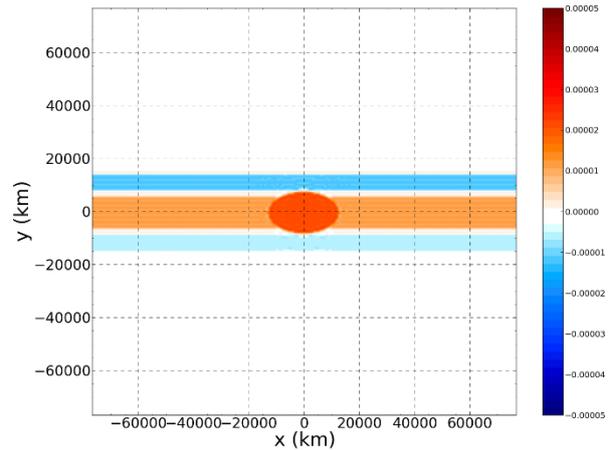
表二、由圖十取得之原始數據

風切帶 編號	橫跨緯度範圍	橫跨距離 (公里)	風速差 (以東為正, 單位: m/s)	渦度 (1/s)
上	15~20	6101.0	-65	-1.065e-5
中	20~27	8541.0	+95	1.112e-5
下	27~35	9761.5	-60	6.147e-6

表三、由表二之數據換算為風切帶之渦度

我們使用表三之數據，由於 Lavega 等人之觀測為實際大紅斑周圍之風速，含有大紅斑本身之效應，惟我們所需為未受大紅斑影響之風切帶參數，為此我們參考木星其他區域風切帶數值，使其南北對稱，並且為了避免風切帶邊界渦度梯度過大，設置無渦度之緩衝帶，建立背景場如下：

風切帶編號	風切帶南北寬度(度/公里)	風切帶渦度(1/s)
上	5 / 6100	-1.065e-5
緩衝帶	2 / 2440	0
中	10 / 12200	1.112e-5
緩衝帶	2 / 2440	0
下	5 / 6100	6.147e-6



左表四、實際建立之背景場

右圖十、初始場之渦度圖，單位(s^{-1})

我們在此初始場基礎下，改變背景之行星渦度，參考實際之大紅斑構造位於南緯 14 度至 30 度之間，以及考慮更大之行星自轉效應，也設計 2 倍、4 倍、8 倍之 30 度緯度行星渦度，共設計六種行星渦度場，詳如下表：

緯度及倍數 (單位；南緯度)	行星渦度 (單位：1/s)
14	0.888e-4
22	1.376e-4
30 (1 倍)	1.835e-4
30 (2 倍)	3.670e-4
30 (4 倍)	7.340e-4
30 (8 倍)	14.680e-4

表五、實驗設計之各緯度行星渦度

之後進行積分觀察大紅斑周圍之不穩定發生情形，比較不同行星渦度下之風切帶蜷曲程度。

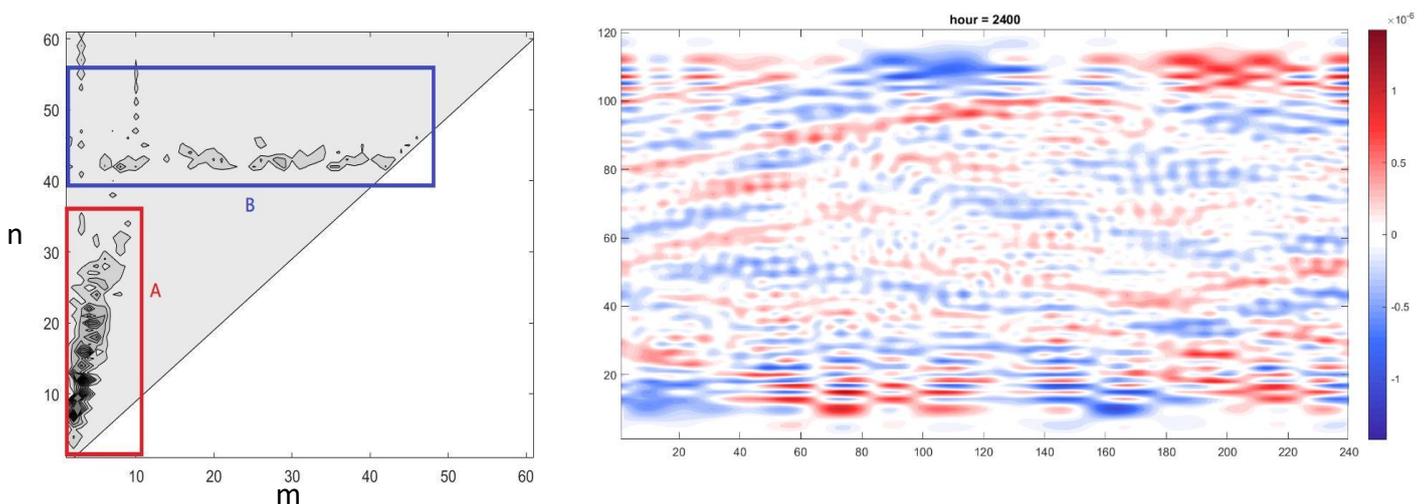
而整體實驗參數變因如下：

實驗參數變因	科氏參數	基本風切	北側風切	南側風切
對照組	$-1.835e-4/s$	$1e-5/s$	$-1e-5/s$	
			$-1.5e-5/s$	
			$-2e-5/s$	
			$-4e-5/s$	
實驗三	$-1.835e-4/s$	$1e-5/s$	$-1.5e-5/s$	
			$-2e-5/s$	$-1e-5/s$
			$-4e-5/s$	
實驗四	$-1.835e-3/s$	$1e-5/s$	$-1e-5/s$	
	$-1.835e-5/s$			
真實環境 14 度	$-0.888e-4/s$			
真實環境 22 度	$-1.376e-4/s$	$1.112e-5/s$	$-1.065e-5/s$	$-6.147e-6/s$
真實環境 30 度	$-1.835e-4/s$			
30 度 0.1 倍	$-1.835e-5/s$			

參、研究結果與討論

一、實驗 1、討論木星帶狀結構的形成機制

實驗 1 之地球環境積分 2400 小時之後結果如下：



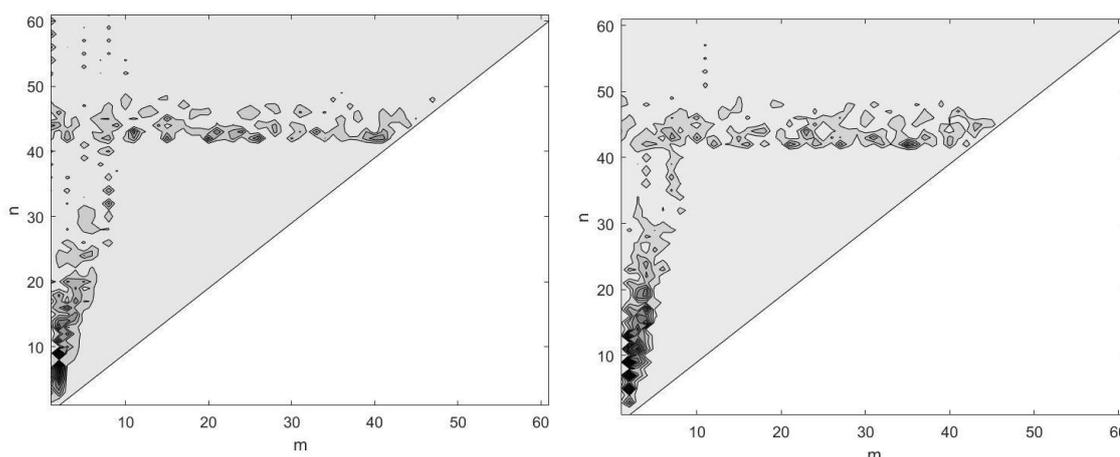
左圖十一：地球環境下 2400 小時波數波譜分析圖，m 為緯向波數，n 為總波數

右圖十二：地球環境下 2400 小時渦場圖，單位(s^{-1})

圖八中，m 為緯向波數，n 為總波數，可發現緯向幾乎無波數，歸納出隨

機渦旋在經歷能量串跌後特徵（波）會傾向於經向的情形，也就是 k （波數）變小，且沿經線移動所經歷的渦度差會較緯線來的多且大，此結論於圖七 A 區可見。B 區則為初始渦旋但未潰散。由此我們可以得出結論：由於地轉平衡使得渦旋扁平化，加上能量串跌令渦旋合併及摩擦，使得渦能減少但動能不變，產生較初始渦旋為弱的條帶狀構造。（但圖例顏色會依照當前平均渦度重新分配）。此外，我們也想比較不同 Rhine Scale，也就是不同自轉角速度及環境大小（星球半徑）對渦旋穩定維持情況之影響。

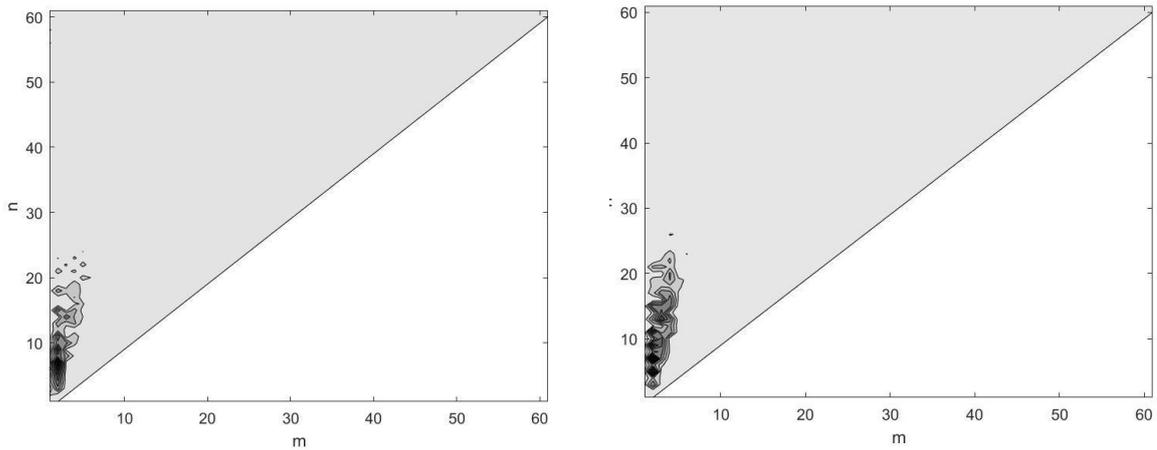
首先，由於木星自轉快的緣故，木星的波譜圖將會更趨於條帶狀（緯向波數小，橫軸 m 數值小），如下左圖。而地球自轉較慢，緯向波也遞減的較慢，如下右圖。（註：下為 1800 小時的波譜圖）



圖十三：1800 小時波譜分析圖， m 為緯向波數， n 為總波數，左木星，右地球

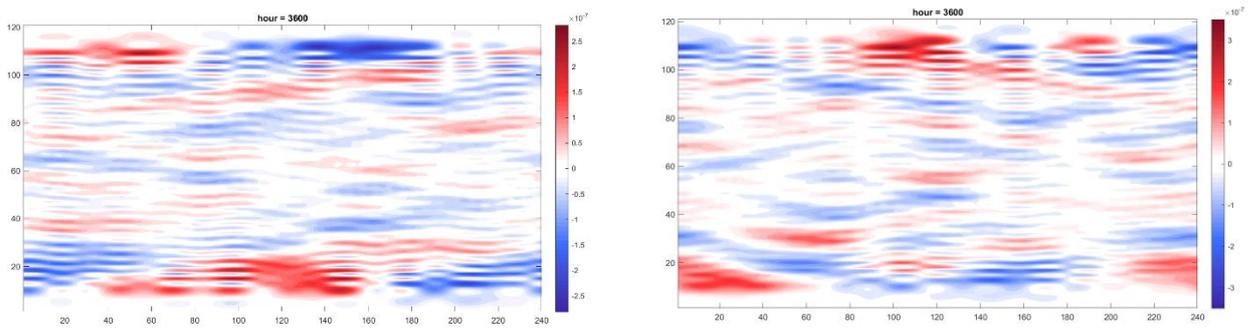
可以發現，左圖木星的左下特徵點較密集，右圖地球相對疏散，這也是木星強自轉所造成的地轉較快速的現象。

然而，事實上不管在什麼自轉環境，最終皆會達到條帶狀（緯向波數小）的平衡態，因此只要積分時間夠久，最終皆會達到平衡態。如下面兩個 3600 小時的結果（左木星，右地球）



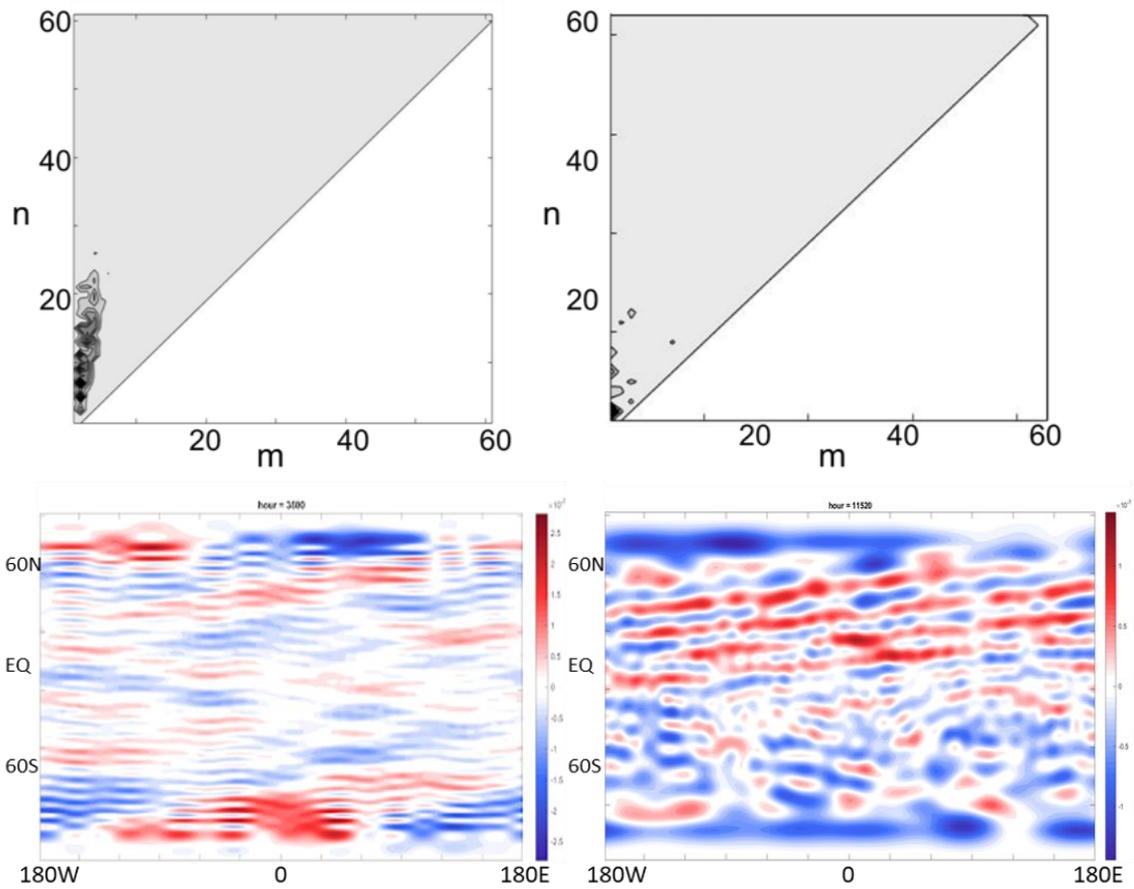
圖十四：3600 小時波譜分析圖， m 為緯向波數， n 為總波數，左木星，右地球

此外，觀察兩環境之 3600 小時的渦度圖，可發現木星條帶狀較多，如下左。而地球較少，條帶較不分明（容易混合成一大渦旋），如下右。



圖十五：3600 小時渦場圖，單位(s^{-1})，左為木星，右為地球

我們也計算條帶狀數量，可得不論在地球或木星皆是大約在二、三十左右（未完全平衡有誤差），和地球（10）或木星（28）的 Rhine Scale 求得數量相近。由於木星（ $\epsilon \approx 450$ ）相對於地球（ $\epsilon \approx 9$ ）擁有較大之 ϵ ，為此我們也欲探討在不同 ϵ 下，當行星大小以及羅士比變形半徑比例有所改變時，對於條帶狀之形成有什麼影響。結果如下：



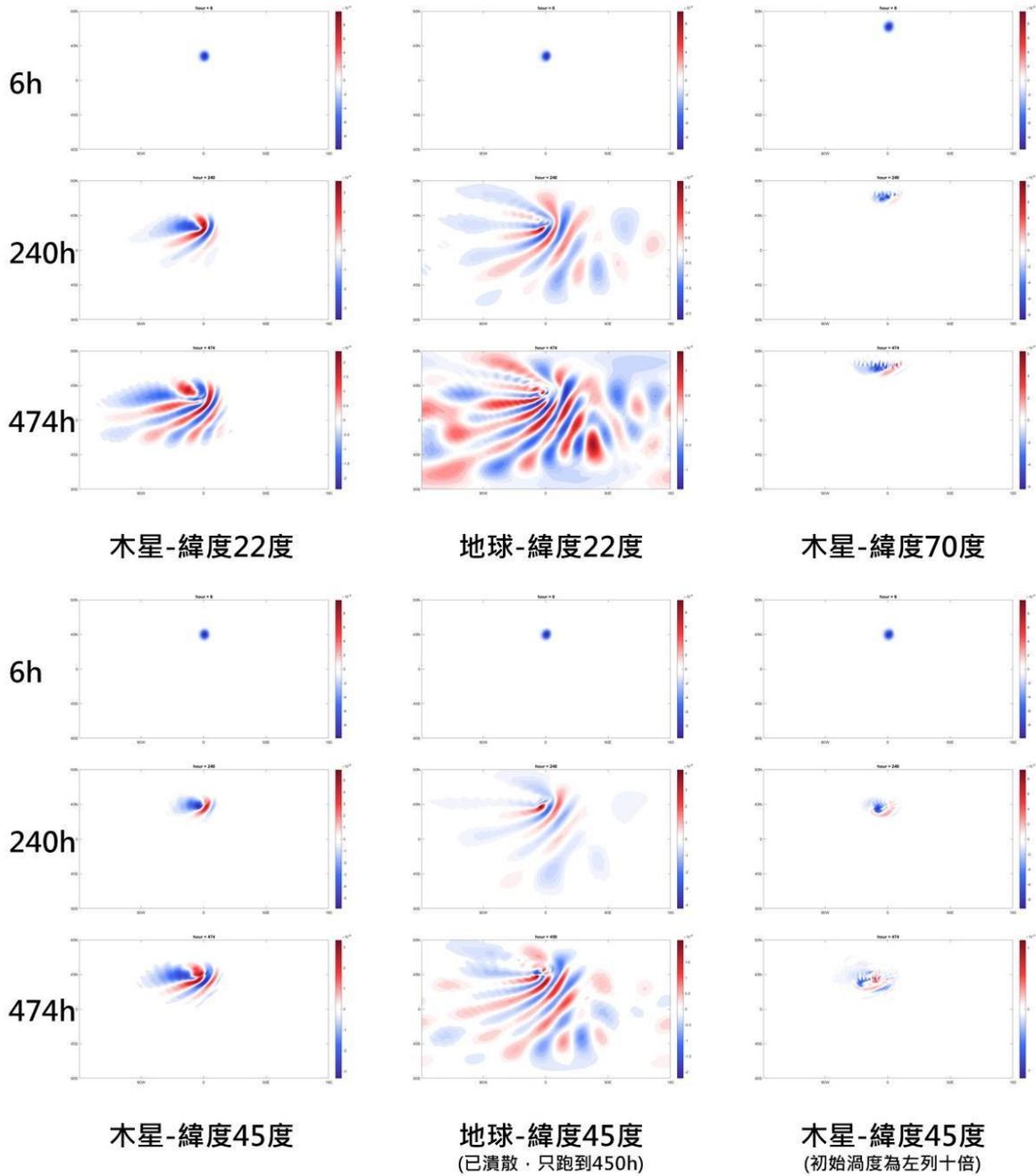
圖十六、積分結果之渦場圖以及波譜圖

左為 $\varepsilon = 0$ 積分 3600 小時，右為 $\varepsilon = 1000$ 積分 11520 小時

可發現 ε 越大時，模式須積分較久以達到平衡態，帶狀結構也較多。此也符合行星較小時，質量易擴散造成平衡加快；以及行星較大時，質量場容易累積在小範圍之模式預測。

二、實驗 2-1、觀察能使渦旋穩定維持的環境

使用準地轉淺水模式積分結果如下：



圖十七：在不同物理環境下的渦場變化，單位(s^{-1})

在做了幾組於木星或地球不同緯度及強度的渦流之後，我們發現木星的渦旋比較容易形成。比較相同環境場下不同緯度的渦旋發展，我們發現越高緯移動的越慢；而自轉角速度較小：地球的渦旋週期短，短時間內就會潰散；此外渦度越大以及赤道的渦旋也很快潰散。

可以發現地球的渦旋能量很快潰散，但木星可以維持較長時間。若用 Rossby Number 解釋：渦度大或科氏參數小均對應到較大的 R_o ，易潰散。此可

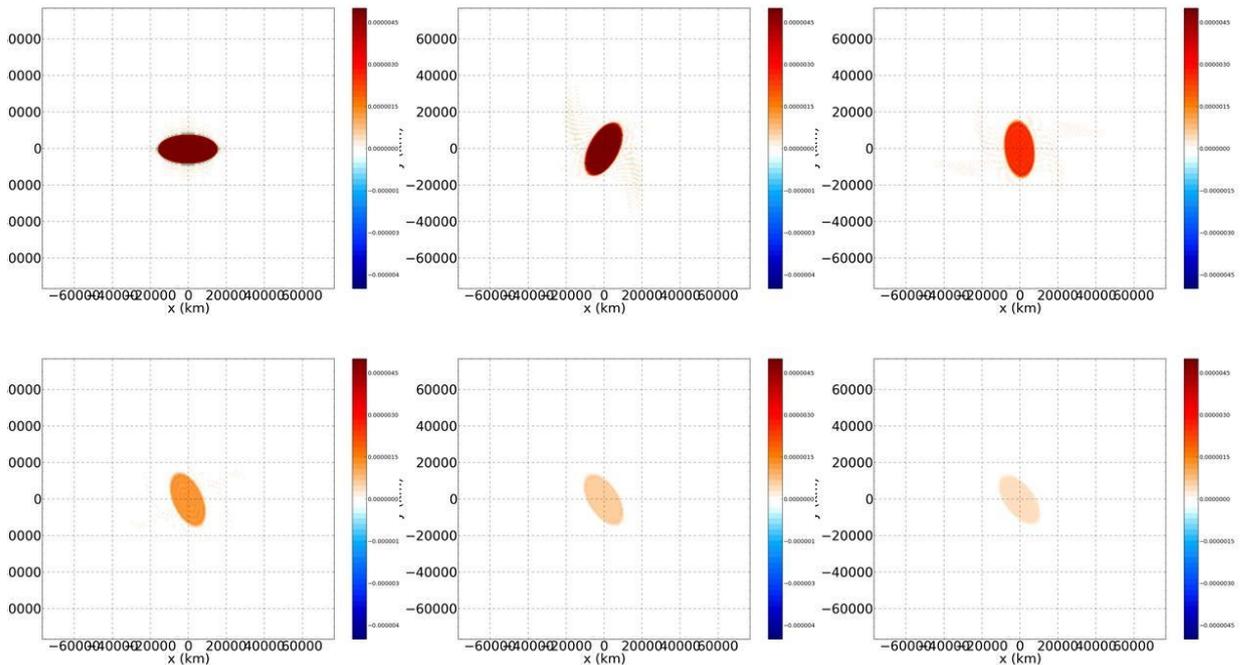
以解釋在自轉速度快的環境或渦旋較小時不易潰散。

三、實驗 2-2、設計初始及環境場，觀察大紅斑動態

使用淺水模式，渦流渦度為 $1e-5$ ，背景風切依序為 0m/s 、 80m/s 、 160m/s

(一) 無風切以模擬橢圓渦旋旋轉

結果如下，依順序為 0, 200, 400, 600, 800, 999 小時



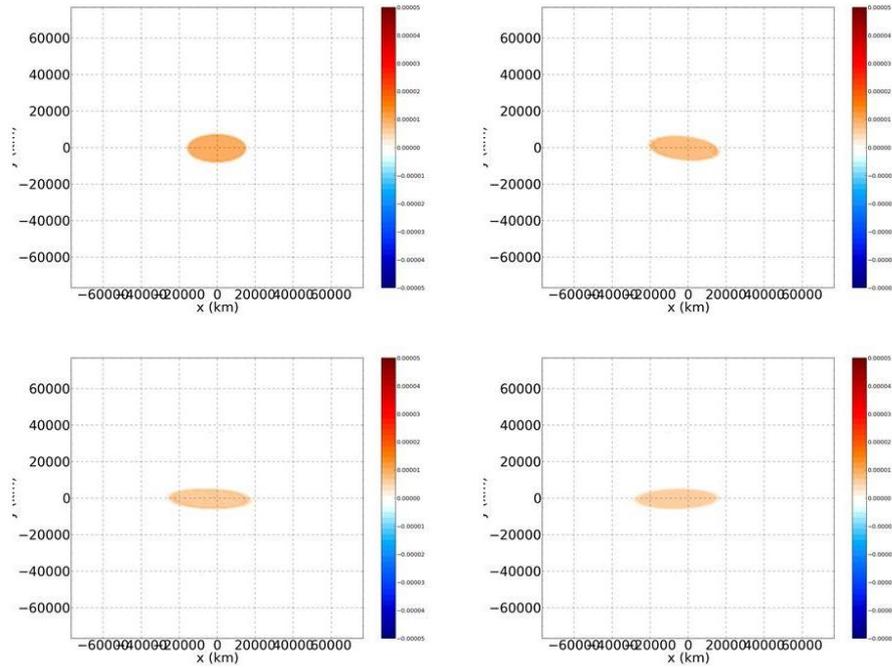
圖十八：無風切下以淺水波模式運算的渦場變化圖，單位(s^{-1})

可發現其形狀不變逆鐘向旋轉，但卻無顯著得出設計渦旋大小的理論旋轉週期為 785.4 小時旋轉，原因應為模式有擴散（衰減）項，由於 Kirchhoff Vortex 的旋轉周其和渦度相關，故應是由於渦度漸潰散的緣故使其越轉越慢，由圖中也可看出，渦旋顏色越來越淡。

(二) 有風切以模擬橢圓渦旋為正圓渦旋

在此部分我們設計風切帶為 80 m/s

結果如下，依順序為 0, 60, 120, 180 小時

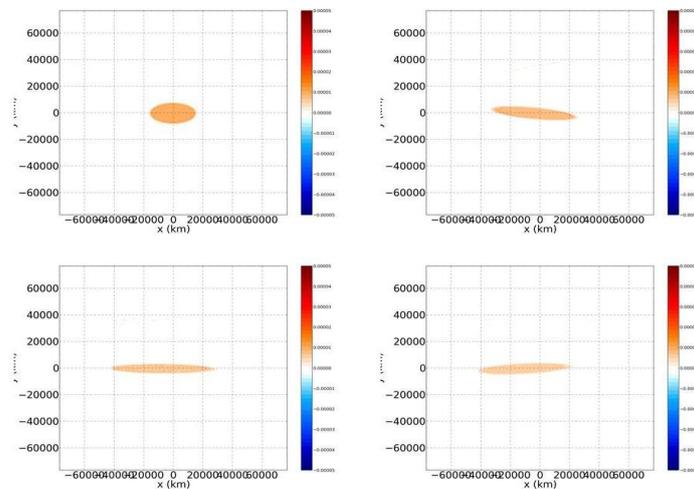


圖十九：風切 80m/s 下以淺水波模式運算的渦場變化圖，單位(s^{-1})
 可發現其只被風切拉長，軸不旋轉，風切帶的加速若合適，將使得渦旋邊
 界速度差異甚小，旋轉時維持渦度守恒，使得渦旋幾乎不旋轉。

(三) 使風切增為兩倍

在此部分我們設計風切帶為 160 m/s

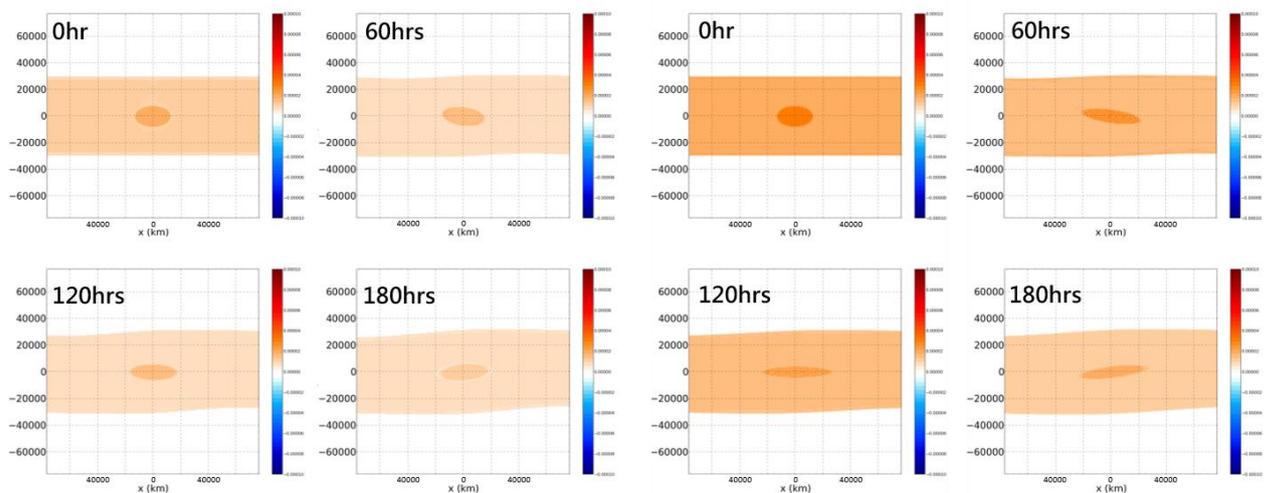
結果如下，依順序為 0, 60, 120, 180 小時



圖二十：風切 160 m/s 下以淺水波模式運算的渦場變化圖，單位(s^{-1})

可發現渦旋被拉的更長，但旋轉效應依然較小，由此可得知一結果：當有額外風切加速使得渦旋邊界速度改變，其旋轉效應將被減弱。此外，當渦旋本身渦度相對於風切造成的渦度過小，自身效應過低，整個系統會被風切主導，渦旋被拉長。

四、實驗 2-3、設計初始及環境場，觀察大紅斑動態，背景風切以渦度條替代

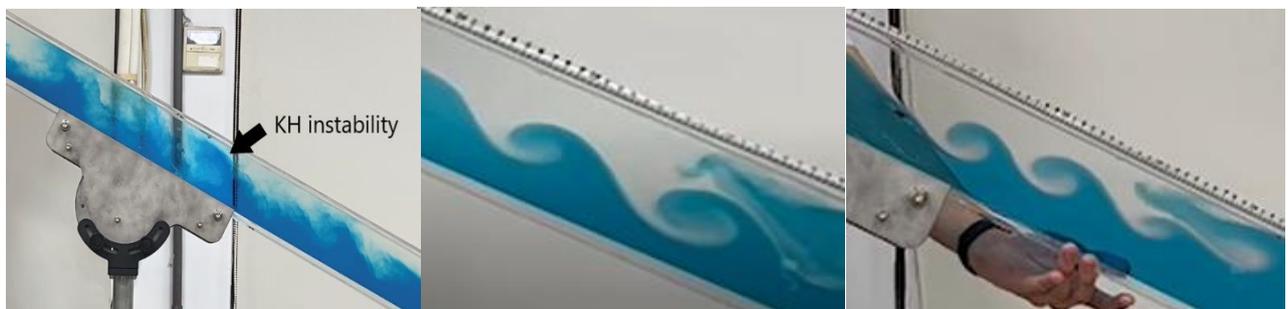


圖二十一、渦度帶實驗結果，左為 $1e-5/s$ ，右為 $2e-5/s$

由實驗結果可得知，當渦度帶為 $1e-5/s$ 時，渦旋不旋轉，和前一實驗所做之 $80m/s$ 風切相同。而 $2e-5/s$ 渦度帶也類似於風切 $160m/s$ 結果。因此之後實驗我們將以渦度帶取代風切進行實驗。

五、實驗 3-1、觀察能使 KH Instability 形成的環境

第一次實驗時染色水與食鹽之質量比例為 $100 : 1$ ，其結果如附圖



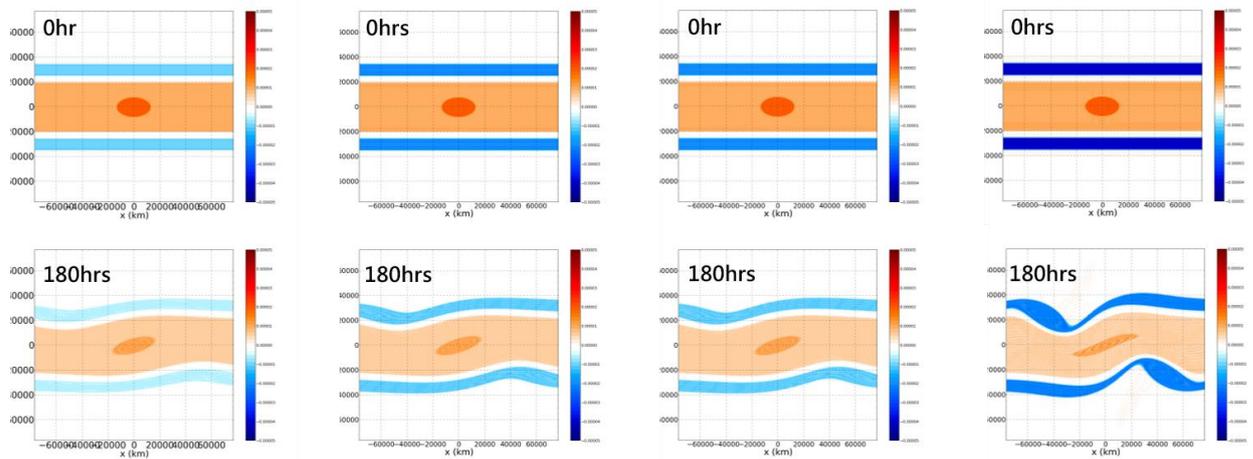
圖二十二：不穩定實驗結果圖

染色水與食鹽之質量比例由左至右依序為 100 : 1、100 : 2、100 : 4

發現藍色液體（異重流）密度越大，產生波動越明顯，此也與理察遜數理論相符。因為密度大受重力影響的速度較大進而造成下層流體具有足夠動能，並與上層澄清流體混合。

六、實驗 3-2、以淺水波模式模擬正壓不穩定

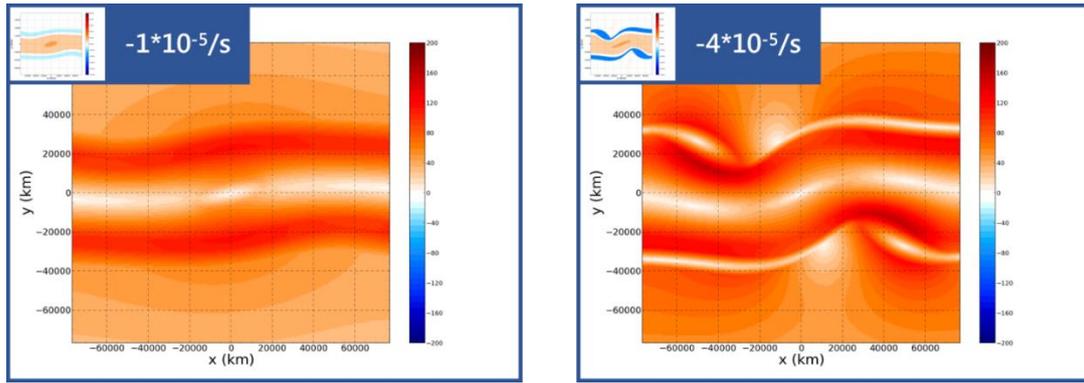
從實驗 1 我們能得知條帶狀構造之於行星為典型結構，而由實驗 2 也了解到渦旋之穩定形成環境，本部分將結合實驗 1 所得之背景場，由實驗 2 之以之穩定環境出發，了解渦度在受到渦旋之擾動後之不穩定發生情形，如下：



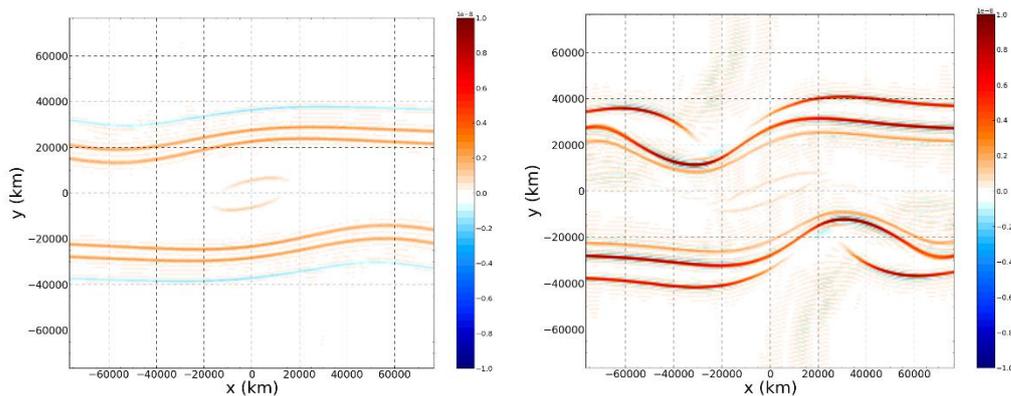
圖二十三、對稱風切積分結果渦場圖

由左至右依序為 $-1e-5/s$ 、 $-1.5e-5/s$ 、 $-2e-5/s$ 、 $-4e-5/s$ （藍色為負風切）

由結果可發現風切帶間渦度梯度越大產生波動（正壓不穩定）越大。渦度帶邊界渦度梯度越大，加以渦旋之初使擾動，符合正壓不穩定取決於渦度梯度之性質。



圖二十四、對稱風切積分 180 小時結果風場圖，藍框文字為初始負渦度條渦度
 由風場結果可發現初始渦度梯度越大，其結果風速極大值風速越趨近於赤道（ $y = 0$ 處），意及波動不穩定越大，此結果也可說明木星大紅斑西側擾動之向南發展情形（如圖二十六），換句話說，渦旋不只加速了風切帶風速，其擾動也使得風切帶產生波動。而由正壓不穩定第二條件（式 17，詳見附錄六）計算如下：



圖二十五、對稱風切積分 180 小時結果正壓不穩定趨勢圖

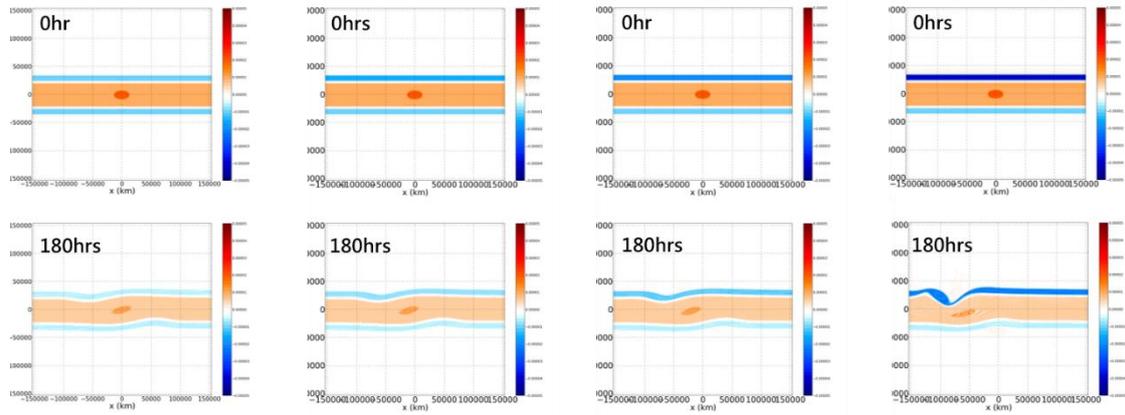
左初始負渦度帶為 $-1e-5/s$ ，右為 $-4e-5/s$

由上圖可見，右圖初始渦度梯度大，其渦度變化也較大，且同時符合處於絕對渦度變號之處，因而使得正壓不穩定較強。



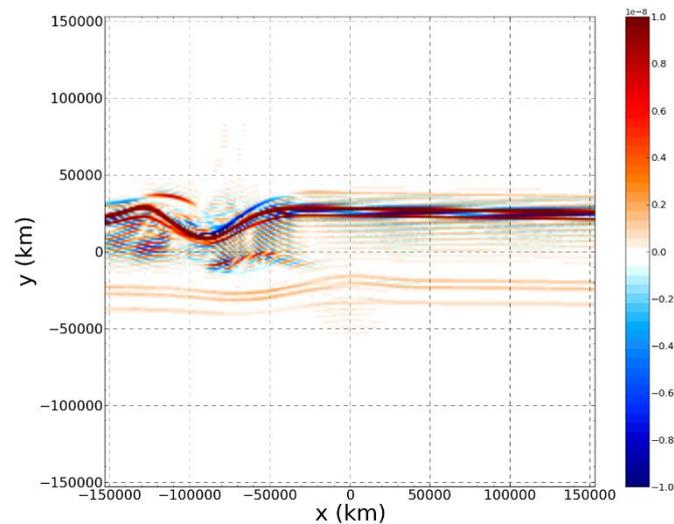
圖二十六、大紅斑西側不穩定向南發展

再來我們讓上下渦度帶為不對稱，類似於木星大紅斑周圍之情形：



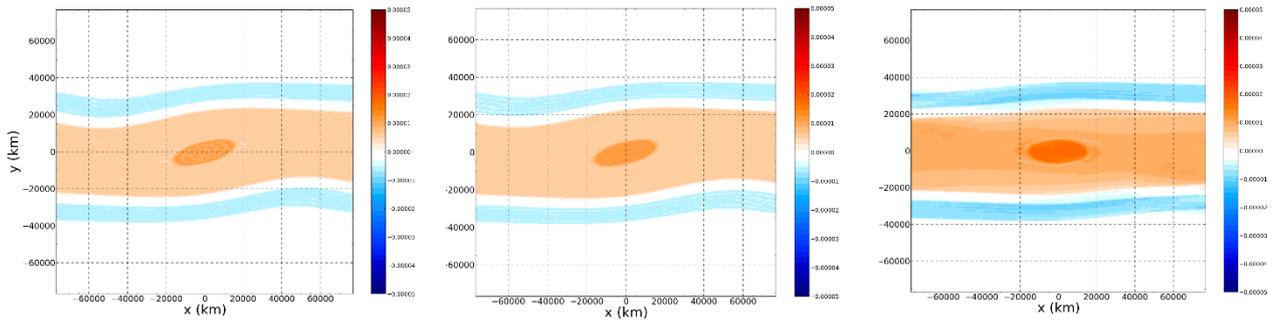
圖二十七、非對稱風切積分結果渦場圖

下方渦度為 $-1e-5/s$ ，上方渦度帶則為下方 1 倍、1.5 倍、2 倍、4 倍，由左至右和前一實驗結果相同，渦度梯度越大產生波動越大，由下圖正壓不穩定趨勢圖也可見在非對稱環境依然能發現此結果。



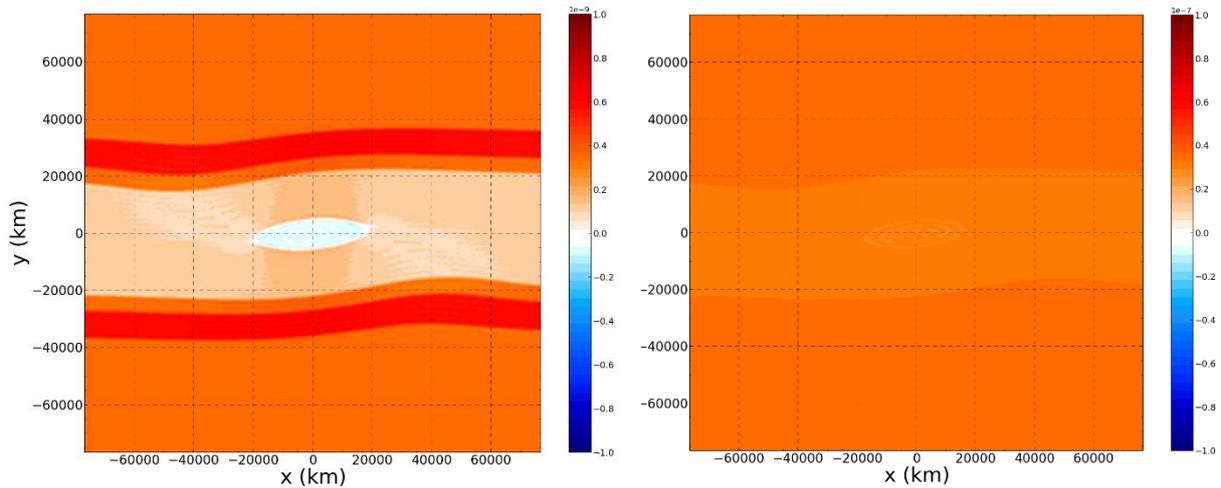
圖二十八、非對稱風切積分 180 小時，上方渦度帶為 $-4e-5/s$ 正壓不穩定趨勢圖而此也更接近木星之真實情況，也驗證大紅斑西北側較不穩定之事實。

七、實驗 4-1、以淺水波模式模擬慣性不穩定
進行積分 180 小時後結果如下：



圖二十九、不同行星渦度積分 180 小時結果渦場圖

由左至右為 0.1 倍、1 倍、10 倍木星緯度 30 度行星渦度，可發現行星渦度越大，渦旋本身越易維持，風切帶造成之不穩定也減弱。由下圖慣性不穩定趨勢圖也可發現此結果。



圖三十、0.1 倍、1 倍木星緯度 30 度行星渦度積分 120 小時慣性不穩定趨勢圖

由上左圖可見，渦旋處為藍色，意即為負值，此處發生慣性不穩定，而比對上右圖初始行星渦度較大處，發現皆為正值，意即環境為慣性穩定。計算羅士比數，發現 0.1 倍之實驗羅士比數略大於一，相對於 1 倍大了十倍，整體環境趨於不穩定。

$$Ro_{0.1x} = \frac{U}{f * L} \approx \frac{2 * 10^{-5}/s}{1.835 * 10^{-5}/s} \approx 1.090 \quad (\text{式 22})$$

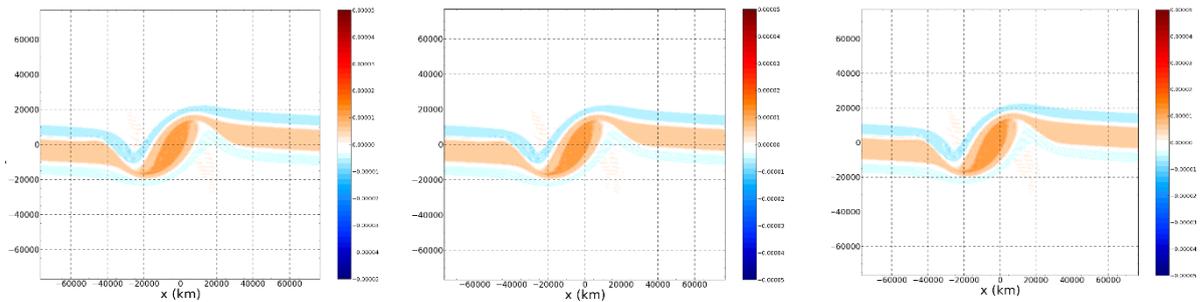
$$Ro_{1x} = \frac{U}{f * L} \approx \frac{2 * 10^{-5}/s}{1.835 * 10^{-4}/s} \approx 0.109 \quad (\text{式 23})$$

特別注意，由於我們的實驗為由初始場開始積分，中途無外力加入，故積分越

久整體渦度場會衰減變弱，造成環境漸趨穩定，因此我們使用 120 小時之積分結果做為比對。

八、實驗 4-2、模擬木星真實環境下之不穩定發生情形

木星南緯 14、22、30 度積分 240 小時結果如下：



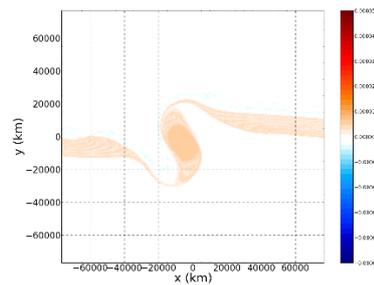
圖三十一、不同行星渦度下模擬真實環境積分 180 小時結果渦場圖

左：木星於南緯 14 度之行星渦度狀態下

中：木星於南緯 22 度之行星渦度狀態下

右：木星於南緯 30 度之行星渦度狀態下

可發現其結果差異不大，但仍有細微不易察覺之差異，我們認為這是由於我們模型設定所致：我們使用的是以初始場持續積分之模型，中間無持續之外力加入，導致大紅斑旋轉過度變形，風切帶也減弱，影響積分之結果，如下圖：



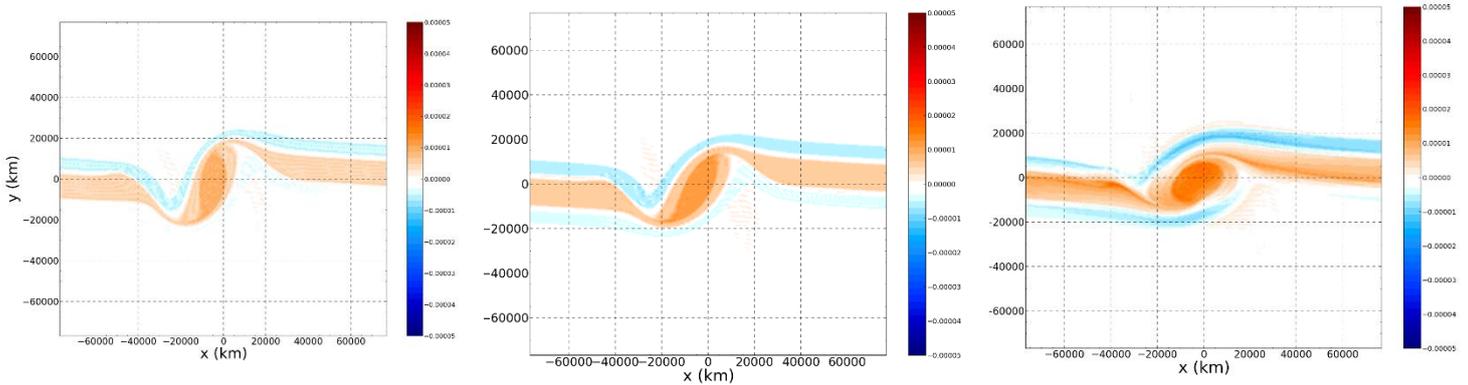
圖三十二、木星於南緯 14 度之行星渦度狀態下模擬真實環境

積分 400 小時結果渦場圖

然而實際上大紅斑周圍依然有持續的風輸入，但這無法在我們的模型中重現。

為此我們調大了行星渦度差異之倍數，原 14 和 30 度僅差約 2 倍左右，效果不

顯著，調大倍數後始可見其明顯差異之結果，如下圖。

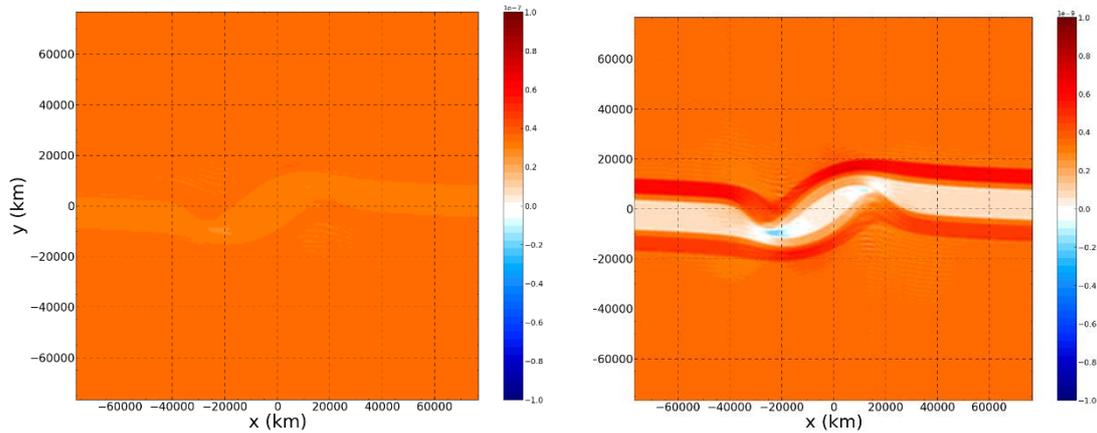


圖三十三、不同行星渦度下模擬真實環境積分 240 小時結果渦場圖

左：南緯 30 度 0.1 倍

中：南緯 30 度

右：南緯 30 度之 10 倍

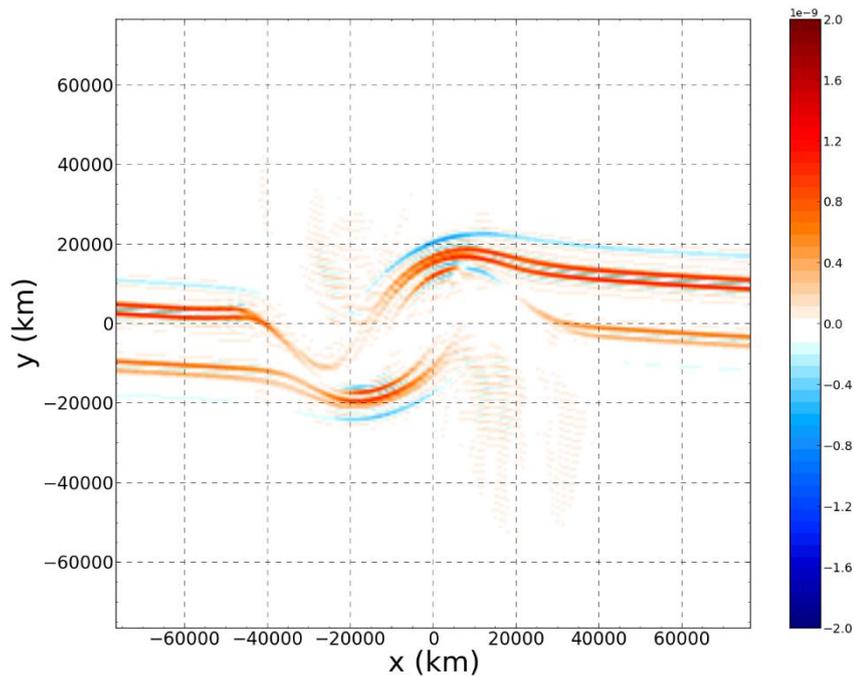


圖三十四、0.1、1 倍木星緯度 30 度行星渦度積分 120 小時慣性不穩定趨勢圖

可發現行星渦度越大，風切帶之不穩定較小，意即風切帶蜷縮程度較小，渦旋本身也較易維持，由圖三十四也可見，風切帶蜷縮處亦有負值產生，代表此處有慣性不穩定，行星渦度越小（低緯）， Ro 較大（類似式 22、23），慣性不穩定越大之推測，值得注意的是，由於北側初始渦度較大，慣性不穩定也易在北側風切加速處之西側發生。

同時也符合先前之行星渦度越大，慣性不穩定越不易發生；以及羅士培數越小，渦旋本身較易維持之猜測，並且同時適用於木星大紅斑周圍真實環境。

此外，在對真實環境之模擬下，由於北側渦度較大，亦有正壓不穩定較大之現象，如下圖



圖三十五、木星緯度 30 度行星渦度積分 180 小時正壓不穩定趨勢圖

肆、結論

首先，對木星大紅斑進行觀察，可發現其不穩定主要發生於大紅斑之西北象限處。由於此不穩定牽涉問題層面複雜，我們將問題拆成幾部分討論：一是由實驗 1 所代表之木星帶柱結構形成機制；二是由實驗 2 所代表之渦旋之穩定機制；有了渦旋穩定機制，我們方可討論由實驗 3 所代表之不穩定形成機制。

在實驗 1，由於前人所使用之模式為考慮高頻項之淺水模式（Shallow Water Model），故我們使用全球準地轉淺水模式（Global Quasi-Geostrophic Shallow Water Model）以進行只考慮低頻波之實驗。在實驗中，我們調整行星基本參數場，如行星渦度、行星大小等；進而表示為 Lamb's Parameter（ ϵ ，式 5）或羅士培變形半徑（ R_λ ，式 6）之形式以進行比較。在本實驗中，我們得出幾個結果：

- （一）在任何情形下，能量串跌（Energy Cascade）都將發生，渦旋將合併且朝向大尺度發展，不受初始環境場參數影響，僅有平衡時間長短差異。

(二) 行星渦度 f 大 (自轉快) 之實驗結果所具有帶狀結構較多, 此部分亦可由 Rhine Scale (式 13) 計算。套用到現實環境 (表一) 為木星自轉環境之帶狀結構多, 地球則較少。

(三) Lamb's Parameter (ϵ , 式 5) 較大時, 由於等效於 R_λ 較行星尺度小, 質量擴散相對較慢, 也被侷限在相對較小之空間, 故模式達平衡態需較長時間, 且條帶狀也較多較明顯, 此也類似於木星之環境 (表一); 相反地, ϵ 較小時, 質量相對擴散較快也較易擴散, 模式達平衡態也較快, 故條帶狀結構較少, 此則類似於地球環境。

由上所述我們得知, 木星表面密布之帶狀結構有其形成機制, 我們也將在背景場已知為條帶狀結構之風切帶之基礎下, 植入渦旋並且進行實驗 2。

在實驗 2, 首先利用探討全球準地轉淺水模式 (Global Quasi-Geostrophic Shallow Water Model) 探討了渦旋在何種環境下較易維持, 並且以羅士培數 (Rossby Number, Ro , 式 20) 解釋, 羅士培數大時渦旋易潰散, 羅士培數小時則易維持。接者, 為了探討諸如不穩定等小尺度波狀結構, 我們決定使用能涵蓋高頻及低頻波之淺水模式 (Shallow Water Modal) 進行實驗, 此部份我們分成兩種環境進行實驗: 一為風切為背景場, 風切不受渦旋影響; 二為風切為帶狀渦度場, 風切能與渦旋相互作用。透過兩種實驗能得出相似結論:

(一) 渦旋在沒有風切情形下, 根據克希霍夫渦旋理論 (Kirchhoff Vortex, 式 14), 由於背景風場以及渦旋之強渦度梯度邊界上的羅士培波傳遞, 橢圓狀渦旋將遵循特定角速度 (式 14) 旋轉。

(二) 橢圓狀渦旋加以特定風切 80m/s (式 21), 使得其短軸處風速能加速至和長軸處相等, 此時橢圓狀渦旋等效於正圓渦旋, 渦旋將不旋轉。

(三) 若風切超出了前述之特定風切 80m/s 或是風切過大, 渦旋將能為風切所拉伸。

由此實驗我們得出由於風切為上下對稱, 背景風切及渦度條可形成等效之風

切。此外，渦旋在特定風切（80m/s，式 21）下，渦旋將不旋轉且能夠穩定維持，並且加速風切帶之風速。而我也將以渦旋能穩定加速風切之條件為前提，在下述之實驗 3 討論不穩定之形成機制。

在實驗 3，我們首先使用了水工模型探討現實中之開爾文-亥姆霍茲不穩定性（Kelvin–Helmholtz instability，以下簡稱 KH 不穩定）是如何形成，而我們發現當實驗所調整流體密度越大，水槽傾斜時的速度也越快，其較大之動能也造成了不穩定之情形，此部分亦可以理查遜數（Richardson Number，式 15）解釋。接者，由力學能差異造成不穩定之觀點出發，我們使用淺水模式（Shallow Water Modal）進行實驗並且探討發生於垂直介面之大紅斑西北側不穩定是如何形成，我們在實驗二之渦度帶上下又各加入一條渦度帶，以模擬現實中大紅斑周圍具有數條風切帶之情形，並調整其渦度梯度，由此，我們得出以下若干點結論：

（一）渦度條間之渦度梯度越大，加上植入渦旋所帶來之擾動加速，正壓不穩定易在風速較大處發生（正渦情形下之西北或東南象限）。配合現實情形，大紅斑北側風速較強，其也等效於北側渦度梯度較大，而正壓不穩定在西北側較易發生。

（二）也可能是由於木星內部之熱力結構所造成之低緯風速較強，以及行星渦度在低緯時較大之原因，使大紅斑北側風速較強，易發生不穩定。

在實驗 4，我們一樣使用淺水模式（Shallow Water Modal），同時使得初始場渦度場固定，透過改變行星渦度，觀察慣性不穩定形成差異，發現行星渦度越大，不穩定越不易發生之事實。在實驗 4-2，我們同時也重建了木星大紅斑周圍之風切場，發現行星渦度之大小差異依然會影響慣性不穩定之形成，同時行星渦度越大，不穩定發生程度越小，渦旋越易維持。我們歸納出以下幾點：

（一）行星渦度越小，不穩定越易發生，符合大紅斑南北兩側低緯側（北側）不穩定較強烈之事實。

(二) 大紅斑橫跨緯度巨大，且發展甚久，不穩定在南北兩側行星渦度差異之情況下，產生不對稱之情形，為我們實驗使用科氏參數為常數之 f 平面，無法重現此推測，故使用不同背景行星渦度之實驗重現之。

綜上所述，我們認為木星大紅斑周圍不穩定容易在西北側發生，原因如下：

- (一) 大紅斑北側風速較大，渦度梯度較大，正壓不穩定易發生。
- (二) 大紅斑橫跨緯度大，南北兩側有行星渦度差異，低緯慣性不穩定較強。
- (三) 大紅斑為反氣旋，對風切帶有加速之效果，西北、東南兩側風速最強。

同時，大紅斑能在不穩定之情況下存在數百年，則有以下條件：

- (一) 木星之風切帶產生有其物理特性，能穩定存在。
- (二) 風切帶之加速使得大紅斑未如 Kirchhoff Vortex 所預測旋轉。
- (三) 木星本身自轉速度快，加上風切帶在低緯較強之作用，大紅斑能在低緯 22 度之情況下穩定存在。

伍、未來展望及應用

一、未來展望

- (一) 持續調整參數 ϵ ，觀察條狀的平衡態達成需要什麼條件
- (二) 考慮增加或改變風切位置及大小，觀察渦旋轉動
- (三) 進行水平的水工實驗或以淺水波模式模擬大紅斑西側的不穩定
- (四) 使用淺水模式或全球準地轉模式進行慣性不穩定實驗
- (五) 使用 β 平面進行實驗以模擬大紅斑南北兩側行星渦度差異之情形
- (六) 將研究擴展到例如海王星大暗斑 (GDS-89) 甚至是地球上之副極地低壓比較不同行星環境下之不穩定機制有何異同
- (七) 部分前人研究表明大紅斑之動力可能也和木星磁場有關，可在未來之模擬中考慮電磁場之效應

二、應用

本研究旨在探討大紅斑西北側擾動的成因，也探討了諸如風切及渦旋等其

他構造機制。首先，本研究驗證了帶狀結構形成之成因只須達成地轉平衡。此不僅加強了我們對於木星帶狀外表之了解，也可運用於地球了解劇烈渦旋對於行星風系之形成扮演何種條件。其二，本研究亦驗證了木星大紅斑能存在上百年之久，風切帶之加速也扮演關鍵角色，此有助於目前學界對於大紅斑之理解，亦可運用於探討不同行星之強烈渦旋（如海王星大暗斑）。其三，本研究成功的以正壓或慣性不穩定之理論展示大紅斑西北側擾動。而此不僅有助於加深學界對於不穩定機制之了解，也驗證了即使是在不同行星環境場，乃至於不同之熱力模型下，地球之動力理論依然適用。此外，系外行星之研究近年來蓬勃發展，人們亟欲了解系外行星之大氣進而達成尋找適居行星之目的。而本研究亦提供一個大氣科學應用於行星科學之例子，往後若有有心之士欲研究外行星之大氣，本研究亦可作為一參考。

陸、參考文獻

Bagenal, F., Dowling, T.E. and McKinnon, W.B. (2007). Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere. Cambridge.

Beatty, J.K. (2014). Jupiter's not-so-great red spot. *Sky & Telescope*.

<https://skvandtelescope.org/astromy-news/observing-news/jupiters-great-red-spot/>

Farias, C.A.F., Pakter, R. and Levin, Y. (2020). Linear and non-linear instabilities of Kirchhoff 's Elliptical Vortices. *ARXIV*.

<https://arxiv.org/pdf/2004.11492.pdf>

Gary, A.G. (2018). Computer simulations of Jupiter's deep internal dynamics help interpret what Juno sees.

Huang, P.-H. and Robinson, W.A. (1998). Two-Dimensional Turbulence and Persistent Zonal Jets in a Global Barotropic Model. *Journal of the Atmospheric*

Sciences, 611–632.

https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/55/4/1520-0469_1998_055_0611_tdtapz_2.0.co_2.xml?tab_body=pdf

Lotha, G. (2019). Great Red Spot. *Britannica*.

<https://www.britannica.com/place/Great-Red-Spot>

Moritz, H., Jonathan, A. and Johannes, W. (2005). Simulation of equatorial and high-latitude jets on Jupiter in a deep convection model. *Nature*

Nezlin, M. V., Snezhkin, E. N., Trubnikov, A. S. (1982). Kelvin-Helmholtz instability and the Jovian Great Red Spot.

Parisi, M. (2021). The depth of Jupiter's Great Red Spot constrained by Juno gravity overflights. *Science*

Peter, R., Neil, L., Daniel K. (2019). Baroclinic and barotropic instability in planetary atmospheres - energetics, equilibration and adjustment.

Philip, S. M., and Sushil, S. (2011). Jupiter's zonal winds: are they bands of homogenized potential vorticity organized as a monotonic staircase?

Sánchez, L. (2013). Colors of Jupiter's large anticyclones and the interaction of a Tropical Red Oval with the Great Red Spot in 2008.

Sánchez, L., Anguiano, A. (2021). Jupiter's Great Red Spot: Strong Interactions With Incoming Anticyclones in 2019

Yang, S. (2004). Researcher predicts global climate change on Jupiter as giant planet's spots disappear. *UC Berkley News*.

[4.21.2004 - Researcher predicts global climate change on Jupiter \(berkeley.edu\)](#)

附錄

一、淺水模式之細節

淺水模式之三方向動量方程如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + v \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y} + v \nabla^2 v \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} &= v \nabla^2 h\end{aligned}$$

其中， u 為緯向風速， v 為經向風速， f 為科氏參數， g 為重力常數， ∇^2 為拉普拉斯算子， h 為水深。

此為速度變化、非線性項（平流項）、科氏力項和壓力梯度力項及擴散項平衡，透過此三式，已知初始 u, v, ζ ，可透過上式求得下個時步的 u, v （因為其為微分形式，對其積分可得下一時步的結果）

實際運算詳細如下，下式為預測方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} - v \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y}$$

透過代入已知 u, v, ζ 計算右式，可求得 ζ 渦度的時變率

更新 ζ ，代入下式（診斷方程式），求 ψ

$$\zeta = \nabla^2 \psi$$

其中

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

透過以上兩式可求得 (u, v) ，如此重複。統整一次，利用求得出的 u, v, ζ ，輸入初始場可求得下個時步之結果 ζ_1 ，再透過診斷方程式求得 (u_1, v_1)

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \Delta t \cdot P(\zeta_0, u_0, v_0)$$

同理，給 n 時步的環境場。可透過以下遞迴式積分求得 $n + 1$ 時步的結果

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta t \cdot P(\zeta_n, u_n, v_n) \quad (\text{式 8})$$

二、準地轉淺水模式之細節

準地轉淺水模式之三方向動量方程如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial (h - \eta)}{\partial x} + v \frac{\partial (h - \eta)}{\partial y} + (H + h - \eta) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -g \frac{\partial h}{\partial y}\end{aligned}$$

其中 H 為平均水深， h 為水深， η 為地形。詳細運算過程如下：

類似淺水波模式，準地轉模式也須有初始的 (u, v, q) ， q 為位渦

計算預測方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} = J(\psi, q) = -u_g \frac{\partial q}{\partial x} - v_g \frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{式 18})$$

接著更新 q ，以其解診斷方程式

$$q = L(\psi) = \nabla^2 \psi - \alpha \psi \quad (\text{式 19})$$

得出 ψ 後，計算 (u, v) ，如下式

$$\begin{aligned}u_g &= \frac{-1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_g &= \frac{-1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

其中，中式為地轉平衡項，解出 (u, v) 後便有下一時步的 (u, v, q) ，如此重複。

故凡有初始之渦度場，便可得到渦度場未來的演化過程凡有初始之渦度場，便

可得到渦度場未來的演化過程。

三、能量串跌之推導

在數值模式中，最基本能夠拿來被運算的是二維平流方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \quad (\text{式 1})$$

其中， ζ 為渦度， u 為緯向風速， v 為經向風速

乘上 ζ ，有

$$\zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0$$

其中 $\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ 為渦能時變率，令

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

乘上 ζ ，有

$$-\zeta \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

對原二維平流方程式做積分，有

$$\int \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$$

由於能量守恆，因此有

$$\int \zeta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = 0$$

在特定範圍內，如數值模式的網格點，若與外界不發生能量交換，則有渦能及動能守恆。且根據上式，有

$$\zeta^2 \sim \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad K \sim \frac{\partial \psi^2}{\partial x}$$

ζ^2 為渦能， K 為動能，其中

$$K \sim \frac{\partial \psi^2}{\partial x} = ik \widehat{\varphi}_k e^{ikx}$$

範圍內總動能為（向量總和）

$$\sum k^2 \widehat{\varphi}_k^2$$

而有

$$\zeta^2 \sim \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

則

$$\zeta^2 = (-k^2 \widehat{\varphi}_k^2)^2 = \sum k^4 \widehat{\varphi}_k^2$$

令動能

$$\sum k^2 \widehat{\varphi}_k^2 = \sum K_K = K$$

則

$$\zeta^2 = \underline{k}^2 \sum K_K = \underline{k}^2 K$$

此外在層化大氣中，考慮黏滯力效應對總能量的摩擦，令此效應為 $-Z$ ，因為

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

所以有

$$-Z = \mu^2 (\nabla \zeta)^2$$

對時間微分，其中 P 為渦度梯度平方

$$\frac{dZ}{dt} = -2\mu P \quad (\text{式 2})$$

此時動能時變率為

$$\frac{dK}{dt} = -2\mu Z \quad (\text{式 3})$$

其中 P 為渦度梯度平方， Z 為渦能， K 為動能

其中， μ 趨近於 0 但仍需考慮，渦能時變率顯然較動能時變率大，可得出：渦能漸減少，動能近乎守恆的結論，此即選擇性衰變 (Selective Decay)。此時有

$$\zeta^2 = \underline{k}^2 \sum K_K = \underline{k}^2 K$$

可以得到結論：當總渦能受到黏滯力影響減少，則 k (波數) 減少，波長伸長，加上經向 (南北向) 有 β 效應，渦旋不易朝經向發展。

四、開爾文-亥姆霍茲不穩定性 (Kelvin-Helmholtz instability) 之推導

假定大氣中有兩流體分層，且處於穩定狀態，令他們的速度為 U_1 及 U_2

使兩氣塊位置交換，則重心升高，位能增加

$$\Delta\rho gh = g\delta\rho\delta z$$

令速度增加或減少了

$$\Delta = U_1 - U_2 = dz \frac{du}{dz}$$

而假設速度呈線性變化

$$2\Delta = U_2 - U_1$$

前後動能相減，得

$$(U_1 - U_2)\Delta + \Delta^2$$

而

$$\Delta = U_1 - U_2 = dz \frac{du}{dz} = -\frac{du}{2}$$

代入動能相減式，假設動能完全交換，得動能變化量

$$du\left(-\frac{du}{2}\right) + \frac{(du)^2}{4} = K_{max} = -\frac{(du)^2}{4}$$

當總能量增加，即動能>位能變化量時，能量增加趨於不穩定

$$-\frac{(du)^2}{4} > g\delta\rho\delta z$$

由此，當

$$R_i = \frac{-\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz}}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{\text{浮力}}{\text{慣性力}} \quad (\text{式 15})$$

浮力除以慣性力比值小於 1/4 時，狀態不穩定，發生混合，產生 KH 波。

五、慣性不穩定之推導

一氣塊由速度為 u 的風帶移動到 $u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y$

那麼此氣塊受到的科氏力為

$$f(u + f \delta y)$$

而在此處風帶的壓力梯度力為(以科氏力反推，假設風帶已地轉)

$$f(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y)$$

和理查遜數相似的概念，科氏力大於壓力梯度力時，氣塊才有和壓力梯度力反向的力可返回原處，即動量變化小於科氏力的動量變化

$$f(u + f \delta y) > f(u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y)$$

化簡得

$$\frac{\partial u}{\partial y} > f_0$$

則此時環境穩定，而上式滿足於 $f_0 > 0$ 時，慣性不穩定易發生。

為此重新整理得當

$$f \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right) < 0 \quad (\text{式 16})$$

時，慣性不穩定易發生。

六、正壓不穩定之推導

首先，我們假設擾動波動之解為

$$\Psi = \Phi(\mathbf{y}, z)e^{i(kx - \omega t)} = \Phi(\mathbf{y}, z)e^{ik(x - ct)}$$

其中

$$c = \frac{\omega}{k}$$

若 c 為實數，波的振幅隨時間無變化，流場為穩定。

若 c 為複數，波的振幅則為時間的函數，波隨時間增長，流場為不穩定。同時，

c 的實部決定了波在 x 方向的相速；虛部則決定波隨時間的增長程度。

而我們定義 c 為

$$c = c_r + ic_i$$

其中 c_r 為 c 之實部， c_i 為 c 之虛部。

接著我們開始推導正壓不穩定：

首先引入正壓水平無輻散渦度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (f + \zeta) = 0$$

以及使用小擾動線性化方程

$$u = \bar{u}(y) + u'(x, y, t), \quad v = v'(x, y, t)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' = -\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$$

代入正壓水平無輻散渦度方程得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) = 0$$

整理為

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + v' \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) = 0$$

其中

$$\beta = \frac{\partial}{\partial y} \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

接者假設整體流場無輻散

$$u' = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \Psi + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

假設在剛體邊界 y_1 、 y_2 上無擾動

$$u' = 0, v' = 0, \Psi = 0$$

代入

$$\Psi = \Phi(y, z) e^{ik(x-ct)}$$

得振幅方程

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - k^2 \Phi \right) + \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \Phi = 0$$

假設

$$(\bar{u} - c) \neq 0$$

得

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \left(k^2 - \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c} \right) \Phi = 0$$

假設

$$\Phi = \Phi_r + i\Phi_i$$

定義 Φ 的共軛根為

$$\bar{\Phi} = \Phi_r + i\Phi_i$$

此時我們有

$$\begin{aligned} \Phi \bar{\Phi} &= |\Phi|^2 = \Phi_r^2 + \Phi_i^2 \\ \bar{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dy^2} &= \frac{d}{dy} \left(\bar{\Phi} \frac{d\Phi}{dy} \right) - \frac{d\bar{\Phi}}{dy} \frac{d\Phi}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\bar{\Phi} \frac{d\Phi}{dy} \right) - \left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 \end{aligned}$$

得原式為，並且對其做積分

$$\frac{d}{dy} \left(\bar{\Phi} \frac{d\Phi}{dy} \right) - \left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 - k^2 |\Phi|^2 + \left(\frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{\bar{u} - c} \right) |\Phi|^2 = 0$$

由於在邊界 y_1 、 y_2 上無擾動

$$\mathbf{u}' = \mathbf{0}, \mathbf{v}' = \mathbf{0}, \Psi = 0$$

因此

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy} \left(\bar{\Phi} \frac{d\Phi}{dy} \right) dy = 0$$

故僅討論第 2 至第 4 項

為了將根的實部和虛部分開討論，有

$$\frac{1}{\bar{u} - c} = \frac{\bar{u} - c_r + ic_i}{(\bar{u} - c_r + ic_i)(\bar{u} - c_r - ic_i)} = \frac{\bar{u} - c_r + ic_i}{|\bar{u} - c|^2} = \frac{\bar{u} - c_r}{|\bar{u} - c|^2} + i \frac{c_i}{|\bar{u} - c|^2}$$

得原式分為實部

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r) \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)}{|\bar{u} - c|^2} |\Phi|^2 dy$$

以及虛部

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}}{|\bar{u} - c|^2} |\Phi|^2 dy = 0$$

接下來討論正壓不穩定第一條件，由虛部出發

$$|\bar{u} - c|^2 > 0, |\Phi|^2 > 0$$

可知

$$\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = \frac{d}{dy} \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

值得注意的是 $\frac{d}{dy} \left(f - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ 為絕對渦度在 y 方向的變化

而正壓不穩定第一條件為

$$\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} = 0$$

意即絕對渦度 $f - \frac{\partial u}{\partial y}$ 變號之處符合正壓不穩定第一條件。

接著為正壓不穩定第二條件，相同地，由於

$$|\bar{u} - c|^2 > 0, |\Phi|^2 > 0$$

由原式

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\left| \frac{d\Phi}{dy} \right|^2 + k^2 |\Phi|^2 \right) dy = \int_{y_1}^{y_2} \frac{(\bar{u} - c_r) \left(\beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right)}{|\bar{u} - c|^2} |\Phi|^2 dy$$

得正壓不穩定第二條件為

$$\int_{y_1}^{y_2} \bar{u} \left| \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right| dy > 0 \quad (\text{式 17})$$

當環境同時滿足正壓不穩定第一及第二條件時，大氣呈現正壓不穩定。

注意，正壓不穩定和慣性不穩定差別在於前者 and β 效應 (f 的變化) 相關，後者則和 f 相關，

【評語】 180005

本研究利用準地轉模式與淺水波模式模擬木星條帶狀結構與大紅斑等無數渦旋的形成機制。利用數值模式模擬與水工實驗討論影響漩渦系統穩定度的主要因素。確認風切與科氏力對條帶狀結構與渦旋旋轉特性之影響。作品完整，唯對所應用之許多進階的大氣旋轉動力與大氣數值模式，以及正壓不穩定、慣性不穩定，甚至許多大氣動力相關專有名詞宜加強物理意義之了解。對所用模式之適用條件與使用與解釋上之限制，也要了解！