

2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160031
參展科別 物理與天文學
作品名稱 杯中失重液體碰撞地板產生之反衝噴流砲
得獎獎項

就讀學校 國立臺南女子高級中學
指導教師 楊才民
作者姓名 江丞琳、李昀臻

關鍵詞 微重力、表面張力、噴流

作者簡介



我們是台南女中的江丞琳和李昀臻，目前就讀台南女中數資班。在研究的過程中，我們在物理上得到了很大的進步，同時也學會了與作品相關的理論知識以及實驗技巧。做科展使我們進步了很多，感謝楊才民老師的指導，以及提供我們資源及給予協助的教授。

摘要

水杯落下，撞擊地面後可產生高速累積噴流。分三階段：失重落下、撞擊、累積噴流。

微重力下，水坑深度 d 隨落下時間 t 漸增，達上限後不再增加 $d=d_{\max}(1-e^{-\delta t})$ 。親水性接觸面使水面形成球狀水坑。接觸角越大則水坑深度上限 d_{\max} 越大，最大水坑為半球形，水坑抬升速度係數 δ 與表面張力及黏滯力比值有正相關。

撞擊時巨大慣性加速度 $G=131g$ 使水坑崩塌並彙集，累積效應放大原速度，產生高速累積噴流 $V_{\text{jet}}^2=Kv^2$ 。累積係數 K 與水坑深度 d 正相關，半球狀水坑 $K=18$ 。 h_0 不高時，水坑未成型， K 值小，累積效應小；水坑成型後， K 值達極大， V_{jet}^2 與 h_0 成固定最大斜率關係。

噴流向上為拋體運動，最大高度 $H_{\max}=Kh_0$ 。

圓柱 PET 水瓶，直徑 5.5 公分，水量 60ml-100ml，由 25 公分落下，形成近 3 公分水坑，撞擊產生 10m/s 累積噴流。水量不足 30ml，因無法形成水坑且液體與杯底摩擦，無累積噴流。30ml 至 100ml 無明顯差異，故 30ml 能量轉換效率最佳。

Abstract

When a cup falls and hits the ground, it can create a high-speed cumulative jet. It is divided into three stages: microgravity free-fall, impact, and cumulative jet.

In microgravity, the depth of the water crater d gradually increases with the time of falling t , and after reaching the maximum limit, it no longer increases $d=d_{\max}(1-e^{-\delta t})$. The hydrophilic contact surface causes the water surface to form a spherical water crater. The larger the contact angle, the deeper the maximum depth d_{\max} of the water crater, with the maximum water crater being hemispherical. The lift velocity coefficient δ is positively related to the ratio of surface tension and viscosity.

During the impact, the huge inertial acceleration $G=131g$ causes the water crater to collapse and gather, and the cumulative effect amplifies the original speed to produce a high-speed cumulative jet $V_{\text{jet}}^2=Kv^2$. The cumulative coefficient K is positively related to the depth of the water crater d , for the hemispherical water crater $K=18$. When h_0 is not high, the water crater is not formed, the K value is small, and the cumulative effect is small; after the water crater is formed, the K value reaches the maximum, and V_{jet}^2 has a fixed maximum slope relationship with h_0 .

The jet flows upward as a projectile motion, and the maximum height $H_{\max}=Kh_0$.

A cylindrical PET bottle, with a diameter of 5.5 cm and water volume of 60 ml-100 ml, falls from 25 cm height, forming a water crater of almost 3 cm depth, and produces a 10 m/s cumulative jet upon impact. When the water volume is less than 30 ml, it cannot form a water crater and the liquid rubs against the bottom of the cup, so there is no cumulative jet. There is no significant difference between 30 ml to 100 ml, so 30 ml has the best energy conversion efficiency.

壹、研究動機

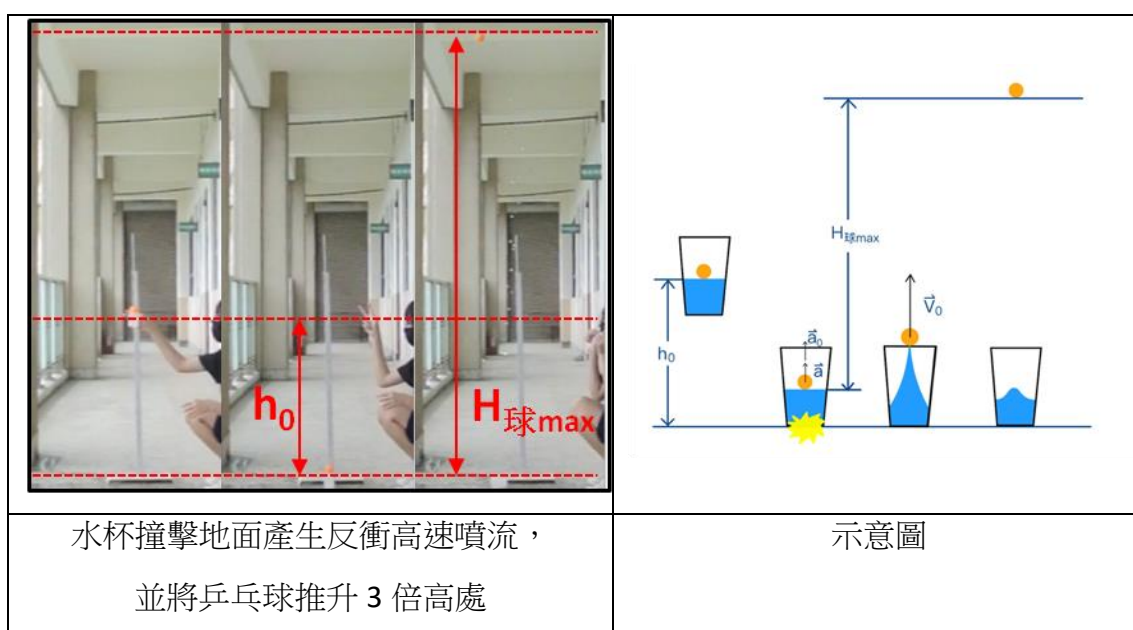
老師於動量守恆單元中演示實驗「垂直衝突球」，將乒乓球疊在網球上方，自由落下，撞擊地面後乒乓球會反跳，甚至超過原先高度許多。

我們發現若將乒乓球裝在水杯中自由落下，水杯撞擊地面後會產生反衝高速噴流，並將乒乓球推升 3 倍高度。

欲研究微重力狀態，容器中流體行為，及撞擊後噴流生成機制。討論杯子大小及材質、溶液性質及體積、落下高度，如何影響失重流體的行為，分析噴流的形狀、速率及高度。並找出造成速度放大的效應，討論能量轉換機制及轉換效率。利用此反衝噴流，製作高能量轉換效率的反衝噴流砲。

結果可應用至航太飛行器燃料槽的設計。微重力狀態下，燃料流體的流動性質與地表不同，燃料槽需特別設計，使飛行器在微重力狀態與瞬間撞擊時仍能穩定供應液態燃料，方能保持引擎燃燒效率並穩定動力。

NASA 曾在太空站進行微重力狀態下燃料槽中的燃料流體動力研究，但較缺乏受瞬間衝擊後的研究樣本。本實驗結果應可與之互相參照或補充。







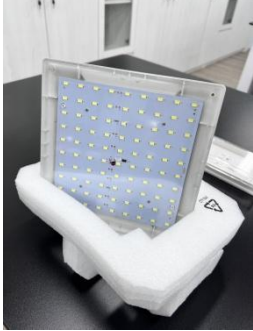



貳、研究目的

一、透過實驗、流體力學建模，研究以下變因之間的關係

- (1) 噴流的形成關鍵機制-微重力狀態下形成凹陷水坑。
 1. 杯子接觸面性質如何影響水坑深度。
 2. 落下時間或高度如何影響水坑深度。
 3. 溶液性質如何影響水坑深度。
- (2) 撞擊後形成的噴流分析。
 1. 水坑深度如何影響噴流速率放大倍率或累積係數。
 2. 初始高度如何影響累積噴流速度及最大高度。
- (3) 水量的效應。
 1. 水量如何影響水坑深度及反衝噴流速度。
 2. 尋找最佳能量轉換效率的水量。

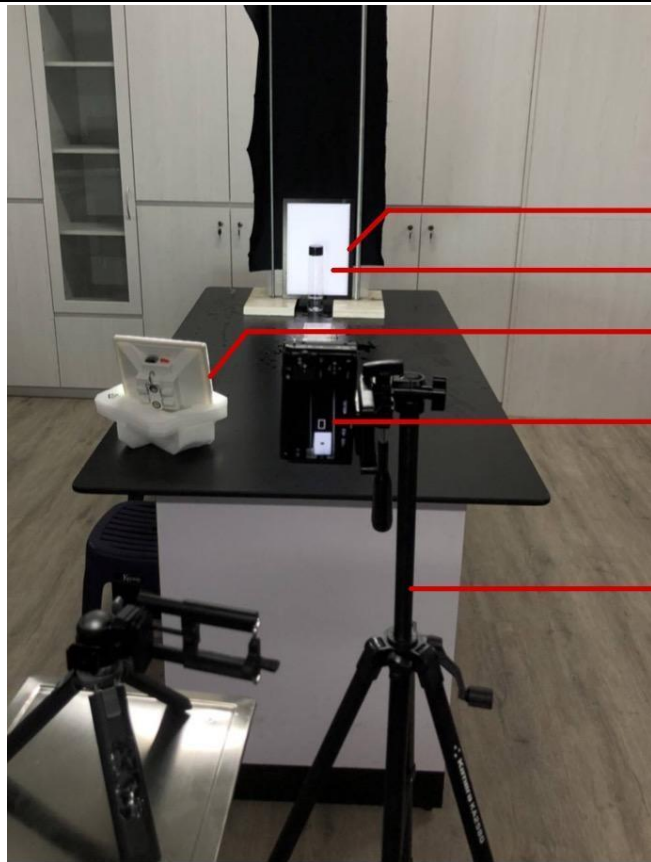
參、研究設備及器材

一、圖示與說明

<p>不同規格的 塑膠杯、 寶特瓶、 玻璃杯、 塗蠟玻璃杯</p>	<p>高速攝影機 (400FPS)及腳架</p>	<p>手機及腳架 (240FPS)</p>	<p>米尺(比例尺)</p>
			
<p>高亮度 LED 燈</p>	<p>螺絲、螺帽</p>	<p>背光描圖板</p>	<p>繩子及強力磁鐵</p>
			

二、 器材架設示意圖

全視圖



比例尺

描圖背光板

高亮度LED燈

高速攝影機(400fps)

腳架

側視圖



肆、研究方法

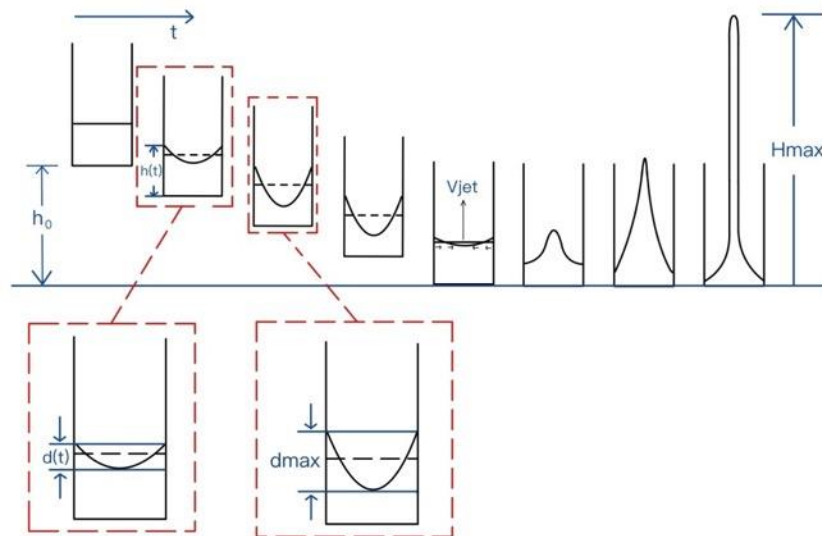
一、研究方法

- (1) 使用強力磁鐵及細繩懸吊瓶身，於穩定後釋放並攝影，確保鉛直釋放、減少手部干擾。
- (2) 背光描圖板置於瓶子後方，加強拍攝清晰度。
- (3) 高速攝影機(400FPS)於(1.5 公尺/0.5 公尺外)拍攝裝水保特瓶由固定高度自由下落。
- (4) 使用 tracker 紀錄掉落中、撞擊地面前、撞擊地面後液面高度變化。
- (5) 使用 Excel 做分析並呈現數據。



二、實驗參數

(1) 示意圖




(2) 主要實驗參數

液體	杯子	環境
水位高度 $h(t)$	杯子開口半徑 r_0	重力加速度 g
液體密度 ρ		落下高度 h_0
總水體積 V_{water}		落下時間 t

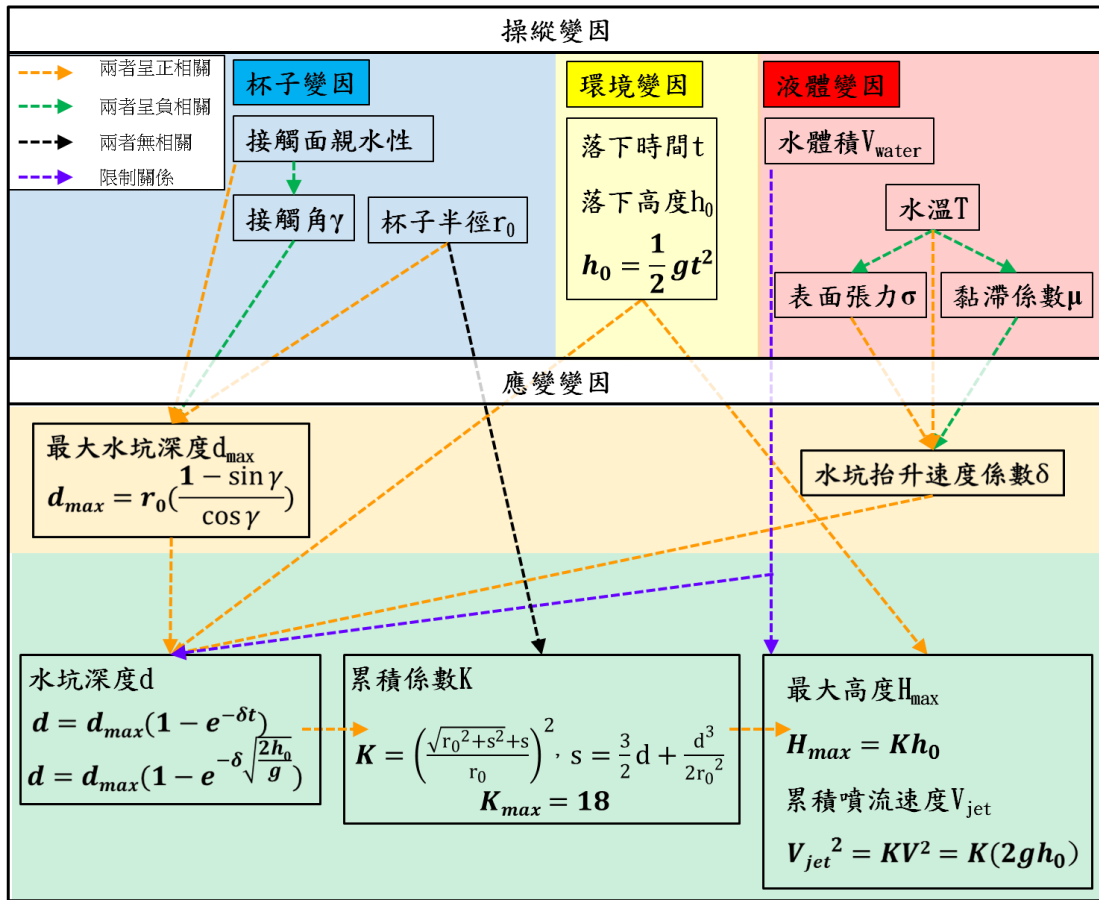
* 包括實驗量測之變因，及理論建模所使用之參數

(3) 不同階段的作用機制與實驗參數

<p>高速攝影</p>			
<p>階段</p>	<p>一、失重落下(微重力)</p>	<p>二、撞擊 並產生累積噴流</p>	<p>三、噴流向上</p>
<p>主要機制</p>	<p>水坑形成</p>	<p>水坑崩塌 累積效應</p>	<p>噴流運動分析 噴流型態</p>
<p>主作用力</p>	<p>表面張力 黏滯力 重力</p>	<p>慣性力 重力 表面張力</p>	<p>重力 表面張力 空氣阻力</p>
<p>主要參數</p>	<p>水坑深度d 水坑抬升速度δ 黏滯係數μ 水與杯底滑動摩擦f_k 表面張力σ 水坑最大深度d_{max} 接觸角γ</p>	<p>崩塌水坑質量m 撞擊慣性加速度G 水面速度v、v' 水面與鉛直夾角α 累積係數K 累積噴流速度V_{jet} 水坑曲率半徑R、R' 水坑下圓柱高度 l、l' 水坑截面半徑r_y 水坑質心高度 y_{crater}、y_{crater}' 、$y_{collapse}$ 水坑質心高度差 Δy_c、$\Delta y_c'$</p>	<p>噴流高度$h(t)$ 最大高度H_{max}</p>

*出現「'」為水坑崩塌過程中任一瞬間之物理量

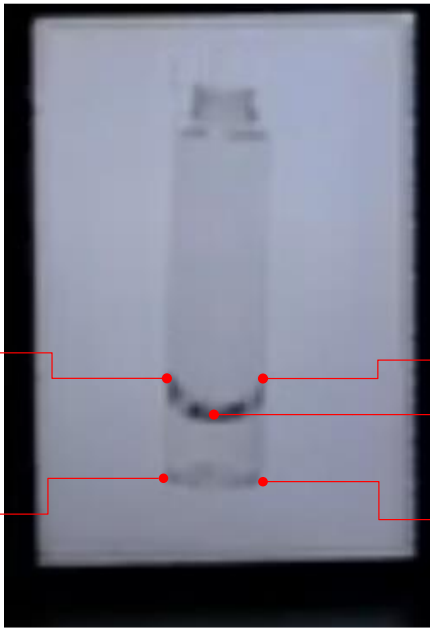
(4) 變因關係圖



此為最終實驗結論，將於後續內文中進行討論。

(5) tracker 量測點位

容器自由落下



Average Water Level

$$h(t) = \frac{(y_A - y_C) + (y_{A'} - y_{C'})}{2}$$

Crater Depth

$$d(t) = \frac{(y_A - y_B) + (y_{A'} - y_{B'})}{2}$$

撞擊地面後產生水噴流



Average Water Level

$$h(t) = \frac{(y_B - y_C) + (y_{B'} - y_{C'})}{2}$$

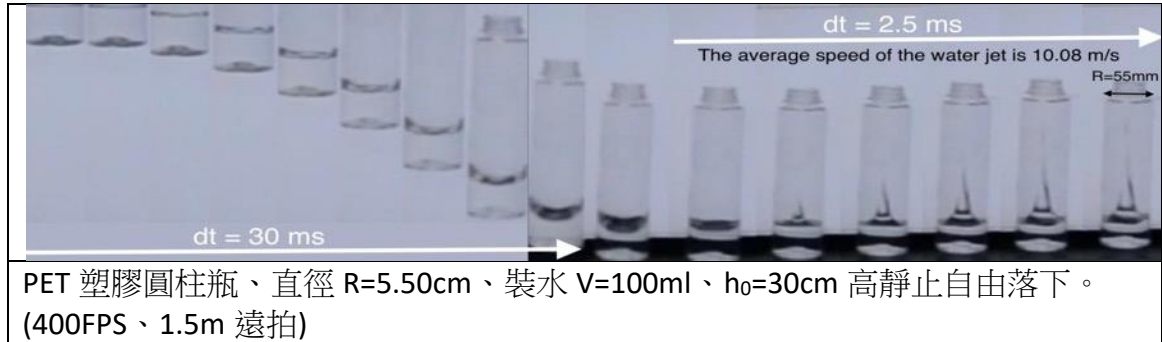
Speed of Water Jet

$$v(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

伍、研究結果與討論

一、初步觀察

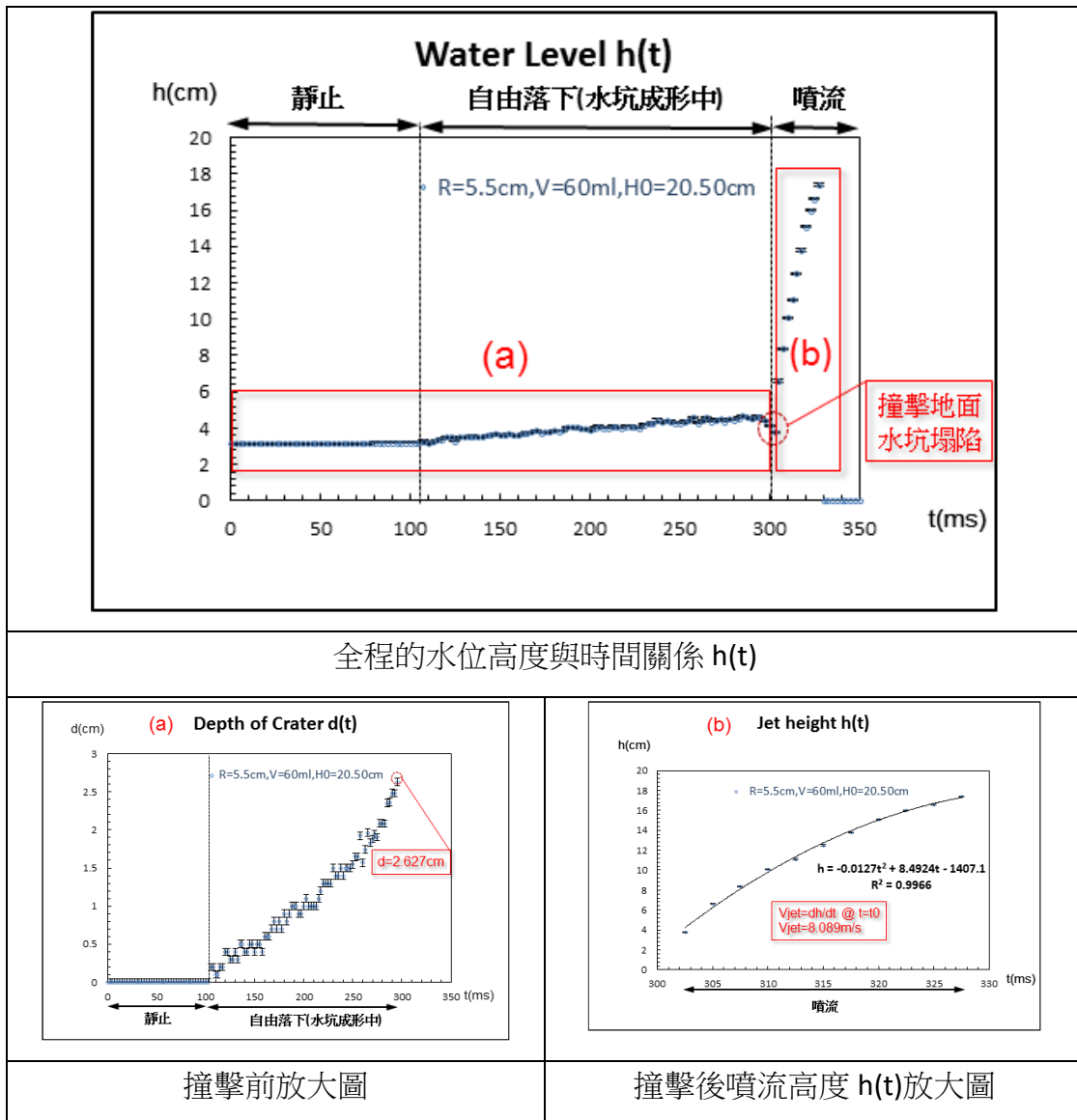
(1) 高速攝影機錄影拼接照片



杯中水於微重力落下過程，逐漸形成中央凹陷兩邊升起的水坑，落下時間夠長時水坑成形，撞擊地面瞬間因極大慣性加速度而崩塌，位能轉化為水流的動能，使水流向水面中心流動，匯集後產生向上的柱狀或錐狀高速噴流。

(2) 液面高度 $h(t)$ 、水坑深度 $d(t)$ 、噴流速度 V_{jet}

用 tracker 分析全程水位高度與時間關係，撞擊前、後有不同機制。



左下圖：落下前，重力使水位靜止為一平面。

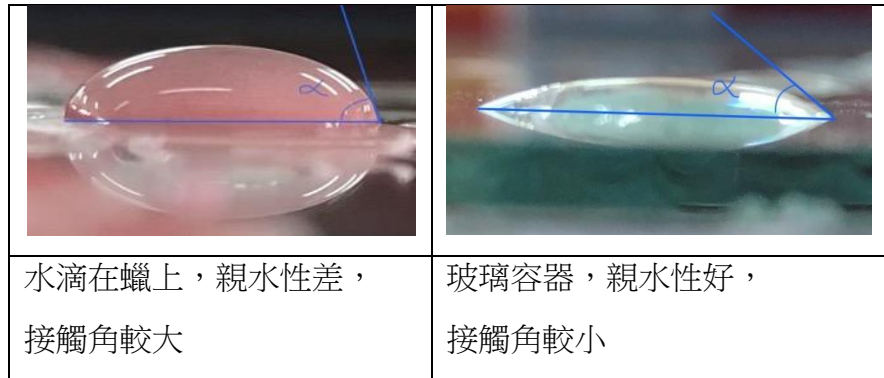
落下後，失重，表面張力使水面靠杯緣處快速爬升，中央下凹形成水坑，水坑深度 $d(t)$ 隨時間抬升在撞擊前來到 2.627 公分深。

右下圖：撞擊後，水坑由於極大的慣性加速度崩塌，匯集後產生高速噴流。 $h(t)$ 呈拋物線，表示噴流產生後主要受重力影響，實驗顯示空氣阻力及表面張力相對極小，皆可忽略。

噴流速度 V_{jet} 由圖中估計可達 8m/s，推估水柱最多可上升至三米高，遠超過原釋放高度 20 公分近 15 倍，其中應有能量累積效應機制，後續將作探討。

(3) 疏水性表面無法產生水坑與累積噴流

1. 不同材質的接觸角



由內聚力、附著力、重力共同作用下，水與不同材質有不同接觸角。蠟為疏水性表面，附著力較小使接觸角較大。

2. 失重狀態下塗蠟與不塗蠟的水坑形成機制(表面張力)



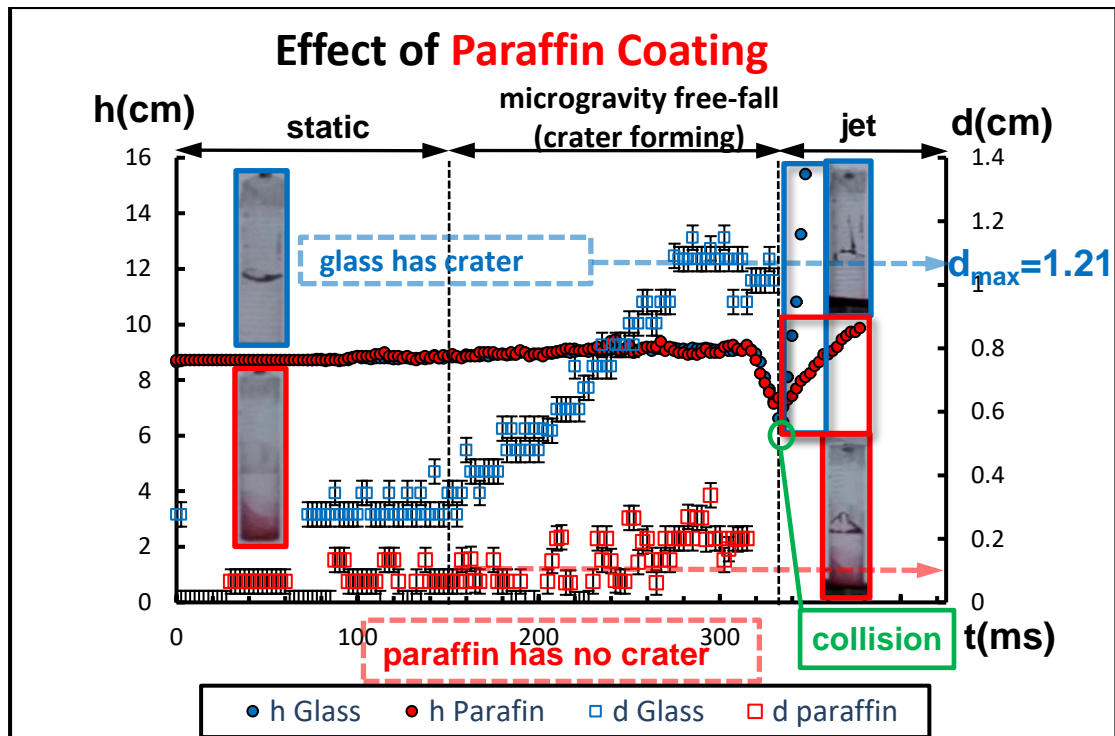
(上圖)玻璃容器，**無蠟**，自由落下過程**有水坑**。

此水坑在撞擊地面時崩塌，水流向中心匯集形成**高速噴流**。

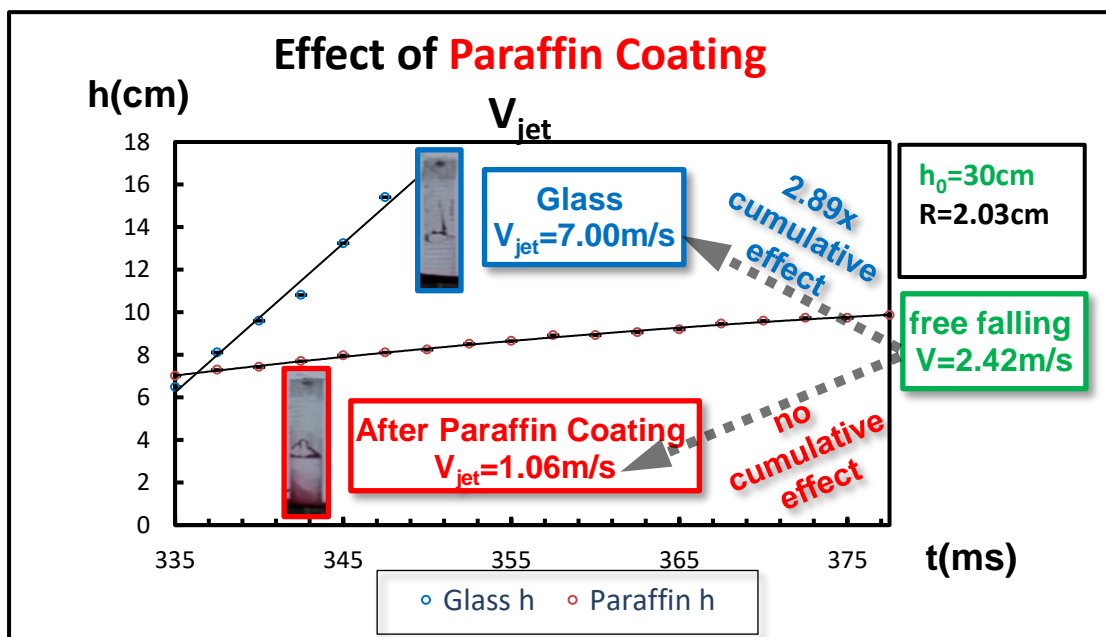
(下圖)玻璃容器，**內壁塗蠟**，因疏水性質，自由落下過程並**未形成水坑**，故撞擊後**無明顯噴流**。

液體附著在親水性接觸面，因表面張力，靠近杯緣處向上抬升，由於質量守恆，中心部分需下凹等量液體，產生邊緣高中心低水坑。此效應在一般重力的作用下並不明顯，但在微重力狀態下，**表面張力**成為主控作用力，杯材的親疏水性是成功關鍵。

查閱 NASA 實驗資料，太空人杯子形狀造型特殊，也是類似道理。



上圖中實心為水位高度 $h(t)$ ，數值呈現於左方縱軸，玻璃及表面塗蠟兩杯中水位均歷經水坑生成與噴流產生階段。量測水坑生成階段的水坑深度 $d(t)$ 並將數值呈現於右方縱軸，玻璃杯有較深的水坑約 $d_{max} = 1.2$ 公分深且達極大值，塗蠟後水坑則深度不足，原因如前段所述。噴流產生時，玻璃杯的噴流速度明顯大於塗蠟。因兩者落下高度相同，猜測水坑深度越深則噴流速度越快。

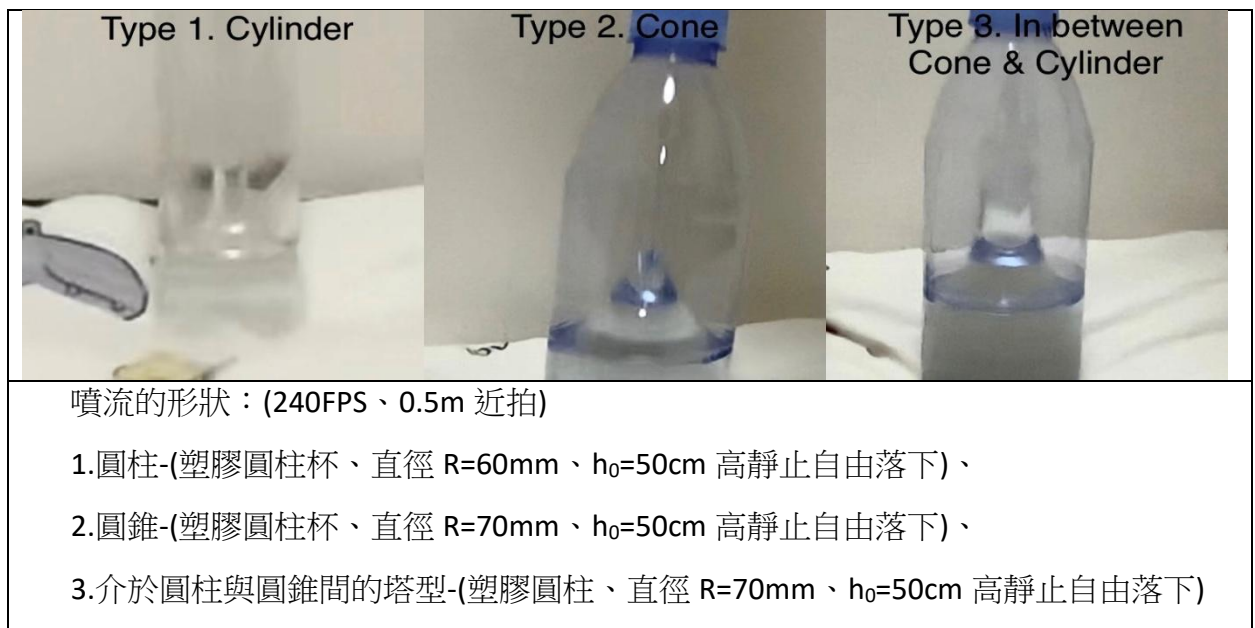


上圖中細看噴流階段，兩杯皆由 30 公分高處自由落下，按運動定律，落地時水的運動速度約為 2.42m/s。

玻璃杯的噴流速度可達 7.00m/s，約為落地速度之 2.89 倍。但總能量應守恆，故放大的應是局部的動能密度，其放大倍數與速度平方成正比，為 8.33 倍。換句話說，在此發生了**動能或速度累積的效應 (cumulative effect)**，使能量或速度更加集中並發生累積，造成此效應的原因應與親水性接觸面的水坑生成有關。

塗蠟的噴流速度僅 1.06m/s，甚至不到落地時速度的一半，顯見能量不僅沒有累積倍增，反而減損，可能因為疏水性接觸面，無水坑，主要機制為水垂效應，造成能量耗損。

(4) 水噴流的形狀



噴流的形狀為軸狀對稱，為圓柱狀或圓錐狀。

實驗顯示水坑也為軸狀對稱。

因為對稱性，可利用柱狀坐標系分析流體系統動態及速度分布。

定鉛直對稱軸為 y 方向，水流無 θ 方向的速度分布(無渦流)，所有的運動僅在半徑 r 方向及鉛直對稱軸 y 方向。

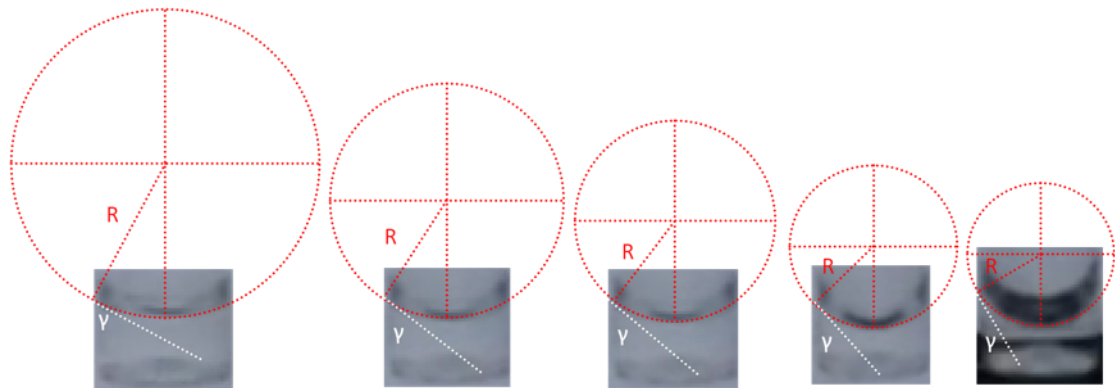
二、失重狀態下水坑的定量實驗與建模

(1) 水坑深度 d 的高速攝影

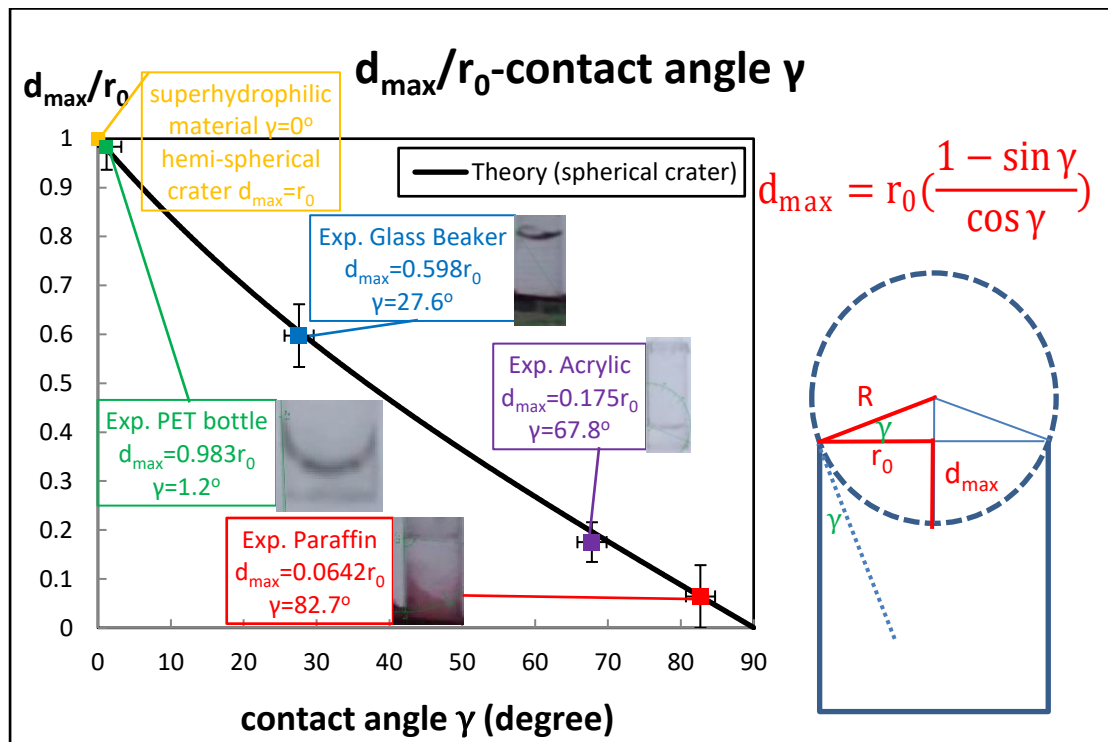


1. 水坑表面為部分球形

水坑表面可近似為球的一部份，落下過程曲率半徑 R 變小，水坑的深度 d 變深，接觸角 γ 變小。最大水坑為半球狀。



下圖顯示實驗結果，如用球形來擬合水坑形狀，吻合度高。



2. 水坑受力分析

以加速坐標系 $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ 觀察水坑受力，水重力與慣性力抵銷，處於失重狀態，主控作用力為表面張力與液體黏滯力。

3. 水坑深度的理論上限 d_{\max}

水面靠近杯緣處，由於附著力與內聚力合力方向未與液面垂直，表面張力促使邊緣抬升，由於質量守恆，中央需下凹，使接觸角 γ 漸減。

當接觸角 γ 減至理論上限，曲率半徑 R 達到最小值，此時水坑深度有極大值 d_{\max} ，自此之後水坑深度不再變化。

$$d_{\max} = r_0 \left(\frac{1 - \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)$$

若為超親水接觸面，接觸角為理論最大值 $\gamma = 0$ ，此時水坑為半球體， $d_{\max} = r_0$ ， r_0 為杯口半徑。

4. 水坑抬升速度係數 δ

δ 稱水坑抬升速度係數，為水坑深度達 d_{\max} 特徵時間的倒數。

可以把它理解為水坑形成的快慢， δ 越大，水坑越快成形。

在失重 (微重力) 狀態下，表面張力 σ 效應拖拉質量使質量發生遷移並形成球狀水坑，但液體本身的動態黏滯係數 μ 會有阻尼效應，兩者抗衡的結果，使水坑持續爬升直到理論的最大深度。

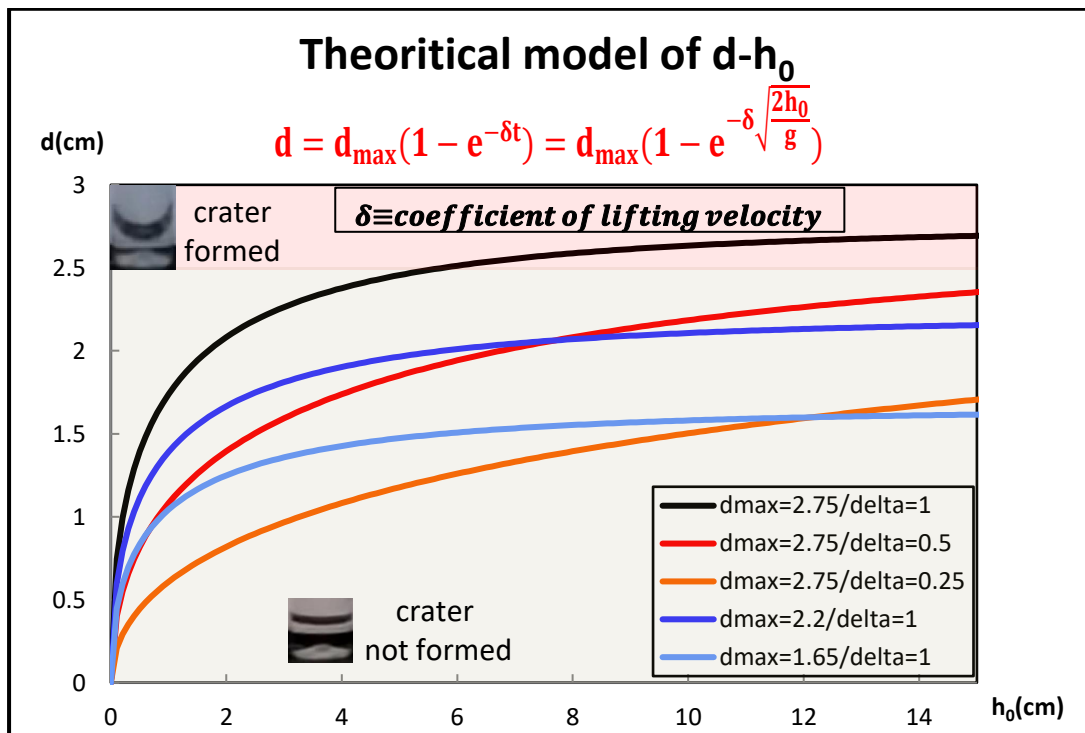
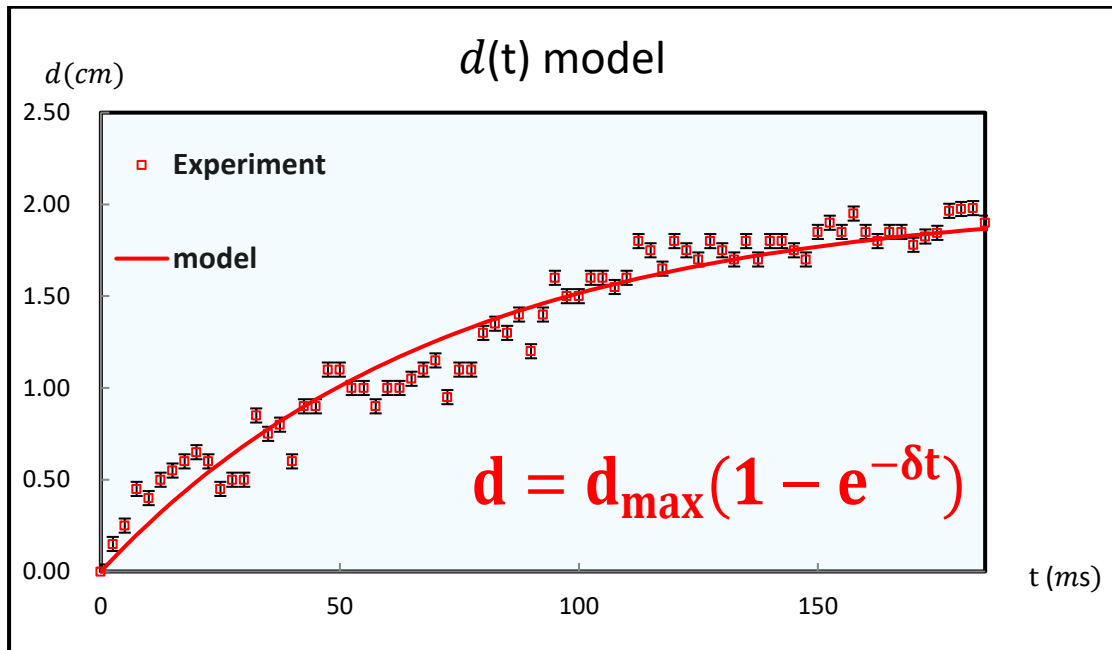
可以將兩者比值理解為水坑生成過程的「特徵速度 V 」

(characteristic velocity)，定義 $V \equiv \frac{\sigma}{\mu}$ ，單位為 $\frac{\text{N/m}}{\text{Pa}\cdot\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 。表面張力越大則此特徵速度越快，動態黏滯係數越大則此特徵速度越慢。

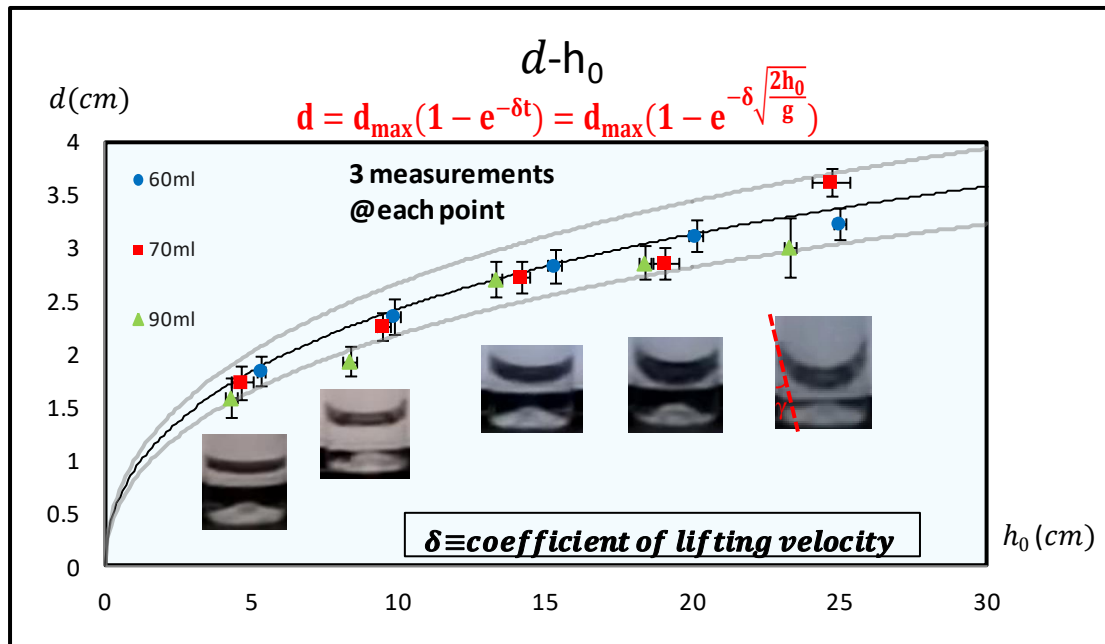
本實驗測量水坑抬升速度係數 δ ，並與 V 相比較，兩者有類似之物理意義，應會有正向關係，將於實驗中檢驗之，以確認水坑抬升機制是否為表面張力與動態黏滯係數的抗衡結果。

(2) 水坑深度 d 的實驗與建模

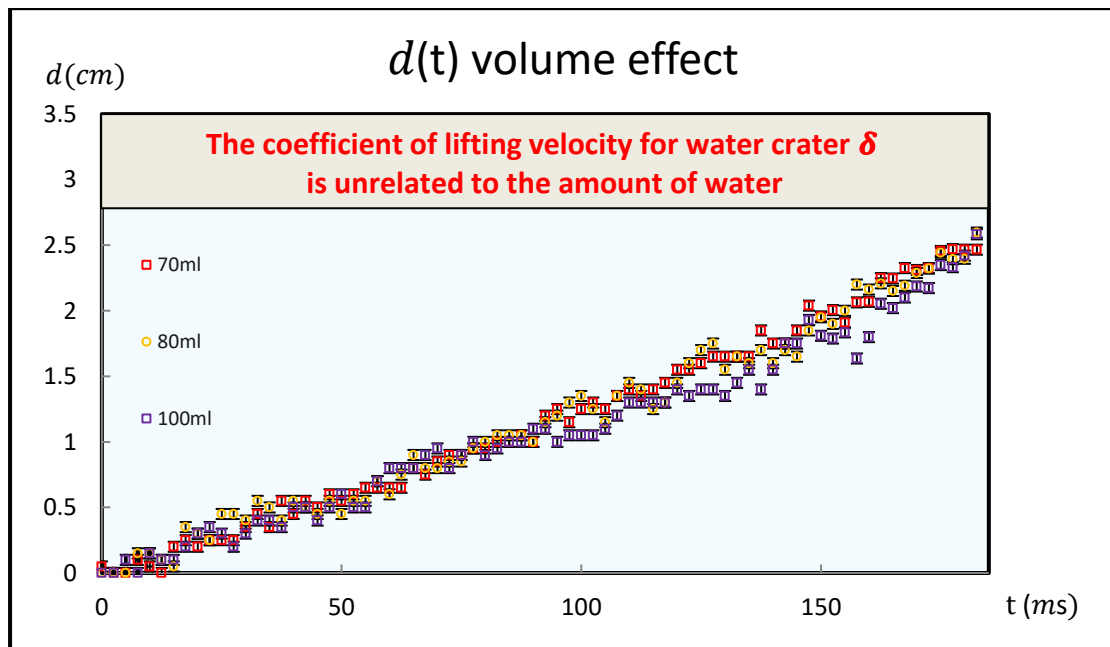
1. 以不同高度 h_0 落下杯子，紀錄水坑深度 d 與落下高度 h_0 關係。
2. 利用(1)中的概念，可將水坑深度表達為 $d = d_{\max}(1 - e^{-\delta t})$ ，
或 $d = d_{\max}(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}})$ 。
3. 理論顯示， d_{\max} 或 δ 不足都可能使水坑無法成型。 d_{\max} 代表水坑深度上限， δ 代表水坑生成快慢。



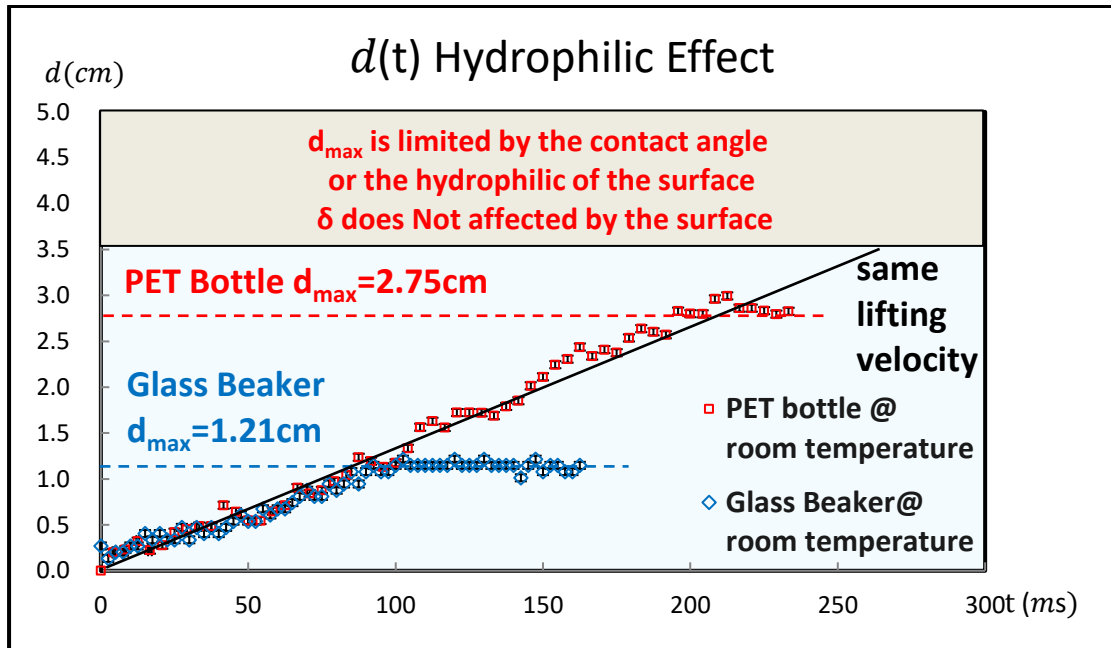
4. 水坑深度與落下高度關係。實驗與理論對照如下圖，另，水量在 60ml-90ml 範圍不影響水坑生成過程。



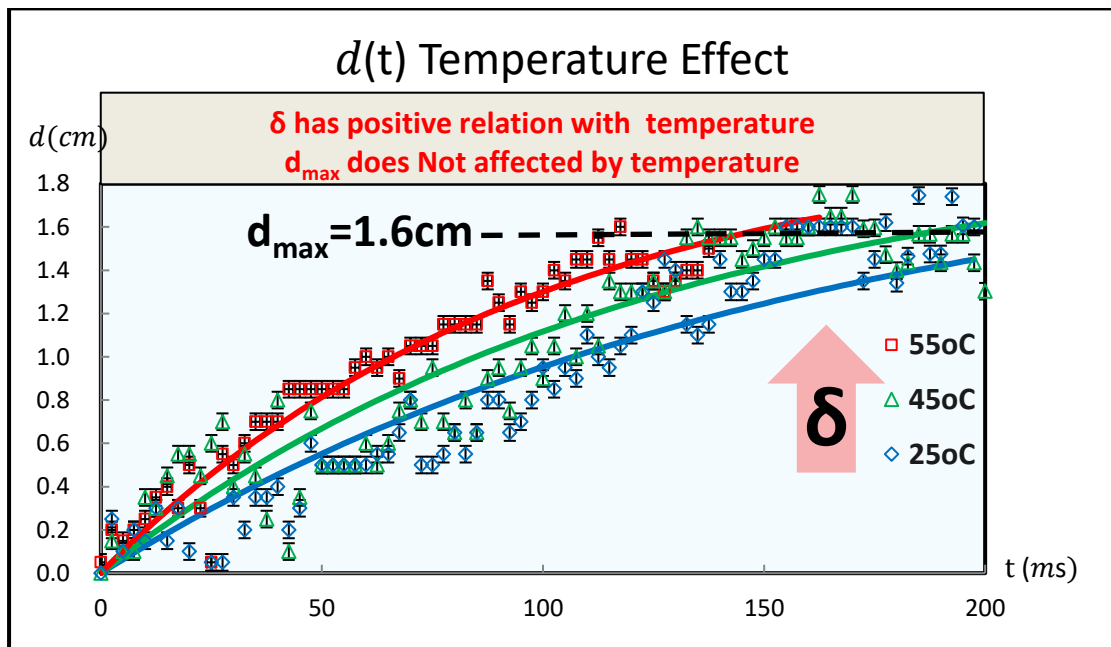
5. 水坑深度與落下時間(局部)關係。在 70ml-100ml 範圍內，水量多寡並不影響水坑生成快慢。



6. 接觸面材質的親疏水性(接觸角)，會限制水坑的最大深度 d_{\max} ，但不會影響水坑抬升速度係數 δ 。



7. 利用(1)-4.的概念，改變不同水溫，溫度越高，水坑抬升速度越快，但溫度不會影響水坑最大深度 d_{\max} 。



(1)-4.的討論中，水坑抬升速度係數 δ 受表面張力 σ 與動態黏滯係數 μ 的影響，表面張力類似於驅動力，動態黏滯係數類似於阻尼，水坑抬升速度受此二力的比值決定，即 $\delta \sim \frac{\sigma}{\mu}$ ，其中 $\frac{\sigma}{\mu}$ 稱為「特徵速度 V」(characteristic velocity)，它的單位為

$$\frac{\text{N/m}}{\text{Pa}\cdot\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}。$$

因水的表面張力 σ 與動態黏滯係數 μ 皆隨溫度上升而減少，如欲知道兩者比值隨溫度如何變化，需查詢國際公認數據，再進行計算，查詢後將兩者以每 5 度 C，0~100 度 C 的範圍繪製於下頁。

此比值也已被其他研究用於探討異質接觸面形變後的回復速度，例如 *In situ Determination of Surface Tension-to-Shear Viscosity Ratio for Quasiliquid Layers on Ice Crystal Surfaces, Physical review letters, 115, 256103-1-256103-5*。

此研究中的界面形狀原為突起球形，在表面張力與動態黏滯係數共同作用下，漸漸隨時間拉平，其特徵高度隨時間指數衰減。而本研究水坑深度隨時間指數增長 $d = d_{\max}(1 - e^{-\delta t})$ ，與其原理有類似之處，故使用類似方法討論之。

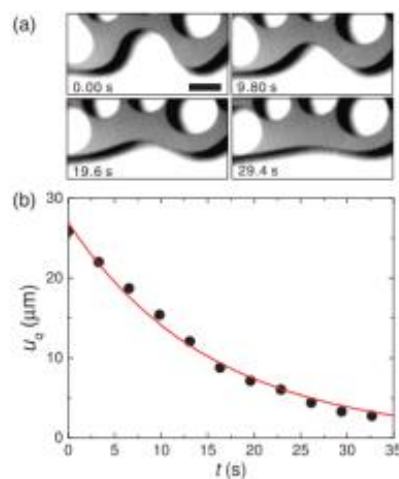
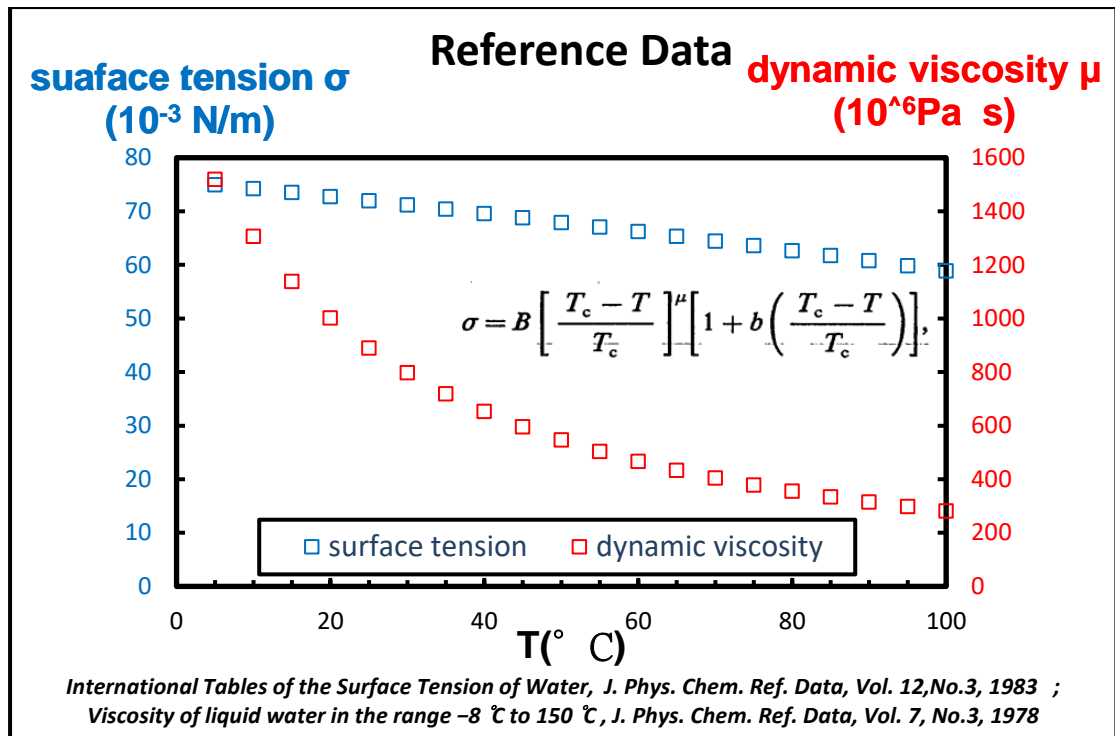
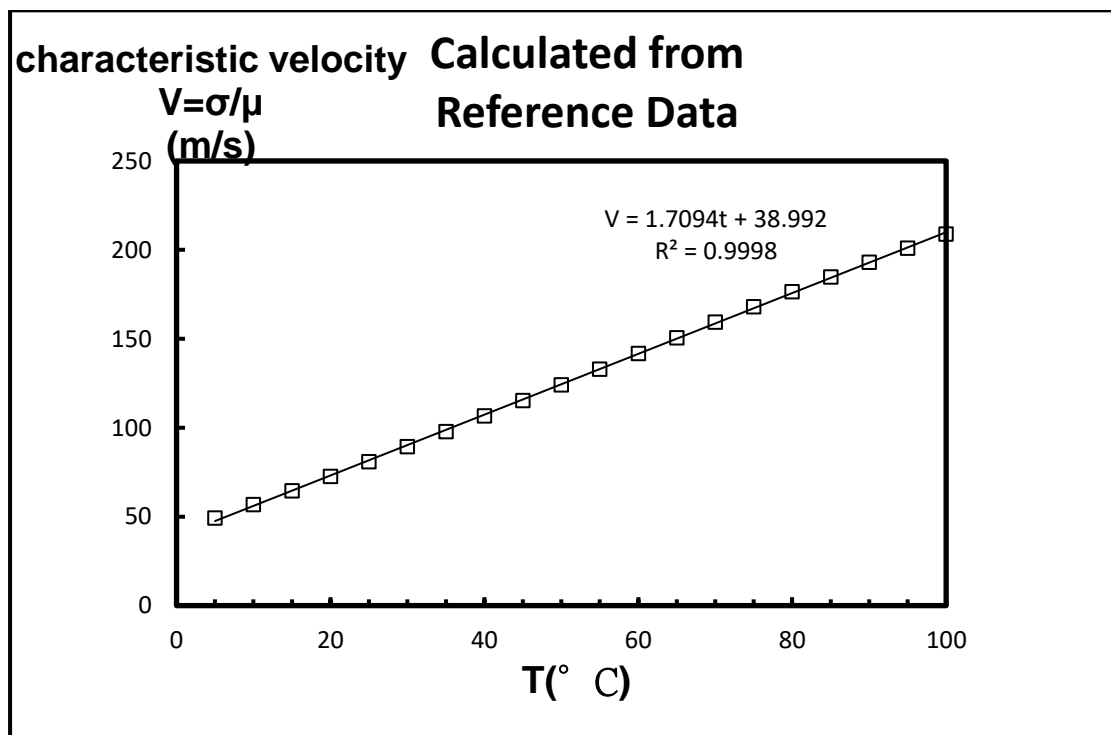


FIG. 1 (color). (a) Pattern evolution of the contact line of the BLD on an ice crystal surface at $T = -0.4^\circ\text{C}$ and $p = 603.3 \text{ Pa}$. (b) Temporal change of its amplitude u_g . The data are fitted well by Eq. (1) (the red solid line). The black bar corresponds to $20 \mu\text{m}$. See also Video S1 in the Supplemental Material [28].



由於 μ 隨溫度的變化較 σ 劇烈，故特徵速度 $V = \sigma/\mu$ 應與溫度 T 有正相關，經過計算發現為線性關係，繪製於下圖。



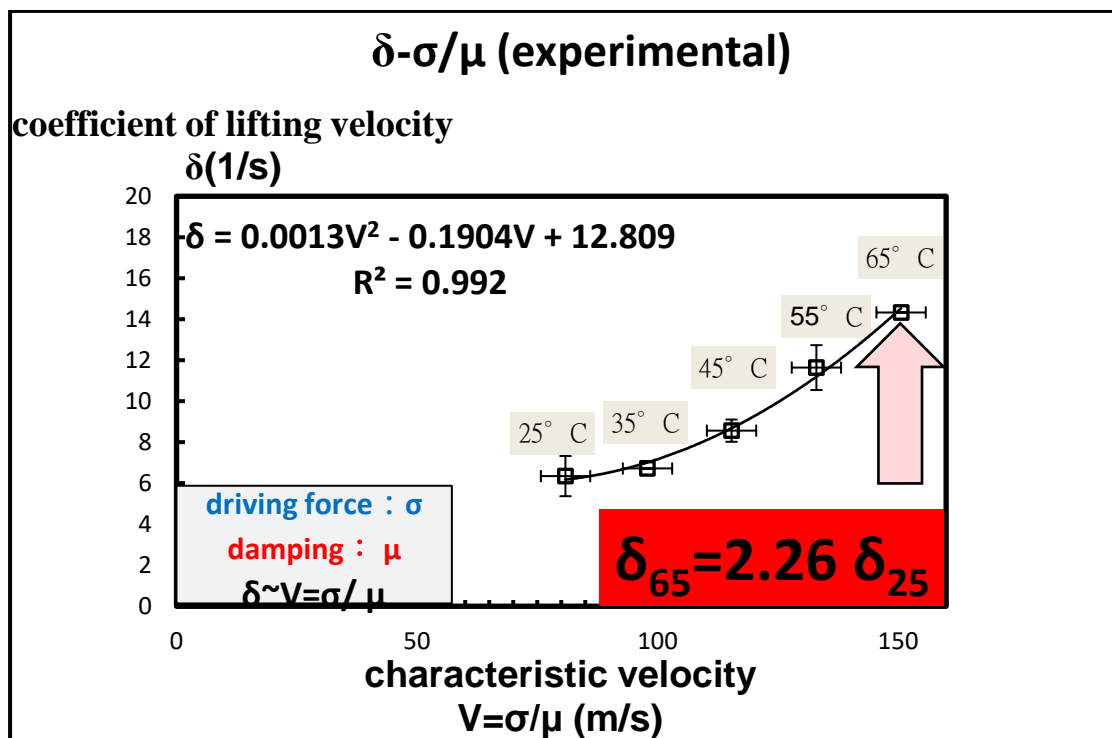
由上圖知溫度 T 越高，則特徵速度 V 越快。為線性正相關。

經實驗比較不同水溫的 δ ，並量化紀錄。發現溫度越高，水坑抬升越快 δ 越大。 $\delta_{65^\circ\text{C}}$ 較 $\delta_{25^\circ\text{C}}$ 大 2.26 倍。

由於實驗所得 δ 與文獻計算 V 均與溫度呈現正向關係，推論實驗量測到的水坑抬升速度係數 δ 應與 V 有正相關。

將量測到的 δ ，與 V 繪圖，確認正相關。

代表水坑形成的流體動力機制，確實由表面張力與動態黏滯係數的比值所決定。



三、 撞擊後累積噴流的定量實驗與建模

(1) 水坑崩塌的能量轉換

1. 如(下圖 A)實驗所觀察，水坑崩塌後，中心附近水面速度 v 的方向約與水面垂直。

2. 水杯落下高度 h_0 ，損失重力位能 mgh_0 。

設水坑損失的位能全部轉換為動能： $mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 \dots$ 式(1)。

m 為水坑的質量(下圖 B 中紅色部分)， v 為水坑崩塌後(下圖 C)水面的行進速度。

3. 撞擊地面期間，水杯系統 $Ma_c = Mg - N$ ，定向下為正方向。

其中 M 為水杯系統總質量， N 為撞擊期間地面施於杯底的正向力，由實驗可知 $N \gg Mg$ 。質心加速度 $a_c = g - \frac{N}{M}$ 。

4. 若觀察者由水杯系統質心(非慣性系 $a_{\text{觀}} = a_c$)觀察，則水坑的

液體由撞擊開始至完全崩塌期間所受的力 F ，除本身重力 mg

外還受到一慣性假想力 $-ma_c$ ， $F = mg - m\left(g - \frac{N}{M}\right) = \frac{m}{M}N$ 。

水坑由撞擊開始至完全崩塌期間的質心加速度 $a_y = \frac{F}{m} = \frac{N}{M} \equiv$

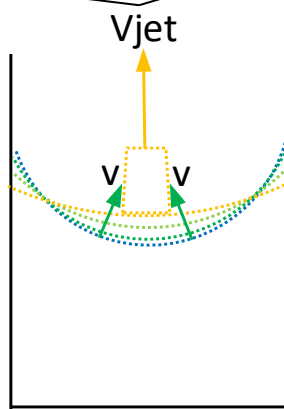
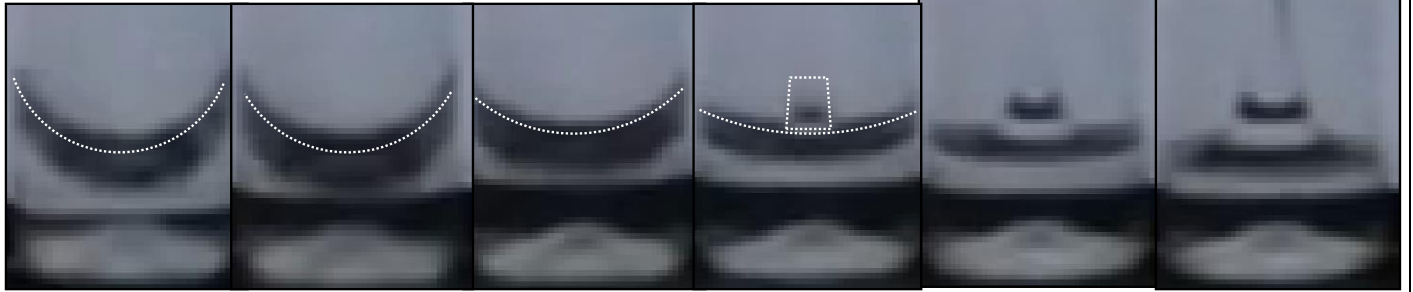
$G \gg g$ ，此巨大慣性加速度 G 使水坑崩塌，並轉換為動能。

設水坑損失的等效位能全部轉換為動能：

$mG\Delta y_c = \frac{1}{2}mv^2 \dots$ 式(2)。 Δy_c 為水坑崩塌前後質心高度差。

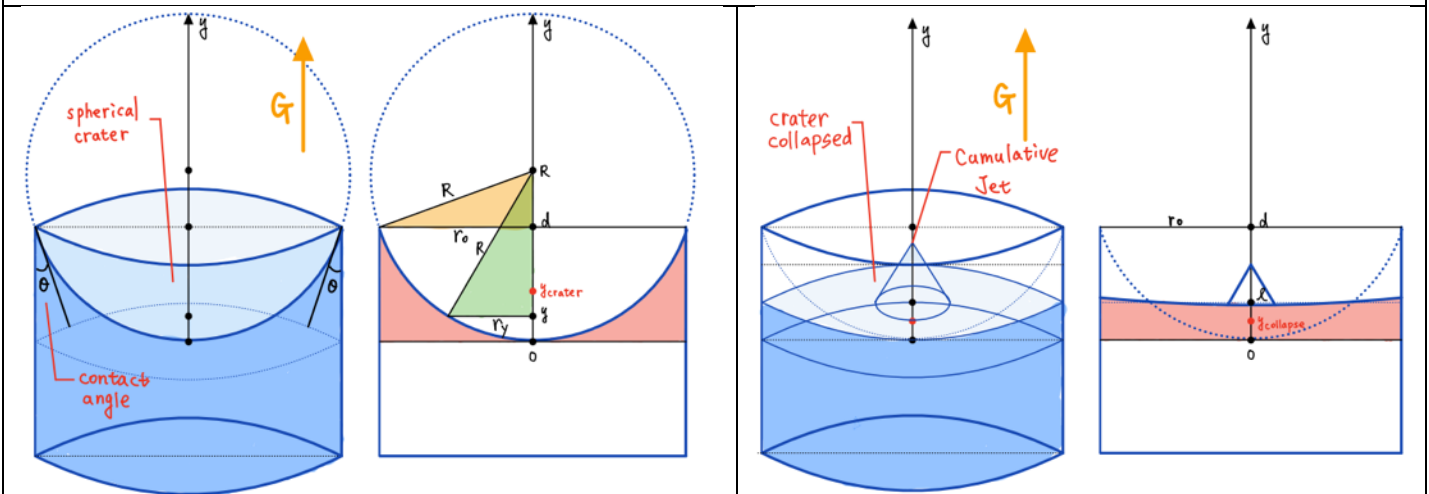
5. 由式(1)、(2)可估計： $mgh_0 = mG\Delta y_c \Rightarrow \boxed{\frac{G}{g} = \frac{h_0}{\Delta y_c}} \dots$ 式(3)。

$\Delta t = 2.5\text{ms}$



圖(A)撞擊後水坑崩塌形成累積噴流的高速攝影

中心附近液面運動方向與液面垂直



圖(B)水坑撞擊地面後瞬間

左：立體圖 右： $y-r$ 方向剖面圖

圖(C)水坑撞擊地面後完全崩塌瞬間

左：立體圖 右： $y-r$ 方向剖面圖

(2) 水坑崩塌前後質心高度差 $\Delta y_c \leq \frac{1}{12} r_0$ ，慣性加速度 $G \gg g$

1. 因實驗結果呈現柱狀對稱性，可利用柱狀坐標系分析流體系統動態及速度分布。定對稱軸為 y 軸，撞擊前瞬間的水坑底部為原點。
2. 水流無 θ 方向的速度分布(無漩渦)，因此所有的運動狀態變化僅發生在 r 方向及 y 方向，如圖(B)右及圖(C)右所示。
3. 圖(B)右：

$$\text{橘三角形畢氏定理：} R^2 = r_0^2 + (R - d)^2 \rightarrow R = \frac{r_0^2 + d^2}{2d} \dots \text{式(4)}$$

$$\text{綠三角形畢氏定理：} r_y^2 = R^2 - (R - y)^2 = 2Ry - y^2 \dots \text{式(5)}。$$

$$\text{將式(4)代入式(5)，得} r_y^2 = \frac{r_0^2 + d^2}{d} y - y^2 \dots \text{式(6)}。$$

$$\text{水坑質量} m = \sum m_i = \int_0^d \pi(r_0^2 + y^2) \rho dy = \pi \rho d \left(\frac{1}{2} r_0^2 - \frac{1}{6} d^2 \right)$$

$$\text{水坑質心位置} y_{crater} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\int_0^d \pi(r_0^2 - y^2) \rho y dy}{\int_0^d \pi(r_0^2 - y^2) \rho dy} = \frac{2r_0^2 - d^2}{6r_0^2 - 2d^2} d$$

4. 圖 C(右)：

$$\text{崩塌後圓柱形水坑質量} m' = \sum m_i = \pi r_0^2 \ell \rho$$

依據質量守恆

$$m' = m \rightarrow \pi r_0^2 \ell \rho = \pi \rho d \left(\frac{1}{2} r_0^2 - \frac{1}{6} d^2 \right) \rightarrow \ell = \frac{1}{2} d - \frac{d^3}{6r_0^2}$$

$$\text{崩塌後水坑質心位置} y_{collapse} = \frac{\ell}{2} = \frac{1}{4} d - \frac{d^3}{12r_0^2}$$

5. 崩塌前後水坑質心高度下降

$$\Delta y_c = y_{crater} - y_{collapse} = \frac{4r_0^4 - d^4}{12r_0^2(3r_0^2 - d^2)} d \dots \text{式(8)}$$

6. 對半球形水坑($d = r_0$)而言

$$y_{crater} = \frac{1}{4} r_0, y_{collapse} = \frac{1}{6} r_0, \Delta y_c = \frac{1}{12} r_0。$$

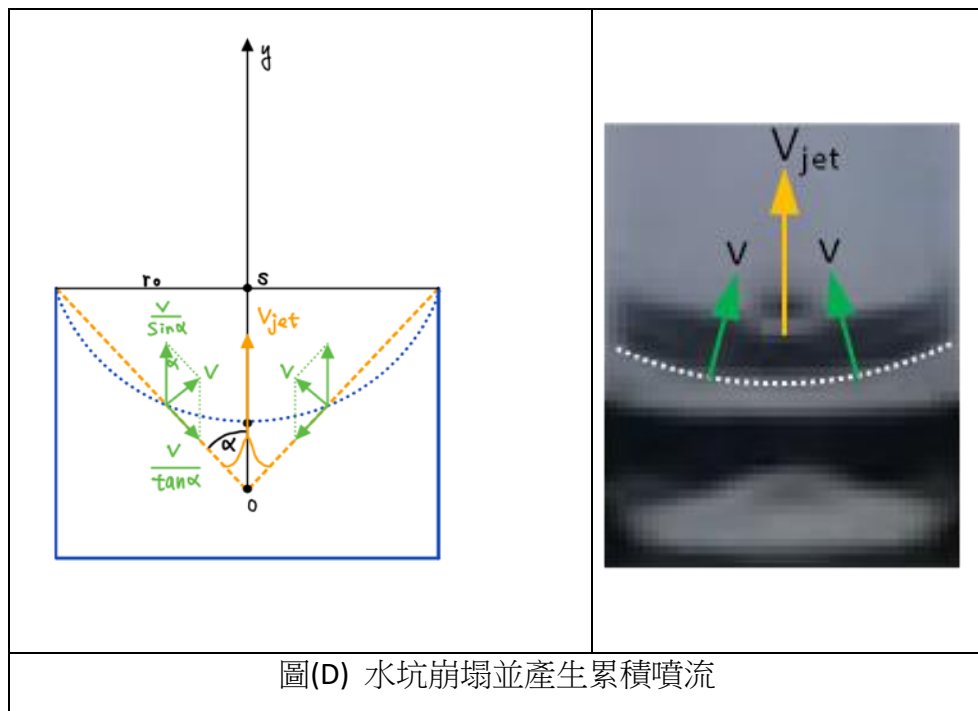
$$\text{用實驗數據代入式(3)，得} \frac{G}{g} = \frac{h_0}{\Delta y_c} = \frac{h_0}{\frac{1}{12} r_0} = \frac{30\text{cm}}{\frac{1}{12} \times (2.75)\text{cm}} = 131，$$

估計出水坑崩塌時的巨大慣性加速度約為 $G \cong 131g \gg g$ 。

故，在崩塌期間主要作用力為慣性力，重力及表面張力的影響可忽略。

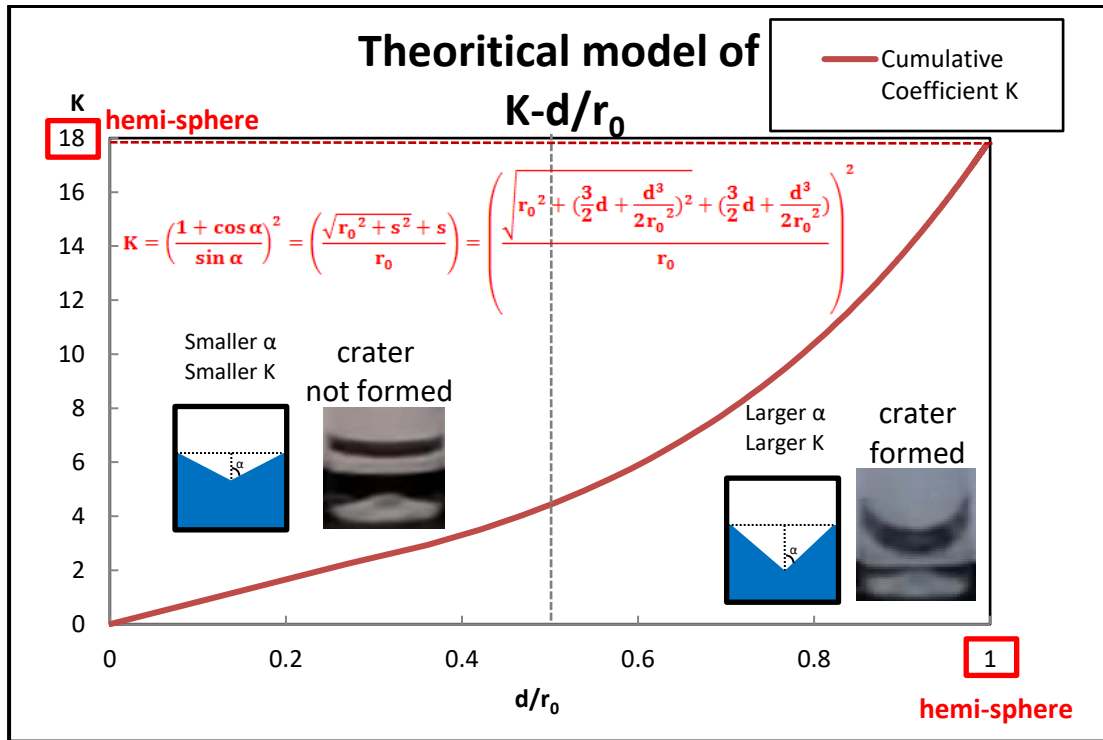
(3) 噴流累積效應(cumulative effect)與累積係數K(cumulative coefficient)

1. 系統動態若僅考慮單純的位能動能轉換，不可能產生反衝高度高於水杯釋放高度的噴流，其中必有使速度或動能密度放大的累積效應。累積效應(cumulative effect)的介紹與推導，請參考附錄一，此處直接應用累積效應的結果於理論建模。
2. 如圖(D)：撞擊開始瞬間水坑深度為 $d(h_0) = d$ 、水杯半徑 r_0 ，設水坑形狀為部分球體，體積 $V_{\text{sphere}} = \frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{2}\pi r_0^2 d$ 。
3. 為方便估計累積係數，設定一個等效圓錐狀水坑，其體積為 $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r_0^2 s$ ，其中 s 為圓錐高度。
4. 令等效圓錐狀水坑體積等於球狀水坑體積 $V_{\text{cone}} = V_{\text{sphere}}$ ，得 $s = \frac{3}{2}d + \frac{d^3}{2r_0^2}$ 。
5. 此等效圓錐頂角 α ，水面行進速度為 v ，產生的累積噴流速度
$$V_{\text{jet}} = \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) v = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) v$$
6.
$$V_{\text{jet}}^2 = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 v^2 = \left(\frac{\sqrt{r_0^2 + s^2} + s}{r_0} \right)^2 v^2 = K v^2 \dots \text{式(10)}$$
水坑 d 越深、等效圓錐頂角 α 越小則累積係數 K 越大， K 為速度平方或高度放大倍率。最大水坑為半球， K 有最大值約 18。

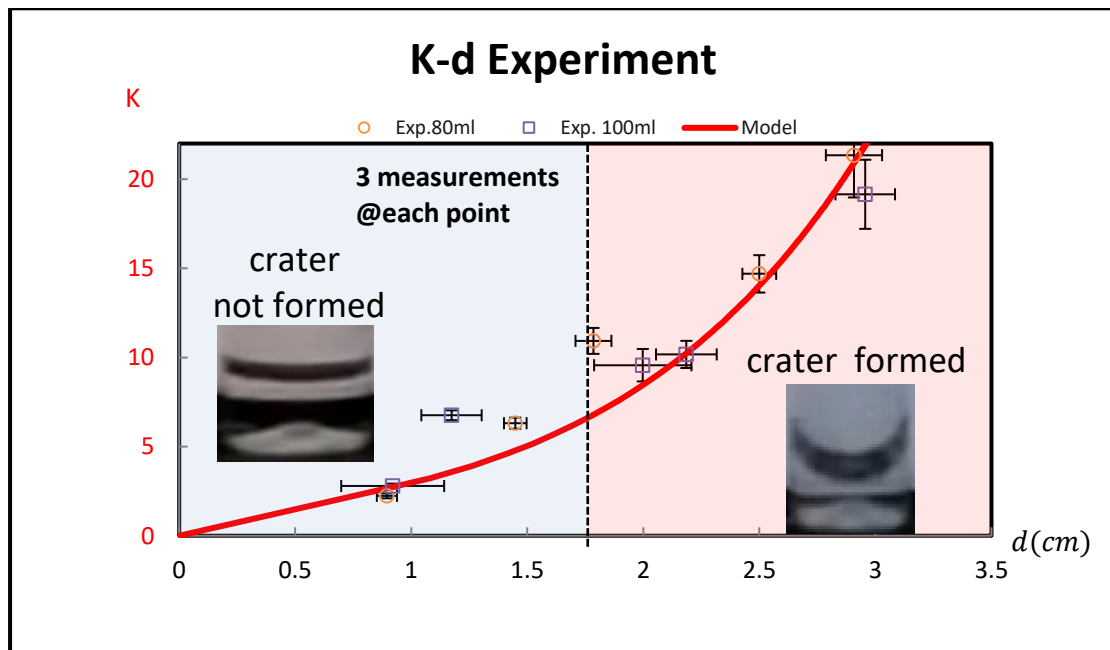


圖(D) 水坑崩塌並產生累積噴流

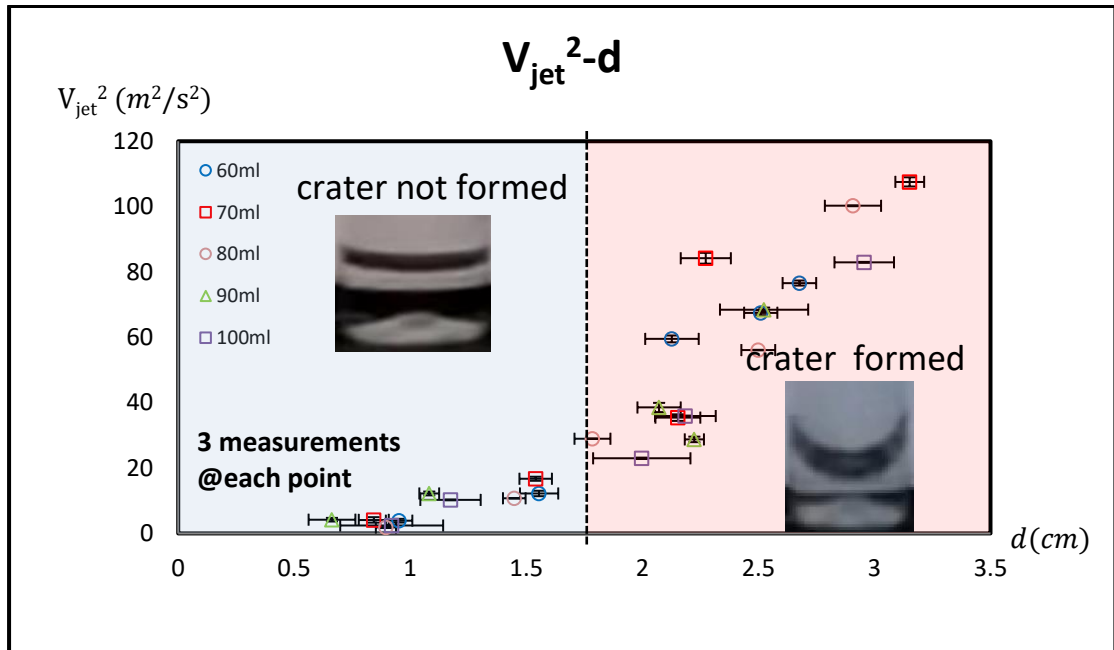
7. 理論 K 值如下圖，當撞擊前的水坑深度達到最深 $d=r_0$ ，即成形的半球形水坑，K 值達到最大的 18 左右。



8. 實驗結果與累積效應理論之對照如下圖，有一定的吻合度。



9. 另外，在 60ml-100ml 實驗中，也觀察到水坑越深，累積噴流速度平方越大。水坑太淺時，無法產生高速噴流。



(4) 累積噴流速度 V_{jet} 、累積噴流最大高度 H_{max} 與落下高度 h_0 關係

1. 累積噴流的最大高度 $H_{max} = \frac{v_{jet}^2}{2g}$ ，由(3)結論知累積噴流速度平方 $v_{jet}^2 = Kv^2 = K2gh_0$ 。
2. 假定落下位能完全轉換為水坑動能 $v^2 = 2gh_0$ 。
3. $H_{max} = \frac{v_{jet}^2}{2g} = \frac{Kv^2}{2g} = \frac{K(2gh_0)}{2g} = Kh_0$ 。起始高度與反衝最大高度有一放大比例，此比例即為累積係數 K 。
4. 累積係數 $K = \left(\frac{\sqrt{r_0^2 + s^2} + s}{r_0} \right)^2$ ，其中 $s = \frac{3}{2}d + \frac{d^3}{2r_0^2}$ 。

整理後 $K = \left(\frac{\sqrt{r_0^2 + \left(\frac{3}{2}d + \frac{d^3}{2r_0^2}\right)^2} + \left(\frac{3}{2}d + \frac{d^3}{2r_0^2}\right)}{r_0} \right)^2$ 與杯子半徑 r_0 、撞擊前

瞬間水坑深度 d 有關。水坑深度 d 越深則累積係數 K 越大。

半球狀水坑有最大水坑深度為 $d = r_0$ ，此時 $K = 18$ 。

5. 水坑深度 $d(h_0) = d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right)$ 。限制為 $d_{max} \leq r_0$ 。
掉落高度 h_0 越高則水坑深度 $d(h_0)$ 越深，但有一極大值 d_{max} 。
落下超過一定高度後，水坑完整成形時 $d = d_{max}$ 。

6. $v_{jet}^2 =$

$$\left(\frac{\left(r_0^2 + \left(\frac{3}{2} d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) + \frac{\left(d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) \right)^3}{2r_0^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{3}{2} d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) + \frac{\left(d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) \right)^3}{2r_0^2} \right)^2}{r_0} \right)^2 (2gh_0)$$

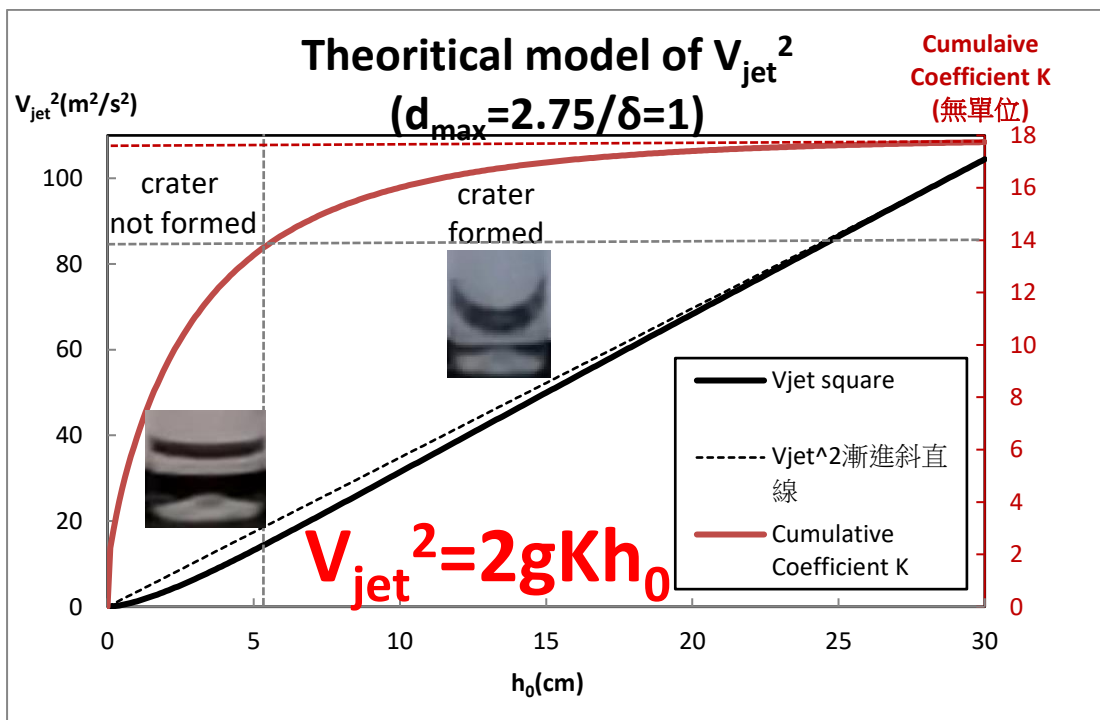
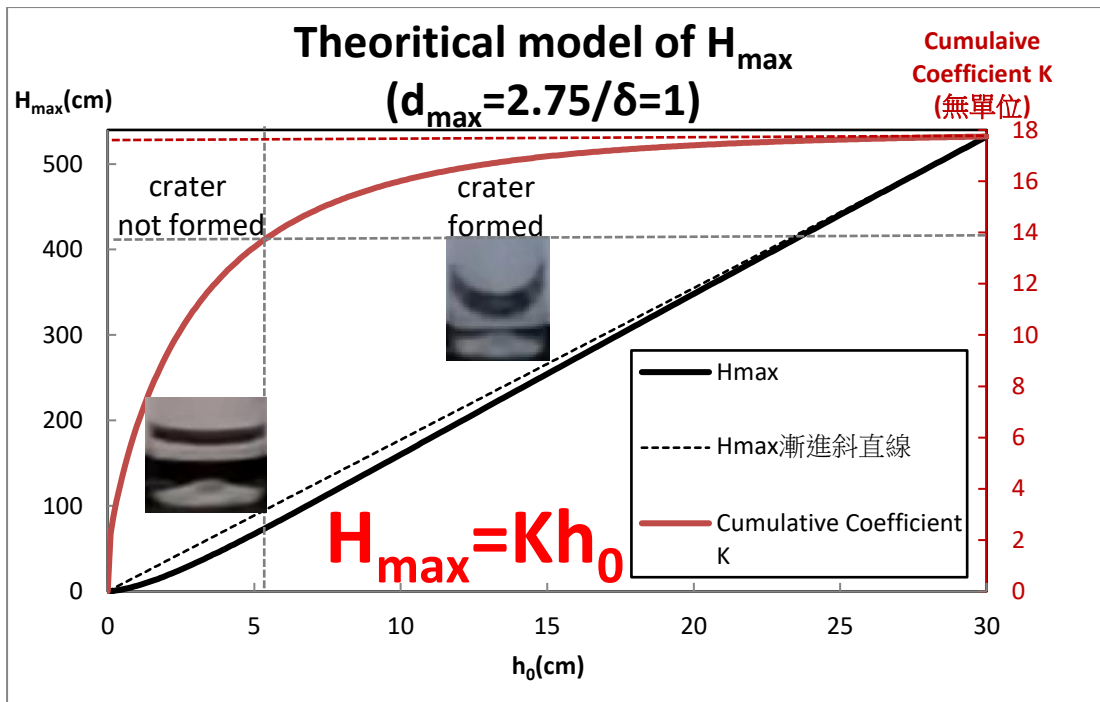
$$H_{max} = \frac{v_{jet}^2}{2g}$$

$$= \left(\frac{\left(r_0^2 + \left(\frac{3}{2} d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) + \frac{\left(d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) \right)^3}{2r_0^2} \right) \right)^2 + \left(\frac{3}{2} d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) + \frac{\left(d_{max} \left(1 - e^{-\delta \sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \right) \right)^3}{2r_0^2} \right)^2}{r_0} \right)^2 (h_0)$$

可以這樣理解此模型：由 1.及 3.的討論，知道 H_{max} 和 v_{jet}^2 都和 h_0 有一放大倍率關係，即兩者都隨 h_0 而增加。而此放大倍率或比例係數，即為圖形的割線斜率，由累積係數 K 決定。

隨著落下高度 h_0 越高，水坑深度 d 漸增導致 K 會漸增，放大的倍率或割線斜率漸增，直到水坑成形後達穩定最大值 K_{max} ，此時放大倍率有最大值。此後 v_{jet}^2 或 H_{max} 簡單正比於 h_0 ，比例係數由累積係數 K_{max} 決定， v_{jet}^2 或 H_{max} 的放大倍率即圖形的斜率來到上限，放大的「效益」最好。

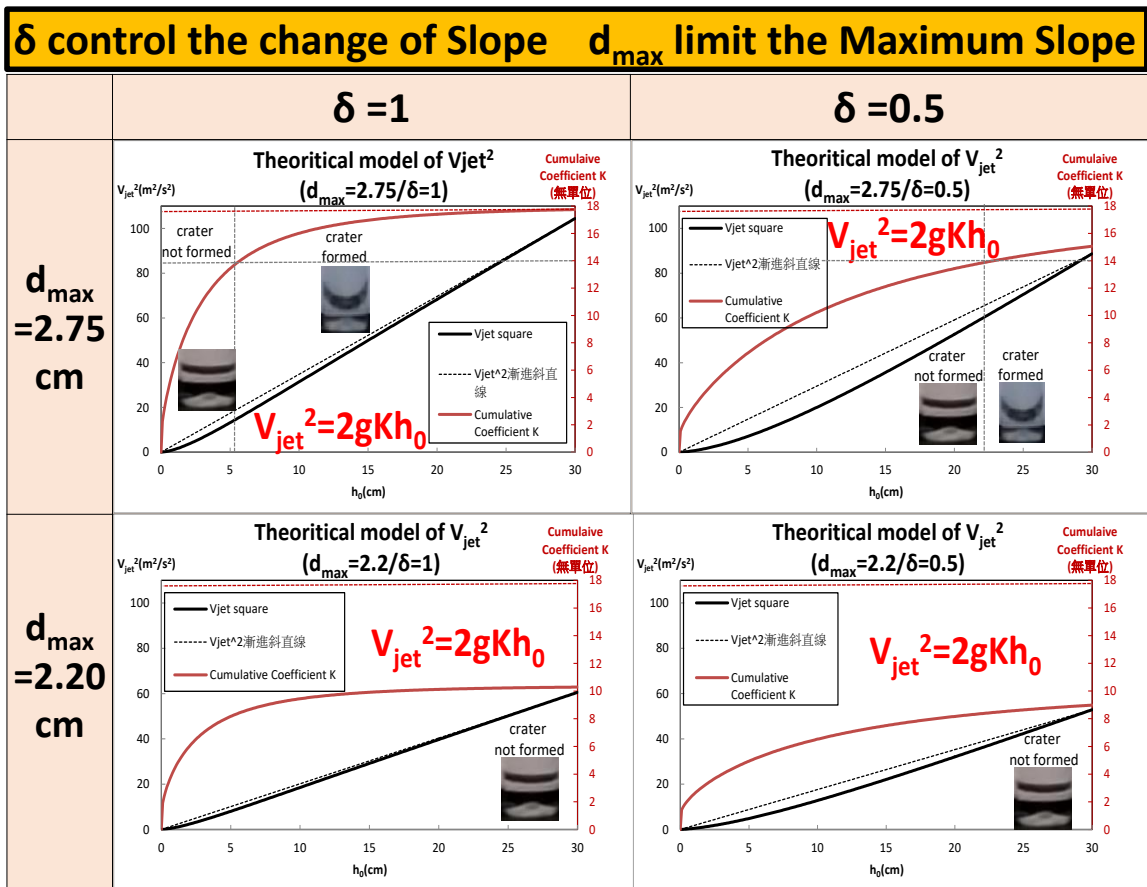
但高度不足以使水坑成形前，放大倍率或累積係數 K 不大，若水坑越淺則累積係數 K 越小，即圖形割線斜率越小。意即此時最大反衝高度及累積噴流速度的放大倍率隨高度 h_0 遞減而迅速衰減，無法形成累積噴流。



7. 因累積係數 K 與水坑深度 d 有正相關，且水坑深度 d 除與落下高度 h_0 有關外，尚與 δ 與 d_{\max} 有關，故再討論 δ 與 d_{\max} 對 K 及 V_{jet}^2 的影響。

比較上方左右兩圖：若 δ 較小，水坑深度 d 或累積係數 K 上升慢， V_{jet}^2 初期的放大倍率(或割線斜率)小。

比較左方上下兩圖：若 d_{\max} 較小，水坑深度 d 或累積係數 K 上限小， V_{jet}^2 放大倍率(或割線斜率)受限。



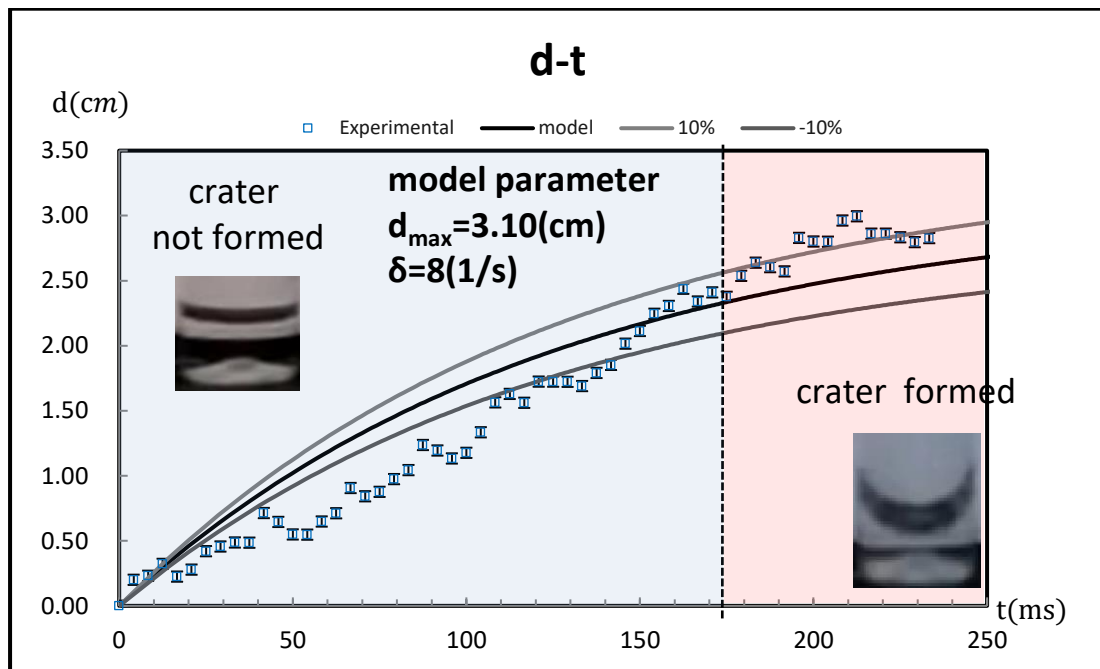
8. 60ml-100ml, $h_0=5-25$ 公分。量測水坑深度 d 與噴流速度 V_{jet}^2 。

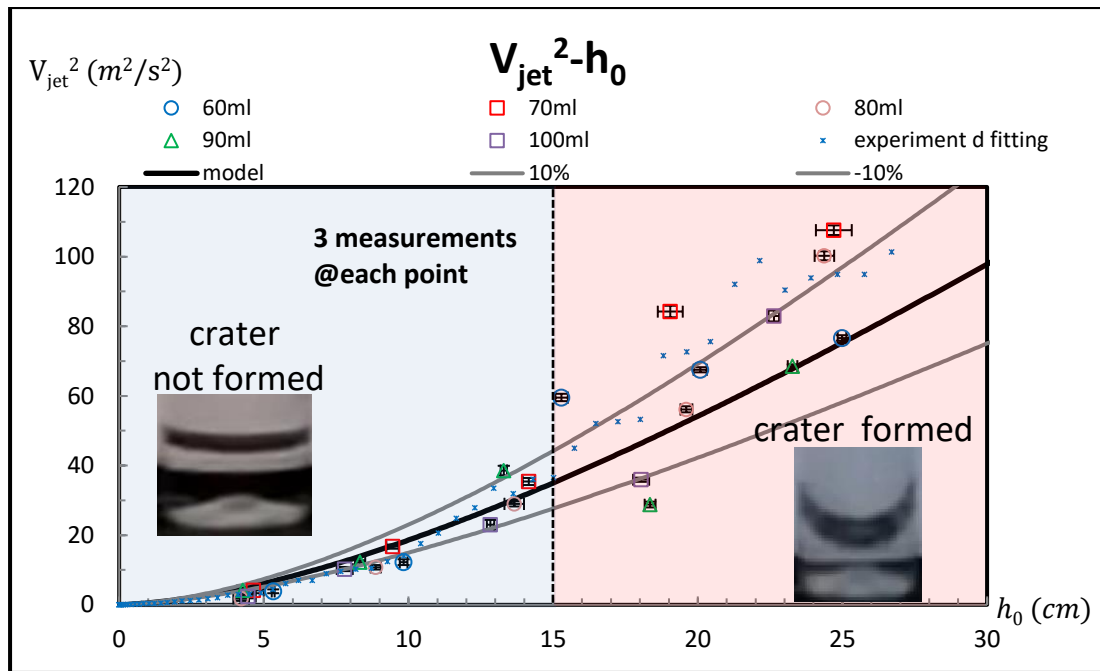
下頁 V_{jet}^2 圖中藍色*為使用 d 實驗值，即下圖中藍色□，搭配累積效應理論做出的 V_{jet}^2 模型。

黑色曲線為使用水坑模型 $d = d_{max}(1 - e^{-\delta t})$ 擬合水坑，
 $d_{max}=3.10(\text{cm})$ 、 $\delta = 8(1/\text{s})$ ，再搭配累積效應做出的 V_{jet}^2 模型。
(上下兩條擬合曲線為 d_{max} 擬合參數正負 10%)

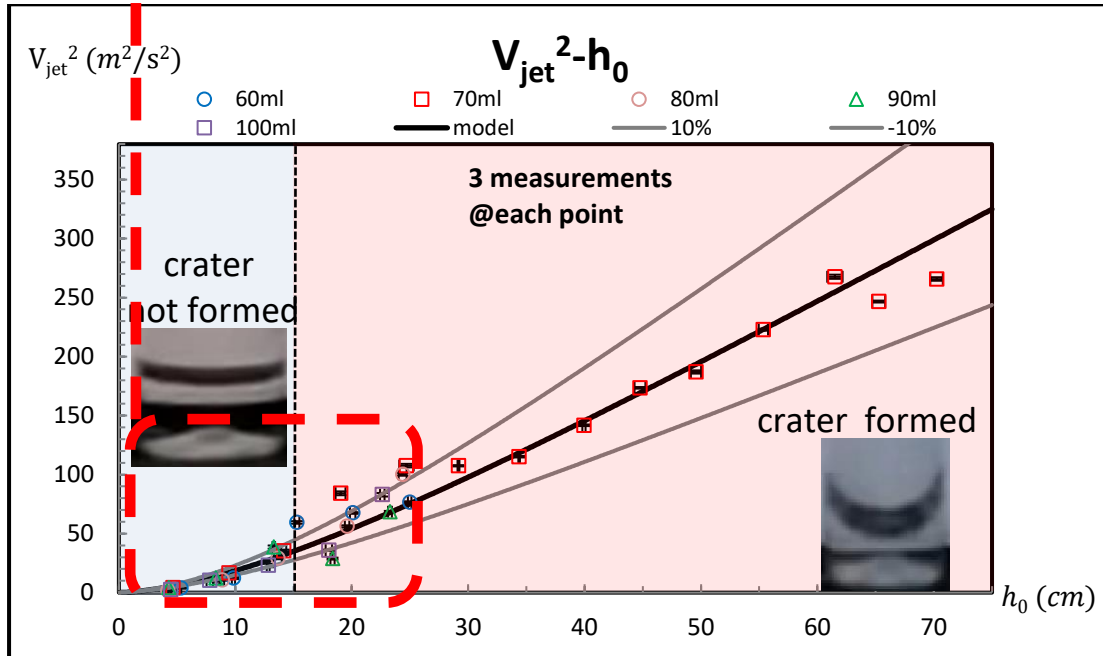
水坑 d 實驗值擬合較直接準確，但水坑模型更具預測力。

另，此範圍內噴流效應與水量多寡無明顯關係。因本實驗為表層水坑能量轉換機制，故只要超過一定水量均無差異。



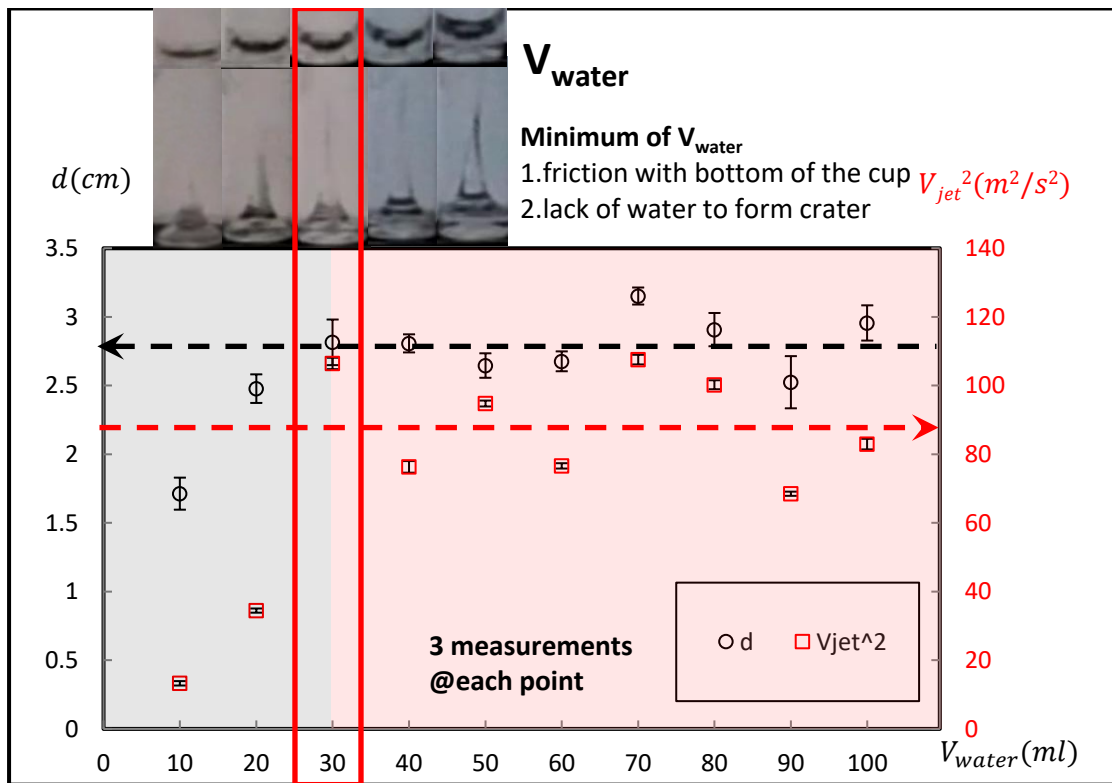


70ml, $h_0=5-70$ 公分，實驗結果與模型穩合。落下高度不高時，水坑未成形，累積效應不明顯。落下高度超過 15 公分後，水坑深度漸趨飽和，此後累積係數達最大固定值，實驗結果與理論模型均成一固定斜率正比關係。



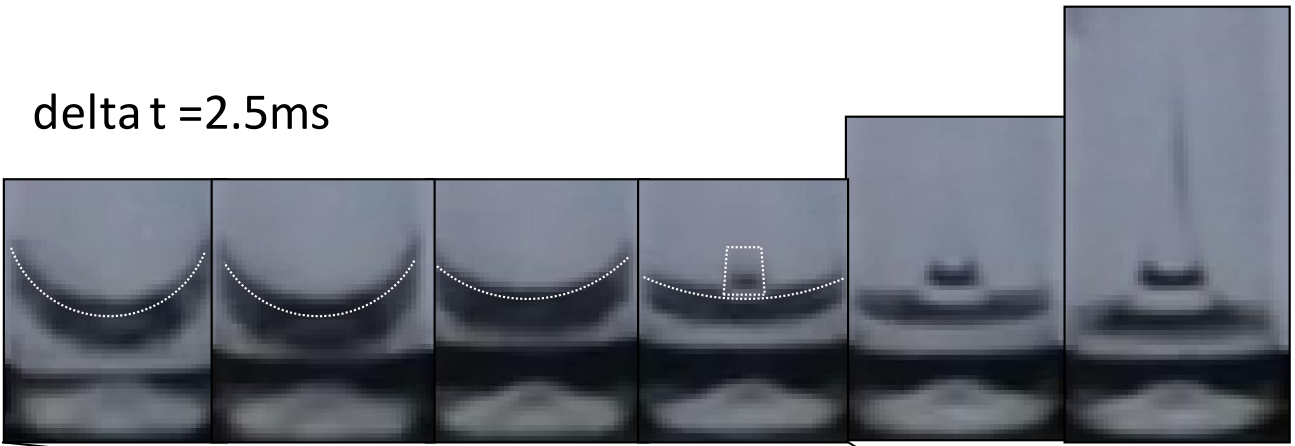
(5) 水量 V_{water} 對水坑 d 形成與累積噴流速度 V_{jet}^2 的影響

1. 水量不足會使水坑無法成形，進而影響噴流速度大小。
2. 水坑成形時會與下層水層摩擦，若水量太少，則會與杯底有較大的摩擦，使水坑形成速度較慢，影響噴流速度大小。
3. 水量有一最小值，只要超過此值，不論水量多少均能使水坑成形，累積噴流速度也差不多。經實驗驗證此值約為 30ml，有最佳能量轉換效率。



四、 比較本實驗撞擊後噴流與其他實驗的噴流

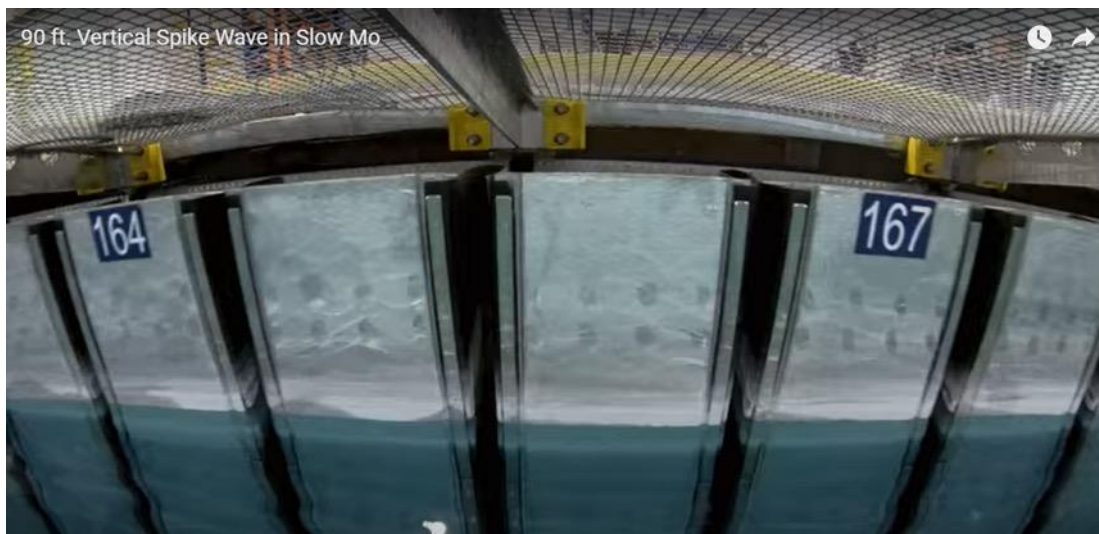
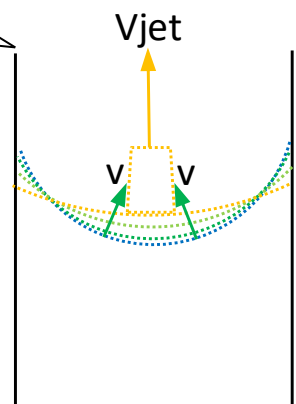
delta t = 2.5ms



(1) 噴流產生時間、產生速度

1. 本實驗高速攝影照片，從杯子撞擊地面開始，歷經水坑崩塌至產生噴流，共經 **7.5ms**，杯子半徑 $r_0=2.75\text{cm}$ ，經計算得能量傳遞速度為 $\frac{2.75\text{cm}}{7.5\text{ms}} = 3.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 。

2. Youtuber “Slow mo guys”利用環狀波動產生器大幅擾動水面，在同心圓的周圍同時向圓心發出一個水的表面波，此水波的波峰在圓心處疊加後，累積成一道高速噴流。





本實驗與之相比是不同機制，本實驗所用水杯水深度約 10cm

高，表面波的波速利用 $v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh(2\pi \frac{d}{\lambda})}$ 計算出範圍在

0.04-0.99m/s 之間。 [*Ocean Waves-Their Energy and Power, Ned Mayo, Physics Teacher 35, September 1997 p352*] · [*Waves and Beaches, Willard Bascom, Doubleday, 1964 p58-59.*]

但如 1.討論，本實驗的能量傳遞速度為 3.67m/s，比表面波的傳遞速度快三倍以上，故本實驗應非表面波的疊加效應。

另，本實驗在不易形變的硬質玻璃杯中也觀察到噴流，因此噴流不是因杯子形變擠壓出的表面波之疊加。與 slow mo guy 影片中的水波產生器大幅度擾動水面有差異。

再者，本實驗使用相同玻璃瓶，不塗蠟時，有噴流；塗蠟表面，沒有噴流。如為杯緣擾動產生的波之疊加，此效應不應與表面材質有關，此說法與實驗結果矛盾。

3. 也有另一可能為杯子衝擊地面時，衝擊使杯子底部震盪，產生高能聲波，透過水傳至表面，形成噴流。

但，本實驗亦非此效應，因：

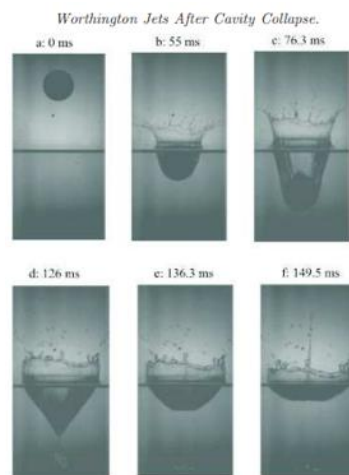
第一，水中聲波波速約 1500m/s，遠大於 1.中觀察到本實驗的能量傳遞速度 3.67m/s，差異達 408 倍，應屬不同效應。

第二，本實驗使用相同玻璃瓶，不塗蠟時，有噴流；塗蠟表

面，沒有噴流。如為杯底震波，震盪效應不應與表面材質有關，此說法與實驗結果矛盾。

(2) 落體落入靜止水中，產生水坑及沃廷頓噴流(Worthington Jet)與本實驗之差異

1. [STEPHANGEKLE AND J.M.GORDILLO, *Generation and Breakup of Worthington Jets After Cavity Collapse*] 中提到” after impact a large cavity is created beneath the surface which subsequently collapses about halfway due to the hydrostatic pressure from the liquid bulk” 重物衝擊水面後，產生空腔，空腔受到水壓擠壓後崩塌，並產生沃廷頓噴流(Worthington Jets)，如下圖所示。



依據此段敘述，此噴流與本實驗不完全相同：

第一，此文獻中的水面原為靜止，僅被外物衝擊形成空腔。

但本實驗為微重力狀態，靠表面張力抬升液面形成水坑。

第二，此噴流的成因為空腔崩塌時，空腔內外水面高度差，產生重力 g 導致的水壓推進水面，可視為此空腔崩塌前後的重力位能轉換為動能。

本實驗雖也有水坑(類似空腔)崩塌，但本實驗中崩塌時，因為衝擊產生的慣性加速度 G 相當巨大 $G \gg g$ 。

2. 另外一篇類似研究。為 MIT 的碩士學位論文，文獻[An *Experimental Study of Worthington Jet Formation After Impact of Solid Spheres, Master of Science in Ocean Engineering at the MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY June 2011*]利用球

狀物體落入水面，產生水坑，水坑閉合後產生沃廷頓噴流，原理與前一篇類似。

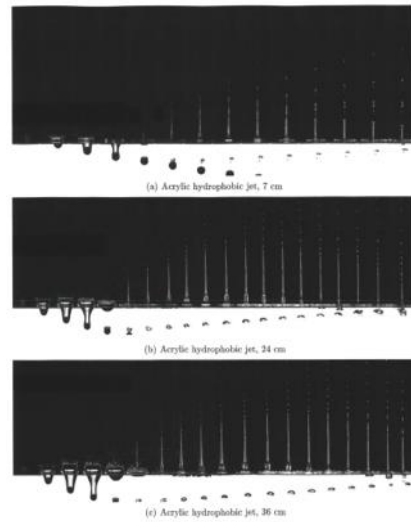


Figure 3-12: Jets formed from impact of hydrophobic acrylic spheres are shown. In (a), the sphere fell from a height of only 7 cm ($Fr = 2.35$). The drop height for (b) was 24 cm ($Fr = 4.35$), and for (c) was 36 cm ($Fr = 5.32$). The time between images is 20 milliseconds.

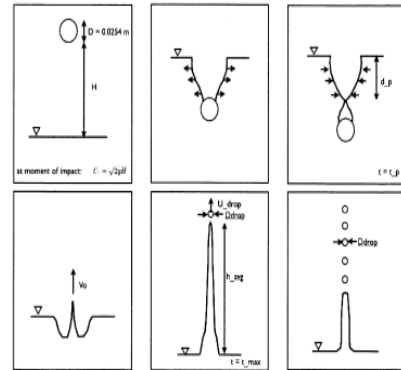


Figure 4-11: The stages of hydrophobic sphere impact and Worthington jet evolution are shown.

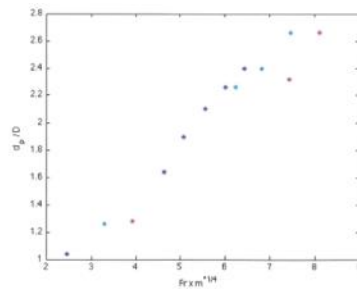


Figure 4-12: Figure (a) scales the non-dimensional depth at which pinch-off occurs with $m^{1/2}Fr$, and Figure (b) scales d_p/D with $m^{1/2}Fr$.

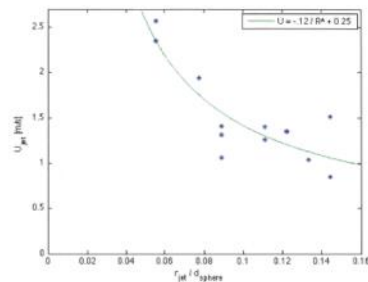


Figure 4-19: The measured velocity of the jet tip is plotted against the non-dimensional radius of the Worthington jet near the tip. The radius is roughly equivalent to the radius parameter used in Rayleigh-Plateau theory, as a constant initial dimension.

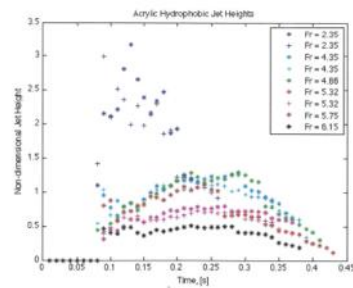


Figure 4-13: The non-dimensional heights of each hydrophobic Worthington jet for the acrylic cases are shown vs. time. Heights are non-dimensionalized by the height from which the sphere fell above the free surface. The data were taken from every fifth frame, or every 10ms.

研究中球體落下高度 7 至 36cm，衝擊後產生的水坑約 0-5cm 與本實驗接近。但，最高噴流高度僅原釋放高度的 3 倍高，最快噴流速度僅 2.5m/s，不論是高度或噴流速度，都比本實驗小許多，本實驗的噴流速度可達 10~15m/s，高度的放大倍數 K 可達 18 倍。

陸、結論

- 一、水杯落下微重力狀態下，逐漸形成水坑，撞擊地面時因巨大慣性加速度 $G \cong 131g \gg g$ 致水坑崩塌，匯集後形成高速累積噴流。
- 二、水坑形狀為部分球體，接觸面親水性質會影響最大接觸角 γ ，與杯子半徑 r_0 共同決定水坑的最大深度上限， $d_{\max} = r_0 \left(\frac{1 - \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)$ 。超親水材料最大的水坑形狀為半球體；疏水性材料如石蠟，不產生水坑，因此並無累積噴流。
- 三、水坑抬升速度係數 δ 代表水坑達最大深度所需特徵時間的倒數， δ 和溫度有正相關， $\delta_{65^\circ \text{C}}$ 較 $\delta_{25^\circ \text{C}}$ 大 2.26 倍。質量遷移是由表面張力 σ 驅動，而動態黏滯係數 μ 為阻尼， σ/μ 為質量遷移的特徵速度 V 。實驗結果確認 δ 與 V 有正相關，證實水坑的形成機制由表面張力與動態黏滯係數共同決定。
- 四、水坑形成過程可用 $d = d_{\max}(1 - e^{-\delta t})$ 模型描述。
- 五、水坑崩塌時水面斜向往中心匯集，產生累積效應。將水坑視為體積相等之等效錐狀水坑，由頂角 α 計算累積係數 $K = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{r_0^2 + s^2} + s}{r_0} \right)^2$ ，落下高度則水坑越深，累積係數越大，理論之最大值為半球狀水坑 K 可達 18。
- 六、可將 K 理解為累積效應的放大倍數。累積噴流速度 v_{jet} 較原速度 v 放大，關係為 $v_{\text{jet}}^2 = Kv^2$ ；反衝最大高度 H_{\max} 較原釋放高度 h_0 放大，關係為 $H_{\max} = \frac{v_{\text{jet}}^2}{2g} = \frac{Kv^2}{2g} = \frac{K(2gh_0)}{2g} = Kh_0$ 。隨著落下高度 h_0 越高， d 漸增導致 K 會漸增，直到水坑成形後達最大值 K_{\max} ，此時放大倍率有最大值。此後 v_{jet}^2 或 H_{\max} 簡單正比於 h_0 ，比例係數與累積係數 K_{\max} 成正比， v_{jet}^2 或 H_{\max} 的放大倍率來到上限，放大的「效益」最好。高度不足以使水坑成形前，累積係數 K 不大，此時放大倍率隨高度 h_0 遞減而迅速衰減。60ml-100ml 的水量，初始高度 20 公分後已形成水坑，能產生近 10m/s 的反衝噴流。
- 七、水量為限制條件，有最小值，若超過此值則實驗結果無差異，不論水量多寡均能使水坑成形，累積噴流速度也類似。若水量不足則水坑無法成形，且水坑成形過程與杯底摩擦，使水坑形成速度較慢，影響噴流速度大小。經實驗驗證此值約為 30ml，該水量有最佳能量轉換效率。
- 八、親水性好、高水溫(高 σ/μ)、高處落下，可產生最大水坑及最快累積噴流。

柒、展望與應用

- 一、利用液體的累積噴流做為動力，來推進乒乓球甚至更重的物體，並找到推進物體時系統的最佳能量轉換效率的條件。
- 二、將研究結果應用至不同種類的液體，例如石油或酒精等液態燃料。幫助設計太空梭燃料槽，使液態燃料能更順利在微重力狀態及受瞬間衝擊時，依然能順利流動補充，維持燃燒效率。
- 三、本實驗僅研究失重狀態，但因太空飛行過程可能歷經不同之加速度狀態，希望拓展研究至不同加速度狀態的水坑生成及噴流機制。
- 四、因流體計算複雜，而本研究提出之模型較為精簡。希望能利用流體模擬軟體模擬累積噴流附近的的速度分布，並與本研究提出的模型比對，驗證本模型在數值分析上是否具有預測性。

捌、參考資料及其他

- 一、「Кумулятивный эффект」(英譯 *cumulative effect*) Майер, В. В. - ISBN 978-5-9221-0826-3
- 二、維基百科俄文版「Кумулятивный эффект」條目
- 三、*International Tables of the Surface Tension of Water*, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Vol. 12, No.3, 1983 ;
- 四、*Viscosity of liquid water in the range -8°C to 150°C* , *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Vol. 7, No.3, 1978

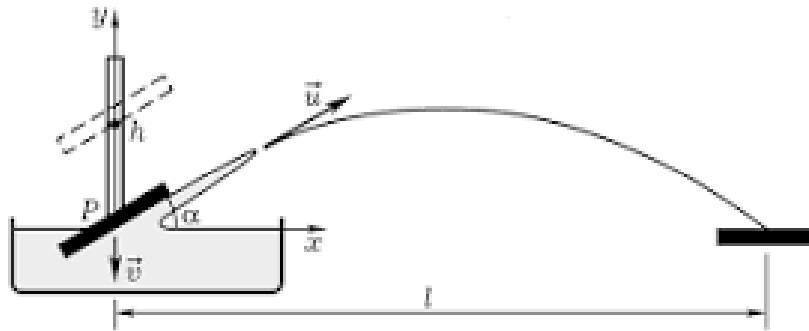


玖、附錄

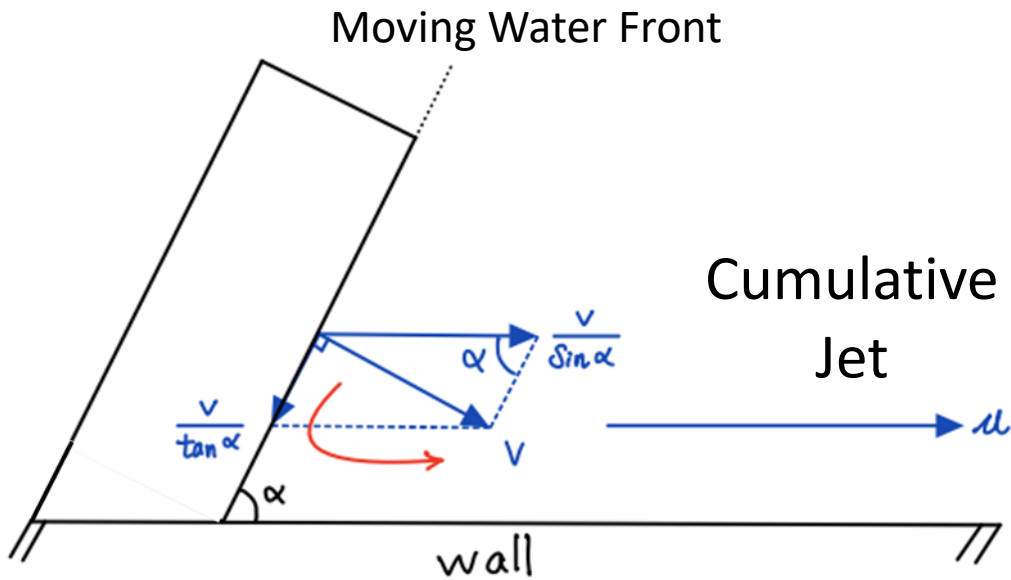
一、累積效應(cumulative effect)

以下分析引用自參考資料二，俄文專書「Кумулятивный эффект」

- (1) 參考資料二中，經設計實驗讓水體不動，讓一硬板以一夾角落下，並以相對速度 v 衝擊水面，如下圖所示，可以產生高速累積噴流 u ，實驗顯示 $u > v$ ，量化後驗證累積效應 $u = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} v$



- (2) 行進中的水流，以一夾角衝擊牆壁，形成累積噴流，如圖所示。



- 行進水面與壁夾角為 α ，利用此角將水流速 v 分為兩個分量：
著牆壁的流速分量 $\frac{v}{\sin\alpha}$ 平行水面的流速分量 $\frac{v}{\tan\alpha}$ 。

2. 平行水面的流速分量衝擊牆壁後，因無法轉向本體方向(左方)，故其會以原速率轉向另一方，即平行牆壁的方向，並與沿牆壁的水流分量匯集並形成累積噴流 (cumulative jet)。

3. 累積噴流的流速為此二股分量速率直接相加，產生累積放大的效果。此速度放大的效應，稱為累積效應(cumulative effect)。

$$u = \frac{v}{\sin \alpha} + \frac{v}{\tan \alpha} = v \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = v \cot \frac{\alpha}{2}$$

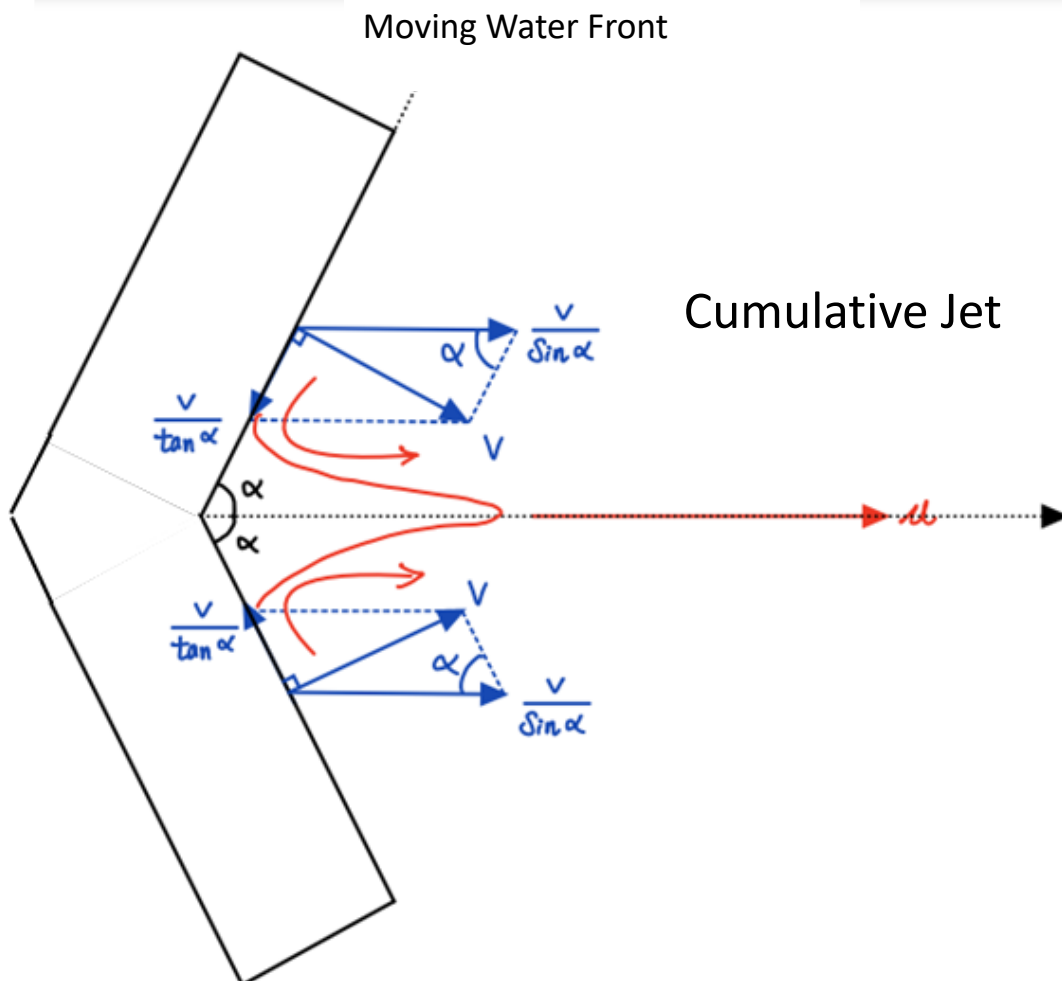
4. 定義累積係數 K (cumulative coefficient) 為速度平方的放大倍

數，即 $u^2 = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 v^2 = \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right)^2 v^2 = Kv^2$

$$K = \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

行進水面與壁夾角 α 越小，累積係數 K 越大，放大效果越好。

(3) 行進中的兩道水流，以一夾角匯集，形成累積噴流，如圖所示。



1. 假設有兩道水流以等速匯集，依據對稱性，將沿對稱軸產生累積噴流。
2. 此累積噴流流速之估計方式，與情況(1)相同。

【評語】 160031

本作品探討水杯落地後杯中產生反衝噴流的現象，研究其中多項物理量之間的關連。作者對於諸多變因有良好的控制分析，對於現象亦有頗完整描述。建議作者可進一步對其中所牽涉到的物理機制多加理解與討論，優化其所使用的物理模型。