2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010045**

參展科別　數學

作品名稱　少數決之進階討論

得獎獎項

就讀學校　新北市立海山高級中學

指導教師　董維新

作者姓名　董妍亭

關鍵詞　少數決、期望值、賽局理論（Game Theory）

作者簡介

我是董妍亭，就讀於海山高中，我喜歡閱讀、寫程式、聽音樂。我曾參加過學校的資訊研究社。我覺得做科展和寫程式都是一種過程可能會遇到許多困難或辛苦，但完成了以後會有滿滿的成就感的事物。在做科展的過程中，也讓我對程式的邏輯更加的了解。也希望透過數學的研究使我的編程能力更上一層樓。

摘要

「少數決遊戲」就是針對 N 個玩家詢問一些只能回答是或否的問題，而問題回答不必符合實際狀況，由少數一方獲勝，這個部分的定義與少數派賽局（Minority Game）中的定義相同，不同處為獲勝者須進入下一輪的問題，直到剩下一位或兩位玩家為止，由剩下玩家獲得最後的 N 單位獎金，但所有人需償還原來遊戲開始時所付出 1 單位的代價。前作「詐欺遊戲之少數決」[1]即對該問題作詳細的探索，但**僅限於一組結盟人數**。本作品是將前作內的獲利期望值與演算法作進一步的發展討論，並對結盟人數超過必勝結盟人數時的期望值變化做討論，得到賽局理論中的「少數派博弈」類似的結論。本作品更進一步討論兩組結盟人數的結果與期望值，後續的變化有些類似賽局理論。

Abstract

"Minority Decision Game" refers to a game in which N players are asked some questions that can only be answered yes or no, and the answers do not have to conform to the actual situation. A minority party wins. The definition of this part is the same as that in the Minority Game. The difference is that the winner must enter the next round of questions until one or two players are left, and the remaining players will get the final N unit bonus, However, everyone needs to repay the cost of 1 unit paid at the beginning of the original game. The previous "Minority Decision of Fraud Game" [1] explored this issue in detail, but only limited to a group of alliance members. This work is to further develop and discuss the profit expectation and calculate in the previous work, and discuss the change of the expectation when the number of allies exceeds the number of winning allies, and get a similar conclusion of "Minority Game" in Game Theory. This work further discusses the results and expectations of the number of alliance members of the two groups. The subsequent changes are somewhat similar to the Game Theory.

壹、前言

一、研究動機

少數決問題來自於日劇「詐欺遊戲」第二回的「少數決勝淘汰遊戲」，前作「詐欺遊戲之少數決」[1]即對該問題作個詳細的探索，但**僅限於一組結盟人數**。原先以為已將一組結盟人數討論詳盡，但在與評審討論的過程中又蹦出新的火花來，新的討論方向為在「討論一組結盟人數下超出原最低結盟人數之玩家人數的獲利期望值」。除此之外，本文進一步對於兩組以上結盟人數進行獲利討論，而逐漸轉向賽局理論（Game Theory）方向，但在賽局理論中僅找到少數派賽局（Minority Game）與少數決問題比較接近，但前者為「**一輪少數決問題**的長期觀察結果變化，將長期結果進行賽局理論討論」，與少數決遊戲為「**多輪少數決問題**直到最後一兩位玩家」不大相同。此外，另對原作內的獲利期望值與演算法作進一步的發展討論。

二、研究問題定義

本文將[1]中的原問題定義再定義成「少數決遊戲」：就是針對 N 個玩家詢問一些只能回答是或否的問題，而問題回答是或否可以隨意（問題的回答不必符合實際狀況），這個部分的定義與少數派賽局（Minority Game）中的定義相同。遊戲要求每位玩家遊戲開始時付出 1 單位的代價，由人數較少的一方獲得勝利再進入下一輪問題，最終只剩下一兩個玩家獲得最後的 N 單位代價，但所有玩家於遊戲結束時需償還原來遊戲開始時所付出 1 單位代價。日劇中已知結盟 M 位玩家即能保證必勝並獲得利益，前作[1]中對 M 進行詳盡的討論。本文進一步討論於遊戲中結盟 m ($m \geq M$) 位玩家能保證必勝，並求其獲利的期望值。若最後僅剩 1 人，則獨得所有的代價 N 單位，但緣由於結盟，故須償還 m 位玩家在原來遊戲開始時所付出 m 單位的代價，其餘平分，每位玩家可以獲得利益 $\frac{N-m}{m}$ 單位，研究中不討論反叛與不公平平分的狀況。若最後剩 2 人，則遊戲無法分出勝負，因為 2 人回答問題若恰為 1 是 1 否或是 2 是 0 否或是 0 是 2 否，皆無法淘汰成 1 人，故此種狀況則平分所有的代價 N 單位，

但緣由於結盟，故每位玩家可以獲得利益 $\frac{\frac{1}{2}N-m}{m}=\frac{N-2m}{2m}$ 單位。**遊戲中若存在其他結盟對手，則遊戲可能會相持不下而無法分出勝負，若不另外增加規則將視為平手。**

三、名詞定義與解釋

(一)遊戲中隨著其他玩家的隨機回答，能獲得的最大利益稱為**最高獲利**。

(二)遊戲中隨著其他玩家的隨機回答，能獲得的最小利益稱為**最低獲利**。

(三)若其他玩家回答為隨機的情形下計算所得到的利益期望值稱為**獲利期望值**。

(四)若玩家人數 N 的二進位中除次高位外皆為 1 則稱 N 為**修正數**。

四、研究目的

原作藉由歸納法來探討在 N 個玩家下保證我方至少一人獲得最後勝利的結盟人數 M 及最高獲利與最低獲利，另外也討論其他未結盟的玩家若採隨機回答，則可以得到獲利的期望值為何？最後我在原作巧妙的利用二進位來解決問題。而本作品探討若非獨贏時，增加結盟人數為 m ($m \geq M$) 時，獲利期望值的變化情形。而原作對獲利期望值未完成的部分與二進位演算法的優化，亦在本作品中呈現。本文討論若存在其他組的結盟對手，決策的相關變化也作出相對的討論，此部分的討論比較接近於賽局理論（Game Theory）方向。

五、文獻回顧

在前作[1]中討論到在僅有一組結盟玩家，其他皆為隨機回答的情況下，會有以下的定理與性質：

定理 1 應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M=2^R$ 個。（[1]中頁 6）

定理 2 應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M=2^R$ 個。參賽玩家人數 N 中

若未結盟人數 $N-M$ 為偶數，則該輪少數勝利方未結盟人數人數至多 $\frac{N-M-2}{2}$

若未結盟人數$N-M$為奇數，則該輪少數勝利方未結盟人數人數至多$\frac{N-M-1}{2}$

定理 2 中未結盟人數$N-M$若為偶數且該輪回答是或否人數各有$\frac{N-M}{2}$個，則平手不分出勝負，需重新回答問題，此形成定理 2—1 特殊情形。([1]中頁 7)

定理 3 在僅有一組結盟玩家下，若找到結盟$M=2^R$個玩家，則參賽玩家人數N介於

2^R至$2^R+2\times 2^R-2$時，此時結果必然是獨勝。

推論 1 若參賽玩家人數$N=2\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$時，此時找到結盟$M=2^R$個玩家，

結果必然是獨贏。

推論 2 當參賽玩家人數$N=3\times 2^R-2+L, 1\le L\le 2^R$時，此時找到結盟$M=2^{R+1}$個玩家，

結果保證必勝且獨贏。([1]中頁 23)

定理 4 在僅有一組結盟玩家下，若找到結盟$M=2^R$個玩家，則參賽玩家人數N介於

$2^R+2\times 2^R-1$至$2^R+3\times 2^R-2$時，此時結果可保證必勝但可能均分。

推論 3 若參賽玩家人數$N=3\times 2^R-2+L$ ，$1\le L\le 2^R$時，此時找到結盟$M=2^R$個玩家

，結果可保證必勝但未必獨贏。([1]中頁 24)

定理 5 獨贏時最高（低）獲利上限 2，但永遠不等於 2，兩人均分時最高獲利上限 3，但

永遠不等於 3。最低獲利上限 1，但永遠不等於 1。([1]中頁 25～26)

在 [1]中討論到在僅有一組結盟玩家，其他皆為隨機回答的情況下，將已經完成的 *N*、*M*、是否獨勝、最高獲利與最低獲利整理如表 1：

表 1 中的最高獲利與最低獲利隨著玩家人數 *N* 的變化而呈現規律的變化，觀察每輪間的關係時，發現每一輪都會使得人數減少一半多一些，而結果會遞迴變成前面的人數，參考 2003 年學長所做的科展[3]其與約瑟夫問題很相像，似乎都跟除 2 後有些關聯性，([1]中頁 15）就參考 Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯，Concrete Mathematics，具體數學。P.9～19[2]中處理約瑟夫問題的手段來解決少數決問題（[1]中頁 2）的最高獲利與最低獲利，獲得少數決 *XY* 演算法與少數決 *PQ* 演算法（[1]中頁 17～18)。

表 1：3 至 30 的是否獨勝、最高獲利與最低獲利表（[1]中頁 14）

N	3	4	5	6
M	2	2	2	2
是否獨勝	是	是	否	否
最高獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2=\frac{4}{2}$
最低獲利	$\frac{1}{2}$	$1=\frac{2}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$

N	7	8	9	10	11	12	13	14
M	4	4	4	4	4	4	4	4
是否獨勝	是	是	是	是	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2=\frac{8}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$
最低獲利	$\frac{3}{4}$	$1=\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
M	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
是否獨勝	是	是	是	是	是	是	是	是	否	否	否	否	否	否	否	否
最高獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{18}{8}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{20}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{22}{8}$
最低獲利	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{14}{16}$

貳、研究方法或過程

一、演算法作進一步的發展

具體數學 P.9～19[2]中處理約瑟夫問題的方法為人數 N 人時，留一汰一最後一個人的編號為將 N 的二進位中第一個非 0 的 1 移至最後一位即為解答，例如 $N=22=(10110)_2$，22 人留一汰一最後一個人的編號為 $(01101)_2=13$。「詐欺遊戲之少數決」[1]在區展中利用少數決 XY 演算法來解決最高獲利問題，在國展中利用少數決 PQ 演算法來同時解決最高獲利與最低獲利問題（[1]中頁 17～18）。但少數決 XY 演算法與少數決 PQ 演算法看起來都太複雜，實際上若按照約瑟夫問題的處理方法，演算法可簡化為：

遊戲經過 R 輪不平手回合後必勝，其中 R=(N 的二進位長度) -2

N 的二進位第 2 位為 0 則我方為獨勝，N 的二進位第 2 位為 1 則可能兩人均分。

N 的二進位為 $(10\underbrace{B_R B_{R-1}\cdots B_1}_{R\text{位}})_2$ **則我方為獨勝，獲利分母為** $(01\underbrace{0\,0\cdots 0}_{R\text{位}})_2$ **，獲利分子為** $(01\underbrace{B_R B_{R-1}\cdots B_1}_{R\text{位}})_2$ **，其中分母+分子=N**。

N 的二進位為 $(11\underbrace{B_R B_{R-1}\cdots B_1}_{R\text{位}})_2$ **則可能兩人均分，最高獲利分母為** $(01\underbrace{0\,0\cdots 0}_{R\text{位}})_2$ **，最高獲利分子為** $(10\underbrace{B_R B_{R-1}\cdots B_1}_{R\text{位}})_2$ **，其中分母+分子=N**。**最低獲利分母為** $(10\underbrace{0\,0\cdots 0}_{R\text{位}})_2$ **，最低獲利分子為** $(01\underbrace{B_R B_{R-1}\cdots B_1}_{R\text{位}})_2$ **，其中分母+分子=N**。

倘若 N 的二進位中 $B_1, B_2, \cdots, B_R$ 皆為 1（N 為修正數）則須修正。

例如 $N=22=(10110)_2$，遊戲需經過 $R=3$ 輪不平手回合後必勝，需結盟 $M=2^R=8$ 人，由第二位為 0，故其為獨勝，獲利分母為 $(1000)_2=8$，分子為 $(01110)_2=14$，獲利為 $\frac{14}{8}$。例如 $N=30=(11110)_2$，遊戲需經過 $R=3$ 輪不平手回合後必勝，需結盟 $M=2^R=2^3=8$ 人，第二位為 1，故其為可能均分，最高獲利分母為 $(1000)_2=8$，最高獲利分子為 $(10110)_2=22$，獲利為 $\frac{22}{8}$。最低獲利分母為 $(10000)_2=16$，最低獲利分子為 $(001110)_2=14$，獲利為 $\frac{14}{16}$。

透過修正的概念，整個演算法能變得比「詐欺遊戲之少數決」[1]中簡單。

二、一組結盟玩家的獲利期望值討論

[1]中定理 5（頁 25～26），實際上獨贏時除前述的修正數外獲利下限為 1，兩人均分時除修正數外最高獲利下限 2，最低獲利下限 $\frac{1}{2}$。故修正定理 5。

修正定理 5 除前述的修正數外，獨贏時獲利上限為 2，但永遠不等於 2，下限為 1。

兩人均分時最高獲利上限為 3，但永遠不等於 3，下限為 2。

兩人均分時最低獲利上限為 1，但永遠不等於 1，下限為 $\frac{1}{2}$。

在[1]中計算 N 為 3 至 14 的期望值，但沒有理想的規律，在國展比賽之前，計算出 N 為 3 至 94 的期望值，並繪圖得到圖 1。由圖中亦可觀察到修正定理 5。

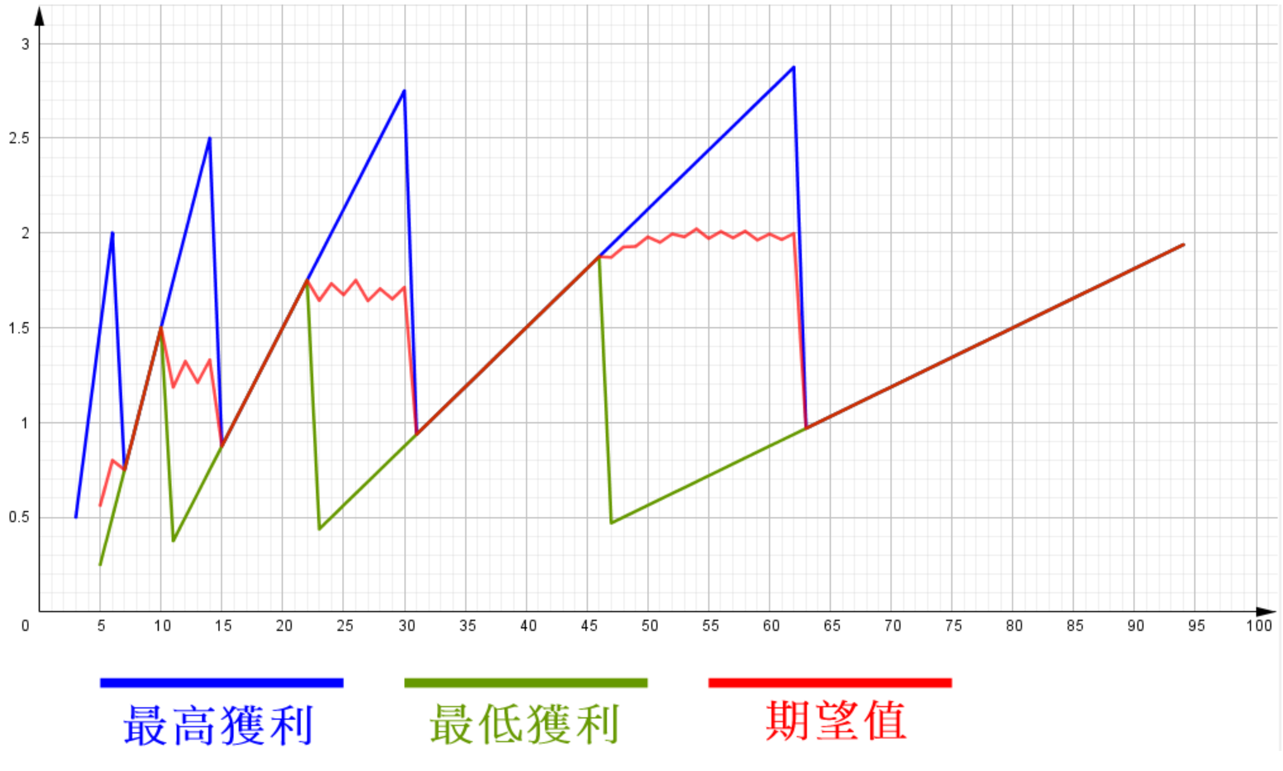

圖 1：最高獲利、最低獲利與期望值

觀察在可能兩人均分時的期望值，其圖形呈波折狀況，實際上在**偶數的期望值會比前後兩個奇數的期望值高**，其主要原因為偶數會形成平手的情形而增高兩端的機率值，進而提高期望值。再觀察 N 為 47 至 62 的期望值，可發現值在 2 的附近波動，但受限於 N 為 95 以上時，數據已經大於10^{13}而難以計算，無法進一步驗證自己的猜想。不過在此大膽的猜測後面的期望值收斂在 2，這是根據修正定理 5 來猜測。

三、一組結盟人數下超出原結盟人數 M 後的獲利期望值變化

前作[1]在國展時，評審提出問題：「22 個玩家時結盟 8 位玩家可獨贏，然而結盟 7 位玩家與 9 位玩家會有什麼結果？」,「結盟 9 位玩家，將 1 位視為自由球員，不行嗎？」

22 個玩家由討論或表 1 中可以知道需應對 3 輪不平手問題，由定理 1 知需要結盟的玩家為 $M=2^R=8$ 個玩家，由定理 3 知結果為獨贏。若僅結盟 $m=7$ 位玩家少於 $M=8$ 個玩家時，無法達到保證必勝的前提。若結盟 $m=9$ 位玩家多於 $M=8$ 個玩家時，結果還是獨贏，獲得最後的 $N=22$ 單位獎金，然而獲利為 $\frac{N-m}{m}=\frac{22-9}{9}=\frac{13}{9}$ 小於 $M=8$ 個玩家時所得的獲利 $\frac{N-M}{M}=\frac{14}{8}$，所以不利。故知獨贏的情形下，人數越多導致償還原來遊戲開始時所付出 1 單位代價後的獲利 $N-m$ 會越少，故每個玩家所得的獲利 $\frac{N-m}{m}$ 越少，越不利於結盟，亦即人數越少越好，但需滿足保證必勝的前提下，結盟人數 $M=2^R$ 為最佳，整理出以下定理：

定理 6 在能獨贏的條件下，人數越多會導致獲利越少。

定理 7 在僅有一組結盟玩家條件下，參賽玩家人數 N（$2\times2^R-1\le N\le3\times2^R-2$）時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必然是獨勝，每個玩家所得的獲利 $\frac{N-M}{M}$，結盟人數最佳。若結盟超過 $M=2^R$ 個玩家，會導致獲利下降。

在此蹦出了新的火花，當參賽玩家人數 N（$3\times2^R-1\le N\le4\times2^R-2$）時，若找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，由定理 4 知此時結果可保證必勝但可能均分；若找到結盟 $M=2^{R+1}$ 個玩家，由定理 3 知此時結果可保證必勝且獨贏，再由定理 6 知結盟人數越多會導致獲利越少，故不考慮結盟超過 $M=2^{R+1}$ 個玩家。此時若考慮結盟 m（$2^R<m<2^{R+1}$）個玩家，則超出 $m-2^R$ 個玩家會提升獨贏的機率，但會降低獲利，考慮期望值的變化。我將計算期望值並將結果放置研究結果與討論中。

四、兩組結盟人數的遊戲結果與獲利初步討論

[1]中主要討論在僅有一組結盟玩家，其他皆為隨機回答的情況下的獲利狀況，而在本文中則再討論有兩組結盟玩家，其他皆為隨機回答的情況下的獲利狀況，這個部分的討論是其它資料都沒有分析過的。在這裡討論中所謂結盟，人數至少要兩人方能形成最小結盟單位，若只有 1 人，則變回原先的其他皆為隨機回答的情況。為了討論方便起見，規定兩組結盟玩家為 AA 組與 BB 組，人數各為 N_A 與 N_B ，其中人數較多的為 AA 組即 $N_A \ge N_B \ge 2$ ，設未結盟玩家人數為 N_N ，得 $N = N_A + N_B + N_N$ 。由定理一知應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M = 2^R$ 個，故假定 AA 組的人數至少為 $M = 2^R$ 個即 $N_A \ge 2^R$ 。在此由玩家人數 N 開始討論：若 $N \le 3$ 無法滿足兩組結盟玩家 $N_A \ge N_B \ge 2$ ，故由 $N = 4$ 開始討論。

(一)問題初步討論：

1. $N = 4$ 時，顯然 $N_A = N_B = 2$, $N_N = 0$ ，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

2. $N = 5$ 時， $N_A = N_B = 2$, $N_N = 1$ ，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答是(否)則否(是)方為少數方，形成兩組結盟玩家均分。兩組結盟玩家獲利皆為 $\frac{1}{4}$ 。

3. $N = 6$ 時，討論 AA 組與 BB 組人數

(1) $N_A = N_B = 2$, $N_N = 2$ ，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 1 是 1 否，則形成平手，重新問問題；若未結盟玩家回答 2 是(2 否)，則否(是)方為少數方，形成兩組結盟玩家均分，獲利皆為 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 。

(2) $N_A = 4$, $N_B = 2$, $N_N = 0$ ，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

(二)問題初步分析：

以上發現兩組結盟玩家與一組結盟玩家的狀況不盡相同，一組結盟玩家的結果僅有兩種情形：結盟玩家獨贏或與其他玩家均分，若發生平手則可以重新問問題直到不平手為止。但兩組結盟玩家就可能會相持不下而陷入僵局。後續的分析放在研究結果與討論中。

參、研究結果與討論

一、一組結盟人數下超出原結盟人數 M 後的獲利期望值變化

以下考慮在僅有一組結盟玩家條件下，應對 R 輪不平手問題，若參賽玩家人數 N（$3\times2^R-1\le N\le4\times2^R-2$）時，考慮結盟 m（$2^R<m<2^{R+1}$）個玩家，其期望值的變化。

(一) $N=5$ 時

1. 考慮結盟人數 $m=M=2$，結果必勝但可能均分，計算機率將結果列於表 2。

表 2： $N=5, m=2$ 獲得利益期望值計算

未結盟回答	3 是與 3 否（獨贏）	2 是 1 否與 1 是 2 否（兩人均分）	總和
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
獲得利益	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	
乘積	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

2. 考慮結盟人數 $m=3$，結果必勝但可能均分，計算機率將結果列於表 3。

表 3： $N=5, m=3$ 獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	均分	總和
機率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
獲得利益	$\frac{N-m}{m}=\frac{2}{3}$	$\frac{N-2m}{2m}=-\frac{1}{6}$	
乘積	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

此時表格中**赫然出現獲得利益為負的情形，主要原因為結盟者太多**，超過遊戲玩家的一半卻又無法獨贏，所以獲利不足以支付遊戲開始的 1 單位，且此時期望值為 $\frac{1}{4}$ 比 $\frac{9}{16}$ 小。

3. 考慮結盟人數 $m=4$ 必勝且獨贏，獲利為 $\frac{1}{4}$，與 $m=3$ 的期望值相同。

(二) $N=6$ 時

1. 考慮結盟人數 $m=M=2$，結果必勝但可能均分，計算機率將結果列於表 4。

表 4： $N=6, m=M=2$獲得利益期望值計算

未結盟回答	4 是與 4 否（獨贏）	3 是 1 否與 1 是 3 否（兩人均分）	總和
忽略平手 調整機率	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
獲得利益	2	$\frac{1}{2}$	
乘積	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$

2. 考慮結盟人數$m=3$，結果必勝但可能均分，計算機率將結果列於表 5。

表 5： $N=6, m=3$獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	兩人均分	總和
忽略平手 調整機率	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1
獲得利益	$\frac{N-m}{m}=1$	$\frac{N-2m}{2m}=0$	
乘積	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$

3. 考慮結盟人數$m=4$必勝且獨贏，獲利為$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。此時特別地$\frac{4}{5}>\frac{1}{2}>\frac{2}{5}$。

$N=7$至10因其為獨贏，由定理 7 知，不討論超出人數M後的獲利期望值變化。

(三) $N=11$時

1. 考慮結盟人數$m=M=4$，結果必勝但可能均分，計算機率將結果列於表 6。

表 6： $N=11, m=M=4$獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	兩人均分	總和
獲得利益	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{8}$	
對應機率	$\frac{151}{256}$	$\frac{105}{256}$	1
乘積	$\frac{1057}{1024}$	$\frac{315}{2048}$	$\frac{2429}{2048}$

2. 考慮結盟人數$m=5$，結果必勝但可能均分，計算機率如下：

假設結盟人數其中 4 人選擇 2 是 2 否，剩下 1 人選 X 方(可能是也可能否)，另一方為 Y 方，未結盟人數$N-m=6$人，選擇 X 方人數為 0～6 人，結果如下：

表 7： $N=11, m=5$，結盟方選 X 有 3 人，未結盟回答討論

未結盟選 X	0	1	2	3	4	5	6
機率	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$
結果勝方	X3+0	X3+1	X3+2	Y2+3	Y2+2	Y2+1	Y2+0
最終勝利	獨贏	獨贏	可能均分	可能均分	獨贏	獨贏	獨贏
獨贏機率	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	1	1

整理結果列於表 8。

表 8： $N=11, m=5$ 獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	兩人均分	總和
獲得利益	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{10}$	
對應機率	$\frac{83}{128}$	$\frac{45}{128}$	1
乘積	$\frac{249}{320}$	$\frac{9}{256}$	$\frac{1041}{1280}$

3. 考慮結盟人數 $m=6$，結果必勝但可能均分，有兩種策略，計算機率如下：

假設結盟人數其中 4 人選擇 2 是 2 否，剩下 2 人選 X 方(可能是也可能否)，另一方為 Y 方，未結盟人數 $N-m=5$ 人，選擇 X 方人數為 0～5 人，結果如下：

表 9： $N=11, m=6$，結盟方選 X 有 4 人，未結盟回答討論

未結盟選 X	0	1	2	3	4	5
機率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
結果勝方	X4+0	X4+1	Y2+3	Y2+2	Y2+1	Y2+0
最終勝利	獨贏	獨贏	可能均分	獨贏	獨贏	獨贏
獨贏機率	1	1	$\frac{1}{4}$	1	1	1

假設結盟人數其中 6 人選擇 3 是 3 否，未結盟人數 $N-m=5$ 人，結果如下：

表 10： $N=11, m=6$ ，結盟方選選擇 3 是 3 否，未結盟回答討論

未結盟選是	0	1	2	3	4	5
機率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
結果勝方	是 3+0	是 3+1	是 3+2	否 3+2	否 3+1	否 3+0
最終勝利	獨贏	獨贏	可能均分	可能均分	獨贏	獨贏
獨贏機率	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

比較獨贏機率發現選擇 2 是 2 否，剩 2 人選 X 方的策略獨贏機率較高，結果列於表 11。

表 11： $N=11, m=6$ ，結盟方選 X 有 4 人，獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	兩人均分	總和
獲得利益	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{12}$	
對應機率	$\frac{49}{64}$	$\frac{15}{64}$	1
乘積	$\frac{245}{384}$	$\frac{-15}{768}$	$\frac{475}{768}$

4. 考慮結盟人數 $m=7$ ，結果必勝但可能均分，有兩種策略，計算機率如下：

假設結盟人數其中 4 人選擇 2 是 2 否，剩下 3 人全選 X 方(可能是也可能否)，另一方為 Y 方，未結盟人數 $N-m=4$ 人，選擇 X 方人數為 0～4 人，結果如下：

表 12： $N=11, m=7$ ，結盟方選 X 有 5 人，未結盟回答討論

未結盟選 X	0	1	2	3	4
機率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
結果勝方	X5+0	Y2+3	Y2+2	Y2+1	Y2+0
最終勝利	獨贏	可能均分	獨贏	獨贏	獨贏
獨贏機率	1	$\frac{1}{4}$	1	1	1

假設結盟人數其中 4 人選擇 2 是 2 否，剩下 3 人 2 人選 X 方(可能是也可能否)，1 人選另一方為 Y 方，未結盟人數 $N-m=4$ 人，選擇 X 方人數為 0～4 人，結果如下：

表 13： $N=11, m=7$ ，結盟方選 X 有 4 人，未結盟回答討論

未結盟選 X	0	1	2	3	4
機率	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
結果勝方	X4+0	X4+1	Y3+2	Y3+1	Y3+0
最終勝利	獨贏	獨贏	可能均分	獨贏	獨贏
獨贏機率	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1

比較獨贏的機率，發現選擇兩者獨贏機率均相同，整理結果列於表 14。

表 14： $N=11, m=7$ ，獲得利益期望值計算

最終勝利	獨贏	兩人均分	總和
獲得利益	$\frac{4}{7}$	$-\frac{3}{14}$	
對應機率	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{16}$	1
乘積	$\frac{52}{112}$	$\frac{-9}{224}$	$\frac{95}{224}$

5. 考慮結盟人數 $m=8$ 必勝且獨贏，獲利為 $\frac{3}{8}$ 。

(四) 再計算 $N=11$ 到 14 , $m=4$ 到 8 並整理前面的討論，得到下列表 15

表 15-1： $N=3$ 至 6 獲得利益期望值計算

玩家人數	結盟人數	回答型態	獨贏機率及近似值	期望值
3	2		1	$\frac{1}{2}=0.5$
4	2		1	1
5	2		$\frac{1}{4}=0.25$	$\frac{9}{16}=0.5625$
	3		$\frac{1}{2}=0.5$	$\frac{1}{4}=0.25$
	4		1	$\frac{1}{4}=0.25$
6	2		$\frac{1}{5}=0.2$	$\frac{4}{5}=0.8$
	3		$\frac{2}{5}=0.4$	$\frac{2}{5}=0.4$
	4		1	$\frac{1}{2}=0.5$

表 15-2： $N=7$ 至 14 獲得利益期望值計算(2)

玩家人數	結盟人數	回答型態	獨贏機率及近似值	期望值
7	4		1	$\frac{3}{4}=0.75$
8	4		1	1
9	4		1	$\frac{5}{4}=1.25$
10	4		1	$\frac{3}{2}=1.5$
11	4		$\frac{151}{256}\approx 0.5898$	$\frac{2429}{2048}\approx 1.1860$
	5		$\frac{83}{128}\approx 0.6484$	$\frac{1041}{1280}\approx 0.8133$
	6	4X2Y	$\frac{49}{64}\approx 0.7656$	$\frac{475}{768}\approx 0.6185$
	7	5X2Y 4X3Y	$\frac{13}{16}=0.8125$	$\frac{95}{224}\approx 0.4241$
	8		1	$\frac{3}{8}=0.375$
12	4		$\frac{17}{31}\approx 0.5484$	$\frac{41}{31}\approx 1.3226$
	5		$\frac{225}{372}\approx 0.6048$	$\frac{1722}{1860}\approx 0.9258$
	6	4X2Y	$\frac{34}{49}\approx 0.6939$	$\frac{34}{49}\approx 0.6939$
	7	4X3Y	$\frac{17}{22}\approx 0.7727$	$\frac{80}{154}\approx 0.5195$
	8		1	$\frac{1}{2}$
13	4		$\frac{461}{1280}\approx 0.3602$	$\frac{12393}{10240}\approx 1.2103$
	5		$\frac{69}{160}\approx 0.4313$	$\frac{1377}{1600}\approx 0.8606$
	6	4X2Y	$\frac{295}{512}\approx 0.5762$	$\frac{4347}{6144}\approx 0.7075$
	7	4X3Y	$\frac{89}{128}\approx 0.6953$	$\frac{1029}{1792}\approx 0.5742$
	8		1	$\frac{5}{8}=0.625$

14	4		$\frac{128}{386} \approx 0.3316$	$\frac{1027}{772} \approx 1.3303$
	5		$\frac{769}{1930} \approx 0.3984$	$\frac{9243}{9650} \approx 0.9578$
	6	4X2Y	$\frac{51}{100} = 0.51$	$\frac{457}{600} \approx 0.7617$
	7	4X3Y	$\frac{193}{256} \approx 0.7539$	$\frac{193}{256} \approx 0.7539$
	8		1	$\frac{3}{4} = 0.75$

(五)一組結盟人數下超出原結盟人數 M 後的獲利期望值變化討論

觀察表 15 發現，**相同的玩家人數 N，隨著結盟人數 m 增加，獨贏機率隨之增加**，這顯然是因為人多勢眾，但也要配合正確的策略，像是結盟人數 $m=5$ 時，只能選擇 3 是 2 否（2 是 3 否），結盟人數 $m=6$ 時，只能選擇 4 是 2 否（2 是 4 否），結盟人數 $m=7$ 時，只能選擇 4 是 3 否（3 是 4 否），原因是人數是 2^k 時，下輪可以平均分配較為占優，這跟化學的軌域半填滿與全填滿比較穩定有點像。

再觀察表 15 發現，**相同的玩家人數 N，隨著結盟人數 m 增加，期望值隨之減少**，這可以理解為結盟人數 m 越大，要償還的本金越大，所賺的錢 $N-m$ 單位越少，然後平均至每個人的獲利 $\frac{N-m}{m}$ 單位就會越小，這和賽局理論中的「少數派博弈」很像。**所謂「少數派博弈」是指「低風險高報酬」的選擇，而「低風險高報酬」中的「最優選項」會使理性的人加入，但隨著人數的增加，會使原本「最優選項」的每單位期望值下降。**像「少數決遊戲」就是透過結盟而達到「低風險高報酬」，但達到最低結盟人數 M 後，就會隨著人數的增加而使獲利期望值下降。

但是表中恰有兩個部份的數值與上面的結論不同，分別是 $N=6\,,m=3$ 的期望值竟然比 $N=6\,,m=4$ 的期望值低，而 $N=13\,,m=7$ 的期望值竟然比 $N=13\,,m=8$ 的期望值低，這個部分比較難以理解。

二、兩組結盟人數的遊戲結果與獲利討論

在前面研究方法或過程中，我初步分析 $N=1$ 到 6 的情形之後，發現兩組結盟玩家與一組結盟玩家的狀況不完全相同，一組結盟玩家的遊戲結果僅有兩種情形：結盟玩家獨贏或與其他玩家均分，若發生平手則可以重新問問題直到不平手為止。但是兩組結盟玩家就可能會相持不下而陷入僵局。現將遊戲結果整理如下表 16：

表 16：兩組結盟玩家的遊戲結果分類表

狀況	遊戲結果	AA 組玩家獲利	狀況	遊戲結果	AA 組玩家獲利
C1	AA 組獨贏	$\frac{N-N_A}{N_A}$	C2	AA 組玩家與 BB 組(或其他)玩家均分	$\frac{N-2N_A}{2N_A}$
C3	兩組結盟玩家相持不下		C4	無法必勝	

前面定義兩組結盟玩家 AA 組與 BB 組，人數各為 N_A 與 N_B ，未結盟玩家人數為 N_N ，($N_A \geq N_B \geq 2$ 且 $N = N_A + N_B + N_N$)，若 $N_A \geq 2^R$ ，則 AA 組已達必勝條件，則遊戲結果只可能出現 C1、C2 和 C3，不會出現 C4 無法必勝情形。若 $N_A = N_B$ ，由對稱性知則遊戲結果只可能出現 C2、C3 和 C4，不會出現 C1 中 AA 獨贏情形，整理成以下定理。

定理 8 若 $N_A \geq 2^R$ ，則遊戲結果只可能出現 C1、C2 和 C3，不會出現 C4 無法必勝情形。

定理 9 若 $N_A = N_B$ ，則遊戲結果只可能出現 C2、C3 和 C4，不會出現 C1 中 AA 獨贏情形。

定理 10 若存在未結盟玩家，則該輪遊戲結果不可能發生 C3 兩組結盟玩家相持不下。

再繼續討論如下：

(一) $N=7$ 時，討論 AA 組與 BB 組人數

1. $N_A = N_B = 2, N_N = 3$，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 2 是 1 否或 2 否 1 是，則少數方為 3 人，無法形成必勝，主因為不滿足 $N_A \geq 2^R = 4$ 。若未結盟玩家回答 3 是(3 否)，則否(是)方為少數方，形成兩組結盟玩家均分，獲利皆為 $\frac{3}{4}$ 。

2. $N_A=4, N_B=2, N_N=1$，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答是(否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 1 人，第二輪 AA 組獨贏。AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{3}{4}$ 。

(二) $N=8$時，討論 AA 組與 BB 組人數

1. $N_A=N_B=2, N_N=4$，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 2 是 2 否，則形成平手，重新問問題；回答 3 是 1 否或 3 否 1 是，則少數方為 3 人，無法形成必勝，主因為不滿足 $N_A \geq 2^R=4$ 。若未結盟玩家回答 4 是(4 否)，則否(是)方為少數方，形成兩組結盟玩家均分。兩組結盟玩家獲利皆為 1。

2. $N_A=4, N_B=2, N_N=2$ ，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 1 是 1 否，則形成平手，重新問問題；若未結盟玩家回答 2 是(2 否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 1 人，第二輪 AA 組獨贏。AA 組結盟玩家獲利為 1。

3. $N_A=N_B=4, N_N=0$ ，此時兩組結盟玩家皆會回答 2 是 2 否，兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

(三) $N=9$時，討論 AA 組與 BB 組人數

1. $N_A=N_B=2, N_N=5$ ，此時兩組結盟玩家皆會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答回答 3 是 2 否或 3 否 2 是，則少數方為 4 人，皆無法構成同盟形成必勝，回答 4 是 1 否或 4 否 1 是，則少數方為 3 人，無法構成同盟形成必勝，主因為不滿足 $N_A \geq 2^R=4$ 。若未結盟玩家回答 5 是(5 否)，則否(是)方為少數方，形成兩組結盟玩家均分，獲利皆為 $\frac{5}{4}$ ，但由於離必勝條件太遠，故接下來不討論 $N_A=N_B=2$的情形。

2. $N_A=4, N_B=2, N_N=3$，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 2 是(否)1 否(是)則少數方為 4 人 $N_A=2, N_B=1, N_N=1$，

其中 $N_B < 2$ 不形成同盟效果，故得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{5}{4}$。若未結盟玩家回答 3 是(3 否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 1 人，第二輪得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{5}{4}$。

3. $N_A = N_B = 4, N_N = 1$，此時兩組結盟玩家皆會回答 2 是 2 否，未結盟玩家回答是(否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 2 人進入第二輪，第二輪為狀況 C3 兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

(四) $N = 10$ 時，討論 AA 組與 BB 組人數

1. $N_A = 4, N_B = 2, N_N = 4$，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 2 是 2 否，則形成平手，重新問問題；若未結盟玩家回答 3 是 1 否或 3 否 1 是則少數方為 4 人 $N_A = 2, N_B = 1, N_N = 1$，其中 $N_B < 2$ 不形成同盟效果，故得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$。若未結盟玩家回答 4 是(4 否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 1 人，第二輪得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$。

2. $N_A = N_B = 4, N_N = 2$，此時兩組結盟玩家皆會回答 2 是 2 否，若未結盟玩家回答 1 是 1 否，則平手重新問問題；若未結盟玩家回答 2 是(2 否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 2 人進入第二輪，第二輪為狀況 C3 兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

3. $N_A = 8, N_B = 2, N_N = 0$，此時乍看之下以為 AA 組結盟玩家回答 4 是 4 否，而 BB 組結盟玩家回答 1 是 1 否而相持不下，但實際上 AA 組結盟玩家回答 3 是 5 否，而 BB 組結盟玩家回答 1 是 1 否，會導致 AA 組玩家 3 人 BB 組玩家 1 人進入第二輪，第二輪得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$。

(五) $N=11$時，討論 AA 組與 BB 組人數

1. $N_A=4, N_B=2, N_N=5$，此時 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答 3 是(否)2 否(是)則少數方為 5 人 $N_A=2, N_B=1, N_N=2$，其中 $N_B<2$ 不形成同盟，故得狀況 C2，AA 組玩家與 BB 組(或其他)玩家均分，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{3}{8}$。若未結盟玩家回答 4 是(否)1 否(是)則少數方為 4 人 $N_A=2, N_B=1, N_N=1$，其中 $N_B<2$ 不形成同盟，第二輪得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{7}{4}$。若未結盟玩家回答 5 是(否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 1 人，第二輪得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{7}{4}$。

2. $N_A=N_B=4, N_N=3$，此時兩組結盟玩家皆會回答 2 是 2 否，若未結盟玩家回答 2 是 1 否或 2 否 1 是則少數方為 5 人 $N_A=2, N_B=2, N_N=1$，若未結盟玩家回答 3 是(3 否)，則否(是)方為少數方，AA 組玩家 2 人 BB 組玩家 2 人進入第二輪，第二輪為狀況 C3 兩組結盟玩家相持不下而一直平手。

3. $N_A=8, N_B=2, N_N=1$，此時 AA 組結盟玩家會回答 4 是 4 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，若未結盟玩家回答是（或否）則少數方為 5 人 $N_A=4, N_B=1, N_N=0$，其中 $N_B<2$ 不形成同盟效果，故得狀況 C1，AA 組獨贏，AA 組結盟玩家獲利為 $\frac{3}{8}$。

(六) 繼續分析 $N=12$ 至 23，討論 AA 組與 BB 組人數，將所有討論的結果製成表 17，兩組結盟玩家下人數 N 的遊戲結果與期望值。

表 17-1：兩組結盟玩家下人數 N 的遊戲結果與期望值(1)

玩家人數 N	AA 組人數 N_A	BB 組人數 N_B	未結盟人數 N_N	遊戲結果	期望值	類型	備註
3	2		1	C1	$\frac{1}{2}$		
	1	1	1	C4			$N_A \ge 2^R$ 不吻合
4	2	2	0	C3		T1	
5	2	2	1	C2	$\frac{1}{4}$	T2	
6	2	2	2	C2	$\frac{2}{4}$	T2	
	4	2	0	C3		T4	C2 期望值為負
7	2	2	3	C4		T3	$N_A \ge 2^R$ 不吻合
	4	2	1	C1	$\frac{3}{4}$	T5	
8	2	2	4	C2	1	T3	$N_A \ge 2^R$ 不吻合
				C4			
	4	2	2	C1	1	T5	
	4	4	0	C3		T1	
9	2	2	5	C2	1.25	T3	$N_A \ge 2^R$ 不吻合
				C4			
	4	2	3	C1	$\frac{5}{4}$	T5	
	4	4	1	C3		T1	
10	4	2	4	C1	$\frac{6}{4}$	T5	
	4	4	2	C3		T1	
	8	2	0	C1	$\frac{2}{8}$	T0	四倍戰法
11	4	2	5	C1	$\frac{7}{4}$	T6	
				C2	$\frac{3}{8}$		
	4	4	3	C2	0.375	T2	
				C3			
	8	2	1	C1	$\frac{3}{8}$	T0	四倍戰法

表 17-2：兩組結盟玩家下人數 N 的遊戲結果與期望值(2)

玩家人數 N	AA 組人數 N_A	BB 組人數 N_B	未結盟人數 N_N	遊戲結果	期望值	類型	備註
12	4	2	6	C1	2	T6	
				C2	0.5		
	4	4	4	C2	0.5	T2	
				C3			
	8	2	2	C1	$\frac{1}{2}$	T0	四倍戰法
	8	4	0	C3		T8	C2 期望值為負
13	4	2	7	C1	$\frac{9}{4}$	T6	
				C2	0.625		
	4	4	5	C2	0.625	T2	
				C3			
	8	2	3	C1	$\frac{5}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	1	C3		T8	C2 期望值為負
14	4	2	8	C1	$\frac{10}{4}$	T6	
				C2	0.75		
	4	4	6	C2	0.75	T2	
				C3			
	8	2	4	C1	$\frac{6}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	2	C3		T8	C2 期望值為負
15	4	2	9	C1	$\frac{11}{4}$	T7	
				C2	0.875		
				C4			$N_A \ge 2^R$ 不吻合
	4	4	7	C2	0.875	T3	
				C3			
				C4			$N_A \ge 2^R$ 不吻合
	8	2	5	C1	$\frac{7}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	3	C1	$\frac{7}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負

表 17-3：兩組結盟玩家下人數 N 的遊戲結果與期望值(3)

玩家人數 N	AA 組人數 N_A	BB 組人數 N_B	未結盟人數 N_N	遊戲結果	期望值	類型	備註
16	8	2	6	C1	1	T0	四倍戰法
	8	4	4	C1	1	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	0	C3		T1	
17	8	2	7	C1	$\frac{9}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	5	C1	$\frac{9}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	1	C3		T1	
18	8	2	8	C1	$\frac{10}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	6	C1	$\frac{10}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	2	C3		T1	
	16	2	0	C1	$\frac{2}{16}$	T0	四倍戰法
19	8	2	9	C1	$\frac{11}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	7	C1	$\frac{11}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	3	C3		T1	
	16	2	1	C1	$\frac{3}{16}$	T0	四倍戰法
20	8	2	10	C1	$\frac{12}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	8	C1	$\frac{12}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	4	C3		T1	
	16	2	2	C1	$\frac{4}{16}$	T0	四倍戰法
	16	4	0	C1	$\frac{4}{16}$	T0	四倍戰法

表 17-4：兩組結盟玩家下人數 N 的遊戲結果與期望值(4)

玩家人數 N	AA 組人數 N_A	BB 組人數 N_B	未結盟人數 N_N	遊戲結果	期望值	類型	備註
21	8	2	11	C1	$\frac{13}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	9	C1	$\frac{13}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	5	C3		T1	
	16	2	3	C1	$\frac{5}{16}$	T0	四倍戰法
	16	4	1	C1	$\frac{5}{16}$	T0	四倍戰法
22	8	2	12	C1	$\frac{14}{8}$	T0	四倍戰法
	8	4	10	C1	$\frac{14}{8}$	T9	
				C3			C2 期望值為負
	8	8	6	C3		T1	
	16	2	4	C1	$\frac{6}{16}$	T0	四倍戰法
	16	4	2	C1	$\frac{6}{16}$	T0	四倍戰法
23	8	2	13	C1	$\frac{15}{8}$	T6	
				C2	$\frac{7}{16}$		
	8	4	11	C1	$\frac{15}{8}$	T10	
				C2	$\frac{7}{16}$		
				C3			
	8	8	7	C2	$\frac{7}{16}$	T2	
				C3			
	16	2	5	C1	$\frac{7}{16}$	T0	四倍戰法
	16	4	3	C1	$\frac{7}{16}$	T0	四倍戰法

(七) 兩組結盟人數的遊戲結果討論：

由表格 17 內容，我發現個有趣的特殊定理，我稱為**四倍戰法**，此狀況列為 T0 類型。

定理 11　四倍戰法：(T0 類型)

$N_A = 2^R$, $N_B = 2^r$, $R - r \ge 2$, $N_N = 1, \cdots, 2\times 2^R - 2^r - 2$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏。**

[證明]　AA 組結盟回答 2^{R-1} 個是和 2^{R-1} 個否，BB 組結盟回答 2^{r-1} 個是和 2^{r-1} 個否，若存在未結盟玩家的話，則持續到不相等時就能進入下一輪，直到不存在未結盟玩家或 $r = 0$ 。

若 $r \ne 0$ 且不存在未結盟玩家，則 AA 組結盟回答 $2^{R-1}-1$ 個是和 $2^{R-1}+1$ 個否，BB 組只能回答 2^{r-1} 個是和 2^{r-1} 個否，則 AA 組中有 $2^{R-1}-1 = 2^{R_1}-1$ 個進入下一輪，BB 組中有 $2^{r-1} = 2^{r_1}$ 個進入下一輪，其中 $R_1 - r_1 = R - r \ge 2$ ，我可以虛擬一個 AA 組人員，此時 AA 組含虛擬人員仍為 BB 組的四倍，但是因為少一位而不可能相持不下，持續 r 輪後 $r_r = 0$, $R_r \ge 2$ ，此時 $N_A = 2^{R_r} - 1 \ge 3$, $N_B = 1$ ，由定理 1 知遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏。

其他由表格 17 內容，可以分類如下：

1. T1 類型： $N_A = N_B = 2^R$, $N_N = 0, \cdots, 2^R - 2$ ，**遊戲結果為 C3 兩組結盟玩家相持不下**，由定理 9 知若 $N_A = N_B = 2^R$ ，則遊戲結果只可能出現 C2 和 C3，由推論 1 知若是玩家人數 $N = 2\times 2^R$ 至 $3\times 2^R - 2$ 之間找到結盟 $M = 2^R$ 個玩家，結果必然是獨贏不會均分。故遊戲結果必為 C3。

2. T2 類型： $N_A = N_B = 2^R$, $N_N = 2^R - 1, \cdots, 2\times 2^R - 2$ ，**遊戲結果為 C2 AA 組玩家與 BB 組玩家均分或 C3 兩組結盟玩家相持不下**，由定理 9 知若 $N_A = N_B = 2^R$ ，則遊戲結果只可能出現 C2 和 C3。

3. T3 類型： $N_A = N_B = 2^R$, $N_N \ge 2\times 2^R - 1$ 由定理 1 知**遊戲結果為 C4 無法必勝**。

4. T4 類型： $N_A = 4$, $N_B = 2$, $N_N = 0$ ，**遊戲結果為 C3 兩組結盟玩家相持不下**，因 AA 組結盟玩家會回答 2 是 2 否，BB 組結盟玩家會回答 1 是 1 否，兩組結盟玩家相持不下。若 AA 組結盟玩家改變回答 1 是 3 否，則遊戲結果為 C2 兩組玩家均分，但獲利期望值為 -1，不如相持不下。

5. T5 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2$, $N_N = 1, \cdots, 2\times 2^R - 4$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏**，因為存在未結盟玩家，所以第一輪不會永遠平手，當第一輪分出勝負後，BB 組僅剩 1 人而失去結盟意義，轉為僅有 1 組結盟玩家，若找到結盟 $M = 2^{R-1}$ 個玩家，玩家人數 $N = 2^{R-1} + 1$ 至 $3\times 2^{R-1} - 2$ 之間，由定理 3 知此時結果必然是獨勝。

6. T6 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2$, $N_N = 2\times 2^R - 3, \cdots, 3\times 2^R - 4$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏或 C2 AA 組玩家與其他玩家均分**，因為存在未結盟玩家，所以第一輪不會永遠平手，當第一輪分出勝負後，BB 組僅剩 1 人而失去結盟意義，轉為僅有 1 組結盟玩家，若找到結盟 $M = 2^{R-1}$ 個玩家，玩家人數 $N = 3\times 2^{R-1} - 1$ 至 $4\times 2^{R-1} - 2$ 之間，由定理 3 知此時結果可能獨贏或與其他玩家均分。

7. T7 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2$, $N_N \ge 3\times 2^R - 3$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏、C2 AA 組玩家與其他玩家均分或 C4 無法必勝**。因為玩家人數 $N > 2^R + 3\times 2^R - 1$ ，由定理 1 可得 **C4 無法必勝**。由定理 10 知遊戲結果不可能 C3 相持不下。

8. T8 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2^{R-1} > 2$, $N_N = 0, 1, \cdots, 2^{R-1} - 2$ ，**遊戲結果為 C3 兩組結盟玩家相持不下**，因未結盟玩家少於 BB 組玩家，所以少數決後會僅剩 AA 組與 BB 組兩組結盟玩家，若 AA 組結盟玩家會回答 2^{k-1} 是 2^{k-1} 否，BB 組結盟玩家會回答 2^{k-2} 是 2^{k-2} 否，兩組結盟玩家相持不下而一直平手。若 AA 組結盟玩家改變回答 $2^{k-1} - 1$ 是 $2^{k-1} + 1$ 否，可破壞平手狀況變成 C2 兩組玩家均分，但獲利期望值不理想，不如相持不下，這情形和 4.相似。

9. T9 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2^{R-1} > 2$, $N_N = 2^{R-1} - 1, \cdots, 3\times 2^{R-1} - 2$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏或 C3 兩組結盟玩家相持不下**，因 $N_A \ge 2^R$ ，由定理 1 知遊戲結果不會 C4 無法必勝，而玩家人數 $N = N_A + N_B + N_N \le 2\times 2^R - 2$ ，由定理 3 知若不是 C3 兩組結盟玩家相持不下則結果必然是獨勝，其他如 T8 類型。

10. T10 類型： $N_A = 2^R > N_B = 2^{R-1} > 2$, $N_N = 3\times 2^{R-1} - 1, \cdots, 5\times 2^{R-1} - 2$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏、C2 AA 組玩家與其他玩家均分或 C3 兩組結盟玩家相持不下**，因為 $N_A \ge 2^R$ ，由定理 1 知遊戲結果不會 C4 無法必勝。

三、三組結盟人數的初步討論

所謂結盟，人數至少要兩人方能形成最小結盟單位，若只有 1 人，則變回隨機回答的情況。為了討論方便起見，規定三組結盟玩家為 AA 組、BB 組與 CC 組，人數各為 N_A 、 N_B 與 N_C ，其中我方為 AA 組，其它兩方 BB 組與 CC 組，不失一般性可設 $N_B \ge N_C \ge 2$ ，設未結盟玩家人數為 N_N ，得 $N = N_A + N_B + N_C + N_N$ 。由定理一知應對 R 輪不考慮平手的問題需要結盟的玩家為 $M = 2^R$ 個，故假定 AA 組的人數至少為 $M = 2^R$ 個即 $N_A \ge 2^R$ 。我思考處理的方向為將 BB 組與 CC 組視為一組其他結盟組 bb 組而變成前項討論中的兩組結盟 AA 組與 bb 組，這樣在處理多組結盟時可以視為兩組結盟。由前面兩組結盟人數的討論可以知道，原則上還是遵循一組結盟的結果：若 $N_A = 2^R$ ， $2\times 2^R - 1 \le N \le 3\times 2^R - 2$ ，遊戲結果為 AA 組獨贏或相持不下； $3\times 2^R - 1 \le N \le 4\times 2^R - 2$ ，遊戲結果為 AA 組獨贏、可能均分或相持不下； $4\times 2^R - 1 \le N$ ，遊戲結果為 AA 組獨贏、可能均分、無法必勝或相持不下。若其他結盟組 $N_b = N_B + N_C \ge N_A \ge 2\times 2^R$ ，遊戲結果由 AA 組獨贏或相持不下轉為相持不下；若 $N_A \ge 2^R$ 、 $N_B \ge 2^R$ 且 $N_C \ge 2^R$ ，則 $N = N_A + N_B + N_C + N_N \ge 3\times 2^R$ ，由定理 4 知在僅有一組結盟玩家下，若找到結盟 $M = 2^R$ 個玩家，則參賽玩家人數 N 介於 $2^R + 2\times 2^R - 1$ 至 $2^R + 3\times 2^R - 2$ 時，此時結果可保證必勝但可能均分，無法保證獨贏。而由對稱性知 R 輪後三家均至少有 1 人，故會遊戲結果由 AA 組獨贏、可能均分、無法必勝或相持不下轉為無法必勝或相持不下。而還有未結盟者則該輪暫時不會發生相持不下，但是未結盟人數為 0 時就會相持不下，除非吻合 4 倍戰法。但是討論時也有有趣的事情，就是多組 2 人結盟，若經過 1 輪投票後就剩下 1 人即可當成未結盟隨機回答。另外 $N_B + N_C > N_A$ 時，前面兩組結盟人數的討論產生不足，需延伸討論。

肆、結論與應用

本作品將前作的演算法修正後，變得比較簡單些。而修正定理 5 後可以得到一組結盟下除了修正數外，獨贏時獲利上下限、兩人均分時最高獲利上下限和最低獲利上下限。觀察圖 1 的最高獲利、最低獲利與期望值，其圖形呈波折狀況，實際上在**偶數的期望值會比前後兩個奇數的期望值高**，而觀察 N 為 47 至 62 的期望值，可發現值在 2 的附近波動，但受限於 N 為 95 以上時，數據已經大於10^{13}而難以計算，無法進一步驗證自己的猜想。不過在此大膽的猜測後面的期望值收斂在 2，這是根據修正定理 5 來猜測。

而一組結盟人數下超出原結盟人數 M 後的獲利期望值變化討論中，獲得定理：

定理 6　在能獨贏的條件下，人數越多會導致獲利越少。

定理 7　在僅有一組結盟玩家條件下，參賽玩家人數 N（$2\times 2^R-1\le N\le 3\times 2^R-2$）時，此時找到結盟 $M=2^R$ 個玩家，結果必然是獨勝，每個玩家所得的獲利 $\dfrac{N-M}{M}$，結盟人數最佳。若結盟超過 $M=2^R$ 個玩家，會導致獲利下降。

觀察表 15 發現，**相同的玩家人數 N，隨著結盟人數 m 增加，獨贏機率隨之增加但期望值隨之減少**，這和賽局理論中的「少數派博弈」很像。**所謂「少數派博弈」是指「低風險高報酬」的選擇，而「低風險高報酬」中的「最優選項」會使理性的人加入，但隨著人數的增加，會使原本「最優選項」的每單位期望值下降。**像「少數決遊戲」就是透過結盟而達到「低風險高報酬」，但達到最低結盟人數 M 後，就會隨著人數的增加而使獲利期望值下降。

但是表中恰有兩個部份的數值與上面的結論不同，分別是$N=6\,,m=3$的期望值竟然比$N=6\,,m=4$的期望值低，而$N=13\,,m=7$的期望值竟然比$N=13\,,m=8$的期望值低，這個部分比較難以理解。

在兩組結盟人數的遊戲結果與獲利討論中，獲得定理：

定理 8　若 $N_A\ge 2^R$，則遊戲結果只可能出現 C1、C2 和 C3，不會出現 C4 無法必勝情形。

定理 9　若 $N_A=N_B$，則遊戲結果只可能出現 C2、C3 和 C4，不會出現 C1 中 AA 獨贏情

形。

定理 10 若存在未結盟玩家，則該輪遊戲結果不可能發生 C3 兩組結盟玩家相持不下。

定理 11 四倍戰法：（T0 類型）

$N_A = 2^R$, $N_B = 2^r$, $R - r \ge 2$, $N_N = 1, \cdots, 2 \times 2^R - 2^r - 2$ ，**遊戲結果為 C1AA 組玩家獨贏。**

其中兩組結盟玩家的遊戲結果分類於表 18 中。

表 18：兩組結盟玩家的遊戲結果分類表

狀況	遊戲結果	AA 組玩家獲利	狀況	遊戲結果	AA 組玩家獲利
C1	AA 組獨贏	$\frac{N-N_A}{N_A}$	C2	AA 組玩家與 BB 組(或其他)玩家均分	$\frac{N-2N_A}{2N_A}$
C3	兩組結盟玩家相持不下		C4	無法必勝	

在兩組結盟玩家裡已經有互相影響的狀況，有些賽局理論的樣子，而三組的結盟玩家，若另外兩組結盟人數和不超過第一組玩家，則可以視為兩組結盟玩家來處理，若是三組結盟人數和超過 2×2^R ，結果以相持不下為主，其詳細討論留待進一步探討。

伍、參考文獻

[1]董〇〇(2022)。詐欺遊戲之少數決。中華民國第 62 屆全國中小學科學展覽會高中組數學科第三名。

[2]Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯，Concrete Mathematics，具體數學，東華出版社，一版，台北市，P.9～19，1988 年出版。

[3]簡子為、詹朱聰、林豐正、林育翔 (2003)，九死一生 ，全國中小學第 43 屆科展高中組數學科佳作。

[4]夏興國。數學歸納法縱橫談，台北市，九章出版社，1999 年出版。

【評語】010045

本作品是一個少數決獲勝遊戲的結盟人數與參賽人數之間關係的研究。此次作品，作者做出一些二進位法的修正與改進，提高演算法的效率。然而受限於作者研究方式只是窮舉，儘管改進演算法效率，但是當參賽人數超過百人以上時，結盟方可獲得的平均獲利，就無法分析得到結論了(儘管作者猜測結盟的平均獲利收斂到2，但無法加以驗證)。此次延伸作品內容尚包括，兩組結盟的情形以及所謂的 4 倍戰法，但是所得結論太過零星瑣碎。本問題其實相當有趣，也有相當的難度。困難的點，在於非結盟的玩家太多，也太過隨機，因此不容易有一個可以計算的結果。而且要求策略為「必勝」，太過嚴格，也不符合賭局帶有的投機特性。建議研究方向做以下方式調整：所有人都結盟，先研究兩個聯盟的對抗策略。此時，可以引進非合作賽局。不要求必勝，而是有數個策略可交替使用，雖然可輸可贏，但是求長期下來的平均獲利為正的策略集合。