2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010041

參展科別　數學

作品名稱　探討多子連線的最小阻隔數

得獎獎項

就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　蔡春風、顏經和

作者姓名　陳羽莛、葉沐婷

關鍵詞　極值、阻隔數、完美型態

作者簡介

大家好，我是陳羽莛（左），來自臺北市立永春高中數理資優班。平時喜歡參加學校的數學徵答活動，並將每個小問題延伸思考。有次和沐婷思考到一個五子棋的問題，我們也將其延伸，得到了許多有趣的發現。感謝沐婷和我各自發揮所長，協力進行這份研究，雖然研究過程中遇到許多瓶頸，但我們會彼此扶持、堅持下去。

我是葉沐婷（右），來自臺北市立永春高中數理資優班。我喜歡思考事物的對與錯之間的關係，因此我十分享受證明的過程。高中進入數理資優班後，我才開始長時間的投入數學這領域，甚至有了自己的研究。這篇論文是我跟羽莛兩年來的心血，雖然內容還有許多不完美之處，但正因如此，學術研究才有意義。

Abstract

In the 2021 Taiwan International Science Fair, Huang & Mai (2021) studied in the domination number of vertical and horizontal arrangement in a chessboard. However, our study, which is derived from Gobang, made significant extension and modification from Huang & Mai's study.

We plan to find out the minimum number of less than p chessmen connecting in the direction of the symbol "※" in the $a \times b$ checkerboard. Since limited checkerboard is much complex than unlimited one, we discuss "Perfect Type "in unlimited checkerboard first, and define the set Ω as the set of p for which there is at least one "perfect type". We found out that obstruction type $DT(p, d)$ is "Perfect Type" if and only if $p = 6k - 1$ or $p = 6k + 1 (k \in N)$. Then we apply it to limited checkerboard. At first, we discuss upper and lower bounds $f(a, b; p)$ in every integer p, and then discuss all the conditions under Ω. We use the rule "each $1 \times p$ checkerboard contains at least one obstacle" to inference the lower bound when length or width is $kp (k \in N)$ under the "Perfect Type". Several properties have been proposed, and proofs has been made. We find that our upper bound is very close to theoretical $f(a, b; p)$.

We also extend the research focus two-dimensional checkerboard to three-dimensional checkerboard, find out upper and lower bounds $f(a, b; p)$ in every p and the set of p that fit the obstacle type $DT(p, d_R, d_h)$ a "Perfect Type". In addition, we also find out a necessary condition for a strictly diagonal Latin Square corresponding to the "Perfect Type".

摘要

2021 年國際科展中，有作品探討鉛直與水平排列的支配數，而本研究從五子棋的想法出發，將前述研究進行重要的延伸與改變，探討在$a \times b$棋盤中，「米」字方向無p子連線時，所需的阻隔數最小值。由於有界棋盤比無界棋盤複雜許多，因此我們先在無界棋盤中找出符合阻隔限制的「完美型態」，並找出存在至少一種「完美型態」的p值集合 Ω。研究發現，只要是可以表示為$p = 6k - 1$或$p = 6k + 1 (k \in N)$的正整數p，皆可以型態$DT(p, d)$阻隔。接著我們推廣至有界棋盤，先探討所有p值的$f(a, b; p)$上界與下界，再針對 Ω 中的p值做討論，利用「任意$1 \times p$區域至少有 1 個阻隔」的性質導出「完美型態」下長或寬為$kp (k \in N)$的下界，並找出非常接近$f(a, b; p)$的上界。我們也將二維的探討方式與結果延伸至三維，找出所有 p 值的$f(a, b, c; p)$上下界與可使阻隔型態$DT(p, d_R, d_h)$為完美型態的p值集合。另外我們也找出嚴格對角拉丁方陣可對應成「完美型態」之必要條件。

壹、　前言

一、研究動機

五子棋遊戲中，玩家只要在一列、一行或一條斜直線上建構出5顆相連的棋子，就可以獲勝。我們曾經將整個6×6棋盤佈滿白色的棋子，接著將幾顆白棋處阻隔後，使得剩下的白棋都沒有辦法5子連線。以圖 1 為例，將其中11顆白棋處阻隔時，能使剩下的白棋都無法構成5子連線。

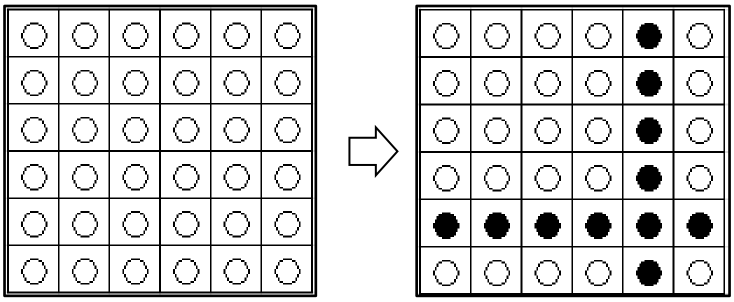


圖 1：從6×6的棋盤中取走11顆，使得剩下的棋子都無法構成五子連線

我們感到好奇，11處阻隔會是最少的嗎？如果要使剩下的白棋都無法構成p子連線，最少要將幾處棋盤格阻隔呢？想到這裡，我們打算把這個問題推廣如下：有一個$a \times b$棋盤（a, b為正整數且$a, b \geq p$），其中每一格皆放一顆白棋，那麼至少要將這$a \times b$顆白棋中的幾處阻隔，才能使剩下的白棋都無法構成p子連線？

二、研究目的

（一）　在二維無界棋盤中，找出哪些正整數p具有無p子連線的完美型態。

（二）　在二維$a \times b$有界棋盤中，對於所有正整數p，求出無p子連線的最小阻隔函數$f(a, b; p)$。

（三）　在三維無界棋盤中，找出哪些正整數p具有無p子連線的完美型態。

（四）　在三維$a \times b \times c$有界棋盤中，對於所有正整數p，求出無p子連線的最小阻隔函數

$f(a,b,c;p)$。

三、文獻回顧

查詢文獻後，我們發現大部分跟棋類有關的研究，都是找出必勝法或是較佳的進攻策略。舉例來說，陳皓苓、吳嫚宜、蔡昀軒（2009）曾分析研究出各種能先完成三子連線的下法，並歸納出「活二連線」、「雙死二連線」等棋子的分佈是3×3棋盤獲勝的條件，而在4×4棋盤當中，亦發現了許多想要獲勝所需要的條件。黃英綺、余采臻（2021）則探討西洋棋盤，研究分析出主教攻擊規律及$n\times m$棋盤中攻擊滿棋盤所需主教數最大值與最小值以及有解情形的配置方法。此外，王建詒、呂季桓（2008）探討了限制下的皇后問題，其中探討到的柱面棋盤與我們的思考上有許多相似之處，但他們研究的是方法數而不是阻隔數。

與阻隔數有關的研究中，黃芷宣、買楷翔（2021）在國際科展中，研究了平面與空間中無任何m個普通座位相連時所需的防疫座位最小值。但他們在二維中僅考慮 x、y 兩個方向，未考慮斜向是否相連。我們實際考慮斜向後，發現情況複雜了許多，難以將他們得到的定理推導，因此他們找到的解僅可作為我們的下界參考，無法推導為我們所求的解。而賴永玄、張彥霆（2015）的研究中，討論到和我們的「完美型態」性質相同，在$p\times p$的區域中，每行每列都恰有一個阻隔的「和平擺法」，找到最大且不包括任何棋子的$k\times k$正方形的結論也十分有利，但依然有不考慮斜向，甚至兩阻隔相距大於$p-1$顆白棋的問題。我們認為這是值得研究的方向，因此推廣前述國際科展的研究，將阻隔對象擴充為「米」字形，而其中有界範圍又比無界範圍來得複雜許多，因此我們先研究無界的完美型態，再推廣到有界範圍中。

貳、　研究方法與過程

一、研究方法

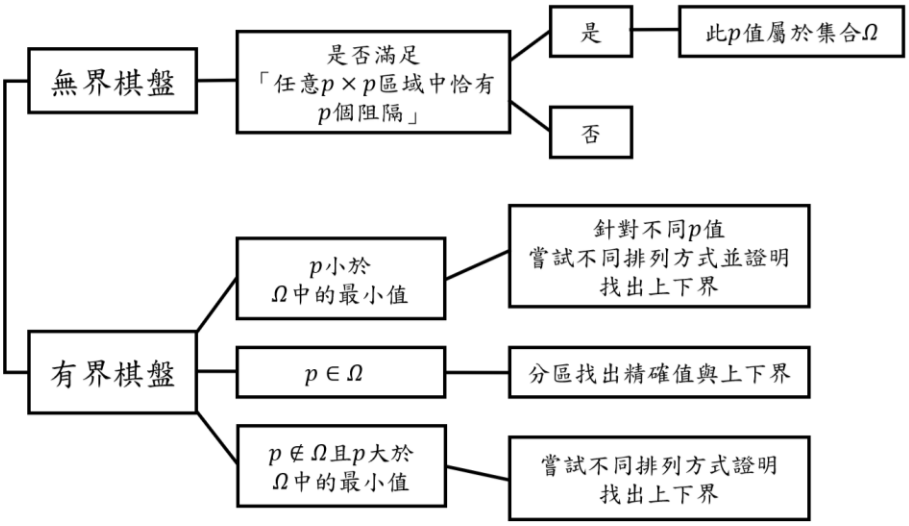


圖 2：研究流程圖

二、名詞定義

（一） 無p子連線：二維棋盤中，白棋在「米」字的四個方向（座標空間中方向向量$(1,0),(0,1),(1,1),(1,-1)$）不存在連續p顆或p顆以上白棋相連；三維中間中，白棋在「擴充米字」的 13 個方向（座標空間中方向向量$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1),(0,1,-1),(1,1,1),(-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)$）不存在連續$p$顆或$p$顆以上白棋相連。

（二） $\mathrm{Z_k}=\{n|0\leq n\leq k-1,n\in Z\}=\{0,1,2,\dots,k-1\}$。

（三） 最小阻隔函數$f(a,b;p)$：在二維長為a寬為b棋盤中（即$a\times b$的棋盤中）無p子連線時，所需的阻隔數最小值。不失一般性令$a\leq b$，且$p\leq a$。

最小阻隔函數$f(a,b,c;p)$：在三維中長為a寬為b高為c格狀棋盤（即$a\times b\times c$的格狀棋盤中）無p子連線時，所需的阻隔數最小值。不失一般性令$a\leq b\leq c$，且$p\leq a$。

（四） (i,j)：二維$a\times b$棋盤中由上而下第i列$(i\in \mathrm{Z_a})$，由左而右第j行$(j\in \mathrm{Z}_b)$的棋盤格。

(i,j,h)：三維$a \times b$棋盤中由上而下第i列$(i \in \mathrm{Z_a})$，由左而右第j行$(j \in \mathrm{Z_b})$，由下而上第h層$(h \in \mathrm{Z_c})$的棋盤格。

（五） $R_i = \{(i,n) | n \in \mathrm{Z_b}\}$：二維$a \times b$棋盤中由上而下第$i$列$(i \in \mathrm{Z_a})$。

$C_j = \{(n,j) | n \in \mathrm{Z_a}\}$：二維$a \times b$棋盤中由左而右第$j$行$(j \in \mathrm{Z_b})$。

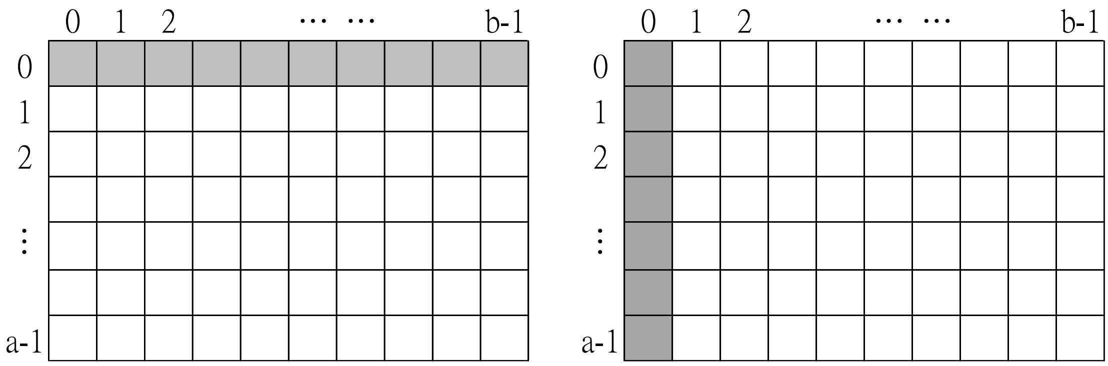


圖 3：R_i（左）、C_j（右）示意圖

（六） $E_j = \{(n,k) | n \in \mathrm{Z_a}, k = j + n (\mathrm{mod}\, b), k \in \mathrm{Z_b}\}$：二維棋盤中通過$(0,j), j \in \mathrm{Z_b}$，由左上至右下所有棋盤格形成的集合。

$F_j = \{(n,k) |, n \in \mathrm{Z_a}, k = j - n (\mathrm{mod}\, b), k \in \mathrm{Z_b}\}$：二維棋盤中通過$(0,\mathrm{j})$, $j \in \mathrm{Z_b}$，由右上至左下所有棋盤格形成的集合。

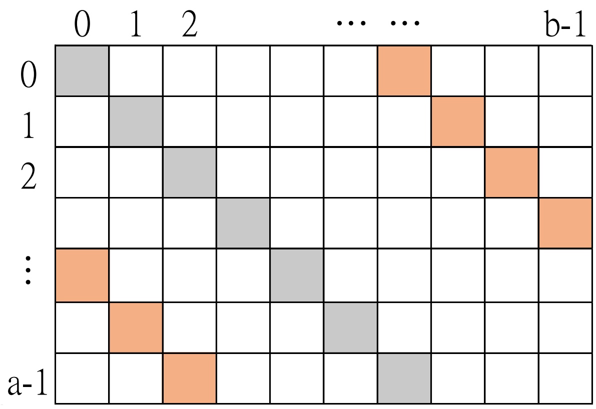


圖 4：E_j示意圖

（七） 完美型態：在無界棋盤中，任意阻隔在米字形方向上與其下一個（最近的）阻隔恰相隔$p-1$個棋盤格，並可使棋盤上無 p 子連線的阻隔型態。

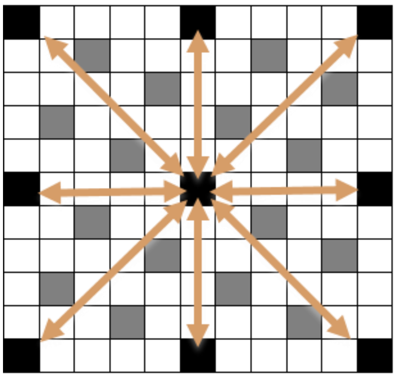


圖 5：完美型態示意圖

（八） $\Omega=\{p|$存在至少一種完美型態的p值$\}$。

（九）$DT(p,d)$：一種阻隔型態(dominant Type, DT)，適用於二維棋盤。相鄰兩列阻隔的行差均為$d, d\in Z$所形成的阻隔位置集合。$DT(p,d)=\{(i,di+kp)|i,k\in Z\}$。

$DT(p,d_r,d_h)$：一種阻隔型態(dominant Type, DT)，適用於三維棋盤。相鄰兩列阻隔的層數差均為d_r且相鄰兩行阻隔的層數差均為d_c所形成的阻隔位置集合。$DT(p,d_r,d_c)=\{(i,j+kp,d_ri+d_cj)|i,j,k,\in Z\}$。

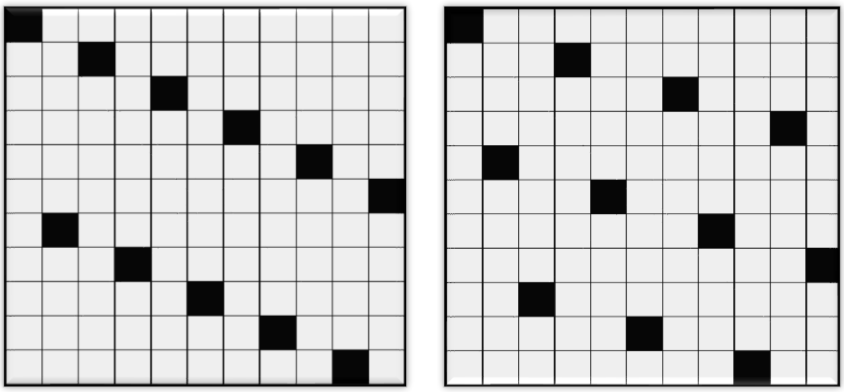


圖 6：$DT(11,2)$示意圖（左）、$DT(11,3)$示意圖（右）

0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
5	8	0	3	6	9	1	4	7	10	2
10	2	5	8	0	3	6	9	1	4	7
4	7	10	2	5	8	0	3	6	9	1
9	1	4	7	10	2	5	8	0	3	6
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8	0
8	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5
2	5	8	0	3	6	9	1	4	7	10
7	10	2	5	8	0	3	6	9	1	4
1	4	7	10	2	5	8	0	3	6	9
6	9	1	4	7	10	2	5	8	0	3

圖 7：$DT(11,3,5)$俯視圖，其數字表示阻隔位置(i,j,h)的h值

（十） a'_k=$(a \bmod k)$。當k恰為p時，以a'表示。

參、 研究結果與討論

一、二維無界棋盤

由於在有界範圍中需探討餘數問題較複雜，因此我們先探討無界範圍的情況。在無界範圍中，我們先討論$DT(p,d)$何時為完美型態。

引理一：

完美型態必然會形成每$p \times p$的正方形棋盤一循環的模樣。

說明：

因為任意阻隔在米字形方向上與其下一個（最近的）阻隔必相距$p-1$個棋盤格，所以必為每p個一循環。

■

為了能更清楚Ω的範圍，我們考慮了從Z_p到Z_p的一對一函數f，此時f可滿足行、列部分的完美型態，為了滿足斜線部分的完美型態，$g(k)=f(k)+k$, $h(k)=f(k)-k$也必須是Z_p到Z_p的一對一函數。

定理一：

若存在$\boldsymbol{Z_p}$到$\boldsymbol{Z_p}$的一對一函數$\boldsymbol{f}$，使得$\{\boldsymbol{f(k)+k|k\in Z_p}\}=\{\boldsymbol{f(k)-k|k\in Z_p}\}=\boldsymbol{Z_p}$，則$\boldsymbol{S=\{(k,f(k))|k\in Z_p\}}$可擴張成完美型態。

定理二：

$\boldsymbol{DT(p,d)}$為完美型態$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{(p=6k+1}$或$\boldsymbol{6k-1)}$且$\boldsymbol{\gcd(d,p)=\gcd(d-1,p)=\gcd(d+1,p)=1}$

證明：

根據定理一，我們針對$\{f(k)|k\in Z_p\}=Z_p$、$\{f(k)+k|k\in Z_p\}=Z_p$、$\{f(k)-k|k\in Z_p\}=Z_p$一一討論。此時我們可不失一般性令$f(k)=dk(\operatorname{mod} p)$。

以$DT(p,d)$阻隔時，我們可以得到集合$DT(p,d)=\{(i,di+kp)|i,k\in Z\}$。其中因為對於任意阻隔$(i,j)$相鄰的八個棋盤格都會與$(i,j)$相鄰，不滿足完美型態定義，因此在此不討論$d=0$、$d=+1$與$d=-1$。

1. $f(k)$為一對一函數時，可以導出$\gcd(d,p)=1$。

令$\gcd(d,p)=h$

$p=hp_1$,$d=hd_1$

則$d\equiv d+d_1p\equiv d+d_1hp_1\equiv d+dp_1\equiv d(1+p_1)(\operatorname{mod} p)$

因為$f(k)$為一對一函數，所以 $1+p_1>p\Longrightarrow p_1\geq p\Rightarrow h=1\Longrightarrow \gcd(d,p)=1$

2. $g(k)=f(k)-k=(d-1)k$為一對一函數時，可以導出$\gcd(d-1,p)=1$。

令$\gcd(d-1,p)=h$

$p=hp_1$,$d-1=hd_1$

則$d-1\equiv d-1+d_1p\equiv d-1+d_1hp_1\equiv d-1+(d-1)p_1\equiv (d-1)(1+p_1)(\bmod p)$

因為$g(k)$為一對一函數，所以 $1+p_1>p\Longrightarrow p_1\geq p\Rightarrow h=1\Longrightarrow \gcd(d-1,p)=1$

3. $h(k)=f(k)+k=(d+1)k$為一對一函數時，可以導出$\gcd(d+1,p)=1$。

令$\gcd(d+1,p)=h$

$p=hp_1$,$d+1=hd_1$

則$d+1\equiv d+1+d_1p\equiv d+1+d_1hp_1\equiv d+1+(d+1)p_1\equiv (d+1)(1+p_1)(\bmod p)$

因為$h(k)$為一對一函數，所以 $1+p_1>p\Longrightarrow p_1\geq p\Rightarrow h=1\Longrightarrow \gcd(d+1,p)=1$

又$\because$ $d-1,d,d+1(k\in N)$為連續正整數

$\therefore$根據鴿籠原理，當p為$2k$或$3k(k\in N)$時，無法以$DT(p,d)$完美型態排列，其他則可以。

我們定義所有能以完美型態排列的p值集合為Ω，因此$\{n|n=6k+1\vee 6k+5,k\in N\}\subseteq\Omega$。

■

我們也好奇是否有$DT(p,d)$以外的完美型態，根據定理一寫出了程式碼。經過程式將每種情況一一運行後，我們知道當$p\leq 17$時，僅有$p=13$與$p=17$存在$DT(p,d)$以外的完美型態，如圖 8，其它p值皆不存在$DT(p,d)$以外的完美型態。

我們目前還未找出$p=2k$或$p=3k$的完美型態，由於程式運算複雜度會成指數增長，因此$p>17$的情況難以以現在的程式探討，需再找更佳的方法。

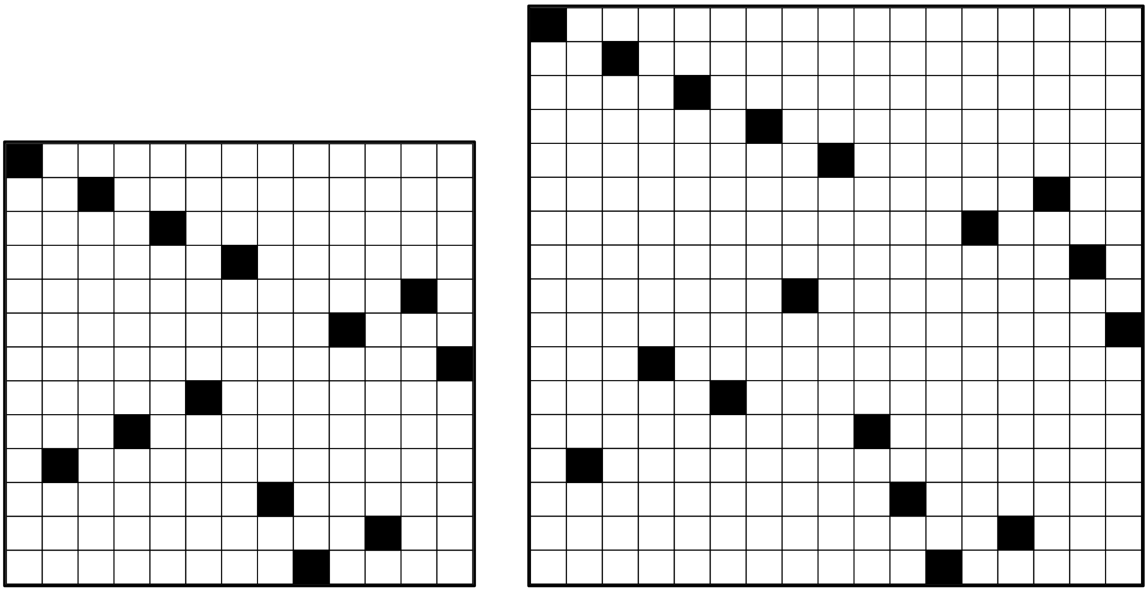


圖 8：$p=13$(左)與$p=17$(右)的非$DT(p,d)$完美型態

二、二維$a\times b$有界棋盤

（一） 任意p值的最小阻隔數上界與下界

定理三： $\boldsymbol{f(a,b;p)\geq \frac{ab-a'b'}{p}}$。

證明：

對任意一個無p子連線的阻隔方式，$p\times 1$棋盤中至少有一個阻隔點。$(a-a')\times b$區域可分割出$b\left[\frac{a}{p}\right]$個獨立的$p\times 1$區域，所以$(a-a')\times b$區域的阻隔數至少有$b\left[\frac{a}{p}\right]$個。剩下的$a'$列中，每列至少可分割出$a'\left[\frac{b}{p}\right]$個獨立的$1\times p$區域，所以這$a'$列的總阻隔數至少為$a'\left[\frac{b}{p}\right]$。因此，$f(a,b;p)\geq b\left[\frac{a}{p}\right]+a'\left[\frac{b}{p}\right]$。將行列的概念互換，同理可得$f(a,b;p)\geq\ a\left[\frac{b}{p}\right]+b'\left[\frac{a}{p}\right]$。

令 $a=sp+a', b=tp+b'$ 其中 $s,t\in N$ ，則 $b\left[\frac{a}{p}\right]+a'\left[\frac{b}{p}\right]=(\mathrm{tp}+\mathrm{b}')\left(\mathrm{s}+\left[\frac{a'}{p}\right]\right)+\mathrm{a}'(\mathrm{t}+$

$\left[\frac{b'}{p}\right]$)，又a′, b′ < p，因此$b\left[\frac{a}{p}\right]+a'\left[\frac{b}{p}\right]=(tp+b')(s)+a'(t)=stp+sb'+at'=(sp+a')(t)+b'(s)=a\left[\frac{b}{p}\right]+b'\left[\frac{a}{p}\right]=\frac{stp^2+a'tp+b'sp+a'b'-a'b'}{p}=\frac{(sp+a')(tp+b')-a'b'}{p}=\frac{\boldsymbol{ab-a'b'}}{\boldsymbol{p}}$。可得$f(a,b;p)\geq\frac{ab-a'b'}{p}$。

■

> **定理四：**
>
> $\boldsymbol{f(a,b;p)\leq a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor}$。

證明：

對於任意a × b棋盤，將$\left\{(i,mp-1)\middle|i\in Z_a,m\in N,1\leq \mathrm{m}\leq\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\right\}$及$\left\{(np-1,j)\middle|j\in Z_b,1\leq \mathrm{n}\leq\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor,n\in N\right\}$阻隔，必可使棋子在(1,0)、(0,1)、(1,1)、(1,−1)方向上皆僅有$p-1$子連線，無p子連線。此時根據排容原理可得，$f(a,b;p)\leq a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$。

■

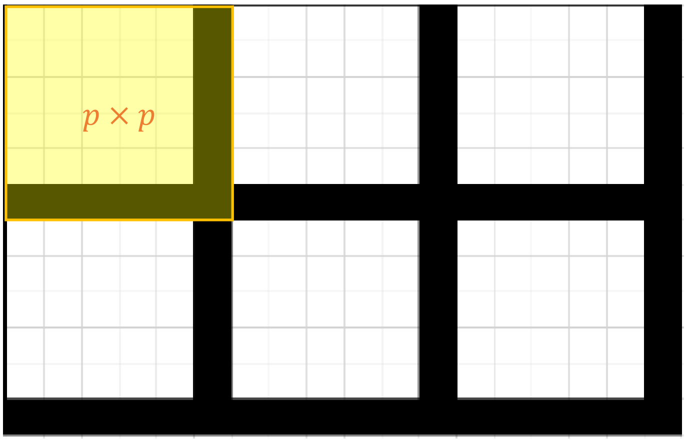


圖 9：阻隔法示意圖

（二） $p<5$

由於Ω中的最小元素為5，因此我們將$p < 5$和$p \geq 5$的情況分開討論。

1. $p = 1$ 時的最小阻隔數

並無「1 子連線」，故本研究中不討論。若要討論，以阻隔的角度可知$f(a, b; 1) = a \times b$。

2. $p = 2$ 時的最小阻隔數

$p = 2$ 時任何一顆白棋的上下左右都不可有白棋，即任一顆白棋周圍的8個位置皆須被阻隔。最佳排列模式如圖 10 所示。

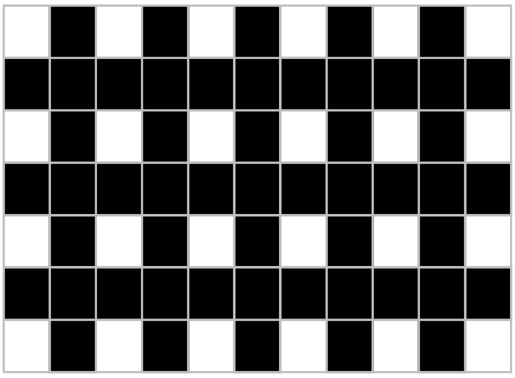


圖 10：$p = 2$ 時的最佳排列模式

$\boldsymbol{f(a, b; 2) = a\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + b\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor}$。

3. $p = 3$ 時的最小阻隔數

首先我們探討$3 \times b$棋盤的情況。

引理二：

在$3 \times b$棋盤上，如果一符合無3子連線的阻隔方式中，有某連續3行C_{j-1}, C_j, C_{j+1}只有

3個阻隔點，則這3個阻隔點的組成一定是｛$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}),(\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}),(\boldsymbol{2},\boldsymbol{j}+\boldsymbol{1})$｝或｛$(\boldsymbol{2},\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}),(\boldsymbol{1},\boldsymbol{j}),(\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}+\boldsymbol{1})$｝。

證明：

我們令$R_i^*=\{(i,j-1),(i,j),(i,j+1)\}$。

若$(1,j)$處無阻隔，則不可能角落處($(0,j-1)$、$(0,j+1)$、$(2,j+1)$、$(2,j-1)$)皆無阻隔，否則E_{j-1}、F_{j+1}皆無法被阻隔，將構成 3 子連線。

不失一般性，設角落處的阻隔於$(0,j-1)$。此時為了使F_{j+1}有阻隔，所以$(0,j+1)$或$(2,j-1)$至少有一個為阻隔點。如果$(0,j+1)$為阻隔點時，因為R_1^*與R_2^*都至少各有一個阻隔點，會與『C_{j-1},C_j,C_{j+1}有 3 個阻隔點』矛盾。而當$(2,j-1)$為阻隔點時，因為C_j與C_{j+1}都至少各有一個阻隔點，也會與『C_{j-1},C_j,C_{j+1}有 3 個阻隔點』矛盾。因此當有某連續3行C_{j-1},C_j,C_{j+1}只有3個阻隔點時，$(1,j)$處必定有阻隔點。

當$(1,j)$處有阻隔點時，C_{j-1}、C_{j+1}、R_0^*、R_2^*還未被阻隔，因此剩下的兩個阻隔必位於$\{(0,\mathrm{j}-1)、(2,\mathrm{j}+1)\}$或$\{(0,\mathrm{j}+1)、(2,\mathrm{j}-1)\}$。

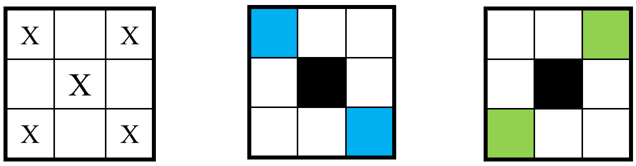


圖 11：$(1,j)$處無阻隔（左）、$(1,j)$處有阻隔（中、右）

■

定理五：

當$\mathbf{b}\neq 3$時，$\boldsymbol{f}(3,\boldsymbol{b};3)\geq\left\lfloor\frac{4}{3}\boldsymbol{b}\right\rfloor$。

證明：

若某連續3行C_{j-1}, C_j, C_{j+1}只有3個阻隔點，由引理二，可假設阻隔點為$\{(0, j-1), (1, j), (2, j+1)\}$。此時在$C_{j-2}$與$C_{j+2}$中的$(0, \mathrm{j}-2)$、$(2, \mathrm{j}-2)$、$(0, \mathrm{j}+2)$、$(2, \mathrm{j}+2)$都必須為阻隔點。由此可知，對於任意只有 3 個阻隔的3×3區域，當其向左或向右延伸一行時，最少需增加兩個阻隔。

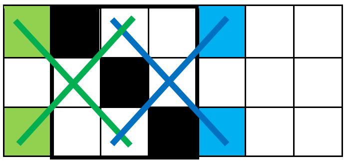


圖 12：任意只有 3 個阻隔的3×3區域左右延伸示意圖

若$(1, j+2)$也是阻隔點，因為每行皆至少各有一個阻隔點，此時$C_{j+2}, C_{j+3}, C_{j+4}$總共至少有5個阻隔點。若$(1, j+2)$不是阻隔點，則$(1, j+3)$與$(2, j+4)$皆為阻隔點。因為每行皆至少各有一個阻隔點，所以$C_{j+2}, C_{j+3}, C_{j+4}$總共至少有 5 個阻隔點。

從上面的推論可知，當C_{j-1}, C_j, C_{j+1}只有3個阻隔點且$C_{j+2}, C_{j+3}, C_{j+4}$有5個阻隔點時，$C_{j+4}$只有一個阻隔點，所以接下來的連續3行$C_{j+5}, C_{j+6}, C_{j+7}$至少有 4 個阻隔點。因此可知：

1. 對於任意3×6的區域，至少需要 8 個阻隔。
2. 對於任意3×9的區域，若有兩個3×3區域皆只有 3 個阻隔，至少需要$3+6+3=12$個阻隔。

綜合以上兩個敘述可得：當$3|b$且$b\neq 3$時，$f(3, b; 3)\geq \frac{4}{3}b$。

由上可知，當$b=3k$時，$f(3, b; 3)\geq \frac{4}{3}(3k)$。

當$b=3k+1$時，可將棋盤視為一個3×1的區域與一個$3\times 3k$的區域，3×1的區域最少

有一個阻隔，$3\times 3k$的區域阻隔數$f(3,3k;3)\geq \frac{4}{3}(3k)$，$f(3,b;3)\geq \frac{4}{3}(3k)+1$=$\left\lfloor \frac{4}{3}b \right\rfloor$。

當$b=3k+2$時，可將棋盤視為一個3×2的區域與一個$3\times 3k$的區域，3×2的區域最少有兩個阻隔，$3\times 3k$的區域阻隔數$f(3,3k;3)\geq \frac{4}{3}(3k)$，$f(3,b;3)\geq \frac{4}{3}(3k)+2$=$\left\lfloor \frac{4}{3}b \right\rfloor$。

綜合以上敘述可得：當$b\neq 3$時，$f(3,b;3)\geq \left\lfloor \frac{4}{3}b \right\rfloor$。

■

定理六：

$$\boldsymbol{f(3,b;3)=\begin{cases} 3, b=3 \\ \left\lfloor \frac{4}{3}b \right\rfloor, b>3 \end{cases}}$$

說明：

我們找到了一種阻隔型態滿足每 3 行皆只有 4 個阻隔，且每六行為一循環，如圖 13。

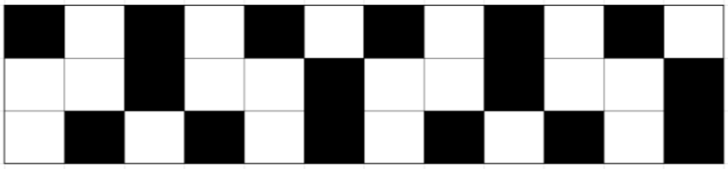


圖 13：$a=3$且$b>3$時的最佳阻隔型態

在圖 13 的阻隔型態中，我們可以看到當$\mathrm{b}\equiv 1 \pmod 3$時，所需阻隔數為$\frac{4}{3}(b-1)+1$；當$\mathrm{b}\equiv 2 \pmod 3$時，所需阻隔數為$\frac{4}{3}(b-2)+2$，因此可得：

$$f(3,b;3)\leq \begin{cases} \frac{4}{3}b, & b\equiv 0 \pmod 3 \wedge b\neq 3 \\ \frac{4}{3}(b-1)+1, & b\equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}(b-2)+2, & b\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

當 $b=3t+1, t\in N$ 時，$\frac{4}{3}(b-1)+1=\frac{4(3t)}{3}+1=4t+1=\left\lfloor (4t+1)+\frac{1}{3} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{4(3t+1)}{3} \right\rfloor=$

$\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor$；當$b=3t+2, t\in N$時，$\frac{4}{3}(b-2)+2=\frac{4(3t)}{3}+2=4t+2=\left\lfloor(4t+2)+\frac{2}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4(3t+2)}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor$，因此可將以上結果改為：

$$f(3,b;3)\le\begin{cases}3, b=3\\ \left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, b>3\end{cases}$$

當$3\times b$的棋盤以圖 13 的阻隔型態阻隔時，所需的阻隔數上界恰等於下界，因此該阻隔型態為無 3 子連線的最佳阻隔型態之一，且可證實$f(3,b;3)$的精確值為：

$$f(3,b;3)=\begin{cases}3, b=3\\ \left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, b>3\end{cases}$$

■

推導完$f(3,b;3)$棋盤的精確值後，我們討論$f(a,b;3)$的值。由定理五可推得當$\mathrm{a}=3\mathrm{t}, \mathrm{b}=3\mathrm{s}(\mathrm{s},\mathrm{t}\in\mathrm{N})$時，$f(a,b;3)\ge\left\lfloor\frac{\mathrm{a}}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{\mathrm{b}}{3}\right\rfloor$。又$\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{\mathrm{b}}{3}\right\rfloor>\frac{\boldsymbol{ab-a'b'}}{\mathbf{3}}$，因此我們可縮小$f(a,b;3)$的範圍為：

$$\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{\mathrm{b}}{3}\right\rfloor\le f(a,b;3)\le a\left\lfloor\frac{b}{3}\right\rfloor+b\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{3}\right\rfloor$$。

4. $p=4$時的最小阻隔

首先我們探討$4\times b$棋盤的情況。

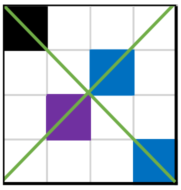
引理三

在$4\times b$棋盤上，如果一符合無4子連線的阻隔方式中，有某連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$只有4個阻隔點，則這4個阻隔點的組成一定是$\{(0,j-1),(2,j),(3,j+1),(1,j+2)\}$的同構形式或$\{(0,j-1),(2,j),(1,j+1),(3,j+2)\}$的同構形式。

證明：

在連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$中，$E_{j-1}$和$F_{j+2}$中必定各有一個阻隔點。由於無論阻隔點在$(0, j-1)$、$(0, j+2)$、$(3, j-1)$、$(3, j+2)$，旋轉後可視為相同，阻隔點在$(1, j)$、$(1, j+1)$、$(1, j)$、$(1, j+1)$，旋轉後亦可視為相同，因此只須各針對一種情況進行討論即可。

不失一般性設阻隔位於$(0, j-1)$，則在F_{j+2}中阻隔點只可能在$(2, j), (1, j+1)$。由於兩位置對稱於E_{j-1}，可不失一般性設$(2, j)$有阻隔點，則剩下兩個阻隔可能位於$\{(1, j+1), (3, j+2)\}$或$\{(3, j+1), (1, j+2)\}$，此時連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$中，阻隔點的組成為$\{(0, j-1), (2, j), (1, j+1), (3, j+2)\}$或$\{(0, j-1), (2, j), (3, j+1), (1, j+2)\}$。



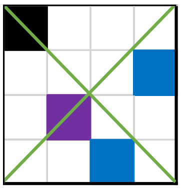
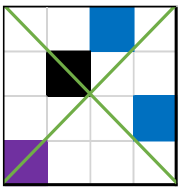


圖 14：4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$只有4個阻隔點的阻隔方式示意圖，綠線分別為$E_{j-1}$和$F_{j+2}$。

不失一般性設阻隔點位於$(1, j)$，則在F_{j+2}中阻隔點只可能在$(3, j-1), (0, j+2)$。由於兩位置對稱於E_{j-1}，可不失一般性設$(3, j-1)$有阻隔點，則剩下兩個阻隔可能位於$\{(0, j+1), (2, j+2)\}$或$\{(2, j+1), (0, j+2)\}$，此時連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$中，阻隔點的組成為$\{(3, j-1), (1, j), (0, j+1), (2, j+2)\}$或$\{(3, j-1), (1, j), (2, j+1), (0, j+2)\}$。



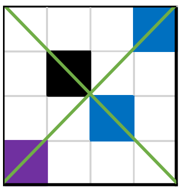


圖 15：4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$只有4個阻隔點的阻隔方式示意圖，綠線分別為$E_{j-1}$和$F_{j+2}$。

其中可以發現$\{(0, j-1), (2, j), (1, j+1), (3, j+2)\}$和$\{(3, j-1), (1, j), (2, j+1), (0, j+

$2)\}$同構，$\{(3, j-1), (1, j), (0, j+1), (2, j+2)\}$和$\{(0, j-1), (2, j), (3, j+1), (1, j+2)\}$同構。所以在$4 \times b$棋盤上，如果一符合無4子連線的阻隔方式中，有某連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$只有4個阻隔點，則這4個阻隔點的組成一定是｛$(3, j-1), (1, j), (0, j+1), (2, j+2)$｝的同構形式或$\{(0, j-1), (2, j), (1, j+1), (3, j+2)\}$的同構形式。

引理四：

在$\boldsymbol{4 \times 8}$的區域中最少有9個阻隔，且阻隔方式只可為$\{(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}. \mathbf{1}), (\mathbf{3}, \mathbf{2}), (\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{0}, \mathbf{4}), (\mathbf{3}, \mathbf{4}), (\mathbf{2}, \mathbf{5}), (\mathbf{0}, \mathbf{6}), (\mathbf{1}, \mathbf{7})\}$的同構型式。

引理五：

符合$\boldsymbol{f(4, b; 4) = b}$的$\boldsymbol{b}$值最大為6，且$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{4}, \mathbf{6})$時，阻隔方式必為$\{(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{3}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{0}, \mathbf{4}), (\mathbf{3}, \mathbf{5})\}$的同構型式。

證明：

根據引理三，若某連續4行$C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}$只有4個阻隔點，則可假設阻隔點為$\{(0, j-1), (2, j), (3, j+1), (1, j+2)\}$或$\{(0, j-1), (2, j), (1, j+1), (3, j+2)\}$或$\{(1, j-1), (2, j), (0, j+1), (3, j+2)\}$（由於我們是從左右延伸進行討論，因此上下翻轉及左右翻轉視為相同，旋轉視為不同）。

當$\boldsymbol{C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, C_{j+2}}$內阻隔為$\{(\mathbf{0}, \boldsymbol{j}-\mathbf{1}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{j}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{j}+\mathbf{1}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{j}+\mathbf{2})\}$時：

若向右延伸，則$(3, j+3)$、$(0, j+3)$都必須為阻隔點使$\mathrm{E_j}$與$\mathrm{R_0}$上無4子連線。再向右延伸一行，則$\mathrm{R_2}$中$(2, j+4)$必為阻隔點。再向右延伸，F_{j+5}中$(0, j+5)$必為阻隔點。再向右延伸，$\mathrm{R_1}$中$(1, j+6)$必為阻隔點。此時$C_{j+3}, C_{j+4}, C_{j+5}, C_{j+6}$中至少需 2+1+1+1=5 個阻隔。如圖 16。

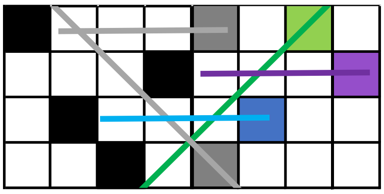


圖 16

若向左延伸，此時F_{j+1}與R_1中$(3,j-2)$、$(1,j-2)$必須為阻隔點。若再向左延伸，F_j中$(3,j-3)$必為阻隔點。再向左延伸，E_{j-4}中$(0,j-4)$必為阻隔點。再向左延伸，E_{j-4}與R_0 $(0,j-4)$、$(2,j-4)$必為阻隔點。最後C_{j-5}中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3},C_{j-2}$中至少需2+1+2+1=6 個阻隔。如圖?。若一開始將$(2,j-2)$也阻隔，則因為C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3}中每行至少需要一個阻隔，因此最少也需要$3+1+1+1=6$個阻隔。如圖 17。

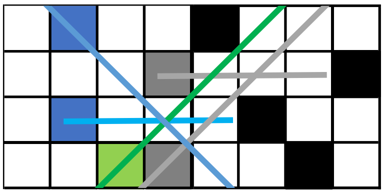


圖 17

當$C_{j-1},C_j,C_{j+1},C_{j+2}$內阻隔為$\{(1,j-1),(2,j),(0,j+1),(3,j+2)\}$時：

若向右延伸，此時在E_j與F_{j+3}和R_1中$(3,j+3)$、$(0,j+3)$、$(1,j+3)$都必須為阻隔點。而C_{j+4},C_{j+5},C_{j+6}中，每行皆至少需要一個阻隔，所以$C_{j+3},C_{j+4},C_{j+5},C_{j+6}$中至少需 3+1+1+1=6 個阻隔。如圖 18。

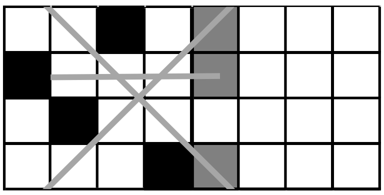


圖 18

若向左延伸，此時R_3中$(3,j-2)$必須為阻隔點。接下來分別討論C_{j-2}中另一個阻隔位於

$(0, j-2)$、$(1, j-2)$、$(2, j-2)$與僅有$(3, j-2)$處被阻隔的情況。如圖 19。

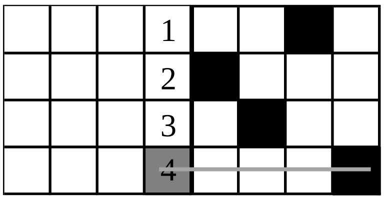


圖 19

(1) 若$\mathrm{C}_{\mathrm{j}-2}$中$(0, j-2)$、$(3, j-2)$被阻隔(如圖 20)。此時在$\mathrm{E}_{\mathrm{j}-3}$中$(0, j-3)$必須為阻隔點。若再向左延伸，$F_{\mathrm{j}-1}$與$\mathrm{R}_3$中$(2, \mathrm{J}-4)$、$(3, j-4)$必為阻隔點。最後$\mathrm{C}_{\mathrm{j}-5}$中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5}, C_{j-4}, C_{j-3}, C_{j-2}$中至少需$2+1+2+1=6$個阻隔。

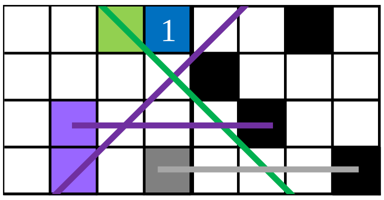


圖 20

(2) 若$\mathrm{C}_{\mathrm{j}-2}$中$(1, j-2)$、$(3, j-2)$被阻隔(如圖 21)。此時在$\mathrm{R}_0$中$(0, j-3)$必須為阻隔點。若再向左延伸，$E_{\mathrm{j}-4}$與$\mathrm{R}_3$中$(0, \mathrm{J}-4)$、$(3, j-4)$必為阻隔點。最後$\mathrm{C}_{\mathrm{j}-5}$中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5}, C_{j-4}, C_{j-3}, C_{j-2}$中至少需$2+1+2+1=6$個阻隔。

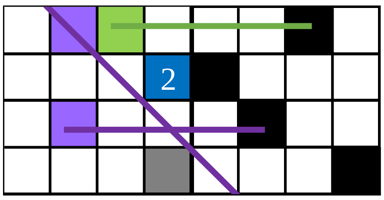


圖 21

(3) 若$\mathrm{C}_{\mathrm{j}-2}$中$(2, j-2)$、$(3, j-2)$被阻隔(如圖 22)。此時在$\mathrm{R}_0$中$(0, j-3)$必須為阻隔點。若再向左延伸，$F_{\mathrm{j}-1}$中$(3, j-4)$必為阻隔點。若再向左延伸，$F_{\mathrm{j}-2}$與$\mathrm{R}_1$中$(3, \mathrm{J}-5)$、$(1, j-5)$必為阻隔點。因此$C_{j-5}, C_{j-4}, C_{j-3}, C_{j-2}$中至少需$2+1+1+2=6$個阻隔。

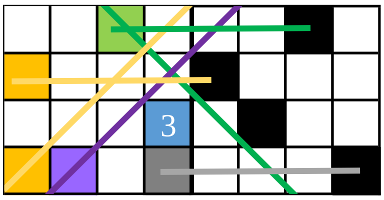


圖 22

(4) 若C_{j-2}中僅$(3,j-2)$被阻隔(如圖 23)。此時在E_{j-3}中$(0,j-3)$必須為阻隔點。接下來分別討論E_{j-3}中另一個阻隔位於$(0,j-2)$、$(1,j-2)$、$(2,j-2)$與僅有$(3,j-2)$處被阻隔的情況。

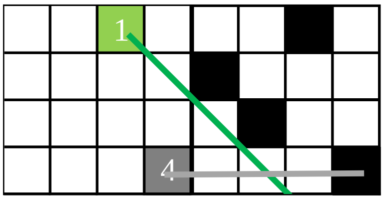


圖 23

a. 若C_{j-3}中僅$(0,j-3)$被阻隔(如圖 24)。此時在E_{j-4}、R_2與F_{j-1}中$(0,j-4)$、$(2,j-4)$、$(3,j-4)$必須為阻隔點。最後C_{j-5}中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3},C_{j-2}$中至少需$1+1+3+1=6$個阻隔。

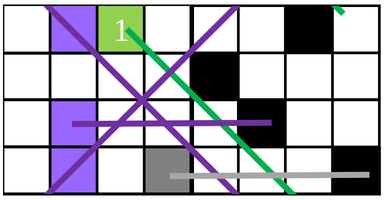


圖 24

b. 若C_{j-3}中$(0,j-3)$、$(1,j-3)$被阻隔(如圖 25)。此時在R_3與F_{j-1}中$(2,j-4)$、$(3,j-4)$必須為阻隔點。最後C_{j-5}中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3},C_{j-2}$中至少需$1+2+2+1=6$個阻隔。

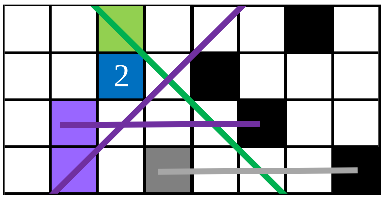


圖 25

c. 若$\mathrm{C_{j-3}}$中$(0,j-3)$、$(2,j-3)$被阻隔(如圖 26)。此時在$\mathrm{E_{j-4}}$中$(0,j-4)$必須為阻隔點。若再向左延伸，R_1與$F_{\mathrm{j}-2}$中$(1,j-5)$、$(3,j-5)$必為阻隔點。因此$C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3},C_{j-2}$中至少需$1+2+1+2=6$個阻隔。

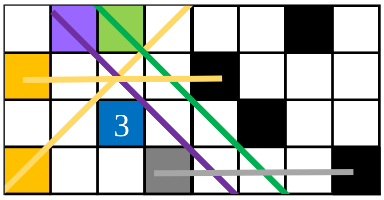


圖 26

d. 若$\mathrm{C_{j-3}}$中$(0,j-3)$、$(3,j-3)$被阻隔(如圖 27)。此時在$\mathrm{E_{j-4}}$與R_2中$(0,j-4)$、$(2,j-4)$須為阻隔點。最後$\mathrm{C_{j-5}}$中至少需一個阻隔，因此$C_{j-5},C_{j-4},C_{j-3},C_{j-2}$中至少需$1+2+2+1=6$個阻隔。

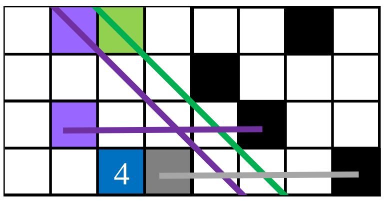


圖 27

當$\boldsymbol{C_{j-1},C_j,C_{j+1},C_{j+2}}$內的阻隔為$\{(\mathbf{0},\boldsymbol{j}-\mathbf{1}),(\mathbf{2},\boldsymbol{j}),(\mathbf{1},\boldsymbol{j}+\mathbf{1}),(\mathbf{3},\boldsymbol{j}+\mathbf{2})\}$時：

若向右延伸，此時在$F_{\mathrm{j}+3}$與$\mathrm{R_0}$中$(0,j+3)$必為阻隔點。再向右延伸，接下來分別討論另一個阻隔位於$(0,j+3)$、$(1,j+3)$、$(2,j+3)$與僅有$(3,j+3)$處被阻隔的情況。如圖 28。

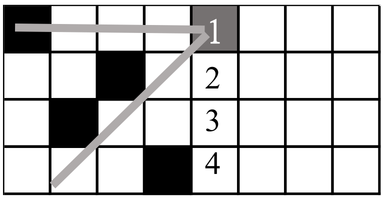


圖 28

(1) 若$\mathrm{C_{j+3}}$中僅$(0, j+3)$被阻隔(如圖 29)。此時在$\mathrm{F_{j+4}}$、$\mathrm{R_2}$與$\mathrm{E_{j+1}}$中$(0, j+4)$、$(2, j+4)$、$(3, j+4)$必須為阻隔點。而$\mathrm{C_{j+5}}$、$\mathrm{C_{j+6}}$中每行至少需一個阻隔，因此$C_{j+3}, C_{j+4}, C_{j+5}, C_{j+6}$中至少需$1+3+1+1=6$個阻隔。

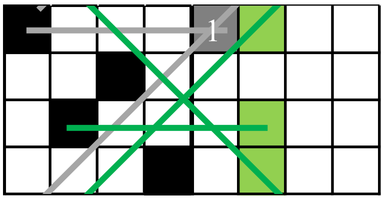


圖 29

(2) 若$\mathrm{C_{j+3}}$中$(0, j+3)$、$(1, j+3)$被阻隔(如圖 30)。此時在$\mathrm{R_2}$與$\mathrm{E_{j+1}}$中$(2, j+4)$、$(3, j+4)$必須為阻隔點。而$\mathrm{C_{j+5}}$、$\mathrm{C_{j+6}}$中每行至少需一個阻隔，因此$C_{j+3}, C_{j+4}, C_{j+5}, C_{j+6}$中至少需$2+2+1+1=6$個阻隔。

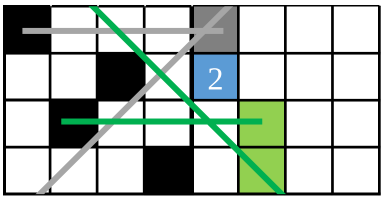


圖 30

(3) 若$\mathrm{C_{j+3}}$中$(0, j+3)$、$(2, j+3)$被阻隔(如圖 31)。此時在$\mathrm{F_{j+4}}$中$(0, j+4)$必須為阻隔點。若再向右延伸，R_1與$E_{\mathrm{j+2}}$中$(1, j+5)$、$(3, j+5)$必為阻隔點。最後$\mathrm{C_{j+6}}$中至少需一個阻隔，因此$C_{j+3}, C_{j+4}, C_{j+5}, C_{j+6}$中至少需$2+1+2+1=6$個阻隔。

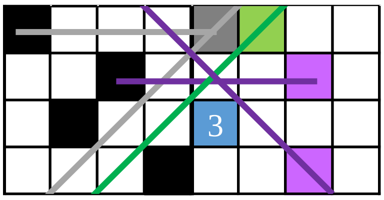


圖 31

(4) 若$\mathrm{C_{j+3}}$中$(0, j+3)$、$(3, j+3)$被阻隔(如圖 32)。此時在$\mathrm{F_{j+4}}$與$\mathrm{R_2}$中$(0, j+4)$、$(2, \mathrm{j}+4)$必須為阻隔點。而$\mathrm{C_{j+5}}$、$\mathrm{C_{j+6}}$中每行至少需一個阻隔，因此$C_{j+3}, C_{j+4}, C_{j+5}, C_{j+6}$中至少需$2+2+1+1=6$個阻隔。

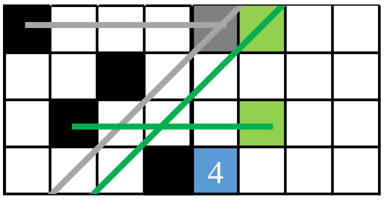


圖 32

從前面的討論我們可以得知以下兩點：

1. 在4×8的區域中，最少有$4+5=9$個阻隔，且阻隔方式唯一(如圖 16)。
2. 符合$f(4, b; 4)=b$的b值最大為6，且阻隔方式唯一。

■

定理七：

當$\mathbf{b|12}$時，$\boldsymbol{f(4, b; 4) \geq \frac{7}{6} b}$。

證明：

若$f(4,12; 4)=13$，則僅有一行可有兩個阻隔點，其餘皆僅可有一個阻隔點。由引理五可知$f(4, b; 4)=b$的b值最大為6，所以若$f(4,12; 4)=13$，(C_0的阻隔數, C_1的阻隔數, C_2的阻隔數, C_3的阻隔數, C_4的阻隔數, C_5的阻隔數, C_6的阻隔數, C_7的阻隔數, C_8的阻隔數, C_9的阻隔數, C_{10}

的阻隔數,C_{11}的阻隔數)必為$(1,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1)$。也就是說$f(4,12;4)=13$包含了$f(4,6;4)=6$與$f(4,5;4)=5$且兩組不相鄰。$f(4,6;4)=6$僅有一種阻隔形式(上下與左右翻轉後視為相同)$\{(0,0),(3,1),(1,2),(2,3),(0,4),(3,5)\}$,然而此阻隔形式向左或右延伸一行必須3個阻隔點,因此$f(4,12;4)\neq 13$。

若$f(4,12;4)=14$,(C_0到C_3的阻隔數,C_4到C_7的阻隔數,C_8到C_{11}的阻隔數$)=(4,5,5)$或$(5,4,5)$或$(4,6,4)$。若(C_0到C_3的阻隔數,C_4到C_7的阻隔數,C_8到C_{11}的阻隔數$)=(5,5,4)$或$(5,4,5)$,則必包含$f(4,8;4)=9$。

若$f(4,12;4)=14$且(C_0到C_3的阻隔數,C_4到C_7的阻隔數,C_8到C_{11}的阻隔數$)=(4,5,5)$:

將$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3),(0,4),(3,4),(2,5),(0,6),(1,7)\}$向右延伸一行,則$(3,8)$必須為阻隔使$E_5$與$R_3$上無4子連線,$C_9$上$(0,9)$、$(2,9)$都必須為阻隔點。再向右延伸一行,則$F_9$中$(0,10)$必為阻隔點。向右延伸,則$(1,11)$、$(3,11)$都必須為阻隔點,使$E_8$與$R_1$上無4子連線。此時須$9+6=15$個阻隔,因此$f(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數$)=(4,5,5)$的阻隔方式不存在。

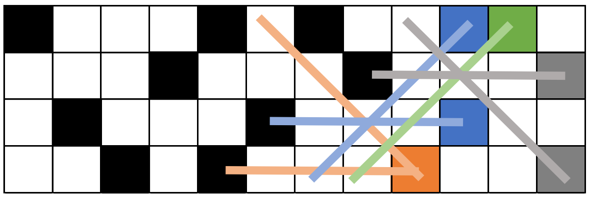


圖 33

若$f(4,12;4)=14$且(C_0到C_3的阻隔數,C_4到C_7的阻隔數,C_8到C_{11}的阻隔數$)=(5,4,5)$:

將$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3),(0,4),(3,4),(2,5),(0,6),(1,7)\}$向左延伸一行,則$(1,-1)$、$(3,-1)$

都必須為阻隔點使F_2與R_1上無4子連線。再向左延伸一行，則F_1中$(3,-2)$必為阻隔點。向右延伸，則$(0,-3)$、$(2,-3)$都必須為阻隔點使E_{-3}與R_2上無4子連線。此時已需5個阻隔。因此$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到C_3的阻隔數$, C_4$到C_7的阻隔數$, C_8$到C_{11}的阻隔數$)=(5,4,5)$的阻隔方式不存在。

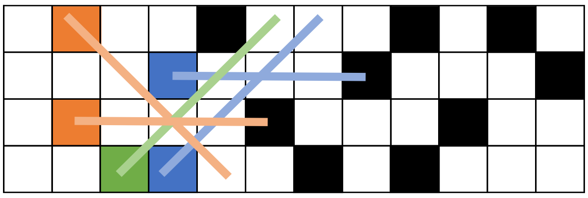


圖 34

若$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到C_3的阻隔數$, C_4$到C_7的阻隔數$, C_8$到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$：

根據引理三的證明，我們可以得到一下結論：

1. 4×4區域無4子連線以$\{(0,0),(2,1),(1,2),(3,3)\}$阻隔時，若向右延伸兩行，至少$(0,4)$、$(0,5)$、$(2,5)$、$(3,5)$需為阻隔點，以構成無4子連線。

2. 4×4區域無4子連線以$\{(1,0),(2,1),(0,2),(3,3)\}$阻隔時，若向右延伸兩行，至少$(0,4)$、$(1,4)$、$(3,4)$、$(2,5)$需為阻隔點，以構成無4子連線。向左延伸兩行，至少$(3,-1)$、$(0,-2)$需為阻隔點，以構成無4子連線。

3. 4×4區域無4子連線以$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$阻隔時，若向右延伸兩行，至少$(0,4)$、$(3,4)$、$(2,5)$需為阻隔點，以構成無4子連線。向左延伸兩行，至少$(1,-1)$、$(3,-1)$、$(3,-2)$需為阻隔點，以構成無4子連線。

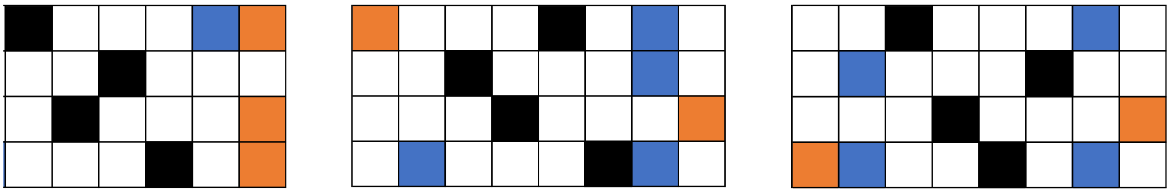


圖 35

由於4×4區域無4子連線以$\{(0,0),(2,1),(1,2),(3,3)\}$阻隔向右延伸兩行至少需要增加4個阻隔點，因此若$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到$C_3$的阻隔數$,C_4$到$C_7$的阻隔數$,C_8$到$C_{11}$的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(1,2),(3,3)\}$時，後四行的阻隔方式只可能為$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$或$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$（$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$上下翻轉)，因為$4\times 4$區域無4子連線以$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$阻隔向左延伸兩行至少需要增加2個阻隔點。然而無論是以$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$或$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$阻隔，$R_1$都不滿足無4子連線，因此若$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到$C_3$的阻隔數$,C_4$到$C_7$的阻隔數$,C_8$到$C_{11}$的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式必不包含$\{(0,0),(2,1),(1,2),(3,3)\}$或$\{(3,0),(1,1),(2,2),(0,3)\}$（$\{(0,0),(2,1),(1,2),(3,3)\}$上下翻轉）。

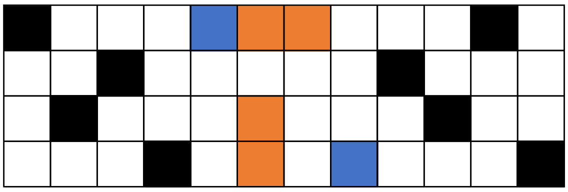


圖 36

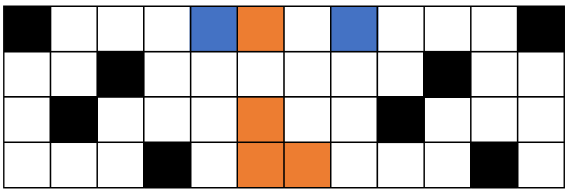


圖 37

若$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到C_3的阻隔數$,C_4$到C_7的阻隔數$,C_8$到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(1,0),(2,1),(0,2),(3,3)\}$時，後四行的阻隔方式只可能為$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$或$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$（$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$上下翻

轉），因為4×4區域無4子連線以$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$阻隔向左延伸兩行至少需要增加2個阻隔點。然而無論是以$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$或$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$阻隔，$F_5$和$E_8$都不滿足無4子連線，因此若$f(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式必不包含$\{(1,0),(2,1),(0,2),(3,3)\}$或$\{(2,0),(1,1),(3,2),(0,3)\}$（$\{(1,0),(2,1),(0,2),(3,3)\}$上下翻轉）。

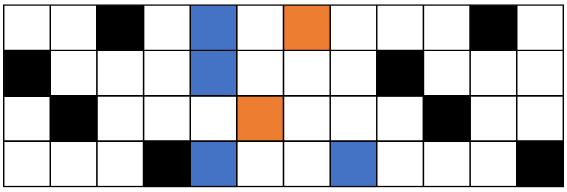


圖 38

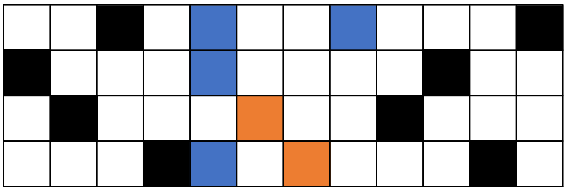


圖 39

接著我們只需討論前四行與後四行皆為$\{(3,-1),(0,-2),(1,0),(2,1),(0,2),(3,3)\}$、$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3),(0,4),(3,4),(2,5)\}$、$\{(1,-1),(3,-1),(3,-2),(0,0),(2,1),(3,2),(1,3),(0,4)\}$上下左右翻轉組合的$2\times C_2^3+2\times3=12$種情況。

若$f(4,12;4)=14$且(C_0到C_3的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$時：

1. 後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$時，中間四行至少需要$2+3=5$個阻隔，但由於$E_6$與$R_2$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$的阻隔方式不存在。

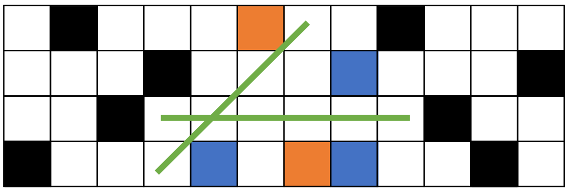


圖 40

2. 後四行為$\{(3,8),(1,9),(0,10),(2,11)\}$時，中間四行至少需要$2+3=5$個阻隔，但由於$F_3$與$F_4$與$R_1$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(3,8),(1,9),(0,10),(2,11)\}$的阻隔方式不存在。

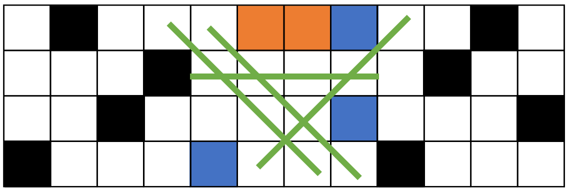


圖 41

3. 後四行為$\{(1,8),(3,9),(2,10),(0,11)\}$時，中間四行至少需要$2+3=5$個阻隔，但由於$F_3$與$E_6$與$R_1$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(1,8),(3,9),(2,10),(0,11)\}$的阻隔方式不存在。

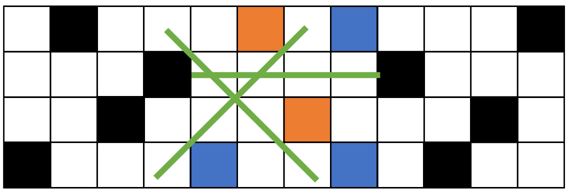


圖 42

4. 後四行為$\{(2,8),(0,9),(1,10),(3,11)\}$時，中間四行至少需要$2+3=5$個阻隔，但由於

F_3與F_4與E_8與R_2有4子連線，所以還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4) = 14$且(C_0到C_3的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數) $= (4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(2,8),(0,9),(1,10),(3,11)\}$的阻隔方式不存在。

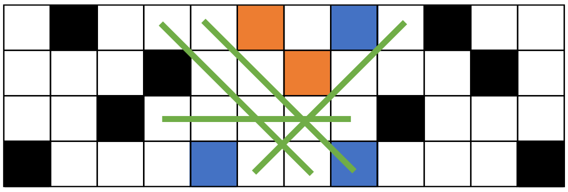


圖 43

5. 後四行為$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$時，中間四行至少需要$2+2=4$個阻隔，但由於$F_3$與$E_8$與$R_1$與$R_2$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4) = 14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數) $= (4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$的阻隔方式為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(1,4),(3,4),(0,5),(0,6),(2,6),(3,7),(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$
或
$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(3,4),(0,5),(2,5),(0,6),(1,7),(3,7),(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$
。

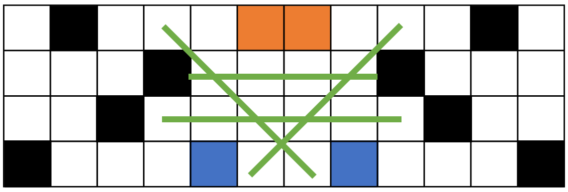


圖 44

6. 後四行為$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$時，中間四行至少需要$2+2=4$個阻隔，但由於$F_4$與$E_6$與$E_8$與$R_1$與$R_2$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4) = 14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數, C_4到C_7的阻隔數, C_8到C_{11}的阻隔數) $= (4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$的阻隔方式為

$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(3,4),(0,5),(1,5),(2,6),(3,6),(0,7),(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$
。

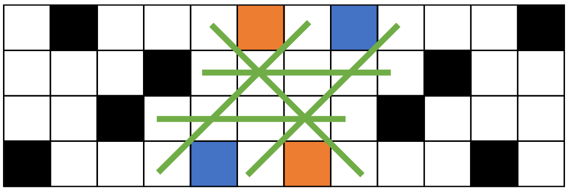


圖 45

若$f(4,12;4)=14$且$(C_0$到C_3的阻隔數$,C_4$到C_7的阻隔數$,C_8$到C_{11}的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$時：

1. 後四行為$\{(1,8),(3,9),(2,10),(0,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$F_5$與$E_6$與$R_1$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且$(C_0$到$C_3$的阻隔數$,C_4$到$C_7$的阻隔數$,C_8$到$C_{11}$的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(1,8),(3,9),(2,10),(0,11)\}$的阻隔方式不存在。

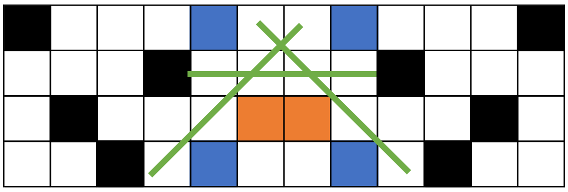


圖 46

2. 後四行為$\{(2,8),(0,9),(1,10),(3,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$E_8$與$E_6$有4子連線，所以還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且$(C_0$到$C_3$的阻隔數$,C_4$到$C_7$的阻隔數$,C_8$到$C_{11}$的阻隔數$)=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(2,8),(0,9),(1,10),(3,11)\}$的阻隔方式不存在。

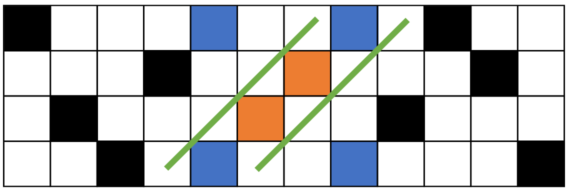


圖 47

3. 後四行為$\{(3,8),(1,9),(0,10),(2,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$R_1$與$E_8$有4子連線，所以最少還需增加兩一個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$的阻隔方式不存在。

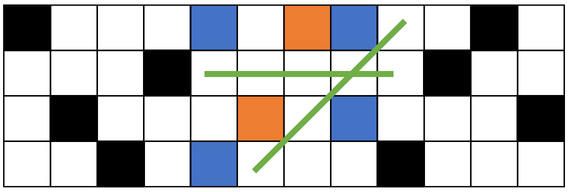


圖 48

4. 後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$F_5$與$E_6$有4子連線，所以還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(0,0),(2,1),(3,2),(1,3)\}$且後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$的阻隔方式不存在。

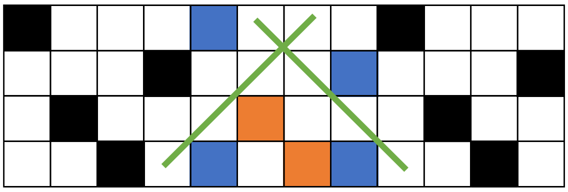


圖 49

若$f(4,12;4)=14$且(C_0到C_3的阻隔數,C_4到C_7的阻隔數,C_8到C_{11}的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(1,0),(3,1),(2,2),(0,3)\}$時：

1. 後四行為$\{(3,8),(1,9),(0,10),(2,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$R_2$與$R_2$與$F_4$有4子連線，所以最少還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(1,0),(3,1),(2,2),(0,3)\}$且後四行為$\{(3,8),(1,9),(0,10),(2,11)\}$的阻隔方式不存在。

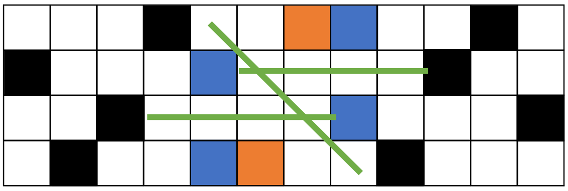


圖 50

2. 後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$時，中間四行至少需要$3+3=6$個阻隔，但由於$R_0$與$R_2$有4子連線，所以還需增加兩個阻隔。因此$(4,12;4)=14$且($C_0$到$C_3$的阻隔數,$C_4$到$C_7$的阻隔數,$C_8$到$C_{11}$的阻隔數)$=(4,6,4)$的阻隔方式前四行為$\{(1,0),(3,1),(2,2),(0,3)\}$且後四行為$\{(0,8),(2,9),(3,10),(1,11)\}$的阻隔方式不存在。

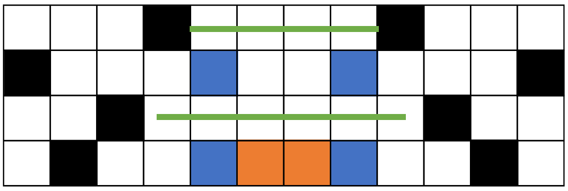


圖 51

由上面的討論可知$f(4,12;4)=14$且僅有三種阻隔型式：$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(1,4),(3,4),(0,5),(0,6),(2,6),(3,7),(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$、$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(3,4),(0,5),(2,5),(0,6),(1,7),(3,7),(1,8),(2,9),(0,10),(3,11)\}$、$\{(3,0),(0,1),(2,2),(1,3),(3,4),(0,5),(1,5),(2,6),(3,6),(0,7),(2,8),(1,9),(3,10),(0,11)\}$，因此，任意$4\times 12$區域最少須14個阻隔點，所以當$b|12$時$f(4,b;4)\geq \frac{7}{6}b$。

■

接著我們探討$4\times b$棋盤的情況。經過程式運算後，我們發現$f(4,b;4)$每多 3 行會多需要 4 個阻隔，因此試著找出能使$f(4,b;4)\le\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor$的阻隔型態。

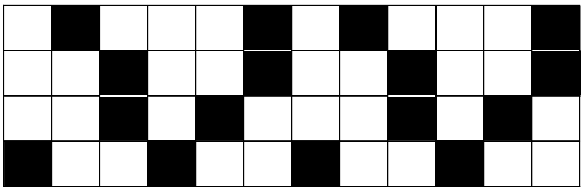


圖 52：$4\times b$棋盤表阻隔示圖

圖 52 是我們找到$f(4,b;4)=\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor$的阻隔型態之一。由圖 52 可以看到，當$b\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$時，所需阻隔數為$\frac{4}{3}(b-1)+1$；當$b\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$時，所需阻隔數為$\frac{4}{3}(b-1)+2$，因此可得：

$$f(4,b;4)\le\begin{cases}\frac{4}{3}b, & b\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\\ \frac{4}{3}(b-1)+1, & b\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\\ \frac{4}{3}(b-2)+2, & b\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$$

將以上結果推導並根據定理四與定理七可以得到：

$$\begin{cases}\frac{7}{6}b\le f(4,b;4)\le\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, b\equiv 0(\mathrm{mod}\ 12)\\ b\le f(4,b;4)\le\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, otherwise\end{cases}$$

我們目前尚未找到適用於無 4 子連線的$a\times b$棋盤之阻隔方式，因此目前$f(a,b;4)$可由定理四及定理五得知範圍為：

$$\boldsymbol{\frac{ab-a'b'}{4}\le f(a,b;4)\le a\left[\frac{b}{4}\right]+b\left[\frac{a}{4}\right]-\left[\frac{a}{4}\right]\left[\frac{b}{4}\right]}$$

（三） $p\ge 5$且$p\in\Omega$

定理八：

若 $p\in\Omega$，則$$\boldsymbol{f(a,b;p)\le\begin{cases} b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+b'\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+(a'-b')\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor, & a'\ge b' \\ a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+(b'-a')\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor, & b'>a' \end{cases}}$$**。**

證明：

對一個完美型態排列，每$p\times b$的範圍中可分割成$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$個$p\times p$正方形與一個$b'\times p$矩形。$p\times(b-b')$的範圍中每列恰有$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$個阻隔。而在$p\times b'$範圍中有$b'$個$1\times p$矩形，每個$1\times p$矩形中皆必有一個阻隔，而且這些阻隔不會出現在同一列。因此對於整個範圍，每p列中有b'列的阻隔數為$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+1$，$p-b'$列的阻隔數為$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$。

對一個完美阻隔排列，$(a-a')\times b$的範圍中有b個$p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\times 1$矩形，每個$p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\times 1$矩形必有$\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor$個阻隔，因此前$a-a'$列的阻隔數為$b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor$。所以剩下的$a'$列中，當$a'\ge b'$時，最多有$b'$列的阻隔數為$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$，其餘$(a'-b')$列中每列的阻隔數為$\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$。因此，$f(a,b;p)\le b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+b'\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+(a'-b')\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$。

將行列的概念互換，同理可得當$b'>a'$時，$f(a,b;p)\le a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+(b'-a')\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor$。

■

當$p\in\Omega$時，我們將整個棋盤分成4個棋盤進行討論。I 區有$(a-a')(b-b')$個完整的矩形(棋盤中$(0,0)$至$(p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor-1,p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor-1)$的矩形棋盤)、II 區有$b(a-a')$個$p\times 1$矩形(棋盤中$(p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor,0)$至$(a-1,p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor-1)$的矩形棋盤)、III區$a(b-b')$個$1\times p$矩形(棋盤中$(0,p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor)$至$(p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor-1,b-1)$的矩形棋盤)與 IV 區$a'b'$個方格(棋盤中$(p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor,p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor)$至$(a-1,b-1)$的矩形棋盤)，如圖 53。

這樣的區分方式可以使我們很輕易的得知 I、II、III 區的最少阻隔數。我們在此定義$f_k(a,b;p)$為完美阻隔情況下，在長為a寬為b棋盤中無p子連線時，第k區所需的阻隔數最小值，如圖 53。

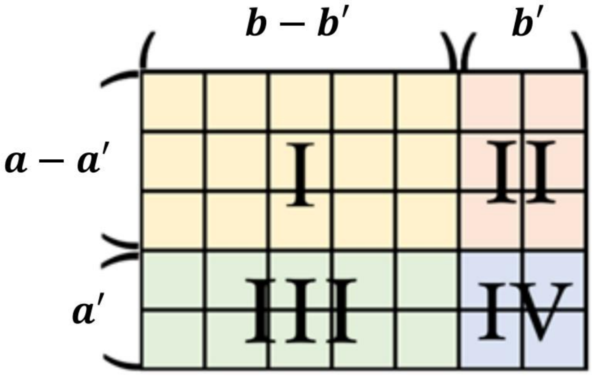


圖 53：I 區、II 區、III 區、IV 區棋盤

由於任意$1\times p$的矩形最少有一個阻隔，因此 I 區最少需$\frac{(a-a')(b-b')}{p}$個阻隔，II 區與 III 區最少需$\frac{b(a-a')+a(b-b')}{p}$個阻隔。

我們以程式計算阻隔方式為$DT(p,2)$時，$f_4(a,b;p)$之值，將得到的結果製成表格，如圖 53。我們可以將此表格分為四個區域：皆為 0 的區域、兩組公差為 1 的區域、$2k$個k的區域、公差為1的等差數列區域。

a'		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
										0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
														0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
																0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	p-a'																			0	1	2	3	4	5	6	7
b'																						0	1	2	3	4	5
		0	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
		2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2
		3			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3
		4				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	4
		5					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	2	3	4	5
		6						0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	3	3	4	5	6
		7							0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	3	3	3	4	5	6	7
		8								0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	5	6	7	8
		9									1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	9
		10										2	3	3	4	4	5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	10
		11											4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	10	11
		12												5	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	11	12
		13													6	6	6	6	6	6	7	8	9	10	11	12	13
		14														7	7	7	7	7	8	9	10	11	12	13	14
		15															7	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		16																8	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		17																	9	10	11	12	13	14	15	16	17
		18																		11	12	13	14	15	16	17	18
		19																			13	14	15	16	17	18	19
		20																				15	16	17	18	19	20
		21																					17	18	19	20	21
		22																						19	20	21	22
		23																							21	22	23
		24																								23	24

圖 54：$DT(p,2)$的阻隔形態下，$f_4(a,b;p)$數值對照表。橫軸為$p-a'$，縱軸為b'。

根據表格及觀察的結果，我們求出當阻隔方式為$DT(p,2)$時，$f_4(a,b;p)$之值為：

當$a'+b'+|a'-b'|\le p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}$時，$f_4(a,b;p)=0$

當$\frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}<p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}<a'+b'-|a'-b'|$時，$f_4(a,b;p)=\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}-\left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor$

當$\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}<p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}<\frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}$時，$f_4(a,b;p)=\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}-\left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-|a'-b'|+1}{2}\right\rfloor$

當$p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}\le\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}$時，$f_4(a,b;p)=a'+b'-p$。

定理九：

當$a'+b'+|a'-b'|\le p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}$時，$f(a,b;p)=\frac{ab-a'b'}{p}$。

說明：

$f(a,b;p)=\frac{ab-a'b'}{p}+f_4(a,b;p)$，又$a'+b'+|a'-b'|\le p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}$時，$f_4(a,b;p)=0$，因此$\frac{ab-a'b'}{p}$為精確值。

■

IV 區多在$DT(p,2)$阻隔形態下有最小值，但有極少數特例在$DT(p,d),d\neq 2$的阻隔形態下有比$DT(p,2)$阻隔形態更少的值，因此可將$DT(p,2)$阻隔形態下的最小阻隔數視為$p\in\Omega$時，$f(a,b;p)$的上界。

我們可得完整的$f(a,b;p)$範圍為：

當$a'+b'+|a'-b'|\le p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}$時，$f(a,b;p)=\frac{ab-a'b'}{p}$

當$\frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}<p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}<a'+b'-|a'-b'|$時，$f(a,b;p)\le\frac{ab-a'b'}{p}+\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}-\left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor$

當$\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}<p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}<\frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}$時，$f(a,b;p)\le\frac{ab-a'b'}{p}+\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}-\left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-|a'-b'|+1}{2}\right\rfloor$

當$p-\frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}\le\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}$時，$f(a,b;p)\le\frac{ab-a'b'}{p}+a'+b'-p$。

定理十：

$p\in\Omega$時，$f(p,b;p)=b$。

說明：

令$b = tp + b'$，則由定理八可知$f(p,b;p) \leq p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + 0 \times \left\lceil\frac{p}{p}\right\rceil + (b'-0)\left\lfloor\frac{p}{p}\right\rfloor = p\left\lfloor\frac{tp+b'}{p}\right\rfloor + b' = tp + b' = b$，且由定理三可知$f(p,b;p) \geq \frac{pb-0\times b'}{p} = b$。綜合兩定理可得：$f(p,b;p) \leq b \leq f(p,b;p)$，因此$f(p,b;p) = b$。

■

定理十一：

$$\boldsymbol{f(a,b;5) = \left\lfloor\frac{ab}{5}\right\rfloor}$$。

證明：

1. 證明$p = 5$有唯一的完美型態：

不失一般性，設(i,j)處有阻隔，討論以(i,j)向右及向下擴張的5×5區域，並以(i,j)作為新基準點(0,0)。設5×5區域的阻隔方式$S = \{(k,f(k))|k \in Z_p\}$為完美型態並可擴張成無5子連線的最佳阻隔方式。根據定理一，f為Z_p到Z_p的一對一函數，且$\{f(k)+k|k \in Z_p\} = \{f(k)-k|k \in Z_p\} = Z_p$。

因為$S = \{(k,f(k))|k \in Z_p\}$為完美型態，所以$f(1) \neq 1$或4、、$f(2) \neq 2$或3、$f(3) \neq 3$或2、$f(4) \neq 4$或1，我們只需討論$1 \times (5-1-2) \times (5-1-2) \times (5-1-2-1) \times (5-1-2-1) = 1 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4$種阻隔形式即可。

當$(f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)) = (0,2,1,4,3)$時，$(f(0)+0,f(1)+1,f(2)+1,f(3)+3,f(4)+4) = (0,3,3,2,2)$，不合。

當$(f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)) = (0,2,4,1,3)$時，$(f(0)+0,f(1)+1,f(2)+1,f(3)+$

$3, f(4)+4) = (0,3,1,4,2)$，$(f(0)+0, f(1)+1, f(2)+1, f(3)+3, f(4)+4) = (0,1,2,3,4)$ 符合。

當 $\big(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\big) = (0,3,1,4,2)$ 時，$(f(0)+0, f(1)+1, f(2)+1, f(3)+3, f(4)+4) = (0,4,3,2,1)$，$(f(0)+0, f(1)+1, f(2)+1, f(3)+3, f(4)+4) = (0,2,4,1,3)$，符合。

當 $\big(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\big) = (0,3,4,1,2)$ 時，$(f(0)+0, f(1)+1, f(2)+1, f(3)+3, f(4)+4) = (0,4,1,4,1)$，不合。

其中，$\big(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\big) = (0,2,4,1,3)$ 及 $\big(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\big) = (0,3,1,4,2)$分別為$DT(5,2)$及$DT(5,3)$，恰同構。

2. 最少阻隔數$f(a,b;5)$：

由於$p=5$有唯一的完美型態，我們可以確定：

當$a'+b'+|a'-b'| \le p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2}$時，$f_4(a,b;p) = 0$

當 $\frac{a'+b'+|a'-b'|}{2} < p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} < a'+b'-|a'-b'|$時，$f_4(a,b;p) = \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} - \left\lfloor \frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4} \right\rfloor$

當 $\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4} < p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} < \frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}$ 時，$f_4(a,b;p) = \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} - \left\lfloor \frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p-|a'-b'|+1}{2} \right\rfloor$

當$p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} \le \frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}$時，$f_4(a,b;p) = a'+b'-p$。

其中，$f_4(a,b;5)$恰等於$\left\lfloor \frac{a'b'}{5} \right\rfloor$，經過化簡後可得$f(a,b;5) = \left\lfloor \frac{ab}{5} \right\rfloor$。

■

定理十二：

$$\boldsymbol{f(a,b;7)=\begin{cases}\left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor-1, & a'b'=8\vee a'b'=15\\ \left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor, & a'b'\neq 8\wedge a'b'\neq 15\end{cases}}$$ 。

證明：

不失一般性，設(i,j)處有阻隔，討論以(i,j)向右及向下擴張的7×7區域，並以(i,j)作為新基準點$(0,0)$。設7×7區域的阻隔方式$S=\{(k,f(k))|k\in Z_p\}$為完美型態並可擴張成無7子連線的最佳阻隔方式。根據定理一，f為Z_p到Z_p的一對一函數，且$\{f(k)+k|k\in Z_p\}=\{f(k)-k|k\in Z_p\}=Z_p$。

因為$S=\{(k,f(k))|k\in Z_p\}$為完美型態，所以當$f(0)=0$時，$f(1)\neq 1$，$f(2)\neq 2$，$f(3)\neq 3$，$f(4)\neq 4$，$f(5)\neq 5$，$f(6)\neq 6$。且$f(1)\neq 6$，$f(2)\neq 5$，$f(3)\neq 4$，$f(4)\neq 3$，$f(5)\neq 2$，$f(6)\neq 1$。與$p=5$相同，一一討論不同可能的$(f(0),f(1),f(2),f(3),f(4),f(5),f(6))$、$(f(0)+0,f(1)+1,f(2)+2,f(3)+3,f(4)+4,f(5)+5,f(6)+6)$、$(f(0)+0,f(1)-1,f(2)-2,f(3)-3,f(4)-4,f(5)-5,f(6)-6)$後，可以發現唯有與$DT(7,2)$同構的阻隔方式才會是完美型態。因此$f(a,b;7)=\frac{ab-a'b'}{7}+f_4(a,b;7)$，其中，當$a'b'\neq 8$或$15$時，$f_4(a,b;7)$恰等於$\left\lfloor\frac{a'b'}{7}\right\rfloor$，經過化簡後可得：

$$f(a,b;7)=\begin{cases}\left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor-1, & a'b'=8\vee a'b'=15\\ \left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor, & a'b'\neq 8\wedge a'b'\neq 15\end{cases}$$ 。

■

（四） $p\geq 5$且$p\notin\Omega$

我們定義「類完美阻隔」為當$p\notin\Omega$時，以$DT(p',d)$的阻隔方式為基底，並將剩餘的p子

連線處阻隔的阻隔方式。此外我們定義$p_{\Omega}=\min\{p-k|k\in\Omega,k\leq p\}$，意即$p$與$\Omega$中元素之差的最小值。

引理六：

當$p\notin\Omega$且$p\geq 5$時，相同範圍下「類完美阻隔」的阻隔數≥ $DT(p-p_{\Omega},d)$的阻隔數。

證明：

當$p=2p_1$,$d=2d_1(p_1,d_1\in N)$

則$d\equiv d+d_1p\equiv d+2d_1p_1\equiv d+dp_1\equiv d(1+p_1)(\mathrm{mod}\,p)$

因為$DT(p,d)=\{(i,f(i))|f(x)=dx,i\in Z_p\}$，$(1+p_1)-1=p_1=\frac{p}{2}$

所以$DT(p,d)$上任意一個阻隔恰存在另一個阻隔與其在相同列上

當$p=2p_1$,$d=2d_1+1\Rightarrow d-1=2d_1(p_1,d_1\in N)$

則$d-1\equiv d-1+d_1p\equiv d-1+2d_1p_1\equiv d-1+(d-1)p_1\equiv(d-1)(1+p_1)(\mathrm{mod}\,p)$

因為$DT(p,d)=\{(i,f(i))|f(x)=dx,i\in Z_p\}$，$(1+p_1)-1=p_1=\frac{p}{2}$

所以$DT(p,d)$上任意一個阻隔恰存在另一個阻隔與其在相同列上

所以當$p=2k(k\in N)$時，類完美型態的$p\times p$棋盤至少需要$p+\frac{p}{2}$顆阻隔才能構成無p子連線。

當$p=2p_1(p_1,\in N)$且$p_{\Omega}=1$時，$p\times p$棋盤無$p-p_{\Omega}$子連線阻隔最少需$p-p_{\Omega}+2\times p_{\Omega}=p+1$個阻隔。$p+\frac{p}{2}\geq p+1\Rightarrow p\geq 2$

當$p=2p_1(p_1,\in N)$且$p_{\Omega}=3$時，$p\times p$棋盤無$p-p_{\Omega}$子連線阻隔最少需$p-p_{\Omega}+2\times p_{\Omega}=p+3$個阻隔。$p+\frac{p}{2}\geq p+3\Rightarrow p\geq 6$

當$p=3p_1$,$d=3(p_1,d_1\in N)$

則$d\equiv d+d_1p\equiv d+3d_1p_1\equiv d+dp_1\equiv d(1+p_1)(\mathrm{mod}\,p)$

因為$DT(p,d)=\{(i,f(i))|f(x)=dx,i\in Z_p\}$，$(1+p_1)-1=p_1=\frac{p}{3}$

所以$DT(p,d)$上任意一個阻隔恰存在另兩個阻隔與其在相同列上

當$p=3p_1$,$d=3d_1+1\Rightarrow d-1=3d_1(p_1,d_1\in N)$

則$d-1\equiv d-1+d_1p\equiv d-1+3d_1p_1\equiv d-1+(d-1)p_1\equiv(d-1)(1+p_1)(\mathrm{mod}\,p)$

因為$DT(p,d)=\{(i,f(i))|f(x)=dx,i\in Z_p\}$，$(1+p_1)-1=p_1=\frac{p}{3}$

所以$DT(p,d)$上任意一個阻隔恰存在另兩個阻隔與其在相同列上

當$p=3p_1$,$d=3d_1+2\Rightarrow d+1=3d_1(p_1,d_1\in N)$

則$d+1\equiv d+1+d_1p\equiv d+1+3d_1p_1\equiv d+1+(d+1)p_1\equiv(d+1)(1+p_1)(\mathrm{mod}\,p)$

因為$DT(p,d)=\{(i,f(i))|f(x)=dx,i\in Z_p\}$，$(1+p_1)-1=p_1=\frac{p}{3}$

所以$DT(p,d)$上任意一個阻隔恰存在另兩個阻隔與其在相同列上

所以當$p=3k(k\in N)$時,類完美型態的$p\times p$棋盤至少需要$p+\frac{2p}{3}$顆阻隔才能構成無p子連線。

當$p=3p_1(p_1,\in N)$且$p_\Omega=1$時，$p\times p$棋盤無$p-p_\Omega$子連線阻隔最少需$p-p_\Omega+2\times p_\Omega=p+1$個阻隔。$p+\frac{2p}{3}>p+1\Rightarrow p\geq\frac{3}{2}$

當$p=3(p_1,\in N)$且$p_\Omega=2$時，$p\times p$棋盤無$p-p_\Omega$子連線阻隔最少需$p-p_\Omega+2\times p_\Omega=p+2$個阻隔。$p+\frac{2p}{3}>p+2\Rightarrow p\geq 3$

■

定理十三：

若$b \geq p \geq 6$，則$f(a,b;p) \leq f(a-p_{\Omega},b;p-p_{\Omega})+p_{\Omega}\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$

證明：

因為$p-p_{\Omega} \in \Omega$，可將前$(a-p_{\Omega})$列所成之$(a-p_{\Omega}) \times b$的棋盤以無$(p-p_{\Omega})$子連線的完美型態擺放黑棋，此時在$(a-p_{\Omega}) \times b$的棋盤中，C_j、E_j與F_j方向皆不存在$(p-p_{\Omega})$子連線。所以在$a \times b$棋盤中，C_j、E_j與F_j方向皆不存在p子連線。因此，只要在$R_{a-1},R_{a-2},\ldots,R_{a-p_{\Omega}}$擺上一些黑棋使得$R_{a-1},R_{a-2},\ldots,R_{a-p_{\Omega}}$不存在$p$子連線，則可得到一個$a \times b$棋盤上無$p$子連線。因此$f(a,b;p) \leq f(a-p_{\Omega},b;p-p_{\Omega})+p_{\Omega}\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor$。

■

定理十四：

$p \notin \Omega$時，$f(a,b;p) \leq f(a-2p_{\Omega},b-2p_{\Omega};p-p_{\Omega})+\sum_{i=0}^{p_{\Omega}-1} f_5(a-2i,b-2i;p)$

證明：

設$p_{\Omega}=k$。將$a \times b$的棋盤以無$p-p_{\Omega}$子連線的完美型態阻隔後，可將落於C_0至C_{k-1}、C_{b-k}至C_{b-1}、R_0至R_{k-1}、R_{a-k}至R_{a-1}上的阻隔移除，仍可使E_j與F_j方向不存p子連線。故可將C_0至C_{k-1}、C_{b-k}至C_{b-1}、R_0至R_{k-1}、R_{a-k}至R_{a-1}的「口」字形區域(V 區)視為獨立，使原本上界值減少。討論此「口」字形區域無p子連線的阻隔數最小值即$f_5(a,b;p)$之值如下：

$$f_5(a,b;p)=\begin{cases}2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right)-2, a'=0 \wedge b'=0\\2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right)-1, a'=0 \wedge b'=1\\2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right)-1, a'=1 \wedge b'=0\\2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right), otherwise\end{cases}$$。

當$p \geq 5$且$p \notin \Omega$時，以無$p-p_{\Omega}$子連線排列內部(p_{Ω},p_{Ω})至$(a-p_{\Omega},b-p_{\Omega})$的$(a-2p_{\Omega}) \times$

$(b-2p_\Omega)$矩形範圍，外圍則大致為每間隔$p-1$格擺一顆的阻隔方式可作為上界。圖 55 為$f(15,20;6)$的阻隔方式之一。我們稱此外圍棋盤為 V 區，V 區所需阻隔數量之最小值表示為$f_5(a,b;p)$。$f(a,b;p) \le f(a-2p_\Omega, b-2p_\Omega; p-p_\Omega) + \sum_{i=0}^{p_\Omega-1} f_5(a-2i, b-2i; p)$。此種阻隔形態下所需的阻隔數數量可視為$p \notin \Omega$時的上界。

■

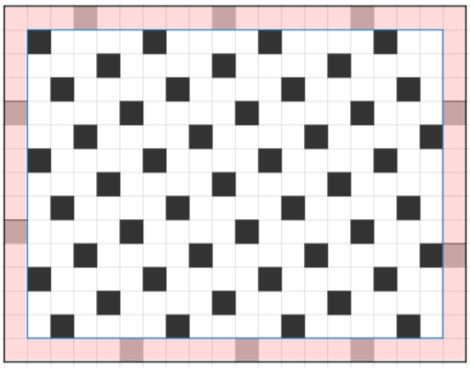


圖 55： $p=6$時的 V 區示意圖

以 $f(a,b;p)=(18,21;6)$為例，$f(18,21;6) \le f(16,19;5) + f_5(18,21;6) = 60+1-1+2(3+4) = 74$。這表示在$18 \times 21$的棋盤中，要達成無 6 子連線，最多需要74個阻隔必能辦到，而以類完美阻隔需要$\frac{18}{6}\frac{21}{6}(6) + \frac{2\times 6}{3} = 105$個阻隔。

三、三維無界棋盤

當三維中以完美型態阻隔時，我們以$p \times p$為單位的俯視圖表示，其數字指棋盤格(i,j,h)的h值。如圖 56 為$p=11$時的一種完美阻隔型態，也是一種$DT(p,d_r,d_h)$。需要注意的是，此拉丁方陣的數值是從$0,1,2,\ldots,p-1$，而非$1,2,3,\ldots,p$。

0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
5	8	0	3	6	9	1	4	7	10	2
10	2	5	8	0	3	6	9	1	4	7
4	7	10	2	5	8	0	3	6	9	1
9	1	4	7	10	2	5	8	0	3	6
3	6	9	1	4	7	10	2	5	8	0
8	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5
2	5	8	0	3	6	9	1	4	7	10
7	10	2	5	8	0	3	6	9	1	4
1	4	7	10	2	5	8	0	3	6	9
6	9	1	4	7	10	2	5	8	0	3

圖 56：$p=11$時的一種完美阻隔型態府視圖

我們可以發現，圖 56 為對角拉丁方陣。且不只有一條對角線上每個數字恰出現一次，在$E_j, j \in Z_b$及$F_j, j \in Z_a$上，皆每個數字恰出現一次。

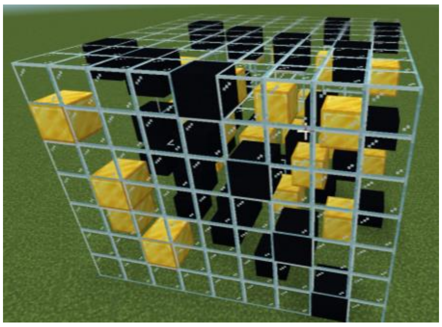


圖 57：$DT(11,2,4)$示意模型

定理十五：

拉丁方陣為完美阻隔型態若且為若對於拉丁方陣上任意兩個位置$(i_1,j_1)=a_1$、$(i_2,j_2)=a_2$必符合下列兩項敘述：

1. **當$|i_1-i_2| \equiv |p-j_1+j_2| \pmod p$時，$|i_1-i_2| \not\equiv |a_1-a_2| \pmod p$**
2. **當$|p-i_1+i_2| \equiv |j_1-j_2| \pmod p$時，$|j_1-j_2| \not\equiv |a_1-a_2| \pmod p$**
3. **當$|i_1-i_2|=0$或$|j_1-j_2|=0$時$|i_1-i_2|+|j_1-j_2| \not\equiv |a_1-a_2| \pmod p$**

定理十六：

$DT(p,d_r,d_h)$ **為完美型態** $\Leftrightarrow (p=6k+1$ **或** $6k-1)$ **且** $\gcd(d_r,p)=\gcd(d_r-1,p)=\gcd(d_r+1,p)=\gcd(d_h,p)=\gcd(d_h-1,p)=\gcd(d_h+1,p)=1$。

說明：

三維格狀棋盤可視為多個二維棋盤所構成，因此各層可以二維中的完美型態進行阻隔。

■

經過嘗試後，我們確認Ω內的最小元素為 11，我們定義所有能以完美型態阻隔的p值集合為Ω，三維中$\{n|n=6k+5\vee 6k+7,k\in N\}\subseteq\Omega$。

四、三維$a\times b\times c$有界棋盤

（一） 對於任意p值，最小阻隔數的上界與下界

定理十七：

$$f(a,b,c;p)\geq\frac{abc-a\prime b\prime c\prime}{p}。$$

說明：

將二維中定理三的證明延伸可得。

定理十八：

$$f(a,b,c;p)\leq ab\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor+bc\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+ac\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor-a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor-b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor-c\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor。$$

說明：

將二維中定理四的證明延伸可得。

（二）　$p < 11$

1.　$p = 2$

$p = 2$ 時任何一顆白棋必須完全被黑棋包圍，即各個方向都不可有白棋，即任一顆白棋周圍的26個位置皆須被阻隔。

$$f(a,b,c;2) = ab\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor + bc\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor + ac\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor - a\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor - b\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor - c\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor$$。

（三）　$p \geq 11$且$p \in \Omega$

當$p \in \Omega$時，我們將整個格狀空間分成8區格狀棋盤進行討論。I 區有$(a-a')(b-b')(c-c')$個完整的立方格(棋盤中$(0,0,0)$至$\left(p\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor - 1, p\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor - 1, p\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor - 1\right)$的長方體棋盤)；II、III、V 區都分別有兩個邊為 p 的倍數；IV、VI、VII 區都分別有一個邊為 p 的倍數；VIII 區為$a' \times b' \times c'$的長方體棋盤，如圖 58。這樣的區分方式可以使我們很輕易的得知 VIII 區以外的最少阻隔數。

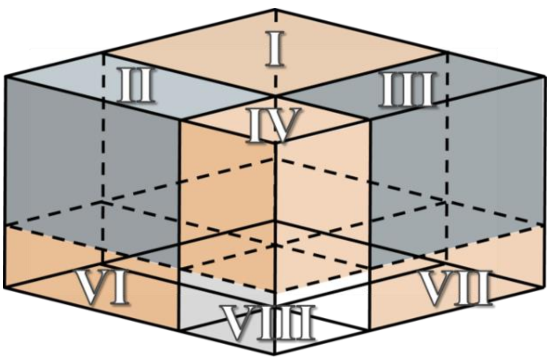


圖 58：I 至 VIII 區棋盤

由於任意$1 \times 1 \times p$的矩形最少有一個阻隔，任意$p \times p \times p$的矩形最少有p^2個阻隔，因此

I 區的下界為$\frac{(a-a')(b-b')(c-c')}{p}$個阻隔，II 區與 III 區的下界為$\frac{b(a-a')+a(b-b')}{p}$個阻隔，因此當$p \in \Omega$時，$\frac{abc-a'b'c'}{p} \leq f(a,b,c;p) = \frac{abc-a'b'c'}{p} + f_8(a,b,c;p) \leq ab\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor + bc\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + ac\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor - a\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor - b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor - c\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor$。

（四） $p \notin \Omega$且$p \geq 11$時的最小阻隔數

由於三維格狀棋盤可視為多個二維棋盤所構成的，所以我們可從二維中$p \notin \Omega$時的排列推測可將棋盤分為9個區域，如圖 59。

其中 I 到 XI 區皆以無$p - p_\Omega$子連線的完美型態排列。與二維相似，IX 區指C_0至C_k及C_{b-k}至C_{b-1}及R_0至R_k及R_{a-k}至C_{a-1}及F_0至F_k及F_{c-k}至F_{c-1}的獨立區域。其中$\{(i,j,h)|(0 \leq i < p_\Omega - 1) \vee (a - p_\Omega \leq i < a), (0 \leq j < p_\Omega - 1) \vee (b - p_\Omega \leq j < b), (0 \leq h < p_\Omega - 1) \vee (c - p_\Omega \leq h < b)\}$的範圍以無$p$子連線的方式進行阻隔，剩下的兩個$(a-p_\Omega)\times(b-p_\Omega)\times p_\Omega$區域、兩個$(a-p_\Omega)\times p_\Omega\times(c-p_\Omega)$區域、兩個$p_\Omega\times(b-p_\Omega)\times(c-p_\Omega)$區域以獨立的(不受內部$(a-p_\Omega)\times(b-p_\Omega)\times(c-p_\Omega)$區域限制)無$p-p_\Omega$子連線的完美型態排列。

$\boldsymbol{f(a,b,c;p) \leq f(a-2p_\Omega, b-2p_\Omega, c-2p_\Omega; p-p_\Omega) + \sum_{i=0}^{p_\Omega-1}(f_9(a-2i, b-2i, c-2i; p) + 2(f(a-2i, b-2i; p-p_\Omega) + f(a-2i, c-2i; p-p_\Omega) + f(b-2i, c-2i; p-p_\Omega)))}$。

$$f_9(a,b,c;p) = \begin{cases} 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 8, a'+b'+c' = 0 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 6, a'+b'+c' = 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 4, a'+b'+c' = 2 \wedge a',b',c' \leq 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right), otherwise \end{cases}$$

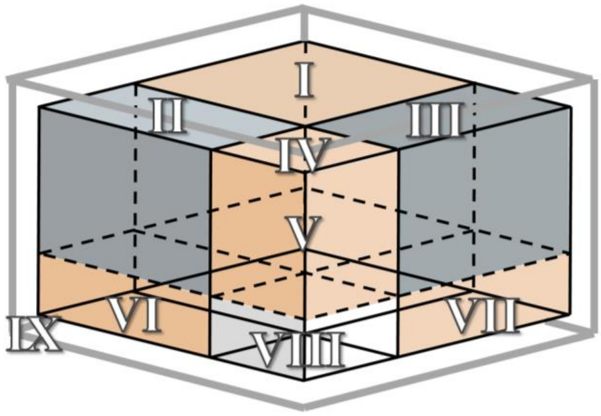


圖 59：三維 I 至 IX 區棋盤

其中，$\text{IX} = \{(i,j,h)|0 \le i \le a, 0 \le j \le b, 0 \le h \le p_\Omega - 1 \vee c - p_\Omega + 1 \le h \le c\} \cup \{(i,j,h)|0 \le i \le a, 0 \le h \le c, 0 \le j \le p_\Omega - 1 \vee b - p_\Omega + 1 \le j \le b\} \cup \{(i,j,h)|0 \le j \le b, 0 \le h \le c, 0 \le i \le p_\Omega - 1 \vee a - p_\Omega + 1 \le i \le a\}$。在 $\{(i,j,h)|0 \le i \le p_\Omega - 1 \vee a - p_\Omega + 1 \le i \le a, 0 \le j \le p_\Omega - 1 \vee b - p_\Omega + 1 \le j \le b, , 0 \le h \le p_\Omega - 1 \vee c - p_\Omega + 1 \le h \le c\}$的區域中，以無$p$子連線阻隔，而剩餘的 $\text{IX} - \{(i,j,h)|0 \le i \le p_\Omega - 1 \vee a - p_\Omega + 1 \le i \le a, 0 \le j \le p_\Omega - 1 \vee b - p_\Omega + 1 \le j \le b, , 0 \le h \le p_\Omega - 1 \vee c - p_\Omega + 1 \le h \le c\}$區域則是以無$p - p_\Omega$子連線阻隔。

肆、　結論與應用

一、二維中,若存在Z_p到Z_p的一對一函數f,使得$\{f(k) + k|k \in Z_p\} = \{f(k) - k|k \in Z_p\} = Z_p$，則$S = \{(k, f(k))|k \in Z_p\}$可擴張成完美型態。

二、二維中，$DT(p,d)$為完美型態$\Leftrightarrow (p = 6k + 1$或$6k - 1)$且$\gcd(d,p) = \gcd(d-1,p) = \gcd(d+1,p) = 1$。

三、二維中$f(a,b;p)$精確值：

$p = 2$	$f(a,b;2) = a\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + b\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor$

$p=3$	$f(3,b;3)=\begin{cases}3, b=3\\ \left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, b>3\end{cases}$
$p=5$	$f(a,b;5)=\left\lfloor\frac{\mathrm{ab}}{5}\right\rfloor$
$p=7$	$f(a,b;7)=\begin{cases}\left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor-1, & a'b'=8\vee a'b'=15\\ \left\lfloor\frac{ab}{7}\right\rfloor, & a'b'\neq 8\wedge a'b'\neq 15\end{cases}.$
$3a'+3b'-\lvert a'-b'\rvert \le 2p$	$f(a,b;p)=\frac{ab-a'b'}{p}$
$p\in\Omega$	$f(a,b;p)=\frac{ab-a'b'}{p}+f_4(a,b;p)$（尚未求出$f_4(a,b;p)$精確值）

四、二維中$f(a,b;p)$的上界與下界：

<table>
<tr><td>$p=2$</td><td colspan="2">（已有精確值）</td></tr>
<tr><td>$p=3$</td><td colspan="2">$\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor+a'\left\lfloor\frac{\mathrm{b}}{3}\right\rfloor\le f(a,b;3)\le a\left\lfloor\frac{b}{3}\right\rfloor+b\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{a}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{3}\right\rfloor$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$p=4$</td><td>$a=4$</td><td>$\begin{cases}\frac{7}{6}b\le f(4,b;4)\le\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, b\equiv 0(mod\ 12)\\ b\le f(4,b;4)\le\left\lfloor\frac{4}{3}b\right\rfloor, otherwise\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$a\neq 4$</td><td>$\frac{ab-a'b'}{4}\le f(a,b;4)\le a\left\lceil\frac{b}{4}\right\rceil+b\left\lceil\frac{a}{4}\right\rceil-\left\lceil\frac{a}{4}\right\rceil\left\lceil\frac{b}{4}\right\rceil$</td></tr>
<tr><td>$p\in\Omega$且
$3a'+3b'-\lvert a'-b'\rvert > 2p$</td><td colspan="2">$b\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor+b'\left\lceil\frac{b}{p}\right\rceil+(a'-b')\left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\le f(a,b;p)\le\frac{ab-a'b'}{p}+g(a,b;p)$</td></tr>
<tr><td>$p\notin\Omega$</td><td colspan="2">$\frac{ab-a'b'}{p}\le f(a,b;p)\le f(a-2p_\Omega,b-2p_\Omega;p-p_\Omega)$
$+\sum_{i=0}^{p_\Omega-1}f_5(a-2i,b-2i;p)$</td></tr>
</table>

其中，$g(a,b;p)$值為：

當$a'+b'+\lvert a'-b'\rvert\le p-\frac{a'+b'-\lvert a'-b'\rvert}{2}$時，$g(a,b;p)=0$

當 $\frac{a'+b'+\lvert a'-b'\rvert}{2}<p-\frac{a'+b'-\lvert a'-b'\rvert}{2}<a'+b'-\lvert a'-b'\rvert$時，$g(a,b;p)=\frac{a'+b'-\lvert a'-b'\rvert}{2}-$

$\left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor$

當 $\frac{a'+b'+|a'-b'|}{4} < p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} < \frac{a'+b'+|a'-b'|}{2}$ 時，$g(a,b;p) = \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} - \left\lfloor\frac{2p-a'-b'-|a'-b'|+2}{4}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{p-|a'-b'|+1}{2}\right\rfloor$

當$p - \frac{a'+b'-|a'-b'|}{2} \leq \frac{a'+b'+|a'-b'|}{4}$時，$g(a,b;p) = a'+b'-p$。

$p_\Omega = \min\{p-k|k \in \Omega, k \leq p\}$

$f_5(a,b;p)$值為：

$$f_5(a,b;p) = \begin{cases} 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right) - 2, a' = 0 \wedge b' = 0 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right) - 1, a' = 0 \wedge b' = 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right) - 1, a' = 1 \wedge b' = 0 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right), otherwise \end{cases}。$$

或

$$f_5(a,b;p) = \begin{cases} 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right) - 2, a'+b' = 0 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right) - 1, a'+b' = 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor\right), otherwise \end{cases}。$$

五、三維中，$DT(p,d_r,d_h)$為完美型態$\Leftrightarrow (p = 6k+1$或$6k-1)$且$\gcd(d_r,p) = \gcd(d_r-1,p) = \gcd(d_r+1,p) = \gcd(d_h,p) = \gcd(d_h-1,p) = \gcd(d_h+1,p) = 1$。

六、三維中，拉丁方陣為完美阻隔若且為若對於拉丁方陣上任意兩個位置$(i_1,j_1) = a_1$、$(i_2,j_2) = a_2$必符合下列三項敘述：

1. 當$|i_1-i_2| \equiv |p-j_1+j_2| (mod\ p)$時，$|i_1-i_2| \not\equiv |a_1-a_2| (mod\ p)$
2. 當$|p-i_1+i_2| \equiv |j_1-j_2| (mod\ p)$時，$|j_1-j_2| \not\equiv |a_1-a_2| (mod\ p)$
3. 當$|i_1-i_2| = 0$或$|j_1-j_2| = 0$時$|i_1-i_2| + |j_1-j_2| \not\equiv |a_1-a_2| (mod\ p)$

七、三維中，$f(a,b,c;p)$上下界與精確值：

<table>
<tr><td rowspan="3">$p \geq 11$</td><td>$p = 2$</td><td>$f(a,b,c;2) =$
$ab\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor + bc\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor + ac\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor - a\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor - b\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor - c\left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{c}{2}\right\rfloor$</td></tr>
<tr><td>$p \in \Omega$</td><td>$\frac{abc-a'b'c'}{p} \leq f(a,b,c;p) = \frac{ab-a'b'}{p} + f_8(a,b,c;p)$
（尚未求出$f_8(a,b;p)$精確值）</td></tr>
<tr><td>$p \notin \Omega$</td><td>$f(a,b,c;p) \leq f(a-2p_\Omega, b-2p_\Omega, c-2p_\Omega; p-p_\Omega)$
$+ \sum_{i=0}^{p_\Omega - 1}(f_9(a-2i,b-2i,c-2i;p)$
$+ f(a-2i,b-2i;p-p_\Omega) + f(a-2i,c-2i;p-p_\Omega)$
$+ f(,b-2i,c-2i;p-p_\Omega))$</td></tr>
</table>

其中，$f_9(a,b;p)$值為：

$$f_9(a,b,c;p) = \begin{cases} 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 8, a' + b' + c' = 0 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 6, a' + b' + c' = 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right) - 4, a' + b' + c' = 2 \land a', b', c' \leq 1 \\ 2\left(\left\lfloor\frac{a}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{b}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c}{p}\right\rfloor\right), otherwise \end{cases}$$

伍、 參考文獻

1. 王建詒、呂季桓（2008）。跛腳皇后。臺灣國際科展。2022 年 5 月 15 日取自：https://www.ntsec.edu.tw/Science Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=989&sid=3194。
2. 陳皓苓、吳嫺宜、蔡昀軒（2009）。棋形怪狀。中小學科學展覽會。2021 年 9 月 1 日取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/49/pdf/080404.pdf。
3. 許介彥（2010）。**數學悠哉遊**。臺北市：三民書局。

4. 黃芷宣、買楷翔（2021）。距離便是美—多維空間的支配數之討論。臺灣國際科展。2021 年 12 月 23 日取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2021/pdf/010020.pdf。
5. 黃英綺、余采臻（2021）。十字軍「斜」征。中小學科學展覽會。2021 年 9 月 2 日取自：https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?cat=&a=0&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=138&sid=13602。
6. 傅恆霖（2021 年 12 月 24 日）。組合設計拉丁方陣 1。線上課程 。2022 年 8 月 8 日取自：https://www.youtube.com/watch?v=G0CC_53AT1o。
7. 賴永玄、張彥霆（2015）。棋盤中的美好「缺」憾。中小學科學展覽會。2021 年 12 月 23 日取自：https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/050407.pdf。

【評語】010041

本作品研究一類特殊的組合設計問題，此研究問題與過往的作品相比，因為加入了額外的規則以致難度上升。作者表達能力強，對於研究策略有完整的想法，給出了初步的成果。作者也有嘗試以圖論的角度切入，但也因額外規則本身的限制導致進展有限。