2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010038

參展科別　數學

作品名稱　以分塊矩陣及生成函數探討多人跳躍數列方法數

得獎獎項

就讀學校　臺北市私立薇閣高級中學

私立奎山實驗高中附設國中部

指導教師　吳林建宏、吳千穎

作者姓名　王宣棋、鄭淇容

關鍵詞　分塊矩陣、生成函數、多人跳躍數列

作者簡介

我叫鄭淇容，目前是奎山高中實驗學校的高一生。對數學很有興趣，藉由本次的科展活動，我發現日常生活中的例子也能成為數學上的應用，也對數學的概念有更深入的了解。

我叫王宣棋，目前是薇閣高中的高一生，對於數學方面很有興趣，在本次科展比賽中我們選取了數學組，希望在這次科展比賽中收益良，學習到不同種領域的知識。

Abstract

This report conducted one person's juggling discussion and extended to discuss multiplayer’s juggling sequence ; several rules of the research include : "In the same sequence, there will only be one ball back to the clown’s hand" , “Requires continuous, regular catch-and-drop, and goes on indefinitely”, and “ Preparing time is not prohibited before throwing the ball”. Above these three rules, they make this research different from other topics and hypotheses.This made this report closer to reality.

Because the discussion of the juggling sequence is more complicated, the directed graph is a concept to the discussion. The graph's point element represents the status when each ball went back to hand in which second ; The side elements as the throwing methods when every situation transit. Then convert the directed graph to an adjacency matrix, and the point elements are classified in a binary-like form in order to organize into a regular and consistent block matrix. Then, according to the Cayley–Hamilton theorem and the properties of the multiplayer juggling sequence, it is obtained that the n-th trace of the adjacency matrix is the method number of the sequence. Finally, in order to organize the number of methods in different situations, we use a generating function to represent different cases of the method and to achieve certain result.

摘要

本研究針對以往跳躍數列進行 1 人的討論延伸至多人的跳躍數列；多人跳躍數列規則為「同一個時間點手上最多只會有一顆球回到一位小丑手中」、「需連續、規律的**接及丟出球**，並且無限持續下去」、「丟球前可以有準備的時間」以上三項規則，因此此研究和以往多數文獻的題目假設有所不同，也比較貼近現實可能的情況。

多人跳躍數列的討論較為複雜，因此採用有向圖的概念進行討論，該圖的點元素代表當下每一顆球在幾秒中回到手中的狀態、邊元素則為每個狀態轉移時的丟球方式；接著將有向圖轉換為鄰接矩陣，並將點元素用類似 2 進位的形式進行分類以便整理成規則一致的分塊矩陣，接著由 Cayley–Hamilton 定理及多人跳躍數列的性質得到將鄰接矩陣的 n 次方求跡即為多人跳躍數列方法數。最後為了將不同狀況的方法數有一個好的整理，我們採用生成函數表示方法數並得到一定的成果。

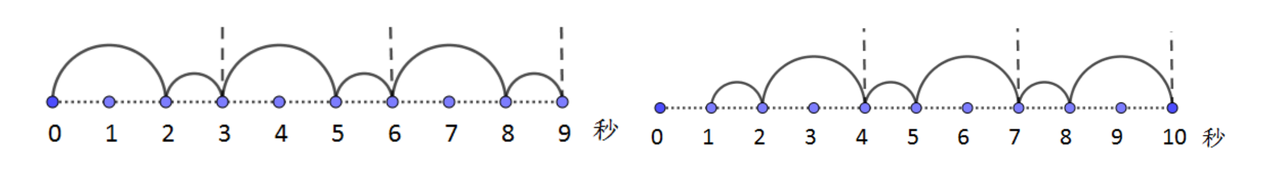
壹、前言

一、研究動機

跳躍數列的問題源自小丑的丟球問題，對雜耍馬戲團的小丑在丟球時的情況進行討論，而我們在閱讀 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)和 2019 年臺灣國際科學展覽會高中組數學科作品(參考文獻[1])皆有相關的討論，也發現許多有趣的地方，可以看到其中的問題討論小丑丟球的模式有一種規律，而跳躍數列的方法數也有一些結論，而從以上這些文獻中看到一些跳躍數列的規則，而我們將這些規則進行整理，**並且思考一位小丑的跳躍數列有相關規律，如果變成多人小丑一起丟球時是否有相關規律呢**？因此我們將相關的內容做一些簡單的整理，並且寫成我們將下來要討論的多人跳躍數列規則，而其規則如下方三點：

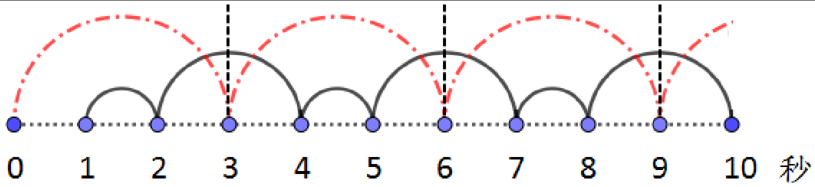
1. 在多位小丑丟球時，同一個時間點手上最多只會有一顆球回到一位小丑手中。
2. 在多位小丑丟球時，期間需要連續、規律的**接及丟出球**，並且無限持續下去。
3. **在多位小丑丟球前可以有準備的時間。(即：不同的準備時間也代表不同的跳躍數列)。**

不同於 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)的文章所提及之跳躍數列，我們嘗試將現實生活中有準備時間這件事情加入討論。以上的規則讓我們覺得很有趣，因此以下圖為例，代表著不同的單人小丑的丟球情況，我們在此稱「**1 人跳躍數列**」，圓弧代表著球的軌跡，數線上的數字代表著時間，當圓弧的軌跡回到數線的數字時，代表著在第幾秒球會回到手中；**在圖可以發現此小丑正在丟一顆球並且兩個不同方法在於前面是否有準備時間，而當小丑丟出球的那一刻，則球將會連續、規律的接及丟出球**：



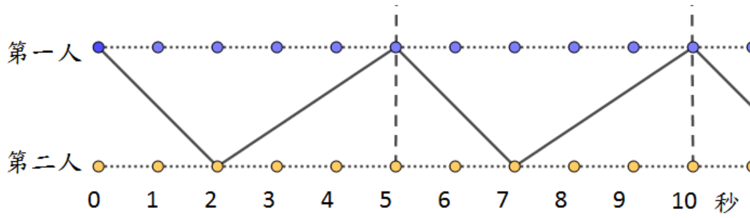
(圖 1：1 人跳躍數列，1 顆球同一種丟球模式、不同準備時間(代表兩種方法)，左圖為 (2,0,1)之 1 人跳躍數列、右圖為(0,1,2)之 1 人跳躍數列。)

1 人跳躍數列問題中，也有可能**有 2 顆以上的球在空中**，以下圖為例，2 個不同圓弧的部分代表 2 顆球不同的軌跡，可以發現同一時間不會有 2 顆球同時回到手中。



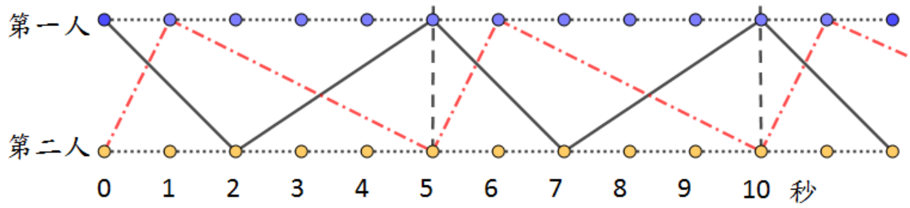
(圖 2：1 人跳躍數列，兩顆球。)

以「1 人跳躍數列」的問題為基礎，我們思索著若是多人跳躍數列會有什麼不同的狀況？我們嘗試將這樣的問題延伸成多人跳躍數列，以下圖為例，代表著 1 顆球由 2 人丟球狀況：



(圖 3：2 人跳躍數列，1 顆球。)

以下圖為例，代表著 2 顆球由 2 人丟球狀況，在此部分可以發現丟球的過程中，每顆球仍要求著規律，並且在同一時間不會有 2 顆以上的球落到同一個人手中：



(圖 4：2 人跳躍數列，2 顆球。)

由以上內容為基礎，我們發現這是一個很有趣的問題，其中也能發現當球數及人數越多時，其結果似乎越複雜，因此本研究將以探討各種不同多人跳躍數列的方法數為目標。

二、研究目的

本篇研究主要討論**多人跳躍數列之方法數問題**，一開始先探討基本原理因此我們將針對 1 人跳躍數列進行討論，接著將 1 人跳躍數列的原理延伸至進行多人人跳躍數列的研究，而從觀察中發現當球數及人數越多時，狀況會越複雜，因此我們希望將跳躍數列的狀況進行分類，進行深入探討多人跳躍數列。

(一)討論 1 人跳躍數列丟 1 顆球之方法數

(二)討論多人跳躍數列丟 1 顆球之方法數

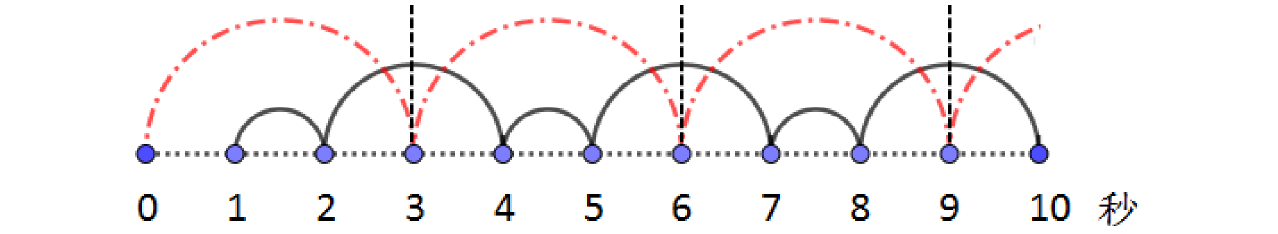
(三)討論球在多人跳躍數列中丟球狀況之特例分析

貳、研究方法與過程

一、丟球狀況說明及定義

(一)單人丟球問題說明

在小丑進行丟球過程中，若只有一位小丑在丟球，則我們稱為此情況為 **1 人跳躍數列**，如下方的圖示，我們能簡單得知此為 1 人跳躍數列，並且同時間丟出了 2 顆球(空中同一時間有 2 顆球存在)，而此時同一時間不會有 2 顆球回到手中。



(圖 5：1 人跳躍數列，2 顆球。)

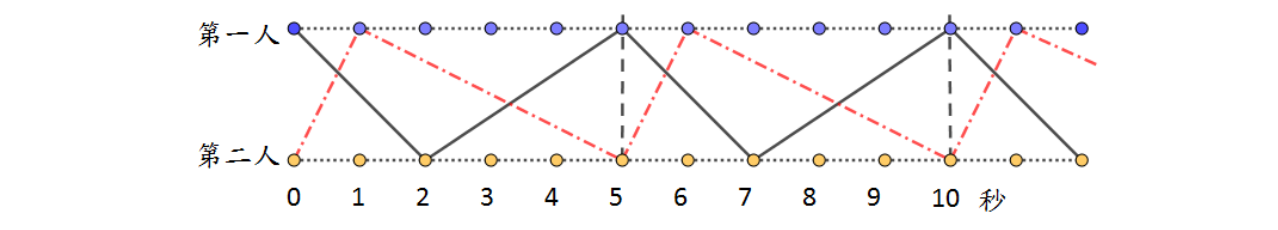
而為了進行此狀況的表示方式整理，我們整理成一個數對的形式，如下方定義。

定義一：數對$H=(a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots,a_{n-1},a_n), a_k\geq 0, a_k\in Z$，表 1 人跳躍數列丟球的狀況，其中$a_k$表**第 k 秒初**時投出的球在空中的時間、$n$為丟球情況的記錄秒數。

而因為在進行丟球的過程中球是無限循環的，因此我們在表示上方的情況時，會依照紀錄將其記錄為**其週期倍數的秒數**，如上方(圖)的狀況大致可看出 3 秒為一週期，若我們需記錄 6 秒的情況，則將上方的丟球情況記錄為 2 週期的情況：$H=(3,1,2,3,1,2)$。

(二)多人丟球問題說明

在小丑進行丟球過程中，若有m位小丑在丟球，則我們稱為此情況為m人跳躍數列，如下方的圖示，我們能簡單得知此為 2 人跳躍數列，並且同時間丟出了 2 顆球，此時同一時間不會有 2 顆球回到手中同時回到同一人手中。



(圖 6：2 人跳躍數列，2 顆球。)

而為了進行此狀況的表示方式整理，我們狀況整理成一個矩陣的形式，如下方定義。

定義二：矩陣$H_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{s,t} & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m\times n}$，表$m$人($m\geq 2$)跳躍數列丟球的狀況、$n$為丟球情況的記錄秒數，其中定義$a_{s,t}=(a_t)_{s,e}$**表第 s 個人在$t$秒初時球經過$a_t$秒後回到第 e 個人手中、若該秒第 s 個人沒丟球則**$a_{s,t}=0$**。**

因為在進行丟球的過程中球是無限循環的，因此我們在表示上方的情況時，會選擇將其記錄**單一週期**的狀況，如上方的狀況大致可看出 5 秒為一週期，因此我們僅需記錄 5 秒的情況即可；而以上圖第 1 人為例，一開始第 1 人將球在 2 秒後丟給第 2 人，因此我們在此定義其表示法為$a_{1,1}=2_{1,2}$(**此時代表球經過 2 秒後，會從第 1 人傳到第 2 人手上**)，此表示方式方便我們將圖形情況一致化討論。故上圖表示法為：

$$H_{2\times 5}=\begin{pmatrix} 2_{1,2} & 4_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 1_{2,1} & 0 & 3_{2,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 5}。$$

(三)名詞定義

1. $JU_n(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且總秒數為n之跳躍數列方法數。
2. $M(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之跳躍數列鄰接矩陣。
3. $f(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之跳躍數列鄰接矩陣的特徵方程式。
4. $G(m,b,s,x)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之跳躍數列方法數之生成函數。
5. J_s：表s列、s行且全部元素為 1 的矩陣。

(四)1 人跳躍數列及多人跳躍數列的接球狀況定義

對於前述問題中的跳躍數列表示法以丟球為主，但我們在探討此研究時，知道無論是 1 人跳躍數列或者多人跳躍數列時，兩顆球**一定不能同時回到同一人手中**，因此我們嘗試討論**接球狀況**，而為了後續整理各個狀態，採用類似 2 進位形式整理接球狀況，以便後續整理成鄰接矩陣時，點元素有一致的規則。

定義三(1 人跳躍數列及多人跳躍數列接球狀況)

①在 1 人跳躍數列的情況下，接續某個時間後的接球狀況為二元字串

$V=(V_sV_{s-1}\cdots V_k\cdots V_1)$，其中$V_k\in\{0,1\}$，而$V_k=1$，表有球在第 k 秒後回到手中；$V_k=0$，表第 k 秒沒有球回到手中。

②在多人跳躍數列的情況下，接續某個時間後的接球狀況為二元字串的矩陣形式(類似矩陣

的表示法)

$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$，其中$V_{s,t}\in\{0,1\}$，而$V_{u,t}=1$，表有球在第 t 秒後回到第 u 人手中；$V_{u,t}=0$，表第 t 秒第 u 人沒有球回到手中。

1. 1 人跳躍數列的接球狀況的二元字串轉換過程

對於 **1 人跳躍數列的接球狀況的二元字串**$V=(V_sV_{s-1}\cdots V_k\cdots V_1)$中，而當下一秒鐘的情況將會是，先將所有數字向右推一位，並且在最後一位補上 0，此種意義在於經過了一秒後，所有球在第幾秒回到手上的狀況也會減少一秒，如：$(001)\rightarrow(000)\mathbf{1}$，此代表過了一秒後球已回到手上。

而球回到手上後需再次丟球時，因此為了標註球下次的落地時間，我們在箭頭的上方做出標號，此標號代表再次丟球時，此球在幾秒後落地。如下方左圖所示，此種情況代表再次丟出的球將會在 2 秒後落地，而為了後續整理，我們將把中間的轉換過程進行化簡，如下方右圖所示。

$\begin{tikzcd}(001) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "2"] & (000)\mathbf{1} \arrow[r] & (010)\end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd}(001) \arrow[r] \arrow[r, bend left, "2"] & (010)\end{tikzcd}$
(圖 7：接球狀況轉換過程)	(圖 8：接球狀況轉換過程簡化)

藉由以上的轉換方式，我們可表示 1 人跳躍數列轉換接球狀況，在此我們能將其改寫為 1 人跳躍數列的有向圖，將**接球的二元字串做為有向圖的頂點、箭頭上的標號做為邊元素**。

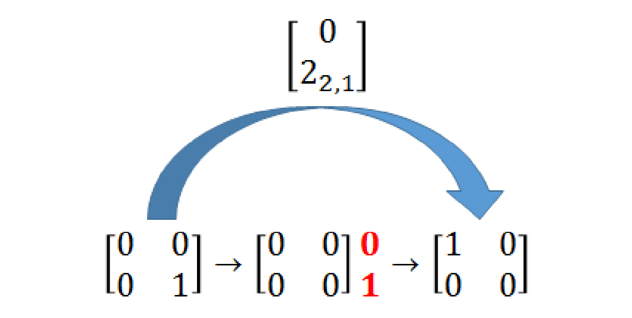
2. 多人跳躍數列的接球狀況的二元字串矩陣形式轉換過程

對於**多人跳躍數列的接球狀況的二元字串矩陣形式**$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$中，而當下一秒鐘的情況將會是，先將所有數字向右推一位，並且在最後一位補上 0，此種意義在於經過了一秒後，所有球在第幾秒落地的狀況也會減少一秒，如：

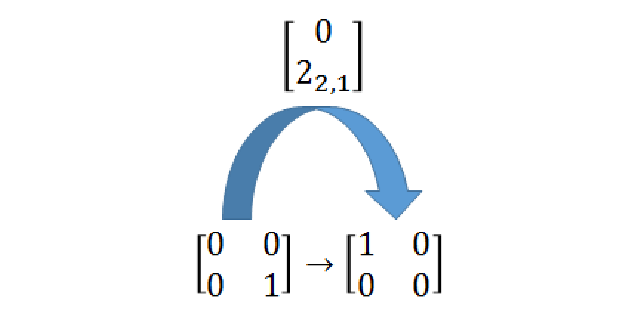
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{matrix}$，此代表過了一秒後球已回到手上。

而球回到手上後需再次丟球時，因此為了標註球下次的落地時間，我們在箭頭的上方做

出標號，此標號代表再次丟球時，此球在幾秒後落地。如下方左圖所示，此種情況代表再次丟出的球將會在 2 秒後落地，但因為是多人丟球問題，為了後續不要被丟球狀況混淆，以此為例，是由第 2 人丟給第 1 人且在 2 秒後回到手中，我們以$2_{2,1}$表示(2 的值表示 2 秒後回到手中，下標的「2,1」則表示球從第 2 人丟給第 1 人的情況)。而為了後續整理，我們將把中間的轉換過程進行化簡，如下方右圖所示，在邊元素中，為了在多人跳躍數列中有更好的討論，我們將2,1寫成矩陣形式：$\begin{bmatrix} 0 \\ 2_{2,1} \end{bmatrix}$，代表第 2 人將球在 2 秒後丟給第 1 人。



(圖 9：接球狀況轉換過程)



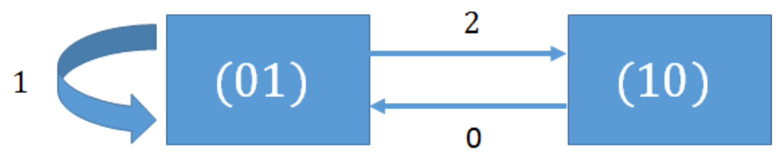
(圖 10：接球狀況轉換過程簡化)

(五)跳躍數列的有向圖討論

我們針對跳躍數列的有向圖在 1 人跳躍數列和多人跳躍數列的頂點定義分別為$V = (V_s V_{s-1} \cdots V_k \cdots V_1), V_{m\times s} = \begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$；若滿足 1 人跳躍數列的接球狀況或多人跳躍數列二元字串矩陣形式的轉換方式，則稱為跳躍數列的有向圖，接下來將針對 1 人跳躍數列和多人跳躍數列的有向圖進行介紹。

1. 1 人跳躍數列有向圖-以空中一顆球、球在空中的時間最長為 2 秒為例

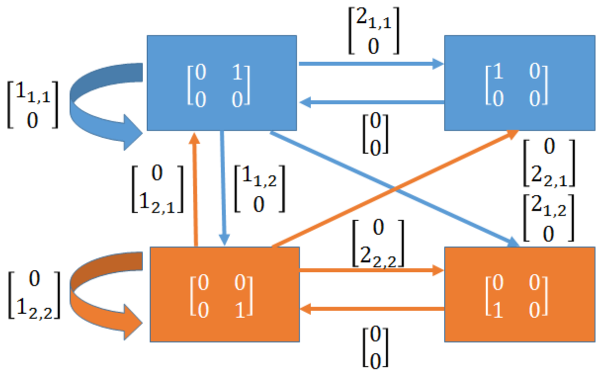
在 1 人跳躍數列中，我們能由上述的接球規則及邊上的標號進行整理，進而得到下方的有向圖，其中能發現$V = (V_s V_{s-1} \cdots V_k \cdots V_1)$的定義下，球在空中最長時間即為$s$秒。



(圖 11：1 人的跳躍數列有向圖)

2. 多人跳躍數列有向圖-以 2 人跳躍數列、空中一顆球、球在空中的時間最長為 2 秒為例

在 2 人跳躍數列中，我們能由上述的接球規則及邊上的標號進行整理，進而得到下方的有向圖，其中能發現$V_{2\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ V_{2,s} & \cdots & V_{2,1}\end{pmatrix}_{m\times s}$的定義下，球在空中最長時間即為$s$秒。



(圖 12：2 人的跳躍數列有向圖)

藉由二元字串和有向圖的結合，我們先針對接球狀況的頂點進行討論，其中有向圖的邊集合上的標號假定為轉換的方式，藉由這樣的方式我們可以將所有的可能狀況整理成有向圖的形式。

定義四(1 人跳躍數列及多人跳躍數列有向圖)

①1 人跳躍數列有向圖的每個頂點為$V=(V_sV_{s-1}\cdots V_k\cdots V_1)$，$V_k\in\{0,1\}$，邊集合$E$上的標號集合為$W=\{0,1,2,\cdots,s\}$，若圖中兩頂點$V$傳遞至$V'$，且$V$和$V'$ 連接的標號為$y, y\in W$，則y需要滿足跳躍數列接球狀況之二元字串形式表示法的轉換。

②多人跳躍數列有向圖的每個頂點為$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1}\end{pmatrix}_{m\times s}$，$V_{u,t}\in\{0,1\}$，邊集合$E$上的標號集合為$W=\{0,1_{1,1},\dots,1_{1,n},2_{1,1},\dots,1_{m,m-1},\dots\}$，若圖中兩頂點$V$傳遞至$V'$，且$V$和$V'$ 連接的標號為$y, y\in W$，則y需要滿足多人跳躍數列接球狀況之二元字串矩陣形式表示法的轉換。

三、跳躍數列的有向圖之封閉路徑關係

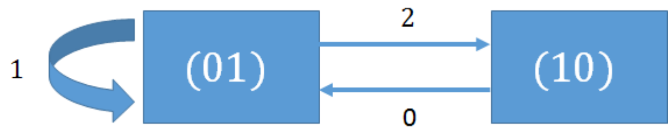
在探討跳躍數列的有向圖時，我們發現針對有向圖的邊和頂點皆有些簡易的**迴圈性質**，因此為了後續的相關研究，我們將針狀態有向圖的邊迴圈進行一個探討。

在跳躍數列的有向圖中的狀況下，我們知道對於任意的一個封閉迴圈所包含的邊集合皆

能形成一個跳躍數列，而在 1 人跳躍數列和多人跳躍數列的形式也應相同，在此我們將其研究分為 1 人跳躍數列和多人跳躍數列。

(一)1 人跳躍數列

以對於 1 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒為例，圖中的部份為一個明顯的封閉迴圈，若以(01)做為出發點，邊元素分別為：$2 \to 0 \to 1 \to 1$，由**定義**可假設出跳躍數列$H = (2,0,1,1)$，針對此概念可在後續的研究以此進行延伸。



(圖 13： 1 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒有向圖，$H_1 = (2,0,1,1)$。)

(二)多人跳躍數列

以對於 2 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒為例，圖中的部份為一個明顯的封閉迴圈，若以$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$做為出發點，邊元素分別為：$2_{1,1} \to 0 \to 1_{1,1} \to 1_{1,2} \to 1_{2,1}$，由**定義**可假設出跳躍數列$\boldsymbol{H_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{2_{1,1}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1_{1,1}} & \boldsymbol{1_{1,2}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1_{2,1}} \end{bmatrix}$，針對此概念整理成**定理**，可以發現在$m$人跳躍數列的情況下，皆能符合「當形成迴圈即為一種跳躍數列」的概念。

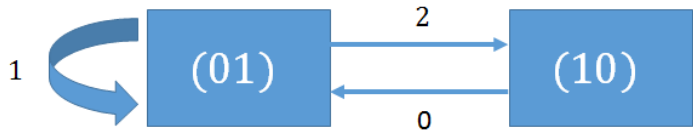
[定理 1]一個跳躍數列矩陣$H_m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{s,t} & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m\times n}$ 對應到在m人跳躍數列接球狀態的有向圖若且唯若在多人跳躍數列的有向圖下，若有一個封閉迴圈由其中一頂點出發，**且經過的頂點所表示的空中總球數一樣下，會再回到原本的頂點**。

由以上的定理幫助我們發現若能將有向圖整理成鄰接矩陣後，利用跡進行計算，其主對角的方法數即為多人跳躍數列的方法數。

四、多人跳躍數列的鄰接矩陣-以一顆球且球在空中最多 2 秒為例

(一)1 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒

1. 1 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的有向圖



(圖 14： 1 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒有向圖，$H_1 = (2,0,1,1)$。)

2. 1 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣

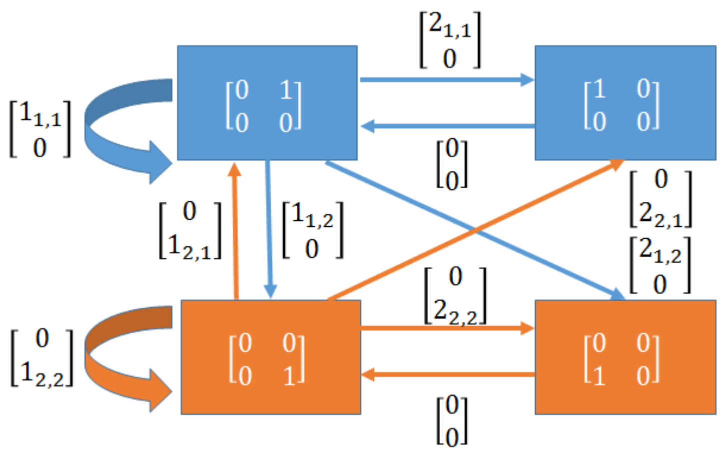
鄰接矩陣是以探討各頂點連接方式進行整理，如$(01) \rightarrow (01)$有連接，則可在矩陣內寫下 1 表 1 種方法，而沒有連接的情況如(10)至(10)則用 0 表示 0 種方法。

二元字串	(01)	(10)
(01)	1	1
(10)	1	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 1 人跳躍數列在空中 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣：$M(1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$。

(二)2 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒

1. 2 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的有向圖



(圖 15： 2 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒有向圖。)

2. 2 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣

鄰接矩陣是以探討各頂點連接方式進行整理，如$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$有連接，則可在矩陣內寫下 1 表 1 種方法，而沒有連接的情況如$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$至$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$則用0表示0種方法。

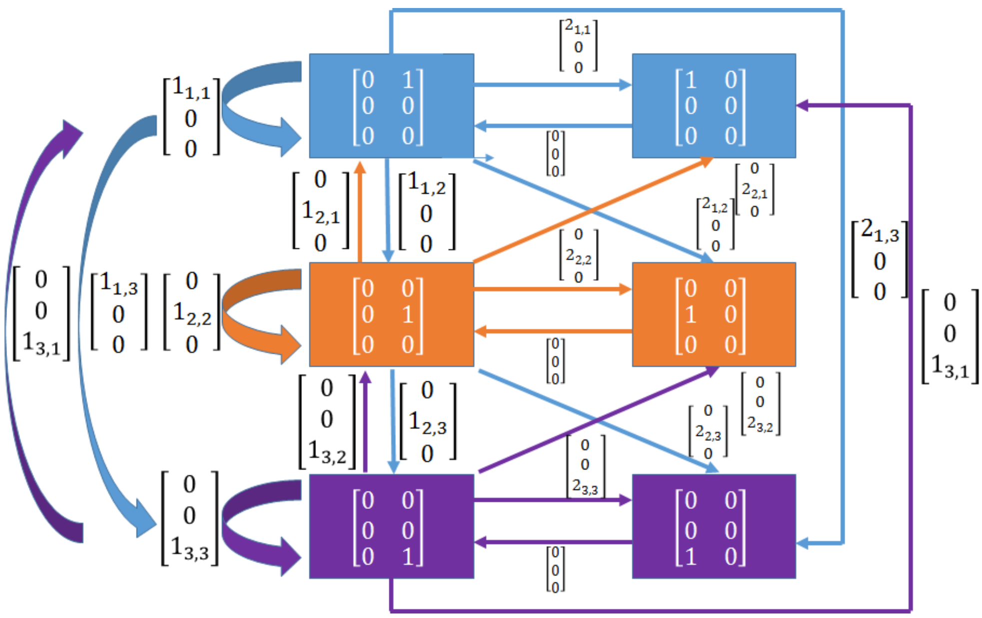
二元字串	$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$	1	1	1	0
$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$	1	0	1	0
$\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$	1	0	1	1
$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$	1	0	1	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 2 人跳躍數列在空中 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣，如下：

$$M(2,1,2)=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

(三)3 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒

1. 3 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的有向圖



(圖 16： 3 人跳躍數列空中 1 顆球且在空中最長 2 秒有向圖。)

2. 3 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣

鄰接矩陣是以探討各頂點連接方式進行整理，如$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$有連接，則可在矩陣

內寫下 1 表 1 種方法，而沒有連接的情況如$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$至$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$則用 0 表示 0 種方法。

二元字串	$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	1	1	1	0	1	0
$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	1	0	1	0	1	0
$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$	1	0	1	1	1	0
$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	1	0	1	0	1	0
$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	1	0	1	0	1	1
$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$	1	0	1	0	1	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 3 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣，如下：

$$M(3,1,2)=\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

五、由鄰接矩陣轉換成遞迴關係式的方法探討

由上述內容中，我們希望能利用鄰接矩陣直接計算跳躍數列方法數，因此想到也許能由對角化的方式再由跡(trace)求得跳躍數列方法數，但我們發現對角化的方法似乎太過複雜，若對於過大的矩陣時則難以計算，因此我們發現可以利用 **Cayley–Hamilton 定理**嘗試討論其中的方法數。

> **[Cayley–Hamilton 定理]**
>
> 設矩陣 A 為給定的$n\times n$矩陣，I_n為$n\times n$的單位矩陣，對於 A 的特徵方程式定義為 $f(x)=\det(x\cdot I_n-A)$，則$f(A)=O$。

我們可以利用 **Cayley–Hamilton 定理**進行鄰接矩陣的轉換，以一個鄰接矩陣 A 為例：

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，計算 A 的特徵方程式可得$f(x) = det(x \cdot I_n - A) = x^6 - x^5 - x^4 - x^3$，則可由 **Cayley–Hamilton 定理**得到$A^6 - A^5 - A^4 - A^3 = O$，則$A^6 = A^5 + A^4 + A^3$，最後藉由運算可得$A^n = A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3}$；由**定理**可知若出發的頂點和結束的頂點相同時，則可建立出一個跳躍數列，則$tr(A^n)$為在跳躍數列的特例中字串長度為 n 的跳躍數列方法數，則可由此得到$tr(A^n) = tr(A^{n-1} + A^{n-2} + A^{n-3}) = tr(A^{n-1}) + tr(A^{n-2}) + tr(A^{n-3})$，則假設此鄰接矩陣方法數的表示法為$\mathrm{JU_n}$，由此可以推得此遞迴關係式為$\mathrm{JU_n} = JU_{n-1} + JU_{n-2} + JU_{n-3}$，而考量到其特徵方程式若有 0 的根存在時會被省略，後續研究將把 0 的根去除以便討論其生成函數問題，其中的初始值可以藉由原本的鄰接矩陣進行推導，而本篇研究的後續將會以此方法進行遞迴關係式的相關運算。

(一)討論 m 個人丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的例子整理

由上述的鄰接矩陣內容，我們將其嘗試做為例子進行整理，並且嘗試將其所代表的數列先以遞迴關係式方式進行整理，在此當為 **Cayley–Hamilton 定理**在此問題的應用說明。

1. 1 個人丟 1 顆球且在球在空中最多 2 秒

由前述可知其 1 人跳躍數列在空中 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣為：

$M(1,1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，以 **Cayley–Hamilton 定理**可得知其特徵方程式為$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - xI_2\right) = x^2 - x - 1 = 0$；又其中的初始項$JU_1(1,1,2) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1\right) = 1 + 0 = 1$、$J_2(1,1,2) = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 + 1 = 3$。

故 1 人跳躍數列在空中一顆球且球在空中最多 2 秒的特徵方程式：$\mathrm{x}^2 - x - 1 = 0$，且遞迴關係式為：$JU_n(1,1,2) = JU_{n-1}(1,1,2) + JU_{n-2}(1,1,2), JU_1(1,1,2) = 1, JU_2(1,1,2) = 3$。

2. 2 個人丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒

由前述可知其 2 人跳躍數列在空中 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣為：$M(2,1,2) =$

$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$，以 **Cayley–Hamilton 定理**可得知其特徵方程式為

$\det\left(\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}-xI_4\right)=x^4-2x^3-2x^2=0$；又其中的初始項$J_1(2,1,2)=$

$tr(\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}^1)=2$、$J_2(2,1,2)=tr(\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}^2)=tr\left(\begin{bmatrix}3&1&3&1\\2&1&2&1\\2&1&3&1\\2&1&2&1\end{bmatrix}\right)=8$。

故 2 人跳躍數列在空中 1 顆球且球在空中最多 2 秒的特徵方程式：$x^4-2x^3-2x^2=0$，且遞迴關係式為：$JU_n(2,1,2)=2JU_{n-1}(2,1,2)+2JU_{n-2}(2,1,2),JU_1(2,1,2)=2,JU_2(2,1,2)=8$。

以下為m個人丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣整理：

人數	1 人	2 人	3 人
鄰接矩陣	$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$

人數	4 人	m人
鄰接矩陣	$\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&0&&\cdots&&1&0\\1&0&1&0&&\cdots&&1&0\\1&0&&\ddots&1&0&&&\vdots\\1&0&&&1&0&&&\\&\vdots&1&0&&\ddots&&1&0\\&&1&0&&&&1&0\\1&0&&&1&0&&1&1\\1&0&&\cdots&1&0&&1&0\end{bmatrix}_{2m\times 2m}$

(二)討論m個人丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的跳躍數列性質整理

經由上述的討論後，我們能夠使用 **Cayley–Hamilton 定理**及 **trace** 整理出各個情況，以下為m個人丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的性質整理：

1. 1 個人丟 1 顆球且在球在空中最多 2 秒

(1)特徵方程式：$x^2-x-1=0$。

(2)遞迴關係式：$JU_n(1,1,2)=JU_{n-1}(1,1,2)+JU_{n-2}(1,1,2),JU_1(1,1,2)=1,JU_2(1,1,2)=3$。

2. 2 個人丟 1 顆球且在球在空中最多 2 秒

(1)特徵方程式：$x^4-2x^3-2x^2=0$。

(2)遞迴關係式：$JU_n(2,1,2) = 2JU_{n-1}(2,1,2) + 2JU_{n-2}(2,1,2), JU_1(2,1,2) = 2, JU_2(2,1,2) = 8$。

3. 3 個人丟 1 顆球且在球在空中最多 2 秒

(1)特徵方程式：$x^6 - 3x^5 - 3x^4 = 0$。

(2)遞迴關係式：$JU_n(3,1,2) = 3JU_{n-1}(3,1,2) + 3JU_{n-2}(3,1,2), JU_1(3,1,2) = 3, JU_2(3,1,2) = 15$。

4. 4 個人丟 1 顆球且在球在空中最多 2 秒

(1)特徵方程式：$\boldsymbol{x^8 - 4x^7 - 4x^6 = 0}$。

(2)遞迴關係式：$JU_n(4,1,2) = 4JU_{n-1}(4,1,2) + 4JU_{n-2}(4,1,2), JU_1(4,1,2) = 4, JU_2(4,1,2) = 24$。

(三)討論m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣

以下為m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣整理：

s 秒 / 人數	2 秒	3 秒	4 秒
1	$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$
s 秒 / 人數	2 秒	3 秒	4 秒
2	$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}1&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&1&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$

從整理的鄰接矩陣可簡單得知以上內容大致上可用分塊矩陣進行討論，在討論的過程中也能將每個分塊進行簡化，已達到計算上的減少，以「3 人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最

多 4 秒的鄰接矩陣矩陣」為例，假設$C=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$，則可將原先的鄰接矩陣改為$\begin{bmatrix}C&D&D\\D&C&D\\D&D&C\end{bmatrix}$，在後續計算其行列式值時可利用行列式的列航運算進行討論，如：

$$\begin{vmatrix}C&D&D\\D&C&D\\D&D&C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C+2D&D&D\\C+2D&C&D\\C+2D&D&C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C+2D&D&D\\0&C-D&0\\0&0&C-D\end{vmatrix}$$

，借此達到簡化計算量的目的。

六、以分塊矩陣探討m人跳躍數列之**特徵方程式**

本篇研究可發現在針對m人跳躍數列的方法數中，其鄰接矩陣的方法數在計算上需要知道其特徵方程式，因此我們引入分塊矩陣概念進行討論，期望能將相關的矩陣特徵方程式進行計算。

(一)分塊矩陣公式

[公式一]若A, D是方陣(大小可以相異)，則$\begin{vmatrix}A&B\\0&D\end{vmatrix}=det(A)\det(D)$。

[公式二] 若$A_1, A_2, \dots, A_n$是方陣(大小可以相異)，則

$$\begin{vmatrix}A_1&&&&&\\0&A_2&&C&&B\\0&0&\ddots&&&\\0&0&\ddots&\ddots&&D\\0&0&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&0&\cdots&\cdots&0&A_n\end{vmatrix}=det(A_1)\,det(A_2)\dots det(A_n)$$ 。

(二) m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣特徵方程式討論

[整理 1]m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣特徵方程式為

$x^{2m}-mx^{2m-1}-mx^{2m-2}=0$。

Proof：

已知m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&1&1&0&\cdots&&1&0\\1&0&1&0&&&1&0\\1&0&\ddots&&1&0&\vdots&\\1&0&&&1&0&&\\\vdots&&1&0&\ddots&&1&0\\&&1&0&&&1&0\\1&0&&&1&0&1&1\\1&0&\cdots&&1&0&1&0\end{bmatrix}_{2m\times 2m}-xI_{2m}\right)=\begin{vmatrix}1-x&1&1&0&\cdots&&1&0\\1&-x&1&0&&&1&0\\1&0&\ddots&&1&0&\vdots&\\1&0&&&1&0&&\\\vdots&&1&0&\ddots&&1&0\\&&1&0&&&1&0\\1&0&&&1&0&1-x&1\\1&0&\cdots&&1&0&1&-x\end{vmatrix}$$

在不失一般性的情況下，假設$A=\begin{bmatrix}1-x&1\\1&-x\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，故可將特徵方程式改為：

$\begin{vmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & \ddots & B & \vdots \\ \vdots & B & \ddots & B \\ B & \cdots & B & A \end{vmatrix}$，在進行行列運算後，可得

$$\begin{vmatrix} A & B & \cdots & B \\ B & \ddots & B & \vdots \\ \vdots & B & \ddots & B \\ B & \cdots & B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+(m-1)B & B & \cdots & B \\ A+(m-1)B & \ddots & B & \vdots \\ \vdots & B & \ddots & B \\ A+(m-1)B & \cdots & B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+(m-1)B & B & \cdots & B \\ 0 & A-B & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A-B \end{vmatrix}$$

藉由分塊矩陣公式二可得其行列式值$= det(A+(m-1)B)[det(A-B)]^{m-1}$；又可知

$det(A+(m-1)B) = \begin{vmatrix} m-x & 1 \\ m & -x \end{vmatrix} = x^2 - mx - m, det(A-B) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{vmatrix} = x^2$，故可得

$det(A+(m-1)B)[det(A-B)]^{m-1} = (x^2-mx-m)(x^2)^{m-1} = x^{2m} - mx^{2m-1} - mx^{2m-2}$

，故本整理 1 得證。可知m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 2 秒的鄰接矩陣特徵方程式為$x^{2m} - mx^{2m-1} - mx^{2m-2} = 0$。

[整理 2]m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣特徵方程式為

$$\boldsymbol{x^{ms} - m\sum_{i=1}^{s} x^{ms-i} = 0}\text{。}$$

Proof：

已知m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$\det\left(\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & & \cdots & & 1 & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & \ddots & 0 & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & & & \ddots & & & & & & & & & \\
1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & 1 & 0 & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & & \cdots & & 1 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix} - xI_{sm}\right)$$

在不失一般性的情況下，假設

$$C=\begin{bmatrix}1-x & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -x\end{bmatrix}_{s\times s},\ D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{bmatrix}_{s\times s}$$

，故可將特徵方程式改為：$\begin{vmatrix}C & D & \ldots & D\\ D & \ddots & D & \vdots\\ \vdots & D & \ddots & D\\ D & \ldots & D & C\end{vmatrix}$，在進行行列運算後，可得

$$\begin{vmatrix}C & D & \ldots & D\\ D & \ddots & D & \vdots\\ \vdots & D & \ddots & D\\ D & \ldots & D & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C+(m-1)D & D & \ldots & D\\ C+(m-1)D & \ddots & D & \vdots\\ \vdots & D & \ddots & D\\ C+(m-1)D & \ldots & D & C\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C+(m-1)D & D & \ldots & D\\ 0 & C-D & 0 & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & 0 & C-D\end{vmatrix}$$

藉由分塊矩陣公式二可得其行列式值$=det(C+(m-1)D)[det(C-D)]^{m-1}$；又可知

$$\det(C+(m-1)D)=\begin{vmatrix}m-x & 1 & 0 & \cdots & 0\\ m & -x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ m & 0 & \ldots & 0 & -x\end{vmatrix}_{s\times s}=(m-x)(-x)^{s-1}-m\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -x\end{vmatrix}_{(s-1)\times(s-1)}$$

$$=(-x)^s+m(-x)^{s-1}-m(-x)^{s-2}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -x\end{vmatrix}_{(s-2)\times(s-2)}=\cdots=(-x)^s+m\sum_{i=1}^{s}(-x)^{s-i},$$

$$\det(C-D)=\begin{vmatrix}-x & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -x\end{vmatrix}_{s\times s}=(-x)^s$$

故可得：

$$det(C+(m-1)D)[det(C-D)]^{m-1}=(-x)^{ms-s}\left[(-x)^s+m\sum_{i=1}^{s}(-x)^{s-i}\right]=0$$

，接著提出負號後可得m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多s秒的鄰接矩陣特徵方程式為

$x^{ms}-m\sum_{i=1}^{s}x^{ms-i}=0$。故本整理 2 得證。

七、探討多人跳躍數列方法數以生成函數表示之方法

為了解決多人跳躍數列方法數，在前述的內容中，雖然以特徵方程式計算後再將其表示為遞迴關係式形式，但仍需計算初始值；為了後續研究統一討論，後續將以生成函數表示之方法，在此我們引用「**2019 年臺灣國際科學展覽會高中組數學科作品(參考文獻[1])所提出之鄰接矩陣轉換為生成函數之定理**」，並針對本篇研究面臨特徵方程式會產生 0 的特徵根問題進行定理的改寫：

[定理 2]假設m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒之跳躍數列鄰接矩陣$M(m,b,s)$的特徵方程式$f(m,b,s,x)=x^j\sum_{i=0}^{K}a_i x^i, j\geq 0, a_0\neq 0$，則$J_n(m,b,s)$形成的生成函數為：

$$G(m,b,s,x)=K-x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}\text{，且 } h(x)=\sum_{i=0}^{K}a_{K-i}x^i \text{ 。}$$

proof：

由 **Cayley–Hamilton 定理**可得知，若已知m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之跳躍數列鄰接矩陣$M(m,b,s)$，則$JU_n(m,b,s)=tr\left(\left(M(m,b,s)\right)^n\right)$，則若鄰接矩陣$M(m,b,s)$的特徵方程式$f(m,b,s,x)=x^j\sum_{i=0}^{K}a_0 x^i=x^j(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)=0, j\geq 0, a_0\neq 0$，其中的根為 0(重根j次)$,\lambda_1,\cdots,\lambda_K$(可以重根)，由線性代數基本理論可得$tr\left(\left(M(m,b,s)\right)^n\right)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^n$(0 的根被省略)，則可知$JU_n(m,b,s)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^n$；已知對於$JU_n(m,b,s)$的數列，令生成函數為

$$G(x)=\sum_{p\geq 0}JU_p(m,b,s)\,x^p=JU_0(m,b,s)+x\sum_{p\geq 1}JU_p(m,b,s)\,x^{p-1}\text{ 。}$$

$$\text{令}\sum_{p\geq 1}JU_p(m,b,s)\,x^{p-1}=\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^2\right)x+\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^3\right)x^2+\cdots=\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^{p+1}x^p\right)\text{，}$$

$$\text{則}\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^{p+1}x^p\right)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i(1+\lambda_i x+\lambda_i^2x^2+\cdots)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\left(\frac{1}{1-\lambda_i x}\right)=-\frac{h'(x)}{h(x)}$$

，其中$h(x)=(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\ldots(1-\lambda_K x)$。

已知$h(x)=(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)\ldots(1-\lambda_K x)=x^K\left(\frac{1}{x}-\lambda_1\right)\ldots\left(\frac{1}{x}-\lambda_K\right)=\frac{x^K f\left(m,b,s,\frac{1}{x}\right)}{x^j}$，則

$h(x)=x^K\sum_{i=0}^{K}a_0(\frac{1}{x})^i=\sum_{i=0}^{K}a_0x^{k-i}=\sum_{i=0}^{K}a_{K-i}x^i$；又容易得知$JU_0(m,b,s)=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^0=K$，

故可得其生成函數$G(m,b,s,x)=K-x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}$，且 $h(x)=\sum_{i=0}^{K}a_{K-i}x^i$。■

參、研究結果

一、多人丟 1 顆球問題

(一)多個人丟 1 顆球且在空中時間最多 s 秒的特徵方程式

[整理 2]m人跳躍數列丟 1 顆球且球在空中最多 s 秒的鄰接矩陣特徵方程式為

$$x^{ms}-m\sum_{i=1}^{s}x^{ms-i}=0\text{。}$$

(二)多個人丟 1 顆球且在空中時間最多 s 秒的生成函數

[定理 3]m人丟 1 顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒的跳躍數列方法數$J_n(m,1,s)$

形成的生成函數為$G(m,1,s,x)=s-x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}$，且 $h(x)=1-m\sum_{i=1}^{s}x^i$。

proof：

由整理 2 可知m人丟 1 顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒之跳躍數列鄰接矩陣$M(m,b,s)$

的特徵方程式$f(m,1,s,x)=x^{ms-s}\left(x^s-m\sum_{i=1}^{s}x^{s-i}\right)$，則由上述定理 2 可得到生成函數為：

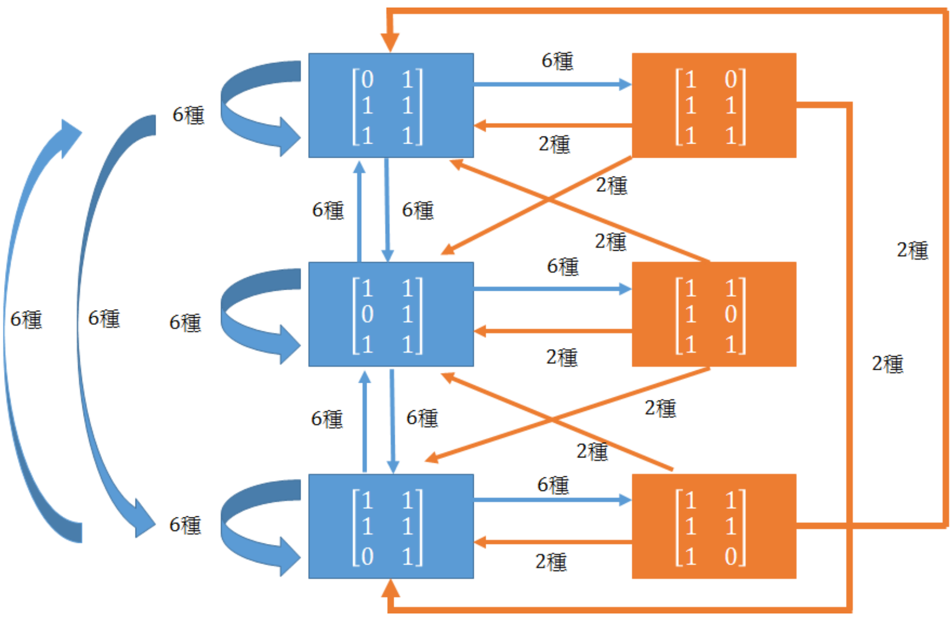
$G(m,1,s,x)=s-x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}$，且 $h(x)=1-m\sum_{i=1}^{s}x^i$，故定理 3 得證。

二、m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球

(一)3 人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟 5 顆球

1. 3 人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟 5 顆球的簡化有向圖

針對此有向圖之邊元素，因為其邊元素可變換之情況較多，故將元素改寫為變換之方法數，舉例來說：$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$的轉換過程中，可發現其邊元素可能為$\begin{bmatrix}2_{1,1}\\2_{2,2}\\2_{3,3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2_{1,2}\\2_{2,1}\\2_{3,3}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2_{1,1}\\2_{2,3}\\2_{3,2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2_{1,3}\\2_{2,2}\\2_{3,1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2_{1,2}\\2_{2,3}\\2_{3,1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2_{1,3}\\2_{2,1}\\2_{3,2}\end{bmatrix}$共 6 種情況，但若寫入有向圖內則較難討論，故將有向圖進行簡化，寫成**類似鄰接矩陣形式的有向圖**。



(圖 17： 3 人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟 5 顆球的簡化有向圖。)

2. 3 人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟 5 顆球的鄰接矩陣

鄰接矩陣是以探討各頂點連接方式進行整理，如$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$有連接，則可在矩陣內寫下 6 表 6 種方法，而沒有連接的情況如$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$至$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$則用 0 表示 0 種方法。而在整理鄰接矩陣時，我們將每一行的排法整理成類似二進位的形式，以$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$為例，第一行可視為 011、101、110 的整理，此整理方式將在後續也用此方法進行，以便觀察鄰接矩陣的分塊矩陣規則。

二元字串	$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&1\end{bmatrix}$	6	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}$	0	6	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$	0	0	6	0	0	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 3 人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟 5 顆球的鄰接矩陣，如下：

$$M(3,5,2)=\begin{bmatrix}6&6&6&2&2&2\\6&6&6&2&2&2\\6&6&6&2&2&2\\6&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0\\0&0&6&0&0&0\end{bmatrix}$$

3. 3 個人丟 5 顆球且球在空中最多 2 秒

(1)特徵方程式：$x^6-18x^5-36x^4=0$。

(2)生成函數：$G(3,5,2,x)=2-x\cdot\frac{-18-72x}{1-18x-36x^2}$

(二)3 人跳躍數列、球在空中最多 3 秒且丟 8 顆球

1. 3 人跳躍數列、球在空中最多 3 秒且丟 8 顆球的變換說明及鄰接矩陣

針對 3 人跳躍數列、球在空中最多 3 秒且丟 8 顆球，因為其邊元素可變換之情況較多，因此不針對有向圖進行整理，僅單純整理鄰接矩陣，以其中一個點元素舉例：$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$的轉換過程中，可發現其邊元素可能為$\begin{bmatrix}3_{1,1}\\3_{2,2}\\3_{3,3}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3_{1,2}\\3_{2,1}\\3_{3,3}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3_{1,1}\\3_{2,3}\\3_{3,2}\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 3_{1,3} \\ 3_{2,2} \\ 3_{3,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3_{1,2} \\ 3_{2,3} \\ 3_{3,1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2_{1,3} \\ 3_{2,1} \\ 3_{3,2} \end{bmatrix}$共 6 種情況，接著將以此進行整理成鄰接矩陣。

二元字串	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	6	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	6	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	6	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	0	6	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	0	0	0	6	0	0	0	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	6	0	0	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 3 人跳躍數列、球在空中最多 3 秒且丟 8 顆球的鄰接矩陣，如下：

$$M(3,8,3) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 3 個人丟 8 顆球且球在空中最多 3 秒

(1)特徵方程式：$x^9 - 18x^8 - 108x^7 - 216x^6 = 0$。

(2)生成函數：$G(3,8,3,x) = 3 - x \cdot \frac{-18-216x-648x^2}{1-18x-108x^2-216x^3}$

(三)3 人跳躍數列、球在空中最多 4 秒且丟 11 顆球

1. 3 人跳躍數列、球在空中最多 4 秒且丟 11 顆球的變換說明及鄰接矩陣

針對 3 人跳躍數列、球在空中最多 4 秒且丟 11 顆球，因為其邊元素可變換之情況較多，因此不針對有向圖進行整理，僅單純整理鄰接矩陣，以其中一個點元素舉例：

$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$的轉換過程中，可發現其邊元素可能為$\begin{bmatrix}4_{1,1}\\4_{2,2}\\4_{3,3}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4_{1,2}\\4_{2,1}\\4_{3,3}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4_{1,1}\\4_{2,3}\\4_{3,2}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4_{1,3}\\4_{2,2}\\4_{3,1}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4_{1,2}\\4_{2,3}\\4_{3,1}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}4_{1,3}\\4_{2,1}\\4_{3,2}\end{bmatrix}$共 6 種情況，接著將以此進行整理成鄰接矩陣。

二元字串	$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$	6	6	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2
$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0

為了方便起見，我們也將其改寫成一般矩陣做為 3 人跳躍數列、球在空中最多 4 秒且丟 11 顆球的鄰接矩陣，如下：

$$M(3,11,4)=\begin{bmatrix}6&6&6&6&6&6&6&6&6&2&2&2\\6&6&6&6&6&6&6&6&6&2&2&2\\6&6&6&6&6&6&6&6&6&2&2&2\\6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&6&0&0&0\end{bmatrix}$$

2. 3 個人丟 11 顆球且球在空中最多 4 秒

(1)特徵方程式：$x^{12}-18x^{11}-108x^{10}-648x^{9}-1296x^{8}=0$。

(2)生成函數：$G(3,11,4,x)=4-x\cdot\frac{-18-216x-1944x^2-5184x^3}{1-18x-108x^2-648x^3-1296x^4}$

(四) m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球

以相關研究結果，我們嘗試將問題延伸為m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球的情況，一開始先從3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球之情況進行討論。

1. 3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球

由上述的內容，我們可嘗試推導出3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球的情況下，其鄰接矩陣會和階乘(m人跳躍數列和$m!$有關)、單位矩陣(m人跳躍數列和I_m有關)、全一矩陣(J_m為元素全為 1 的$m\times m$矩陣)、零矩陣($O_{3\times3}$)有關，其鄰接矩陣、特徵方程式及生成函數整理如下。

(1) 3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球的鄰接矩陣：

$$M(3,3s-1,s)=\begin{pmatrix}3!J_3&3!J_3&\cdots&\cdots&3!J_3&2!J_3\\3!I_3&O_{3\times3}&O_{3\times3}&\cdots&\cdots&O_{3\times3}\\O_{3\times3}&3!I_3&\ddots&\ddots&\cdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&O_{3\times3}\\O_{3\times3}&\cdots&\cdots&O_{3\times3}&3!I_3&O_{3\times3}\end{pmatrix}_{3s\times3s}$$

(2) 3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球的特徵方程式：

$$\boldsymbol{x^{2s}\left(x^{s}-3\sum_{i=1}^{s-1}(3!)^{i}x^{s-i}-(3!)^{s}\right)=0}$$

(3) 3人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(3s-1)$顆球的生成函數：

$$\boldsymbol{G(3,3s-1,s,x)=s-x\cdot\frac{-3\sum_{i=1}^{s-1}i(3!)^{i}x^{i-1}-s(3!)^{s}x^{s-1}}{1-3\sum_{i=1}^{s-1}(3!)^{i}x^{i}-(3!)^{s}x^{s}}}$$

2. 4人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球

由上述的內容，我們可推導出 4 人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球的情況下，其鄰接矩陣會和階乘(m人跳躍數列和$m!$有關)、單位矩陣(m人跳躍數列和I_m有關)、全一矩陣(J_m為元素全為 1 的$m\times m$矩陣)、零矩陣($O_{4\times4}$)有關，其鄰接矩陣、特徵方程式及生成函數整理如下。

(1) 4人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球的鄰接矩陣：

$$M(4,4s-1,s)=\begin{pmatrix} 4!\,J_4 & 4!\,J_4 & \cdots & \cdots & 4!\,J_4 & 3!\,J_4 \\ 4!\,I_4 & O_{4\times4} & O_{4\times4} & \cdots & \cdots & O_{4\times4} \\ O_{4\times4} & 4!\,I_4 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_{4\times4} \\ O_{4\times4} & \cdots & \cdots & O_{4\times4} & 4!\,I_4 & O_{4\times4} \end{pmatrix}_{4s\times4s}$$

(2) 4人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球的特徵方程式

從上述鄰接矩陣，我們嘗試討論球在空中最多s秒的情況下嘗試討論$s=2\sim4$之情況，並整理成下方：

a、4人跳躍數列、球在空中最多 2 秒且丟7顆球的特徵方程式：$x^{6}(x^{2}-96x-576)=0$

b、4人跳躍數列、球在空中最多 3 秒且丟11顆球的特徵方程式：

$x^{9}(x^{3}-96x^{2}-2304x-13824)=0$

d、4人跳躍數列、球在空中最多 4 秒且丟15顆球的特徵方程式：

$x^{12}(x^{4}-96x^{3}-2304x^{2}-55296x-331776)=0$

由以上討論中，可整理出4人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球的特徵方程式為：

$$\boldsymbol{x^{3s}\left(x^s-4\sum_{i=1}^{s-1}(4!)^i x^{s-i}-(4!)^s\right)=0}$$

(3) 4人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(4s-1)$顆球的生成函數：

$$\boldsymbol{G(4,4s-1,s,x)=s-x\cdot\frac{-4\sum_{i=1}^{s-1}i(4!)^i x^{i-1}-s(4!)^s x^{s-1}}{1-4\sum_{i=1}^{s-1}(4!)^i x^i-(4!)^s x^s}}$$

3. m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球

由上述的內容，我們可推導出m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球的情況下，其鄰接矩陣會和階乘(m人跳躍數列和$m!$有關)、單位矩陣(m人跳躍數列和I_m有關)、全一矩陣(J_m為元素全為 1 的$m\times m$矩陣)、零矩陣($O_{m\times m}$)有關，在此將其整理成較為一般化的結果，而在此部分將會針對一般化後的鄰接矩陣之特徵方程式進行證明；以下為鄰接矩陣、特徵方程式及生成函數整理。

(1) m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球的鄰接矩陣：

$$M(m,ms-1,s)=\begin{pmatrix} m!J_m & m!J_m & \cdots & \cdots & m!J_m & (m-1)!J_m \\ m!I_m & O_{m\times m} & O_{m\times m} & \cdots & \cdots & O_{m\times m} \\ O_{m\times m} & m!I_m & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & O_{m\times m} \\ O_{m\times m} & \cdots & \cdots & O_{m\times m} & m!I_m & O_{m\times m} \end{pmatrix}_{ms\times ms}$$

在整理出m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球的鄰接矩陣後，於下方針對其鄰接矩陣之特徵方程式以分塊矩陣的概念近計算，並嘗試證明一般化後的結果，而前述中的分塊矩陣之特徵方程式內容將不另外進行證明。

(2) m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球的特徵方程式

$$\boldsymbol{x^{(m-1)s}\left(x^s-m\sum_{i=1}^{s-1}(m!)^i x^{s-i}-(m!)^s\right)=0}$$

Proof：

$$\det(M(m, ms-1, s) - xI_{ms}) = \begin{vmatrix} m!J_m - xI_m & m!J_m & \cdots & m!J_m & (m-1)!J_m \\ m!I_m & -xI_m & 0_{m\times m} & \cdots & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & m!I_m & -xI_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m!I_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -xI_m & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & m!I_m & -xI_m \end{vmatrix}_{ms\times ms}$$

$$= \begin{vmatrix} m!J_m - xI_m & m!J_m & \cdots & \cdots & m!J_m + \frac{m!}{x}(m-1)!J_m & (m-1)!J_m \\ m!I_m & -xI_m & 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & m!I_m & -xI_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m!I_m & -xI_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m!I_m & -xI_m & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} & -xI_m \end{vmatrix}_{ms\times ms}$$

$$= \begin{vmatrix} m!J_m - xI_m & m!J_m & \cdots & \cdots & m!J_m + \frac{m!}{x}(m-1)!J_m & (m-1)!J_m \\ m!I_m & -xI_m & 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & m!I_m & -xI_m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & m!I_m & -xI_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m!I_m & -xI_m & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} & -xI_m \end{vmatrix}_{ms\times ms} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} m!J_m + (\sum_{i=1}^{s-2}\frac{(m!)^i}{x^i} + \frac{(m!)^{s-1}}{mx^{s-1}})J_m - xI_m & m!J_m + (\sum_{i=1}^{s-3}\frac{(m!)^i}{x^i} + \frac{(m!)^{s-2}}{mx^{s-2}})J_m & \cdots & (m-1)!J_m \\ 0_{m\times m} & -xI_m & 0_{m\times m} & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & 0_{m\times m} & -xI_m & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & \cdots & \cdots & -xI_m \end{vmatrix}$$

$$= \left| m!J_m + (\sum_{i=1}^{s-2}\frac{(m!)^i}{x^i} + \frac{(m!)^{s-1}}{mx^{s-1}})J_m - xI_m \right| \times \prod_{k=1}^{s-1}\left|-xI_m\right|$$

令 $K = m! + (\sum_{i=1}^{s-2}\frac{(m!)^i}{x^i} + \frac{(m!)^{s-1}}{mx^{s-1}})$，則原式為

$$\left|KJ_m - xI_m\right| \times \prod_{k=1}^{s-1}\left|-xI_m\right| = \left|K - xI_m\right| \times (-x)^{m(s-1)}$$

$$= (-x)^{m(s-1)}\begin{vmatrix} K-x & K & \cdots & K \\ K & K-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K \\ K & \cdots & K & K-x \end{vmatrix}_{m\times m} = (-x)^{m(s-1)}(mK - x)\begin{vmatrix} 1 & K & \cdots & K \\ 1 & K-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K \\ 1 & \cdots & K & K-x \end{vmatrix}$$

$$= (-x)^{m(s-1)}(mK - x)\begin{vmatrix} 1 & K & \cdots & K \\ 0 & -x & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{m\times m} = (-x)^{m(s-1)}(K - x)(-x)^{m-1}$$

$$= (-x)^{ms-1}(\mathrm{m} \times m! + m(\sum_{i=1}^{s-2}\frac{(m!)^i}{x^i} + \frac{(m!)^{s-1}}{mx^{s-1}}) - x) = 0$$

故可得此特徵方程式為 $x^{(m-1)s}(x^s - m\sum_{i=1}^{s-1}(m!)^i x^{s-i} - (m!)^s) = 0$

(3) m人跳躍數列、球在空中最多 s 秒且丟$(ms-1)$顆球的生成函數：

$$\boldsymbol{G(m, ms-1, s, x) = s - x \cdot \frac{-m\sum_{i=1}^{s-1} i(m!)^i x^{i-1} - s(m!)^s x^{s-1}}{1 - m\sum_{i=1}^{s-1}(m!)^i x^i - (m!)^s x^s}}$$

肆、討論

多人跳躍數列的方法數和 1 人的跳躍數列情況十分不同，我們在進行相關討論時，需要整理出一個適當的符號，因此採用值代表球落下的秒數，而下標則代表由第幾人丟給另一個，這樣的方式讓我們在討論多人跳躍數列時更佳的清楚，也讓我們發現分塊矩陣在討論這種多人且有些重覆操作時的重要性；而在整理出特徵方程式後，我們發現分塊矩陣的特性，導致特徵根多了很多 0 的根，為了後續討論方便，我們針對此部分轉換為生成函數的動作進行更進一步的證明，也讓我們十分確定當計算出特徵方程式及討論跳躍數列相關問題時，可以將其整理為生成函數做為表示跳躍數列方法數的方式。

伍、結論

本研究在進行多人跳躍數列的討論中，以有向圖開始出發，點元素代表球在幾秒後落下的當下狀態、邊元素則是各點在變換時的方法，在點元素的整理上也不同於一些文獻上面的方式，採用類似二進位方式進行，此種方式讓我們在整理鄰接矩陣時將點用類似二進位表示

的值由小排到大，進而整理出一個有規律的鄰接矩陣；而又因是多人跳躍數列，其鄰接矩陣會是漂亮的分塊矩陣，在討論上也能夠找尋不同人數或者秒數之間的關係。

而本研究在多人跳躍數列的討論上，成功討論出m人在球在空中不超過s秒下，1 顆球和$(ms-1)$顆球的跳躍數列方法數，為了將其方法數有一個好的表示，我們以生成函數進行表示，其中所使用的變數為m人、丟b顆球且球在空中最多秒數不超過s秒，最後也得到有規律的生成函數，由此可發現多人跳躍數列有著相當多的規律；在有向圖提供給我們計算方法數時，我們嘗試將有向圖整理成以分塊矩陣所表示的鄰接矩陣，因鄰接矩陣有著規律存在，利用 **Cayley–Hamilton** 定理得到遞迴關係式並轉換成生成函數，而方法數以生成函數表示也讓我們在整理時，有一個更加清楚的結果，此部分除了讓我們成功避開較為難計算的初始值，也在討論上可以有一個較為一致的結果。

陸、參考文獻

[1] 吳林建宏、王聖淵、蔡宗祐、曾健耘、洪珞婷(民 108)。以狀態有向圖探討跳躍數列方法數。中華民國 2019 年臺灣國際科學展覽會，未出版，臺北市。

[2] 黃哲男、陳佩佩、郭懿慧、黃映親(民 98)。小丑的秘密-循環跳躍的數列。中華民國第 49 屆中小學科學展覽會，未出版，台南市。

[3] Fan Chung and Ron Graham(2008).Primitive Juggling Sequences. The Mathematical Association of America,America.

【評語】010038

本作品研究一類特定數列的性質，值得嘉許的是作者對於規劃好的數學工具計算層面，如線性代數、圖論、生成函數有基礎的了解，對數學也有高度熱忱。建議作者保持這股熱忱持續進行學習高等數學，同時建議加強對於研究問題的表達與溝通。