

2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010036

參展科別 數學

作品名稱 彈跳光點之無限反射曲線存在性研究

得獎獎項 一等獎

美國 ISEF 正選代表

青少年科學獎

就讀學校 臺北市政府教育局-高中無學籍非學校型態實
驗教育

指導教師 陳國璋

作者姓名 邱達夫

關鍵詞 動態撞球、無窮反射、級數估計

作者簡介



我是自學生邱達夫，最喜歡發想、研究數學問題和玩電動（如類魂遊戲），我從小開始自己學習包含數學的各科目，在國一時有了成為數學家的夢想，國二時我在浴室裡發想了彈跳光點問題並研究至今；在一開始研究時，雖然可以自行得出一些重要的觀察，但多年的嘗試都無法解決問題的核心，直到去年九月寫信向動態系統學家陳國璋教授請教才得到重要的啟發，我也馬上自行發現新的研究方向和定理，並整合在這篇作品中，是我引以為傲的獨立研究成果。

摘要

在這篇作品中，研究了在遵守反射定律的情況下，“光點”在 x 軸和“反射曲線”之間反射時，無限往前彈跳的可能性。

研究分成兩個階段，第一階段沿用了我過去作品中的基本結果，闡述了“入射光線”角度之間的遞迴關係，並用“反射切線”角度寫出第 n 個入射光線角度的封閉式。

第二階段運用函數值趨近於非零常數（為了研究簡潔，假設趨近於1）的情況下一般可用的“接觸點”估計方式，並使用此結果證明了在特定初始條件下， $1 + e^{-x}$ 和 $1 + \frac{1}{x}$ 都是“無限反射曲線”，但一開始的接觸點估計方式只適用於反射曲線函數值趨近於非零正數的情況，所以我也針對函數值趨近於零的情況進行了思考，但發現了估計推導上的困難，這將是我未來繼續研究的方向。

Abstract

In this research, I study the possibility of a "photon" bouncing forward indefinitely as it reflects between the x -axis and the "reflection curve" while obeying the laws of reflection. In the previous research, I expound the recursive relationship between the angles of the "incident ray", and use the "reflection tangent" angle to express the angle of the n -th incident ray in closed form.

For the current result, I prove the "hit point" estimation method, and, use this result to prove that both $1 + e^{-x}$ and $1 + \frac{1}{x}$ are "infinite reflection curves". I also thought about the case where the function value approaches zero, but found difficulties in the derivation of similar estimates. This will be the direction of my future research.

壹、前言

一、研究動機

彈跳光點問題是 2018 年時我在浴室裡想到的，看著地上的積水，思考如果地面上方有一面無限延伸的鏡子，這時從眼睛發射光線與地上的水以及鏡子反射時，在什麼樣的條件下可以保證光線無限往前延伸？

我起初在研究問題時，雖然有能力計算雙曲函數的前幾次彈跳，但除了知道遞迴式之外，對後續的研究沒有任何想法，即便如此，我還是嘗試計算了其他曲線的前幾次彈跳，但沒有斬獲，直到 2021 年在 Youtube 上看到了 3Blue1Brown 的影片（參考資料一，該影片引用參考資料二），才發現了將反射過程往前延伸的觀點，但除了知道定理 1 之外，還是沒有任何進展，今年決定先假設知道 θ_n 序列再回推曲線後，有了過去作品中的的大部分研究結果，但仍然無法證明任何反射曲線的可行性，直到 2022 年 9 月寫信向動態系統學者請教後才發現了 $1 + e^{-x}$ 的可行性，在看到這個可能性後，我自行證明了該位學者給出的條件並進行了優化，也對有理函數的情況進行了研究。

二、研究目的

- （一）找到用入射角度和切線角度決定新入射角度遞迴式。
- （二）找到一個正可微嚴格遞減上彎，且函數值趨近於非零正數的曲線，讓光點反射時一直向前彈跳。
- （三）在完成（二）後，探討函數值趨近於零的情況。

貳、研究方法或過程

一、彈跳過程的數學定義和幾何討論

一切的研究都從定義問題開始：

定義 1-1：

反射曲線:=定義在 (c, ∞) ($c \in \mathbb{R}^+$)¹上的正可微嚴格遞減上彎²函數 f

光點：為了方便理解定義的一個假想動點，本研究皆假設光點從原點，以一個大於0，小於 $\frac{\pi}{2}$ 的仰角發射

入射光線：光點從 x 軸射向彈跳曲線形成的直線段，接觸反射曲線時沿著反射切線反射

反射光線：光點從彈跳曲線射向 x 軸形成的直線段，接觸 x 軸時沿著 x 軸反射

反射切線：光點接觸反射曲線時，曲線在接觸點的切線

接觸點：光點和彈跳曲線或 x 軸相交的點

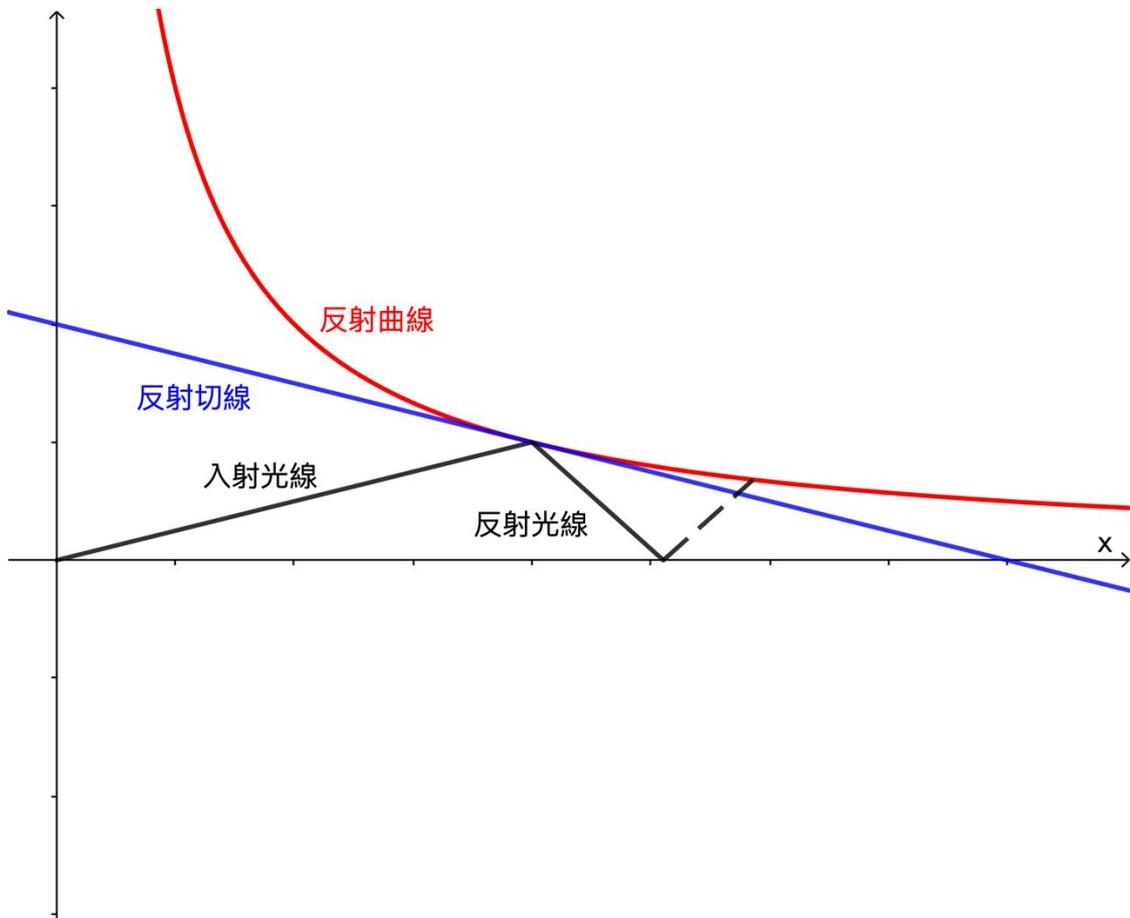


圖 1、彈跳過程示意圖，黑線為入射和反射光線，紅線為反射曲線，藍線為反射切線

¹ 本文針對 $c = 0$ 的情況研究

² 上彎係指 $f''(x) > 0$

有了定義 1-1，我們就可以將研究問題具體的寫為：

在遵守反射定律的情況下，存在正可微嚴格遞減上彎函數 f ，使得存在斜率

$$m \in \mathbb{R}_*^+ \text{ 使得入射光線的斜率恆 } > 0$$

但這樣的論述仍然無法達成嚴謹研究的目的，因此：

定義 1-2：

$$\begin{aligned} I_n &:= \text{第}n\text{個入射光線} \\ R_n &:= \text{第}n\text{個反射光線} \\ T_n &:= \text{第}n\text{個反射切線} \\ \phi_n &:= x\text{軸和}I_{n+1}\text{之間(逆時針測量)的夾角}^3 \\ \theta_n &:= x\text{軸和}T_n\text{之間(順時針測量)的夾角} \\ \theta_i &:= I_n\text{和}T_n\text{之間(順時針測量)的夾角}^4 \\ \theta_r &:= R_n\text{和}T_n\text{之間(逆時針測量)的夾角} \end{aligned}$$

注意到函數 $f(x) = c, c \in \mathbb{R}_*^+, 0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$ 是顯然的解，為了研究其他非顯然的解，才將函數 f 限制為處處嚴格遞減的上彎函數。

由此，可將研究目標重新定義為：

$$\begin{aligned} &\text{存在正嚴格遞減可微上彎函數}f\text{使得} \\ &\exists \phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \forall n \in \mathbb{N} \left(0 < \phi_n < \frac{\pi}{2}\right) \dots (1) \end{aligned}$$

且新增定義：

定義 1-3：

滿足(1)的函數稱為“無限反射曲線”
不滿足(1)的函數稱為“有限反射曲線”

從彈跳過程的幾何特性觀察到：

³ 為了整理標號，將 ϕ_n 和 I_n 錯開。

⁴ 在光學中，通常將入射和反射角定義為光束與反射線的“法線”之間的夾角，但為了方便研究使用，在此使用不同，但等價的定義。

引理 1-1 :

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\theta_{n+1}$$

證明 :

由圖 2 可知： $\alpha = \pi - \phi_n - \theta_{n+1}$, $\theta_i = \theta_r = \beta = \pi - \alpha = \phi_n + \theta_{n+1}$, $\phi_{n+1} = \pi - \phi_n - (\alpha - \beta) = \phi_n + 2\theta_{n+1}$ ■

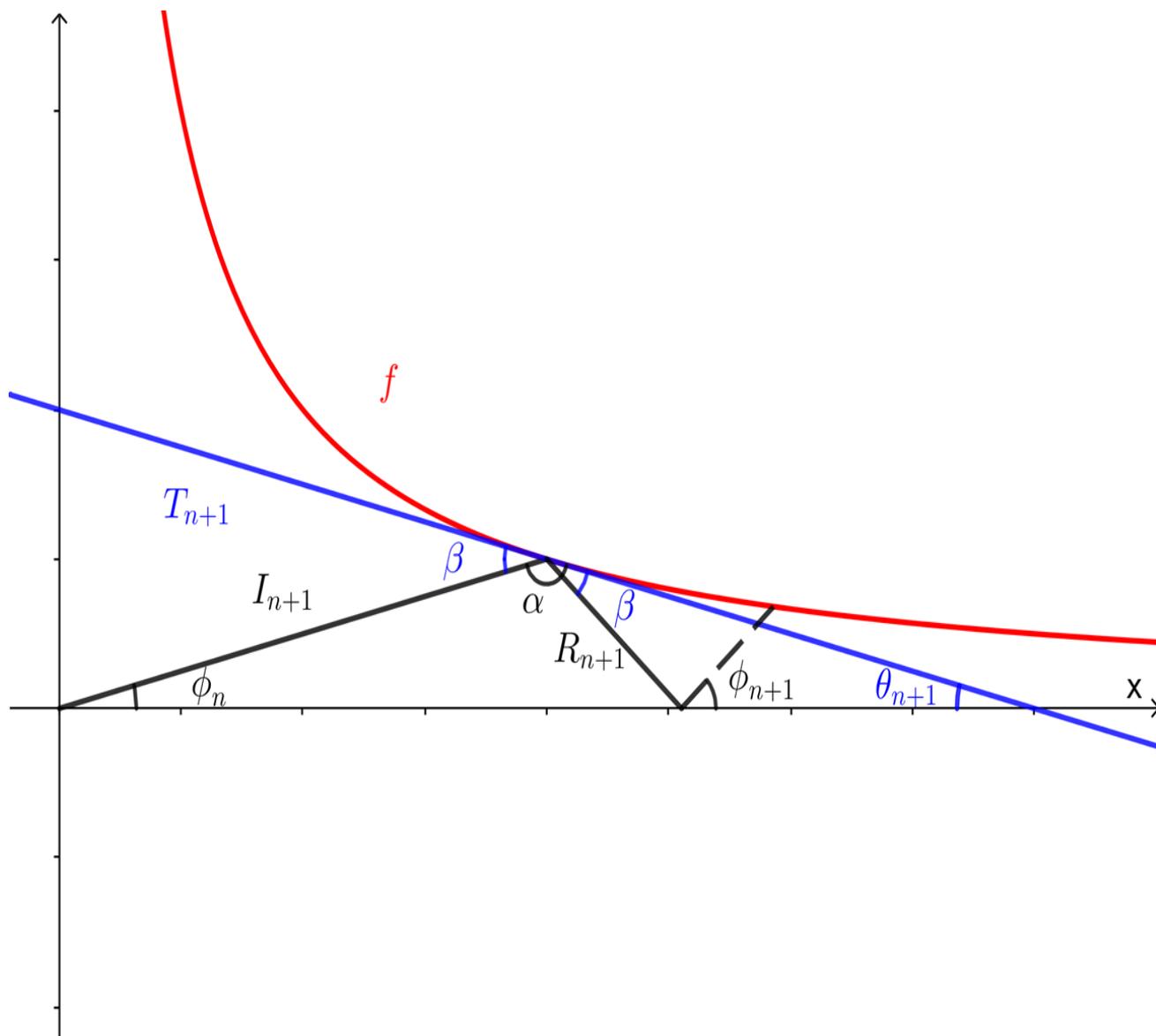


圖 2、幾何計算示意圖

研究到這裡時，我有嘗試計算各種曲線的前幾個彈跳點和斜率，但沒有看到明顯的規律，而且一般來說計算過程非常繁瑣，且不一定有解析解。

為了更加了解角度之間的關係，我們可以換個角度思考，將反射的過程“展開”，得到下面的圖：

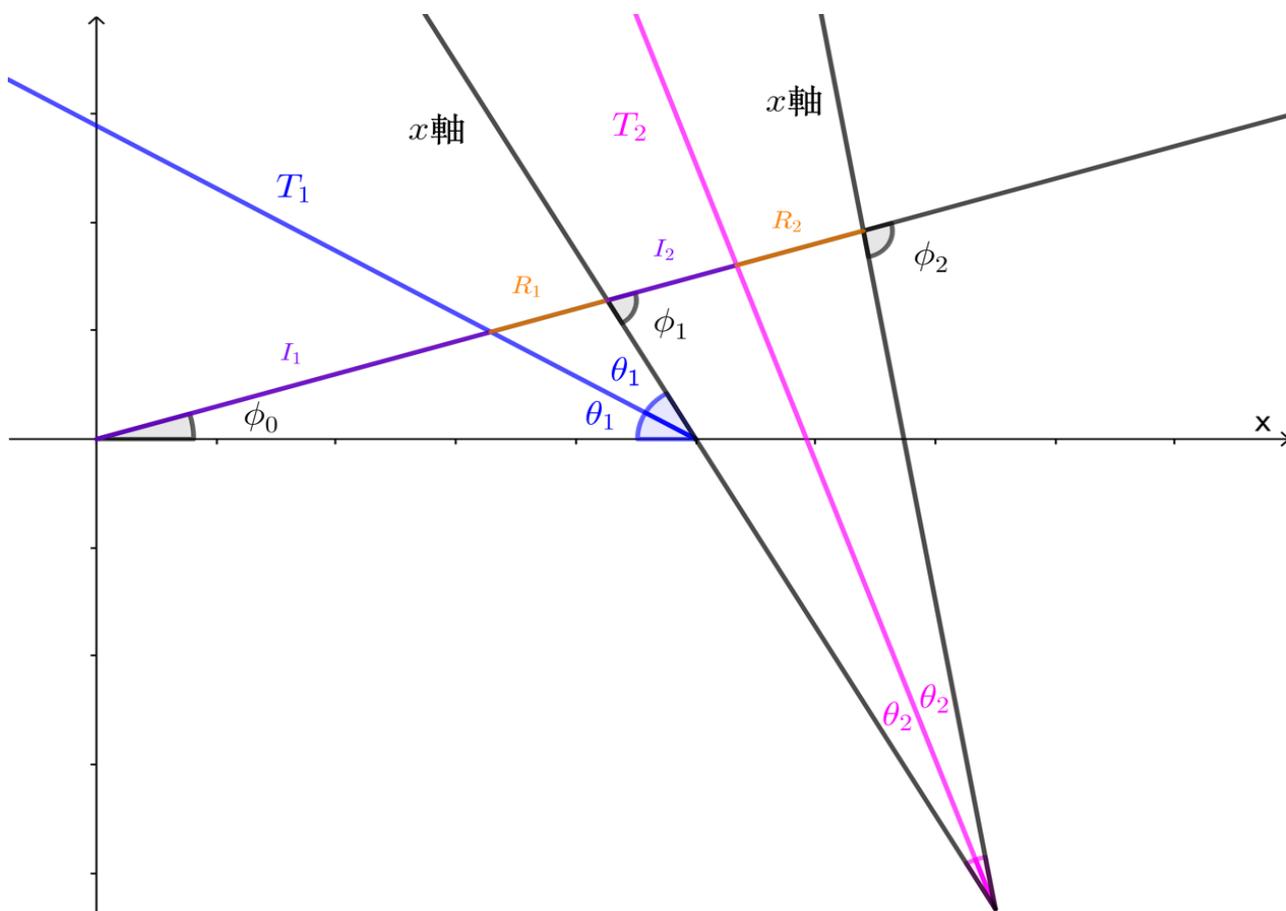


圖 3、鏡面反射觀點示意圖，新的兩條x軸是輔助線，幫助說明將光線沿著切線延伸的過程

當 I_1 接觸 T_1 時，把整個x軸和 T_1 之間的平面沿著 T_1 翻轉，得到第二個x軸，因為滿足反射定律的關係，第二個x軸和 I_1 之間的夾角恰好是 ϕ_1 ，類似的，第三個x軸和 I_1 之間的夾角恰好是 ϕ_2 ，從圖中可以看到當 $\phi_2 > \frac{\pi}{2}$ 時，代表的就是光點已經往回彈，我們希望避免這樣的狀況。

又因為下面的幾何特性：

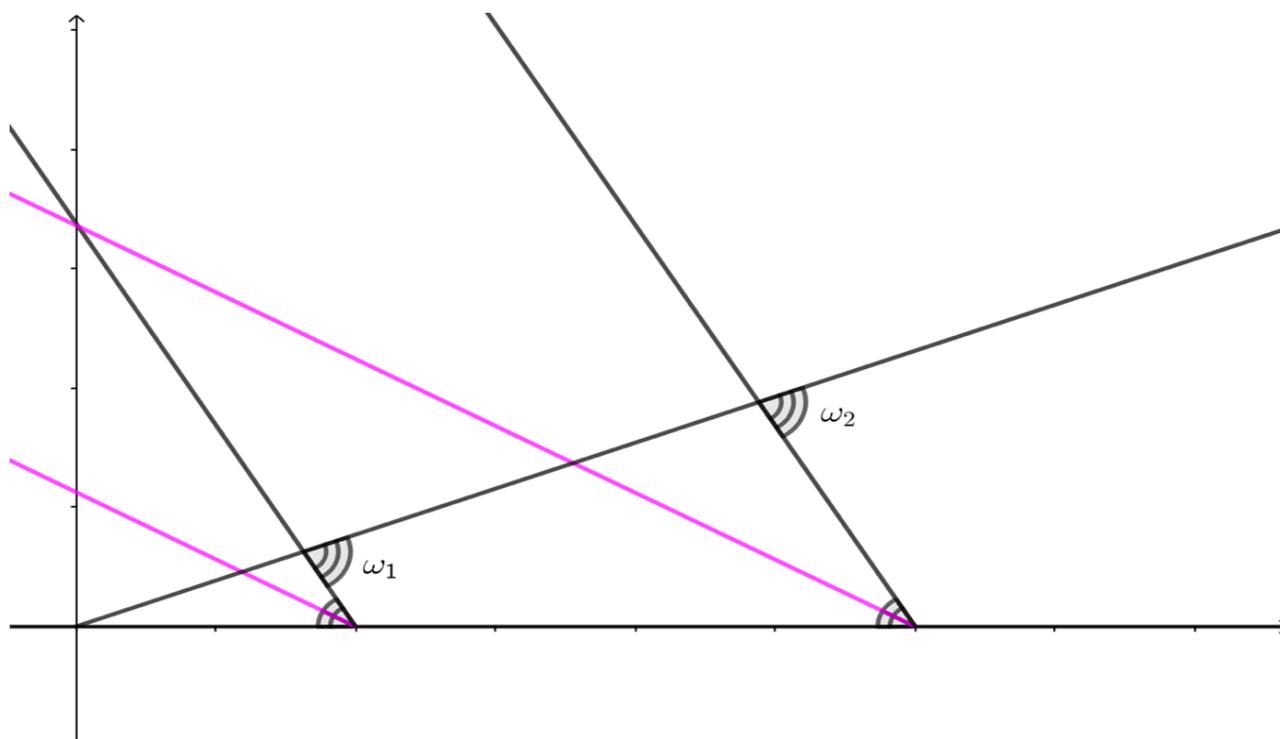


圖 4、從圖 3 提取的幾何特性，紅紫色線對和黑色線對各自平行，紅紫線不影響本圖說明的幾何性質，只是方便觀察與圖 3 的關聯

可以看到當黑線平行時， $\omega_1 = \omega_2$

因此

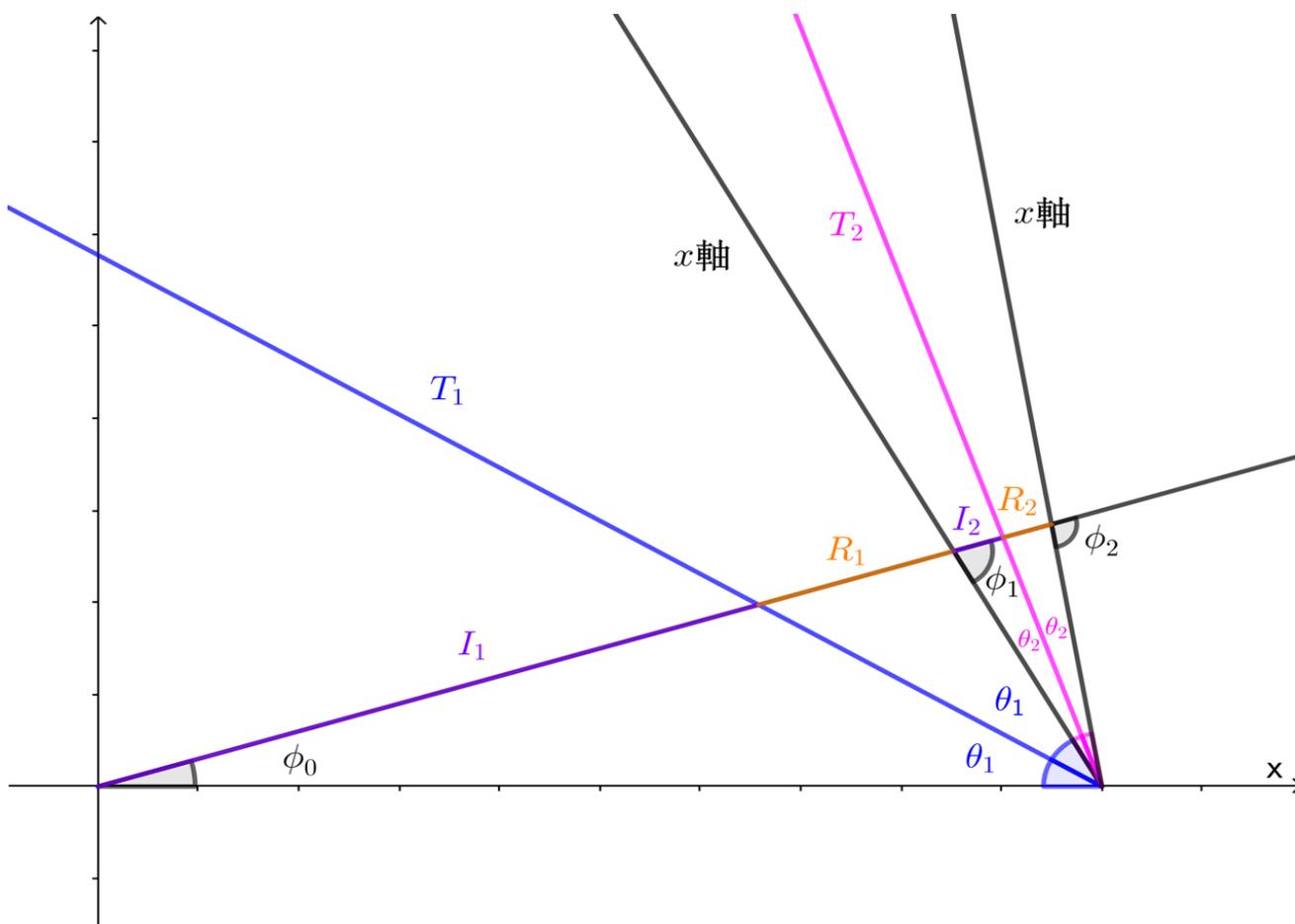


圖 5，在不影響角度和斜率的狀況下，對圖 3 進行的轉換

圖 5 中的 ϕ_2 與圖 3 中的 ϕ_2 等價，注意到上述的幾何觀點不依賴於彈跳點的位置。

從圖中可以觀察到：

定理 1：⁵

$$\phi_n = \phi_0 + 2 \sum_{k=1}^n \theta_k$$

⁵ 此結果可直接從 (2) 的遞迴關係看出，但了解其幾何意義仍是重要的。

二、探討直線的情況

得到定理 1 之後，可以研究斜率為負的直線：

定理 2：

給定反射曲線 $f(x) = ax + b$ ($a < 0$ 且 $b > 0$)，則：

$$\forall \phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \exists n_0 \in \mathbb{N} \left(\phi_{n_0} > \frac{\pi}{2}\right)$$

且

$$\min \left\{ n_0 \in \mathbb{N} \mid \phi_{n_0} > \frac{\pi}{2} \right\} = \left\lceil \frac{\pi - 2\phi_0}{4 \tan^{-1}(-a)} \right\rceil$$

證明：

因為直線在每一個點的切線都是一樣的（且就是該直線本身），所以

$$\forall n \in \mathbb{N}, \theta_n = \tan^{-1}(-a)$$

根據定理 1，有下列結果

$$\phi_n = \phi_0 + 2 \sum_{k=1}^n \theta_k = \phi_0 + 2 \tan^{-1}(-a) n$$

根據實數的阿基米德性質：

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, 2 \tan^{-1}(-a) n_0 > \frac{\pi}{2} - \phi_0 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \phi_0 + 2 \tan^{-1}(-a) n_0 > \frac{\pi}{2}$$

為了求解最小的 n_0 ，令：

$$2 \tan^{-1}(-a) x = \frac{\pi}{2} - \phi_0 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

則：

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} - \phi_0}{2 \tan^{-1}(-a)} = \frac{\pi - 2\phi_0}{4 \tan^{-1}(-a)}$$

因此

$$\min \left\{ n_0 \in \mathbb{N} \mid \phi_{n_0} > \frac{\pi}{2} \right\} = \left\lceil \frac{\pi - 2\phi_0}{4 \tan^{-1}(-a)} \right\rceil \blacksquare$$

換言之，所有直線都是有限反射曲線；直線除了是少數能求得確切“回彈次數”的函數之外，也是我要求反射曲線為上彎函數的原因之一（另一個原因是為了避免反曲點）。

三、探討反射曲線函數值趨近於非零常數的情況

得到定理 1 之後，我們可以開始嘗試證明無限反射曲線的存在性，特別的，從下類的函數開始：

$$f(x) = 1 + g(x)$$

定理 3：

給定正嚴格遞減上彎可微函數 g ，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

考慮 $f(x) = 1 + g(x)$ 、 $a_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 、 $\phi_0 \in (0, a_0)$ 、和遞增序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, a_0 < a_n < \frac{\pi}{2})$ ，則：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n < a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0, -g' \left(\cot a_0 + 2 \sum_{k=1}^n \cot a_k \right) < \tan \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2} \right)$$

證明：

定義 H_h^h 為函數 h' 和函數 h 的接觸點， $H_{h',x}^h$ 和 $H_{h',y}^h$ 為 H_h^h 的 x 和 y 座標，首先觀察到，因為 $f(x) = 1 + g(x) > 1$ ，所以 $H_{I_{n,y}}^f > 1$ ，考慮常數函數 $(y =) 1$ ，顯然有 $H_{I_{n,y}}^1 = 1$ ，且因為 I_n 是遞增函數，所以 $H_{I_{n,y}}^1 < H_{I_{n,y}}^f \Leftrightarrow H_{I_{n,x}}^1 < H_{I_{n,x}}^f$ ，因為 f 是嚴格遞減上彎函數，所以 $H_{I_{n,x}}^1 < H_{I_{n,x}}^f \Leftrightarrow f'(H_{I_{n,x}}^1) < f'(H_{I_{n,x}}^f) < 0$ 。

以下將用數學歸納法證明

$$\forall (\mathbb{N} \ni) n \geq 1, \left(\phi_n < a_n \wedge H_{R_{n,x}}^0 > \cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \cot a_l + \cot a_n \right) \Leftrightarrow -g' \left(\cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \cot a_l \right) < \tan \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$$

當 $n = 1$ 時

因為 $I_1 = (\tan \phi_0)x \cdot H_{I_1x}^1 = H_{(\tan \phi_0)x_x}^1 = \cot \phi_0$ ，所以：

$$\begin{aligned}
 \phi_0 + 2 \tan^{-1} \left(-f' \left(H_{I_1x}^f \right) \right) &= \phi_0 + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(H_{(\tan \phi_0)x_x}^f \right) \right) = \phi_1 < a_1 \\
 &\Leftrightarrow \phi_0 + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(H_{(\tan \phi_0)x_x}^1 \right) \right) = \phi_0 + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot \phi_0 \right) \right) < a_1 \\
 &\Leftrightarrow a_0 + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot a_0 \right) \right) < a_1 \Leftrightarrow \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot a_0 \right) \right) < \frac{a_1 - a_0}{2} \\
 &\Leftrightarrow -g' \left(\cot a_0 \right) < \tan \frac{a_1 - a_0}{2}
 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
 H_{R_1x}^0 &= H_{\left(-\tan \phi_1 \left(x - H_{(\tan \phi_0)x_x}^f \right) + H_{(\tan \phi_0)x_y}^f \right)_x}^0 = \frac{H_{(\tan \phi_0)x_y}^f}{\tan \phi_1} + H_{(\tan \phi_0)x_x}^f > \frac{H_{(\tan \phi_0)x_y}^1}{\tan \phi_1} + H_{(\tan \phi_0)x_x}^1 \\
 &= \frac{1}{\tan \phi_1} + \cot \phi_0 = \cot \phi_0 + \cot \phi_1 > \cot a_0 + \cot a_1
 \end{aligned}$$

因此 $n = 1$ 成立

假設 $n = k$ 成立，則

$$\begin{aligned}
\phi_k + 2 \tan^{-1} \left(-f' \left(H_{I_{k+1}x}^f \right) \right) &= \phi_k + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_x}^f \right) \right) = \phi_{k+1} < a_{k+1} \\
&\Leftrightarrow \phi_k + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_x}^1 \right) \right) \\
&= \phi_k + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot \phi_k + H_{R_{kx}}^0 \right) \right) < a_{k+1} \\
&\Leftrightarrow a_k + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot a_k + H_{R_{kx}}^0 \right) \right) < a_{k+1} \\
&\Leftrightarrow a_k + 2 \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot a_k + \cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \cot a_l + \cot a_k \right) \right) < a_{k+1} \\
&\Leftrightarrow \tan^{-1} \left(-g' \left(\cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^k \cot a_l \right) \right) < \frac{a_{k+1} - a_k}{2} \\
&\Leftrightarrow -g' \left(\cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^k \cot a_l \right) < \tan \frac{a_{k+1} - a_k}{2}
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
H_{R_{k+1}x}^0 &= H^0 \left(-\tan \phi_{k+1} \left(x - H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_x}^f \right) + H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_y}^f \right)_x \\
&= \frac{H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_y}^f}{\tan \phi_{k+1}} + H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_x}^f > \frac{H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_y}^1}{\tan \phi_{k+1}} + H_{\tan \phi_k(x-H_{R_{kx}}^0)_x}^1 \\
&= \frac{1}{\tan \phi_{k+1}} + \cot \phi_k + H_{R_{kx}}^0 = \cot \phi_{k+1} + \cot \phi_k + H_{R_{kx}}^0 \\
&> \cot a_{k+1} + \cot a_k + \cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^{k-1} \cot a_l + \cot a_k \\
&= \cot a_0 + 2 \sum_{l=1}^k \cot a_l + \cot a_{k+1}
\end{aligned}$$

因此 $n = k + 1$ 成立，至此完成數學歸納法證明■

我們可以用定理 3 證明 $1 + e^{-x}$ 是無限反射曲線：

定理 4：

給定 $f(x) = 1 + e^{-x}$ 和 $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{10}$ ，則

$$\phi_n < \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

證明：

令

$$a_n := \begin{cases} \frac{\pi}{10}, & n = 0 \\ \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

則根據定理 3，證明

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, -g' \left(\cot \frac{\pi}{10} + 2 \sum_{k=1}^n \cot \left(\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \right) \right) < \tan \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2} \right)$$

是充分的；

$n = 0$ 時：

注意到 $\cot \frac{\pi}{10} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ ，且 $20 > 16 \Leftrightarrow 2\sqrt{5} > 4 \Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{5} > 9 \Leftrightarrow \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} > 3$ ，當 $x > 0$

時 $\tan x > x$ ，因此：

$$e^{-\cot \frac{\pi}{10}} < \tan \frac{\pi}{30} \Leftrightarrow e^{-\cot \frac{\pi}{10}} = e^{-(\sqrt{5+2\sqrt{5}})} < e^{-3} < \frac{1}{10} < \frac{\pi}{30} < \tan \frac{\pi}{30}$$

我們只需要證明 $e^{-3} < \frac{1}{10}$ ，但 $e^{-3} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 < e^3$

已知

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

所以

$$e^3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6} + \dots = 13 + \dots > 13 > 10$$

因此

$$e^{-\cot\frac{\pi}{10}} < \tan\frac{\pi}{30}$$

$n \geq 1$ 時：

注意到當 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 時 $\cot x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，且當 $x > 0$ 時 $\tan x > x$ ，因此：

$$\begin{aligned} e^{-\left(\cot\frac{\pi}{10} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right)\right)} &< \tan\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} \Leftarrow e^{-\left(\cot\frac{\pi}{10} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right)\right)} < e^{-\left(3+\frac{2n}{\sqrt{3}}\right)} < \frac{1}{2^{n+2}} \\ &< \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}} < \tan\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}}, (n \geq 1) \end{aligned}$$

因此我們只需要證明 $e^{-\left(3+\frac{2n}{\sqrt{3}}\right)} < \frac{1}{2^{n+2}}$ ，也就是

$$e^{-\left(3+\frac{2n}{\sqrt{3}}\right)} < \frac{1}{2^{n+2}} \Leftrightarrow 2^{n+2} < e^{3+\frac{2n}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow 2^2 \cdot 2^n < e^3 \cdot \left(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^n, (n \geq 1)$$

顯然有

$$2^2 < 2^3 < e^3$$

(從 e 的泰勒級數可容易地看出 $e > 2$)

和

$$2 < e^1 < e^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

(因為 $4 > 3 \Leftrightarrow 2 > \sqrt{3}$)

因此

$$e^{-\left(\cot\frac{\pi}{10} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\right)\right)} < \tan\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n+2}}$$

至此證完 ■

上述的例子是令 a_n 以幾何級數的方式遞增，但注意到 p 級數的收斂速度比幾何級數緩慢很多，因此可以用黎曼 ζ 函數證明以下有理函數是無限反射曲線：

定理 5：

給定 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 和 $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{16}$ ，則

$$\phi_n < \frac{\pi H_n^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)}$$

證明：

令

$$a_n := \begin{cases} \frac{\pi}{16}, n = 0 \\ \frac{\pi H_n^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)}, n \geq 1 \end{cases}$$

則根據定理 3，證明

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, -g' \left(\cot \frac{\pi}{16} + 2 \sum_{k=1}^n \cot \left(\frac{\pi H_k^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)} \right) \right) < \tan \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2} \right)$$

是充分的；

$n = 0$ 時：

注意到當 $x > 0$ 時 $\tan x > x$ ，因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\cot \frac{\pi}{16}\right)^2} &< \tan \frac{(16 - 3\zeta(1.5))\pi}{96\zeta(1.5)} \Leftarrow \frac{1}{\left(\cot \frac{\pi}{16}\right)^2} = \left(\tan \frac{\pi}{16}\right)^2 < \left(\frac{\pi^2 \frac{\pi}{16}}{\pi^2 - 4\left(\frac{\pi}{16}\right)^2}\right)^2 = \frac{16\pi^2}{3969} \\ &< \frac{16 \cdot 4^2}{3969} = \frac{256}{3969} < \frac{7}{96} = \frac{(16 - 3 \cdot 3)3}{96 \cdot 3} < \frac{(16 - 3\zeta(1.5))\pi}{96\zeta(1.5)} \\ &< \tan \frac{(16 - 3\zeta(1.5))\pi}{96\zeta(1.5)} \end{aligned}$$

($\tan x$ 的上界引用參考資料三， $\zeta(1.5) < 3$ 是因為 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.5}} = 2 < \zeta(1.5) < 3 = 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.5}}$)

$n \geq 1$ 時：

⁶ $H_n^{(m)} := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^m}$

注意到當 $x > 0$ 時 $\tan x > x$ ，且當 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ 時， $\cot x > \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，因此：

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\left(\cot\frac{\pi}{16} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi H_k^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)}\right)\right)^2} < \tan\frac{\pi}{6\zeta(1.5)(n+1)^{1.5}}, (n \geq 1) \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\cot\frac{\pi}{16} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi H_k^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)}\right)\right)^2} < \frac{1}{\left(\cot\frac{\pi}{16} + 2\sum_{k=1}^n \cot\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2} \\
 & = \frac{1}{\left(\cot\frac{\pi}{16} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} < \frac{1}{\left(\frac{\pi^2 - 4\left(\frac{\pi}{16}\right)^2}{\pi^2 \frac{\pi}{16}} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{63}{4\pi} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} < \frac{1}{\left(\frac{63}{16} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} \\
 & < \frac{1}{\left(\frac{15}{4} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} < \frac{1}{6(n+1)^{1.5}} < \frac{\pi}{18(n+1)^{1.5}} < \frac{\pi}{6\zeta(1.5)(n+1)^{1.5}} \\
 & < \tan\frac{\pi}{6\zeta(1.5)(n+1)^{1.5}}, (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

因此只需要證明 $\frac{1}{\left(\frac{15}{4} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} < \frac{1}{6(n+1)^{1.5}}$ ，也就是

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\left(\frac{15}{4} + \frac{2n}{\sqrt{3}}\right)^2} &= \frac{48}{(8n + 15\sqrt{3})^2} < \frac{1}{6(n+1)^{1.5}} \Leftrightarrow 288(n+1)^{1.5} < (8n + 15\sqrt{3})^2 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^3}{(8n + 15\sqrt{3})^4} < \frac{1}{288^2}, (n \geq 1)
 \end{aligned}$$

$n = 1$ 時

$$\frac{(1+1)^3}{(8 + 15\sqrt{3})^4} < \frac{1}{288^2} \Leftrightarrow 288^2(1+1)^3 < (8 + 15\sqrt{3})^4 \Leftrightarrow 663552 < 718921 + 354720\sqrt{3}$$

且

$$\frac{d(8n + 15\sqrt{3})^4}{dn} = 32(8n + 15\sqrt{3})^3 > 3(n+1)^2 = \frac{d(n+1)^3}{dn}, (n \geq 1)$$

因此 $\frac{(n+1)^3}{(8n+15\sqrt{3})^4}$ 的分母遞增的比分子快，所以

$$\frac{(n+1)^3}{(8n + 15\sqrt{3})^4} < \frac{1}{288^2}, (n \geq 1)$$

至此完成證明 ■

四、探討反射曲線函數值趨近於零的情況

目前為止的座標估計可行是因為函數值趨近於非零常數，當函數值趨近於 0 時需要有新的估計方式，其中最直接的做法是“用接觸點的切線估計下一個接觸點”，概念如下圖：

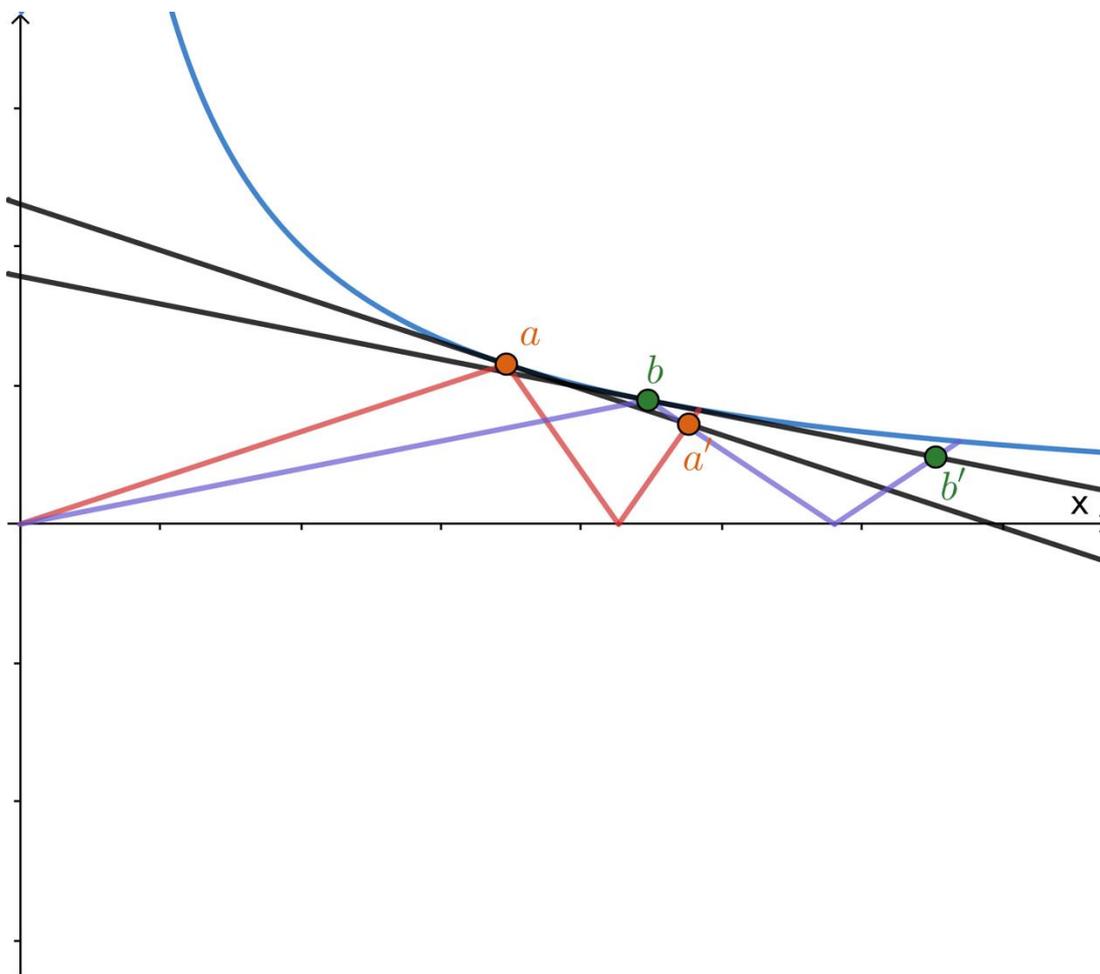


圖 6，藍線是反射曲線，紅線和紫線是入射和反射光線，黑線是切線， a' 和 b' 是估計點。

雖然可證明 b' 的 x 座標大於 a' 的 x 座標，但一般而言， b' 的 y 座標小於 a' 的 y 座標，這代表我們不能直接用 a' 的數值估計 b' 的數值，若要使估計成立，則必須對連接 a' 和 b' 的直線斜率有所估計，但這個估計牽涉到了過多無法掌握的參數（如入射角和接觸點座標、以及接觸點微分之間的關係），因此反射曲線趨近於0的情況還需要在未來進行更多的研究。

參、研究結果與討論

一、研究結果

1. 發現第 n 個入射光線的角度可以用初始入射光線的角度 ϕ_n 和途中彈跳過的反射切線角度 $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ 表示：

定理 1：

$$\phi_n = \phi_0 + 2 \sum_{k=1}^n \theta_k$$

2. 證明所有斜率為負的直線都是有限反射曲線，並找出“回彈次數”：

定理 2：

給定反射曲線 $f(x) = ax + b$ ($a < 0$ 且 $b > 0$)，則：

$$\forall \phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \exists n_0 \in \mathbb{N} \left(\phi_{n_0} > \frac{\pi}{2}\right)$$

且

$$\min \left\{ n_0 \in \mathbb{N} \mid \phi_{n_0} > \frac{\pi}{2} \right\} = \left\lceil \frac{\pi - 2\phi_0}{4 \tan^{-1}(-a)} \right\rceil$$

3. 證明適用於 $f(x) = 1 + g(x)$ (且 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$) 形式反射曲線的估計方式：

定理 3：

給定 $a_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 、 $\phi_0 \in (0, a_0)$ 、和遞增序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, a_0 < a_n < \frac{\pi}{2})$ ，則：

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_n < a_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0, -g' \left(\cot a_0 + 2 \sum_{k=1}^n \cot a_k \right) < \tan \left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2} \right)$$

4. 證明 $1 + e^{-x}$ 和 $1 + \frac{1}{x}$ 是無限反射曲線：

定理 4：

給定 $f(x) = 1 + e^{-x}$ 和 $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{10}$ ，則

$$\phi_n < \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

以及

定理 5：

給定 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 和 $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{16}$ ，則

$$\phi_n < \frac{\pi H_n^{(1.5)}}{3\zeta(1.5)}$$

二、討論

對於反射曲線函數值趨近於非零常數的情況，已經找到了可靠的估計判斷方式，且證明了兩個函數： $1 + e^{-x}$ 和 $1 + \frac{1}{x}$ 的可行性，其中以 $1 + \frac{1}{x}$ 遞減的更為緩慢；函數值趨近於零的情況複雜許多，我認為有後續研究的價值，也是我未來努力的方向。

肆、結論與應用

$f(x) = 1 + e^{-x}$ 和 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 是無限反射曲線，且可以運用定理 3 尋找更多函數值趨近於非零常數無限反射曲線。

以應用的方面來說，彈跳光點問題和動態撞球（Dynamical Billiard）系統之間有不少相似之處（如給定反射面、遵守反射定律、研究質點在無限反射過程中的行為等等），而動態撞球系統在幾何光學、雷射、聲學、以及和半導體相關的量子點、 pn 結等領域中有應用，因此我認為本文的彈跳光點問題也有在上述的領域當中應用的可能，且此問題可能也有使用量子混沌（Quantum Chaos）理論研究的可能性。

伍、參考文獻

一，3Blue1Brown. How colliding blocks act like a beam of light...to compute pi, Youtube, (2019).

<https://youtu.be/brU5yLm9DZM>

二，G. Galperin, "Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)", REGUL CHAOTIC DYN, (2003), 8 (4), 375 - 394.

https://www.turpion.org/php/paper.phtml?journal_id=rd&paper_id=252

三，M. Becker and E. L. Stark, On a hierarchy of quolynomial inequalities for $\tan x$, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 602-633, (1978), 133-138. <http://pefmath2.etf.rs/files/105/620.pdf>

【評語】 010036

本作品討論光線在給定範圍內無窮反射的研究，其設定是給定一個正的遞減彎向上函數 f 和 x -軸之間的範圍，試圖具體找出可以無窮反射的函數 f 。經由一些幾何性質的討論，作者推導出第 n 步入射角與第 $n+1$ 步入射角的關係。從而導出函數 f 的一個必要條件。再經由細緻地分析與推導，給出一個基於入射角的判別法，最後可以成功地證明 $1+1/x$ 以及 $1+1/ex$ 可以是無窮反射的曲線。本作品取材新穎，數學的討論與證明雖然樸實但是嚴謹，得到相當漂亮的結果，而且後續還有延伸發展的空間。整體而言是相當優秀傑出的作品。