2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010031

參展科別　數學

作品名稱　繞形相遇

得獎獎項

就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　陳保伶

作者姓名　曾聖豪

關鍵詞　行程問題、正多邊形、兩人

作者簡介

我是曾聖豪，現今我就讀台北市立永春高中，在一般生活中，我就十分喜愛思考一些問題，若我思考的問題與一般常識衝突，我會懷疑自己所學是否嚴謹，也因此我喜愛做數學研究，且在校內外的數學賽事，我也熱衷參與，期望這次到國際科展，可以增廣見識，充實自己，以及介紹自己的專題，讓更多人所熟知，並結交喜愛研究的人。

Abstract

I found an interesting math question in a school-level math contest. It takes A x minute to walk along the sides of a regular polygon for one round and it takes B y minutes to do so. When and where will A and B encounter each other? As I worked out the particular solution to this question, I found that there were many interesting and extendable possibilities, so I started to study them. In this study, by finding each place where A and B meet and connecting these places, a circle can be drawn. Then by using the positions of the apexes of the regular polygon, another circle can be drawn. With these two circles, I can find the relative position as well as when and where A and B meet for the first time on the apex of the polygon. I want to seek a general solution with the hope that it can be extended. The extension is expected to be done without a limit on the number of people in the future.

摘要

在一期校內的階城盃中，我發現一個有趣的問題，在一個正多邊形，甲走一圈花 x 分鐘，乙走一圈花 y 分鐘，請問第一次甲乙在何時、何點相遇？當我寫下這題目特定解時，突然發現還有許多有趣且可延伸的可能，因此開始研究；本篇研究透過求出甲乙相遇的每一個地點連接形成一個圓形，再藉由此圓形與題目中的正多邊形的點所畫的圓形的頂點相對位置，找出甲乙何時何地第一次相遇在正多邊形的頂點上，並導出通解並期望在未來可以找到不限定人數等等的延伸。

壹、 研究動機

在一期校內的數學賽事中，我發現一個有趣的問題；在一個正n邊形，甲走一圈花x分鐘，乙走圈一花y分鐘，請問第一次甲乙在何時、何點相遇？當我寫下這題目的解時，突然發現還有許多有趣且可延伸的可能，想探討起點、方向改變時的通解。

貳、 研究目的及研究問題

一、甲乙第一次相遇在正n邊形頂點上的時間與圈數

(一)甲乙起點相同且方向相同

(二)甲乙起點相同且方向不同

(三)甲乙起點不同且方向相同

(四)甲乙起點不同且方向不同

參、 研究設計

一、名詞定義

n：甲乙行走的正多邊形邊數

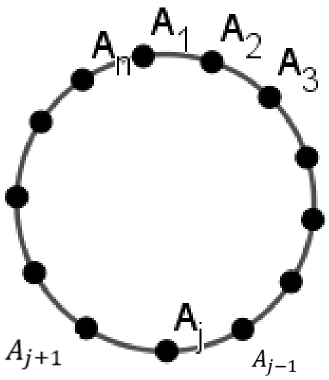
x：甲走一圈的所需花費的時間（單位：分鐘），x屬於正有理數

y ：乙走一圈的所需花費的時間（單位：分鐘），y屬於正有理數

第i次相遇：甲乙相遇次數以i表示

圖形A： 為一個圓，切n等分，n個等分點分別為$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m, \ldots, A_n$，依甲依照行走方向編序，其中m為整數，$1 \leq m \leq n$，$A_1$為甲的起點且$A_j$為乙的起點

定義弧A_1A_j為甲從甲起點出發至乙起點所需之距離，其弧長為$\frac{j-1}{n}$，定義弧A_jA_1為甲從乙起點出發至甲起點所需之距離，其弧長為$\frac{n-j+1}{n}$（以下為$n = 13$的圖），且 （以下為甲行走方向為順時針的編序）



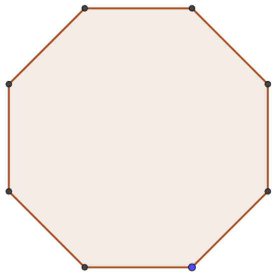
f(i)：甲乙再相遇i次時，甲乙所在位置。

‘

二、研究內容

（一） 甲乙行走起點相同且方向相同

在一個正n邊形， 甲走一圈花x分鐘，乙走圈一花y分鐘，請問第一次甲乙在何時、何點相遇？



首先，劃出圖A，甲乙由相同起點出發，若在乙速度比甲快，則乙就需要超越甲一整圈，才會與甲再次相遇。甲速度為每分鐘走$\frac{1}{x}$圈、乙速度為每分鐘走$\frac{1}{y}$圈，所以$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，甲乙速度差為每分鐘走$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}$圈，而乙超越甲一整圈再次相遇需花費$1\div\frac{x-y}{xy}=\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x-y}}$分鐘。反之，若甲速度比乙快，甲乙再次相遇則需要$1\div\frac{y-x}{xy}=\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{y-x}}$分鐘。

由於甲乙相遇後再次出發，與從起點出發所間隔的時間距離皆相同，因此若甲乙持續行走，任意接連兩次相遇皆間隔$|\frac{xy}{x-y}|$分鐘。

依據甲乙接連兩次相遇間隔$|\frac{xy}{x-y}|$分鐘，期間甲會走$\left|\frac{xy}{x-y}\right|\times\frac{1}{x}$圈，扣除整數圈$\left[|\frac{y}{x-y}|\right]$的部分，所以甲乙接連兩次相遇的位置，相距$|\frac{y}{x-y}|-\left[|\frac{y}{x-y}|\right]$圈，為了方便探討圖形的性質。

已知甲從起點出發後，令$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$、$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$，甲乙接連兩次相遇間隔$|\frac{y}{x-y}|-\left[|\frac{y}{x-y}|\right]$圈，因此在第$i$次相遇時，甲所行走的距離為$\mathrm{i}\times(\left|\frac{y}{x-y}\right|)$，假設甲乙再相遇i次後，便在正n邊形頂點上相遇，則f(i)為整數，故$\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times\left(\left|\frac{y}{x-y}\right|-\left[\left|\frac{y}{x-y}\right|\right]\right)=\mathrm{f(i)}$為整數時，i有最小正整數解，因此若甲乙會在正n邊形相遇，則會在相遇i次時，於正n邊形頂點上相遇，而當$\mathrm{f(i)}=\mathrm{i}\times(|\frac{y}{x-y}|-\left[|\frac{y}{x-y}|\right])$且$\mathrm{n}\times\mathrm{f(i)}$為整數時，f(i)的最小整數解為$\frac{\mathrm{bc-ad}}{\mathrm{k}}$，$\mathrm{gcd(nbc,bc-ad)=k}$

（二） 甲乙在起點相同且甲乙不相同方向

首先，劃出圖A，為了方便描述及驗證其性質，將甲乙速度比換成互質的整數比，並記作$x':y'$，並將整圈切出$x'+y'$形成圖B，若在圖B甲走x'格，則乙走y'格，因此可知甲乙第一次相遇點在距離起點甲的行走方向$\frac{y'}{x'+y'}$位置上，並將此化為最簡寫作。且已知甲乙的速度為$\frac{1}{x},\frac{1}{y}$，將甲乙相遇點與起點的距離乘以速度即為相遇時間 $\frac{y'}{x'+y'}\times\frac{1}{x}=\frac{y'\times x}{x'+y'}$。

已知甲從起點出發後，令$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$、$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$，甲乙接連兩次相遇間隔$\frac{y'}{x'+y'}-\left[\left|\frac{y'}{x'+y'}\right|\right]$圈，因此在第$i$次相遇時，甲所行走的距離為$\mathrm{i}\times(\left|\frac{y'}{x'+y'}\right|)$，假設甲乙再相遇i次後，便在正n邊形頂點上相遇，則f(i)為整數，故$\mathrm{i}\times\left(\frac{y'}{x'+y'}-\left[\frac{y'}{x'+y'}\right]\right)=\mathrm{f(i)}$為整數時，i有最小正整數解，因此若甲乙會在正n邊形相遇，則會在相遇i次時，於正n邊形頂點上相遇，而當$\mathrm{f(i)}=\mathrm{i}\times(\frac{y'}{x'+y'}-\left[\frac{y'}{x'+y'}\right])$且f(i)為整數時，f(i)的最小整數解為$\frac{\mathrm{bc-ad}}{\mathrm{k}}$，$\mathrm{gcd(ny',x'+y')=k}$

（三） 甲乙在不同起點且相同方向

首先，若當甲的速度比乙慢$x>y$，則乙要追上甲，則必須要比甲多走$\frac{\mathrm{n-j+1}}{n}$距離，因此$\frac{\mathrm{n-j+1}}{n}\div\frac{|x-y|}{x\times y}$，所以乙追上需要花$\frac{x\times y}{|x-y|}\times\frac{\mathrm{n-j+1}}{n}$分鐘；若$\mathrm{y>x}$，則$\frac{\mathrm{j-1}}{\mathrm{n}}\div\frac{|x-y|}{x\times y}$，因此若速度慢者在後方時需花費$\frac{x\times y}{|x-y|}\times\frac{\mathrm{j-1}}{\mathrm{n}}$分鐘。甲乙第一次相遇是在從起點出發後$\frac{x\times y\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}$分鐘或$\frac{x\times y\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}$分鐘。

依據甲乙再次相遇需花費$\frac{x\times y\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}$分鐘或$\frac{x\times y\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}$分鐘，因此甲會走$\frac{x\times y\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}\times\frac{1}{y}=\frac{x\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}$的距離或$\frac{x\times y\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}\times\frac{1}{y}=\frac{x\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}$,所以甲乙相遇點在距離起點甲乙行走方向$\frac{x\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}-\left[\frac{x\times(j-1)}{n\times(|x-y|)}\right]$或$\frac{x\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}-\left[\frac{x\times(n-j+1)}{n\times(|x-y|)}\right]$的距離。

已知甲從起點出發後，第一次相遇與起點的距離為$\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x-y}|}-\left[\frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x-y}|}\right]$或$\frac{\mathrm{x}\times(1-)}{|\mathrm{x-y}|}-\left[\frac{\mathrm{x}\times(1-)}{|\mathrm{x-y}|}\right]$,第一次相遇後,任兩次相遇間隔時間與距離皆會如同相同起點出發後的一樣，甲乙接連兩次相遇間隔圈，因此在第i次相遇時，甲所行走的距離為，

已知甲從起點出發後,令$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$、$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$,甲乙接連兩次相遇間隔$|\frac{y}{x-y}|-\left[|\frac{y}{x-y}|\right]$圈，因此在第$i$次相遇時，甲所行走的距離為$(\mathrm{i}-1)\times\left(\left|\frac{y}{x-y}\right|\right)+\frac{\mathrm{y(n-j+1)}}{n\times(x-y)}$，假設甲乙再相遇$\mathrm{i}+1$次後，便在正n邊形頂點上相遇，則$\mathrm{n}\times\mathrm{f(i+1)}$為整數，故當$\mathrm{y}>\mathrm{x}$時，$\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times\left(\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(j-1)}}{n\times(x-y)}-\left[\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(j-1)}}{n\times(x-y)}\right]\right)=\mathrm{f(i)}$為整數或當$\mathrm{x}>\mathrm{y}$，$\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times\left(\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(n-j+1)}}{n\times(x-y)}-\left[\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(n-j+1)}}{n\times(x-y)}\right]\right)=\mathrm{f(i}$為整數時，i有最小正整數解，因此若甲乙會在正n邊形相遇,則會在相遇i次時,於正n邊形頂點上相遇,而當$\mathrm{f(i+1)}=\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times\left(\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(j-1)}}{n\times(x-y)}-\left[\left|\frac{y}{x-y}\right|+\frac{\mathrm{y(j-1)}}{n\times(x-y)}\right]\right)$，當$\mathrm{f(i)}$為整數時，則$\mathrm{i}\times\mathrm{n}\equiv 1-\mathrm{j}\ \left(\mathrm{mod}\,\frac{\mathrm{bc-ad}}{k}\right)$，$\mathrm{gcd(nbc, bc-ad)}=\mathrm{k}$

（四） 甲乙在不同起點且甲乙不相同方向

首先，劃出圖A，且知甲乙的起點距離為$\frac{\mathrm{j-1}}{n}$圈（若為劣弧則$\frac{\mathrm{j-1}}{n}$圈；若為優弧則為$\frac{\mathrm{n-j+1}}{n}$），為了方便描述及驗證其性質，將甲乙速度比換成互質的整數比，並記作$x':y'$，並將整圈切出$x'+y'$形成圖B，若在相同時間內，甲會走x'格，乙會

走y'格，因此可知甲乙第一次相遇點在距離起點甲的行走方向$\frac{y'}{x'+y'}\times\frac{\mathrm{j}-1}{n}$位置上；且已知甲乙的速度為$\frac{1}{x},\frac{1}{y}$，將甲乙相遇點與起點的距離除以速度即為相遇時間$\frac{y'}{x'+y'}\times\frac{\mathrm{j}-1}{n}\div\frac{1}{x}=\frac{x\times y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}$。

已知甲從起點出發後，令$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$、$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$，甲乙接連兩次相遇間隔$\frac{y'}{x'+y'}-\left[\left|\frac{y'}{x'+y'}\right|\right]$圈，因此在第$i$次相遇時，甲所行走的距離為$(\mathrm{i}-1)\times\left(\left[\frac{y'}{x'+y'}\right]\right)+\frac{y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}$，假設甲乙再相遇$\mathrm{i}+1$次後，便在正n邊形頂點上相遇，則$\mathrm{f}(\mathrm{i}+1)$為整數，故$\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times\left(\frac{y'}{x'+y'}+\frac{y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}-\left[\frac{y'}{x'+y'}+\frac{y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}\right]\right)=\mathrm{f}(\mathrm{i}+1)$為整數時，i有最小正整數解，因此若甲乙會在正n邊形相遇，則會在相遇i次時，於正n邊形頂點上相遇，而當$\mathrm{f}(\mathrm{i}+1)=\mathrm{n}\times\mathrm{i}\times(\frac{y'}{x'+y'}+\frac{y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}-\left[\frac{y'}{x'+y'}+\frac{y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}\right])$且$\mathrm{f}(\mathrm{i}+1)$為整數時，$\mathrm{i}\times\mathrm{n}\equiv1-\mathrm{j}\ \left(\mathrm{mod}\ \frac{\mathrm{x}'+\mathrm{y}'}{k}\right)$，$\mathrm{gcd}(\mathrm{ny}',\mathrm{x}'+\mathrm{y}')=\mathrm{k}$

三、初步研究結果

（一） 甲乙在起點相同且甲乙相同方向

令$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$、$\mathrm{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$，當$\mathrm{i}=\frac{\mathrm{bc}-\mathrm{ad}}{k}$時，甲乙會在第i次相遇時，首次在正n邊形頂點上相遇，甲乙第一次相遇在正多邊形頂點上所需時間為$\frac{\mathrm{i}\times\mathrm{x}\times\mathrm{y}}{|x-y|}$，位置為$\mathrm{A}_{f(i_{min})}$

（二） 甲乙在起點相同且甲乙不相同方向

將x：y 化簡為最簡整數比$x':y'$，當$i=\frac{x'+y\prime}{k}$時，甲乙會在第i次相遇時，首次在正n邊形頂點上相遇。甲乙第一次相遇在正多邊形頂點上所需時間為$\frac{i_{min}\times x\times y\prime}{x'+y\prime}$，位置在$A_{f(i_{min})}$

（三） 甲乙在不同起點且甲乙同方向

（1）$x > y$

當i為滿足 $in \equiv (1-j)\ (mod \left|\frac{bc-ad}{k}\right|)$，$k = gcd\ (bc-ad, nbc)$的最小值時

則$A_{n\times f(i+1)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的相遇點，$i\times\frac{x\times y}{x-y}+\frac{x\times y\times(n-j+1)}{n\times(x-y)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的時間。

（2）$x < y$

當i為滿足 $in \equiv (j-n-1)\ (mod \left|\frac{bc-ad}{k}\right|)$，$k = gcd\ (bc-ad, nbc)$的最小值時

則$A_{n\times f(i+1)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的相遇點，$i\times\frac{xy}{y-x}+\frac{x\times y\times(n-j+1)}{n\times(y-x)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的時間。

（四） 甲乙在不同起點且甲順時鐘方向乙逆時鐘方向

（1）$x > y$

當i為滿足 $i\times n\equiv 1-j\ (\mathrm{mod}\,\frac{x'+y'}{k})$，$\gcd(ny',x'+y')=k$的最小值時

則$A_{n\times f(i+1)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的相遇點，$i\times\frac{xy'}{x'+y'}+\frac{x\times y'\times(j-1)}{n\times(x'+y')}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的時間

（2）$x<y$

當i為滿足 $i\times n\equiv j-1-n\ (\mathrm{mod}\,\frac{x'+y'}{k})$，$k=\gcd(bc-ad,nbc)$的最小值時

則$A_{n\times f(i+1)}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的相遇點，$i\times\frac{xy'}{x'+y'}+\frac{x\times y'\times(n-j+1)}{n\times(x'+y')}$為甲乙第一次在正n邊形頂點上的時間。

肆、 討論

在過去討論相關的範疇只有在圓上兩人的相遇，且都是特定數值的解，本研究以在甲乙不限定在點上相遇的方式，討論了在正n邊形的相遇，在未來三月之內，我希望可以完成多邊形以及不限人數的討論，且我希望在未來可以找到此研究的應用方式。

伍、 參考資料及其他

永春高中數學科（2022）。階城盃第 45 期。台北市:永春高中數學科教學研究會出版。

- 清涼油.（2020, December 15). 行程問題之一相遇問題. 行程問題之一相遇問題 - 人人焦點. https://ppfocus.com/0/ed8615556.html

【評語】010031

本作品研究兩人沿著多邊形等速前進之相遇時間及地點，兩人起點可以相同也可以不同，方向可以相同或相反。這幾種討論情況都過於簡單，所得到的結果也僅僅只是將相對速度、相對距離將相遇地點的圓上座標以公式表達，再問看看是否可以表示成為邊長的整數倍。在將題目轉譯成數學式子之後，作者並未再將公式化簡或分析。建議未來可以研究有多人在繞行，同時相遇或兩兩相遇的時間地點，讓問題變得有趣。