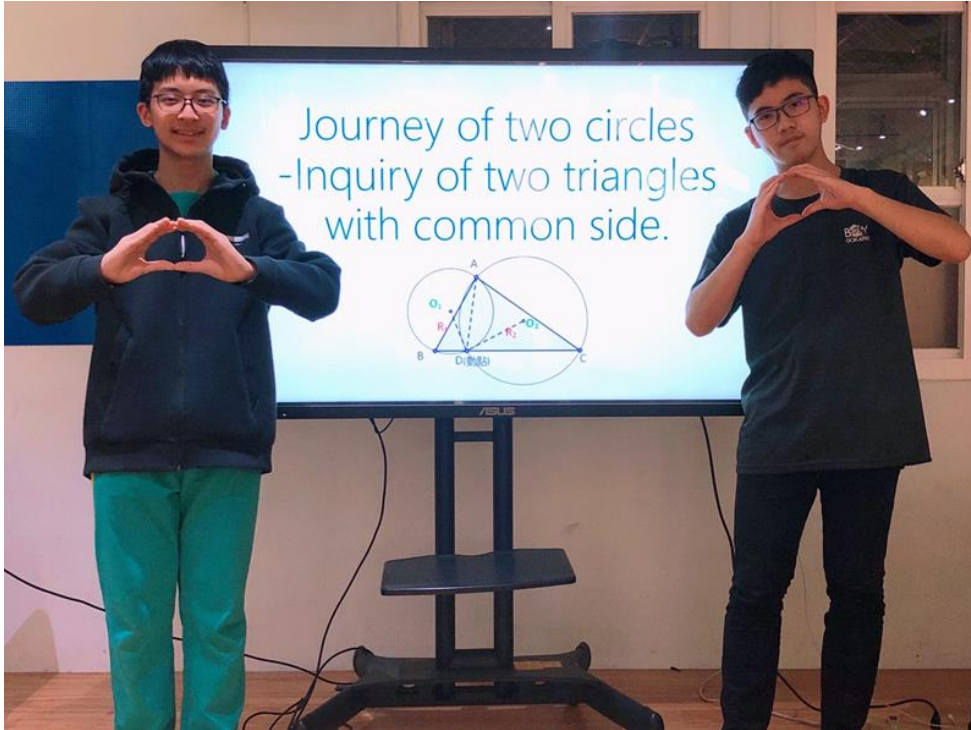


2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010021
參展科別	數學
作品名稱	雙圓記-探究共邊三角形的外接圓 Journey of two circles -Inquiry of two triangles with common side.
得獎獎項	四等獎
就讀學校	國立彰化高級中學 彰化縣立彰興國民中學
指導教師	賴姵伶、徐可昕
作者姓名	陳偉群、鐘清元
關鍵詞	<u>共邊三角形、外接圓、圓錐曲線</u>

作者簡介



作者一：

我是陳偉群，為彰化高中科學班的學生。國中開始，我便投入大量的時間和精力在數學的科展、獨立研究、和其他數學相關的領域上。即使上了高中，也絲毫不減我對數學的熱愛。在製作科展的期間，團隊合作、口語表達、對數學的認識，都隨著研究的進度成長。

這次很榮幸可以參加國際科展，一路以來不是只有我們的努力，還有許多老師、教授，對我們的細心指導。科展帶給我的，不是只有數學上的提升，還有與老師同學一起研究的珍貴回憶。

作者二：

我是鐘清元，是彰化縣立彰興國中數資班的學生。國中剛入學，我便開始專注意力來進行數學方面的競賽及獨立研究，即使現在國三了，即將面臨升學，仍不減

我對數學的熱情。與隊友一起製作科展期間，讓我增進了溝通能力、堅持到底的決心，以及對數學知識的見聞。

這次得以一路晉升台灣國際科展的殿堂，並不單只靠我們的堅持與努力。老師與教授的建議與教導、家人給我的支持、以及朋友給我的鼓勵，才讓我們有了能夠一展長才的機會。從縣賽到國際，科展在我心中並不只有數學方面的斬獲，還有與大家討論與集思廣益的歡快回憶。

Abstract

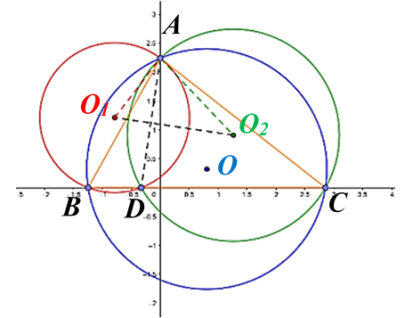
We partition a triangle into two triangles, and form circumcircles of two triangles.

The main findings of the study were as follows.

1. The existence of relation of specific triangles.

(1) If $\triangle ABC$ is an isosceles triangle and $\overline{AB} = \overline{AC}$,
the circumcenter O_2 of the triangles $\triangle CBD$ lies on
the circumscribed circle of the $\triangle CAD$.

(2) If $\triangle ABC$ is an isosceles triangle and $\overline{AB} = \overline{AC}$,
the circumcircles of $\triangle ABD$ and $\triangle ACD$ are congruent.



2. The function relation and trajectory.

(1) $(R_1 + R_2)$ is a function of the x -coordinate of D , and the graph is a branch of hyperbola.

When $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $(R_1 + R_2)$ have a minimum $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$.

(2) The length of $\overline{O_1O_2}$ is a function of the x -coordinate of D , and the graph is a branch of hyperbola.

(3) When D is moving on \overline{BC} , the middle point E of $\overline{O_1O_2}$ will lie on the same line,

which is $-(b + c)x + 2ay + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0$.

(4) When D is moving on \overline{BC} , each line of the centers $\overline{O_1O_2}$ is tangent to the same parabola,

whose equation is $y = \frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2}$.

3. The systemic relation between category of triangles and area of circumcircles of triangles.

Type of \triangle	$\angle A < 90^\circ$	$\angle A = 90^\circ$	$\angle A > 90^\circ$
$(O_1 + O_2) = O$ The number of the positions of D	0	1	2
$(O_1 + O_2)$ vs. O Area relation	>	> or =	>, = or <

4. Invariant of geometric.

(1) From specific triangles to each triangle, we found $R_1 : R_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$.

(2) Using $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$, we found A, O, O_1 , and O_2 are concyclic.

5. The relation between original figures and generative figures.

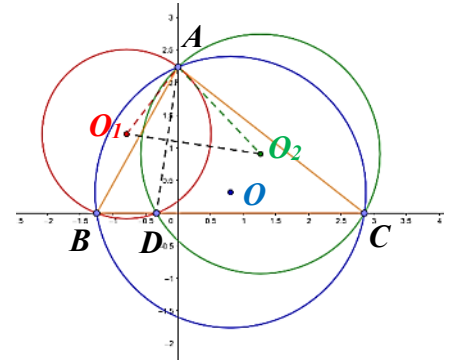
(1) When D is moving on \overline{BC} , the parabola who takes A as focus and \overline{BC} as directrix is the envelop of the line of the centers $\overline{O_1O_2}$.

(2) When D is moving on \overline{BC} , If the distance from A to \overline{BC} is the same for each triangle, no matter where A, B , and C are, the parabola which is the envelop of $\overline{O_1O_2}$ is the same.

(3) When D is moving on \overline{BC} , point E which is the middle point of $\overline{O_1O_2}$ will lie on the same line which the perpendicular bisector of \overline{AD} when D is the middle point of \overline{BC} .

摘要

這是一個歷時兩年半鑽研兩共邊三角形外接圓各種有趣關係的探究之旅，透過 *GeoGebra* 的輔助，經由(1)觀察圖形及數據形成猜想(2)幾何論證猜想為真的探究歷程。



我們首先探討兩共邊三角形外接圓的圓心位置、半徑、半徑和及連心線的關係，發現並證明出等腰三角形中圓心位置具特殊性、兩外接圓半徑和 $R_1 + R_2$ 與連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的長度都跟動點 D 的 x 坐標呈現函數關係且圖形為雙曲線的一支；據此討論出兩外接圓面積和與原三角形外接圓面積關係，同時發現 $\triangle AO_1O_2 \sim \triangle ABC$ 且 AO_1OO_2 四點共圓。在研究連心線時也發現，當動點 D 移動時， $\overline{O_1O_2}$ 的中點形成一條直線；每條連心線皆與以頂點 A 為焦點， \overline{BC} 為準線的拋物線相切。最後得出若任意 $\triangle ABC$ 的頂點 A 到 \overline{BC} 的距離相等，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所包絡出的拋物線皆全等。

壹、研究動機

原本單純好奇如果將三角形一分為二，各自做出外接圓，會出現什麼有趣的關係，而開始了我們對共邊三角形外接圓的第一次研究。「咦～好像是雙曲線耶」，沒想到從繪圖模擬的圖形驚喜的發現兩半徑和與動點 x 坐標存在的函數關係，也因為這個函數關係，啟發原本遇上瓶頸的我們，接著對外接圓面積進行探討。一路前進到鈍角三角形時，發現共邊三角形外接圓面積和與原外接圓間存在不同關係，再次卡關在如何確定這不同的關係。

然而，關於鈍角三角形的未解問題實在讓人很想一探究竟，除此之外，就像水龍頭被打開，問題帶來新的問題，我們好奇的想繼續探究共邊三角形外接圓的連心線，看看還有沒有什麼特殊的關係尚未被發現，懷著探險挖寶的心情，開啟了「雙圓記」的篇章。

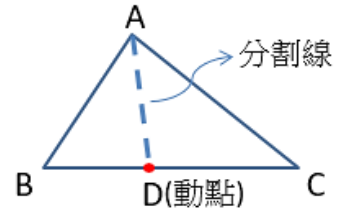
貳、研究目的

一、名詞解釋

為了溝通上的簡潔及順暢，我們將研究中會使用到的幾何描述先形成共識，方便討論，各種名詞說明如下：

- (一) **動點**：本研究是以三角形某一頂點與其對邊上的任意一點（不含 B 、 C ）相連做為分割線，將原三角形分割成兩個三角形，因為對邊上的這一點可以任意更動位置，將其稱為動點，如圖一中的 D 點（移動區間為 B 、 C 兩點之間）。

圖 2-1-1 共邊三角形示意圖



- (二) **分割線**：將三角形某一頂點與其對邊上的任意一點（不包含 B 、 C ）相連，可分割原三角形成為兩個三角形，此連線稱為分割線，如圖一中的 \overline{AD} 。
- (三) **共邊三角形**：將三角形某一頂點與其對邊上的任意一點（不包含 B 、 C ）相連，分割原三角形成為兩個三角形，這兩個三角形因為共用一個邊（此共用邊就是分割線），稱這兩個三角形為共邊三角形，如圖一中的 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 即為共邊三角形。




二、文獻探討

(一) 外心

國中數學第五冊介紹到三角形的外心、內心及重心，其中外心指的是三角形外接圓的圓心。三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，若以三角形的外心為圓心，外心到頂點的距離為半徑畫圓，則三頂點會落於此圓上，此圓即為三角形的外接圓。

任意三角形都有外心，其位置則因三角形種類不同而有所不同。當三角形為銳角三角形時，外心在三角形內部；當三角形為直角三角形時，外心在三角形的斜邊中點；當三角形為鈍角三角形時，外心在三角形外部。

表 2-2-1 三角形外心位置

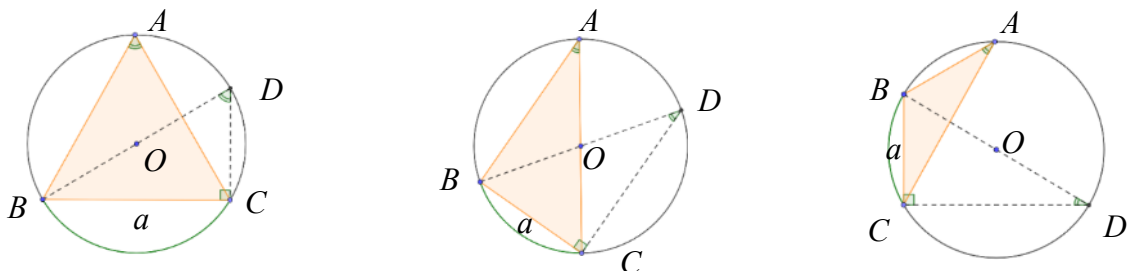
		
銳角三角形	直角三角形	鈍角三角形

(二) 外接圓半徑

在國中階段，當三角形為直角三角形時，因為外心在三角形的斜邊中點，所以很容易得知其外接圓半徑為斜邊的一半，然而銳角三角形及鈍角三角形則不好討論。

老師建議我們可以透過自主學習與小組討論先認識高中三角函數單元裡的正弦定理，發現有了正弦定理對於求出任意三角形的外接圓半徑真是如虎添翼。正弦定理是指在一個三角形中，各邊和它所對角的正弦的比值相等，可以用底下的數學式表示。

表 2-2-2 正弦定理

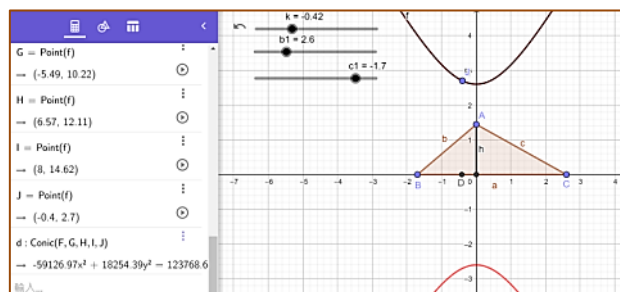
正弦定理
若 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊邊長分別為 a 、 b 、 c ，且 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R ， 則 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$


有了正弦函數後，所有三角形的外接圓半徑都能求出，對於我們探討共邊三角形外接圓的關係真是太重要了。

(三) GeoGebra 數學軟體

華羅庚曾說：「數缺形時少直覺，形缺數時難入微」，我們利用 *GeoGebra* 這個數學軟體的協助發揮數與形的優勢，分析經過系統化分類的 30 種共邊三角形的外接圓，這個軟體能顯示圖形中的幾何量，也能根據設定的參數數據模擬出可能的函數圖形，成為我們尋找關係的得力助手。

圖 2-2-1 *GeoGebra* 數學軟體



(四) 歷屆科展相關研究

在尋找研究靈感時，我們先觀摩歷屆科展作品，第 51 屆高中組的作品一共邊三角形的內切圓，吸引了我們目光。這個研究是從一道很常見的求直角三角形內切圓半徑的題目出

發，把三角形一分為二，再分別做出內切圓，去探討內切圓半徑間的關係。這讓我們很驚訝，原來平常常見的數學題，只要增加一點改變，就可能是很有意思的研究主題。因為這份作品的啟發，加上看到內心很自然想到外心，於是決定看看共邊三角形外接圓是不是也能有什麼新的發現。

決定好研究主題，先搜尋了是否有相關的研究成果可以參考，發現歷屆全國科展有以下 4 件作品主題是關於三角形的五心：

表 2-2-3 歷屆相關科展整理

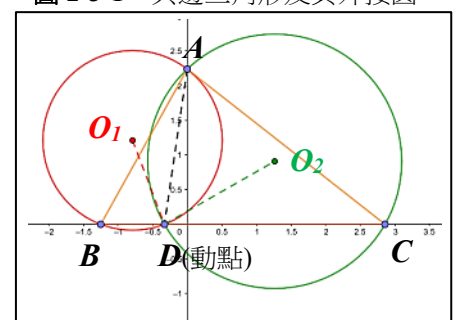
屆數	學習階段	主題	摘要	與研究問題相關之處
51	高中組	共邊三角形的內切圓	研究共邊三角形的內切圓半徑間的關係，以及何時內切圓半徑和呈最大值，並將此性質推廣到多圓的情形。	對共邊三角形內切圓的半徑關係
55	高中組	環「徑」變遷	探究一三角形與圖形內動點連成的各三角形外接圓半徑與原三角形外接圓半徑的關係，並找出各種三角形中的半徑和最小值與動點位置	三角形外接圓半徑與動點位置的關係
58	國中組	用“心”	探索任意三角形建構的旁心連線三角形、旁心三角形、及其向外做的正三角形五心、原三角形五心和兩者面積之間的關係。	三角形向外做三個相似三角形，各種不同心之連線三角形與外做三角形相似的情形。
61	國中組	圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究	討論給定任意圓內接三角形，如何在其三邊的延長線上分別取一點，使得這兩兩點的連線（共三條直線）都與圓相切	對於任意圓內接三角形，給出構造圓外切三角形的作圖方法

第 55 屆環「徑」變遷是尋找三角形與圖形內動點連成的三個三角形外接圓半徑與原三角形外接圓半徑的關係，然而當動點放置於邊上時，形成兩個共邊三角形外接圓的情況並未進行深入全面的探討，這讓我們更想去探尋這個尚未被深究的區塊。

三、研究問題

確立好研究主題之後，開始了長達兩年半的研究。起初我們主要探討兩個共邊三角形外接圓的圓心位置，半徑及半徑和的關係，設定(一)到(四)這四個研究問題，完成研究報告—外心狂想曲，並且參加縣賽。好奇心被激發的我們，還想繼續挑戰當時還無法

圖 2-3-1 共邊三角形及其外接圓



解決的問題，決定以更符合研究主題的「雙圓記」為名，並且把我們的研究焦點延伸到共邊三角形外接圓的連心線，增加(五)到(八)這四個研究問題，使探究共邊三角形外接圓的研究更為完整。

研究對象的條件設定是：給定任意 $\triangle ABC$ ，動點 D 在 \overline{BC} 上，連接 \overline{AD} ， $\triangle ABD$ 外接圓 O_1 ，半徑 R_1 ， $\triangle ACD$ 外接圓 O_2 ，半徑 R_2 。透過繪圖軟體的助攻，我們要探究的問題如下：

- (一) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓圓心 O_1 與 O_2 的位置關係。
- (二) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 與 R_2 的關係。
- (三) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 、 R_2 與邊長的關係。
- (四) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑和 R_1+R_2 的最小值。
- (五) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係。
- (六) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 長度的變化。

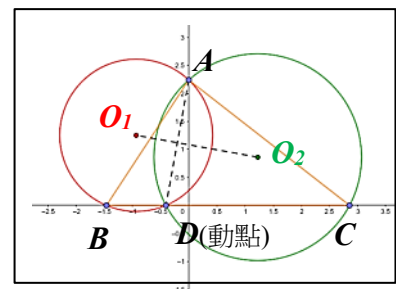
- (七) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 中點的軌跡圖形。

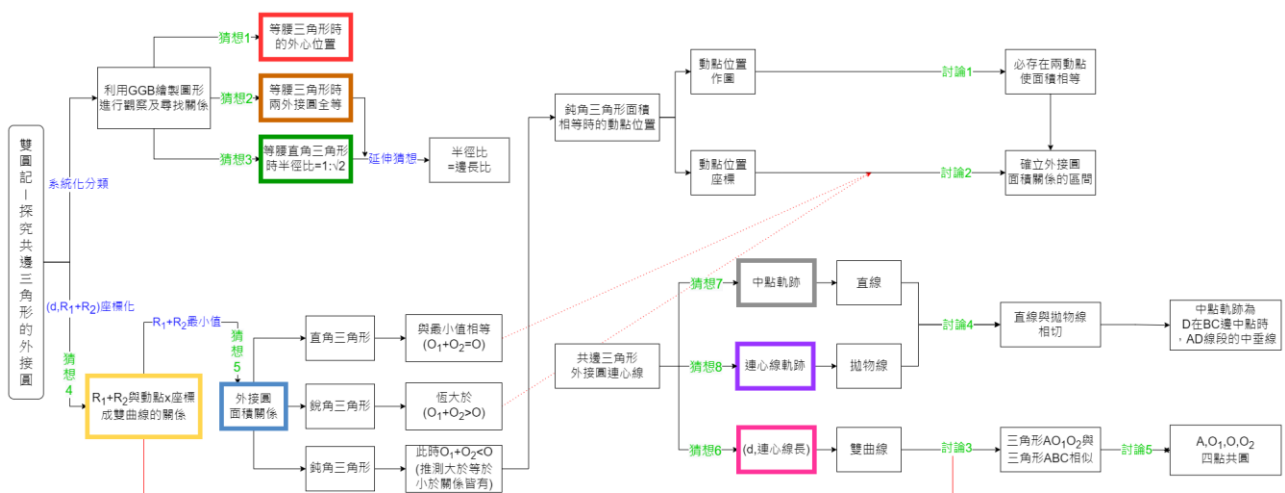
- (八) 探討任意三角形中，動點 D 移動時，

共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 包絡出的圖形。

圖 2-3-2 共邊三角形連心線示意圖



四、研究地圖



參、研究設備及器材

電腦、GeoGebra 數學軟體、紙筆、尺、圓規

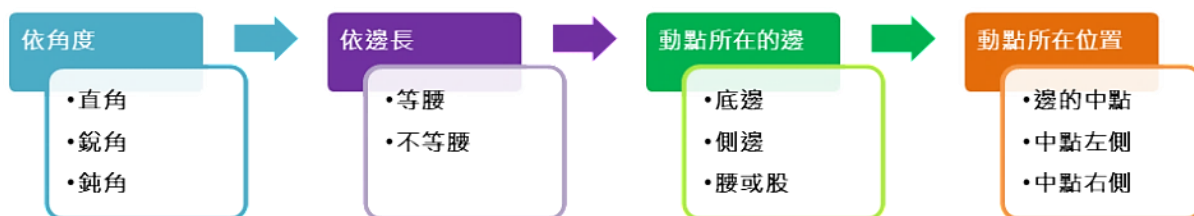
肆、研究過程或方法

一、共邊三角形系統化分類

我們決定先透過 *GeoGebra* 數學軟體（後續簡稱 *GGB*）的幫助，繪圖觀察共邊三角形外接圓可能存在的關係，為了有系統地探討，將需要繪製外接圓的共邊三角形進行分類。

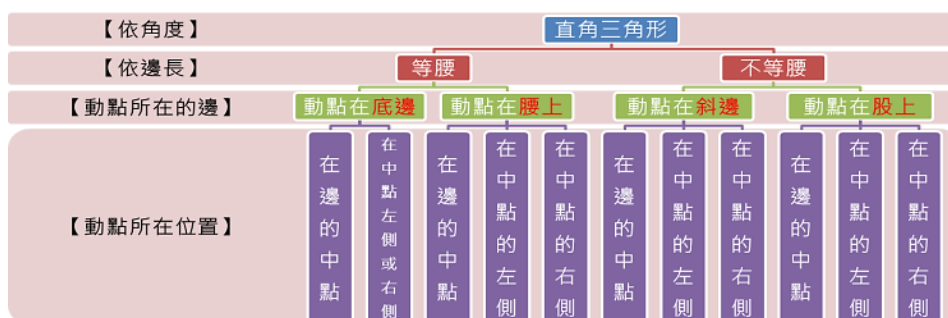
因為在直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形時，三角形的外心分別位於斜邊中點、三角形內部、三角形外部，故先依角度將三角形分成三大類，再依邊長關係分為等腰與不等腰。區分出三角形種類後，再依動點所在位置，進行更細的分類，分類流程圖如下所述：

圖 4-1-1 三角形分類流程圖



(一) 直角三角形

圖 4-1-2 直角三角形繪圖分類情形



仔細思考，發現有些情況是重複的。如果依等腰或不等腰、動點可能落於三個邊以及動點在邊上中點或左側或右側這三種可能的位置，光是直角三角形就會有 $2 \times 3 \times 3 = 18$ 種情況，依此類推到銳角三角形及鈍角三角形，總共將出現 54 種需要考慮的情況。

不過，以具備「等腰」的條件來說，因為左右對稱，動點在左邊的腰上或右邊的腰上，其實圖形的關係是相同的，如下圖左；同樣的，動點是在底邊中點的左側或者右側，也具有相同的圖形關係，如下圖右。因此在分類流程圖中就將其合併，避免重複，讓訊息更為簡潔。

在直角三角形中，即使不具等腰的條件，動點在兩股上的情況也會相同，所以精簡之後只有 11 種需要繪製的情況。

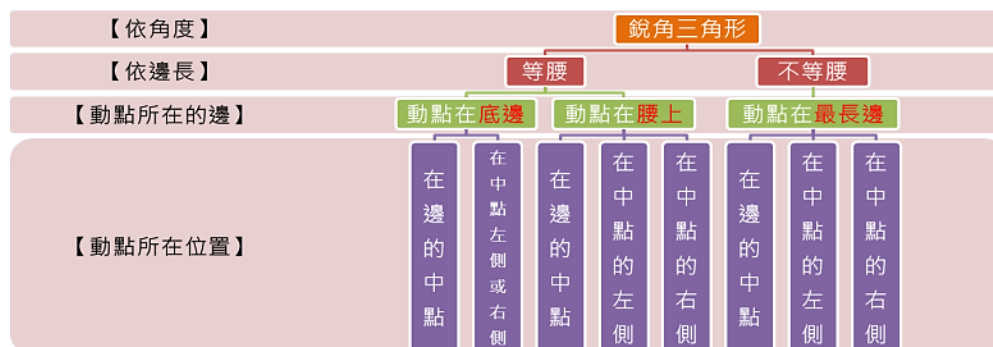
表 4-1-1 等腰三角形繪圖重複情形範例

動點在左邊的腰上或右邊的腰上	動點在底邊中點的左邊或者右邊
【圖左】	【圖右】

(二) 銳角三角形

遵循前述的原則，銳角三角形時，不論動點在哪一個邊上，圖形會具備相同的關係，於是留下動點放在最長邊的情況，只需繪製 8 種情況的三角形。

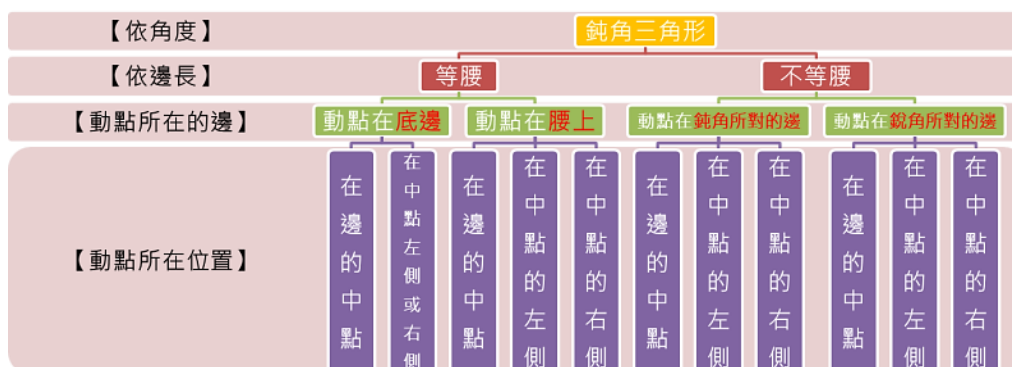
圖 4-1-3 銳角三角形繪圖分類情形



(三) 鈍角三角形

鈍角三角形時，會有兩個銳角所對的邊，當動點在這兩個邊上時，圖形會具備相同的關係，於是將動點分為放在鈍角所對的邊及銳角所對的邊這兩種情況，再加上動點是位於邊的中點或中點左側或中點右側，需繪製 11 種情況的三角形。

圖 4-1-4 鈍角三角形繪圖分類情形



依照這樣的方式，最後全部需要繪製的圖形，從 54 種大大縮減為 $11+8+11=30$ 種。

二、探究共邊三角形的外接圓

我們利用 *GGB* 畫出上述 30 種分割方式所形成的共邊三角形及其外接圓，除了觀察圖形，同時記錄外接圓半徑及面積的數據，進一步輔助關係的發現。此外，當動點在中點的左側及右側時，再各取了三組動點在不同位置的數據，增加尋找關係的線索。

表 4-2-1 實際繪圖及數據收集表

鈍角 不等腰							
動點在 AC 上				動點在 AC 上			
位置	半徑			圓面積			關係
	r_1	r_2	R	O_1	O_2	O	
中點	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	$O_1 < O_2 < O$
中點左	2.83	3.61	5.1	25.13	40.84	81.68	離 B 點越近 面積和先變小 再變大
	2.92	3.72	5.1	26.7	43.39	81.68	
	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	
中點右	3.16	4.03	5.1	31.42	51.05	81.68	離 C 點越近 面積和越大
	3.54	4.51	5.1	39.27	63.81	81.68	
	4	5.1	5.1	50.27	81.68	81.68	

紀錄表中我們統一將原三角形的外接圓稱為 O ，半徑 R ，共邊三角形則分為左右來看，左邊的三角形外接圓稱為 O_1 ，半徑 R_1 ，右邊的三角形外接圓稱為 O_2 ，半徑 R_2 。根據 *GGB* 所畫出的圖形以及收集到的數據，我們猜測共邊三角形的外接圓可能存在以下幾種特殊關係，並透過幾何證明論證猜想為真，分述如後：

(一) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓圓心 O_1 與 O_2 的位置關係

1. 觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-2 等腰三角形其共邊三角形外接圓圓心位置觀察

<p>等腰直角三角形 含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心 O_2 含頂角之 $\triangle CAD$ 外接圓圓心 O_1 O_2 落於圓 O_1 (藍色圓) 上</p>	<p>等腰銳角三角形 含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心 O_2 含頂角之 $\triangle CAD$ 外接圓圓心 O_1 O_2 落於圓 O_1 (藍色圓) 上</p>	<p>等腰鈍角三角形 含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心 O_2 含頂角之 $\triangle CAD$ 外接圓圓心 O_1 O_2 落於圓 O_1 (藍色圓) 上</p>

從圖形可以明顯看出，上圖中三個不同種類的等腰 $\triangle ABC$ ，其共邊三角形外接圓的圓心位置具有特殊性，含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心 O_2 落於含頂角之 $\triangle CAD$ 外接圓 O_1 上。

2.幾何論證猜想為真

命題 1.1：任意等腰 $\triangle ABC$ ，動點 D 位於其中一腰 \overline{AB} ，連接 \overline{CD} ，含頂角之 $\triangle CAD$ 外接圓
圓心為 O_1 ，含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心為 O_2 ，則 O_2 落於圓 O_1 上

【證明】

假設有一等腰 $\triangle ABC$ ，頂角為 $\angle A$ ， \overline{AB} 及 \overline{AC} 為其兩腰，
 \overline{AB} 上有一動點 D ，連接 \overline{CD} ，分割出共邊 $\triangle CAD$ 及 $\triangle CBD$

1⁰ 作 $\triangle CAD$ 的外接圓

取 \overline{AD} 的中點 N ，過 N 作 \overline{AD} 的中垂線 L_1 ，與 \overline{CD} 中垂線 L_2 相交於 O_1 點，圓 O_1 即為 $\triangle CAD$ 的外接圓，半徑為 R

2⁰ 證明圓 O_1 上的 P 點即為 $\triangle CBD$ 外接圓之圓心 O_2

\overline{CD} 中垂線 L_2 過 O_1 點，交圓 O_1 於 P 點

過 P 點作平行 L_1 之直線 L_3 ，交 \overline{AB} 於 M

假設 $\overline{AD} = n$ ， $\overline{BD} = m$ ，圓 O_1 半徑 = R ， $\angle ADC = \theta^\circ$

在 $\triangle CAD$ 中，根據正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin\theta^\circ} = \frac{m+n}{\sin\theta^\circ} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{2R} = \sin\theta^\circ$$

在 $\triangle EPO_1$ 中，若 $\overline{O_1E} \perp L_3$

$$\Rightarrow \overline{O_1E} = R \cdot \sin\theta^\circ = R \cdot \frac{m+n}{2R} = \frac{m+n}{2}$$

$$\therefore \overline{DM} = \overline{MN} - \overline{DN} = \overline{O_1E} - \overline{DN} = \frac{m+n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{m}{2}$$

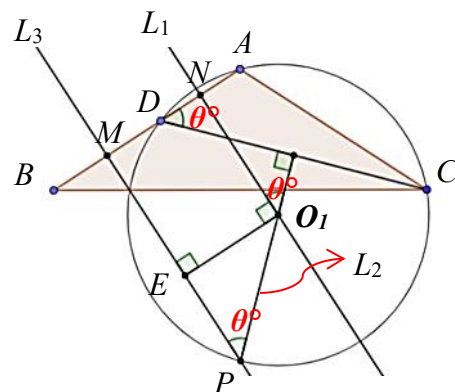
$\therefore M$ 為 \overline{BD} 的中點 $\Rightarrow L_3$ 為 \overline{BD} 的中垂線

$\Rightarrow P$ 為 $\triangle CBD$ 兩邊中垂線 L_2 及 L_3 交點

故 P 點為 $\triangle CBD$ 外接圓之圓心 O_2

由 **1⁰** 及 **2⁰** 的結果可知，等腰 $\triangle ABC$ 中，當動點 D 位於腰上，則含底角之 $\triangle CBD$ 外接圓圓心 O_2 會落在含頂角之 $\triangle CAD$ 的外接圓上。

圖 4-2-1 等腰三角形之共邊三角形
外接圓圓心位置證明



(二) 探討等腰三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 與 R_2 的關係

1. 觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-3 等腰三角形之共邊三角形外接圓半徑觀察

<p>等腰直角三角形 $R_1 = 2.99 = R_2$</p>	<p>等腰銳角三角形 $R_1 = 2.71 = R_2$</p>	<p>等腰鈍角三角形 $R_1 = 2.64 = R_2$</p>

從圖形及數據可以明顯看出，上圖中三個不同種類的等腰 $\triangle ABC$ ，頂角 $\angle A$ 的頂點與底邊上的動點 D 連線，分割出共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ ，其外接圓 O_1 （藍色圓）與 O_2 （綠色圓）的半徑相等，顯示兩圓全等。

2. 幾何論證猜想為真

命題 2.1：任意等腰 $\triangle ABC$ ，當動點 D 位於底邊 BC 上，連接 AD ，共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的外接圓半徑 $R_1 = R_2$ ，即外接圓全等

【證明】

給定等腰 $\triangle ABC$ ，頂角為 $\angle A$ ， \overline{AB} 及 \overline{AC} 為其兩腰

\overline{BC} 上有一動點 D ，連接 \overline{AD} ，分割出共邊 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$
 $\triangle ABD$ 外接圓 O_1 ，半徑 R_1 ， $\triangle ACD$ 外接圓 O_2 ，半徑 R_2

根據正弦定理，

$$R_1 = \frac{\overline{AB}}{2\sin \angle ADB}, R_2 = \frac{\overline{AC}}{2\sin \angle ADC}$$

$$\text{若 } \angle ADC = \theta^\circ \Rightarrow \angle ADB = (180 - \theta)^\circ$$

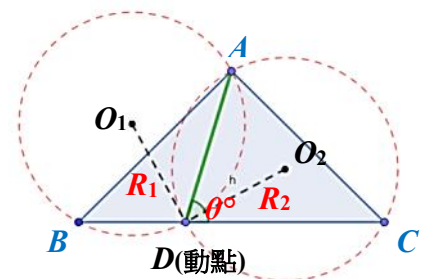
$$\Rightarrow \sin \angle ADC = \sin \theta^\circ = \sin (180 - \theta)^\circ = \sin \angle ADB$$

$$\text{又 } \because \overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\therefore R_1 = \frac{\overline{AB}}{2\sin \angle ADB} = \frac{\overline{AC}}{2\sin \angle ADC} = R_2$$

故兩個共邊三角形的外接圓全等得證

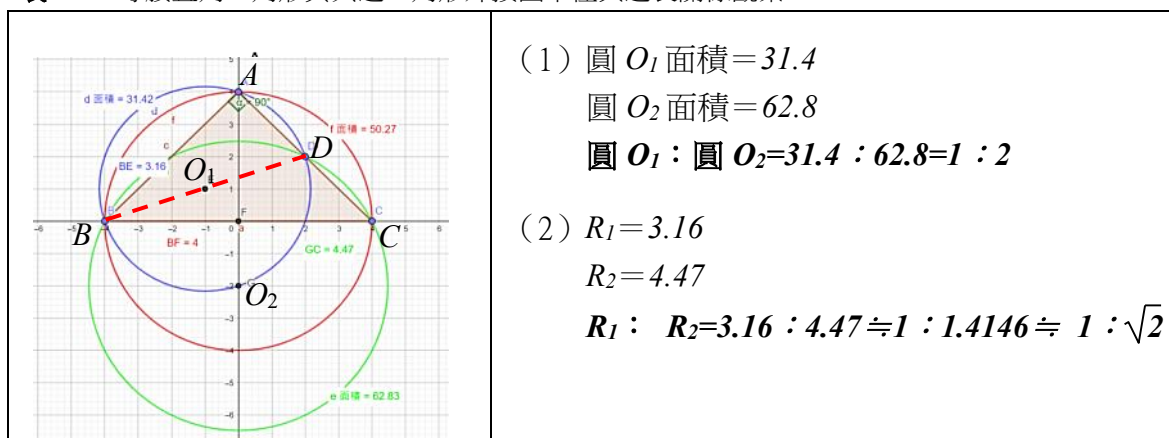
圖 4-2-2 等腰三角形共邊三角形外接圓半徑相等證明



(三) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑 R_1 、 R_2 與邊長的關係

1. 觀察圖形及數據形成猜想

表 4-2-4 等腰直角三角形其共邊三角形外接圓半徑與邊長關係觀察



上圖直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，斜邊為 \overline{BC} ，動點 D 在其中一股 \overline{AC} 上，紅色虛線 \overline{BD} 為分割線， $\triangle BAD$ 與 $\triangle BCD$ 為共邊三角形。從圖形及數據可以明顯看出， $\triangle BCD$ 的外接圓 O_2 (綠色圓) 面積為 $\triangle BAD$ 的外接圓 O_1 (藍色圓) 面積的 2 倍，半徑亦呈現 $\sqrt{2}$ 倍。

2. 幾何論證猜想為真

命題 3.1：等腰直角 $\triangle ABC$ ，動點 D 位於其中一股 \overline{AC} ，連接 \overline{BD} ，共邊 $\triangle BAD$ 與 $\triangle BCD$ 的外接圓圓 O_1 面積：圓 O_2 面積 = 1 : 2，半徑 $R_1 : R_2 = 1 : \sqrt{2}$

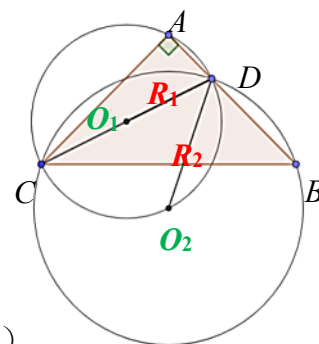
【證明】

假設等腰直角 $\triangle ABC$ ，頂角 $\angle A = 90^\circ$ ， \overline{AB} 及 \overline{AC} 為其兩股， \overline{AB} 上有一動點 D ，連接 \overline{CD} ，分割出共邊 $\triangle CAD$ 及 $\triangle CBD$ ， $\triangle CAD$ 外接圓稱為 O_1 ，半徑 R_1 ， $\triangle CBD$ 外接圓稱為 O_2 ，半徑 R_2 根據正弦定理，

$$R_1 = \frac{\overline{CD}}{2\sin \angle CAD}, R_2 = \frac{\overline{CD}}{2\sin \angle CBD}$$

$$\Rightarrow R_1 : R_2 = \frac{\overline{CD}}{2\sin 90^\circ} : \frac{\overline{CD}}{2\sin 45^\circ} = 1 : \sqrt{2} \text{ 得證 (面積比 = 1 : 2 亦得證)}$$

圖 4-2-3 等腰直角三角形之共邊三角形外接圓半徑與邊長關係



延伸猜想 因為 $R_1 : R_2 = 1 : \sqrt{2}$ ，同時 $\overline{AC} : \overline{BC}$ 也是 $1 : \sqrt{2}$ ，加上 (一) 及 (二) 所描述的關係及證明過程，進一步聯想到，應該對於任意三角形，共邊三角形外接圓的半徑比都會與動點所對的兩個邊長比相等，形成新的猜想，並加以證明。

命題 3.2：對於任意 $\triangle ABC$ ，頂角為 $\angle A$ ，底邊 BC 上有一動點 D ，連接 AD ，分割出共邊三角形 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ ， $\triangle ABD$ 外接圓半徑 R_1 ， $\triangle ACD$ 外接圓半徑 R_2 。

則 $R_1 : R_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 。

【證明】

根據正弦定理， $R_1 = \frac{\overline{AB}}{2\sin \angle ADB}$ ， $R_2 = \frac{\overline{AC}}{2\sin \angle ADC}$

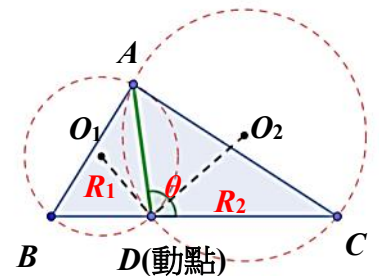
若 $\angle ADC = \theta^\circ \Rightarrow \angle ADB = (180 - \theta)^\circ$

$\Rightarrow \sin \angle ADB = \sin \theta^\circ = \sin (180 - \theta)^\circ = \sin \angle ADC$

$R_1 : R_2 = \frac{\overline{AB}}{2\sin \angle ADB} : \frac{\overline{AC}}{2\sin \angle ADC} = \overline{AB} : \overline{AC}$

故 $R_1 : R_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 得證

圖 4-2-4 任意三角形之共邊三角形外接圓半徑與邊長關係

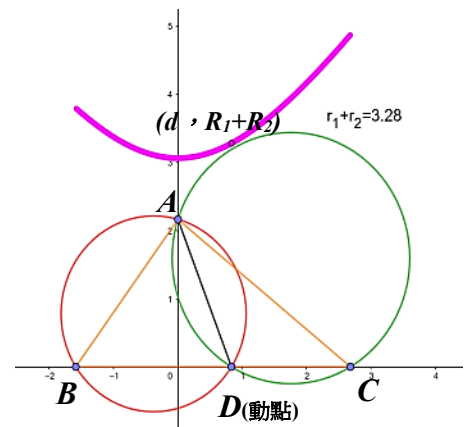


(四) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓半徑和 $R_1 + R_2$ 的最小值

1. 觀察圖形及數據形成猜想

在觀察共邊三角形外接圓圓心的關係及外接圓半徑與邊長的關係時，發現移動 D 點時，兩個外接圓會跟著變大或變小，於是突發奇想，將 D 點的 x 坐標與外接圓半徑和寫成數對 $(d, R_1 + R_2)$ ，繪製在坐標平面上，意外發現呈現曲線的關係，大家都覺得很驚喜！

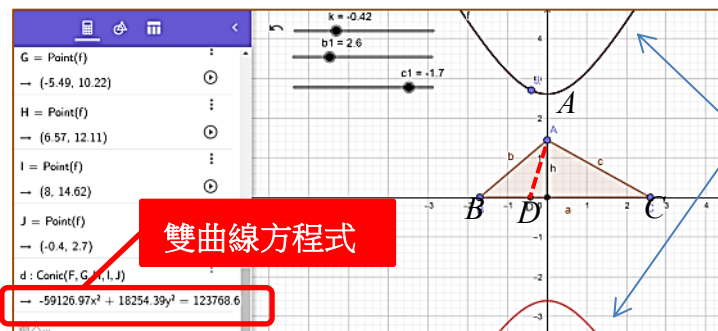
圖 4-2-5 $(d, R_1 + R_2)$ 軌跡圖



不過，這究竟是哪一種曲線呢？我們運用 *GGB* 五點模擬的功能，在圖中紫色的曲線上選取五點，結果模擬出

圖 4-2-6 雙曲線的圖形，為了確定 d 與 $(R_1 + R_2)$ 真的是呈現雙曲線一支的關係，我們進行了將坐標關係函數化來加以確認的證明。

圖 4-2-6 五點模擬 d 與 $(R_1 + R_2)$ 關係



2.幾何論證猜想為真

命題 4.1：對於任意 $\triangle ABC$ ，將 A 點置於 y 軸， BC 置於 x 軸， BC 上的動點 D 坐標設為

$(d,0)$ ，連接 \overline{AD} ，分割出兩個共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ ， $\triangle ABD$ 外接圓半徑 R_1 ， $\triangle ACD$ 外接圓半徑 R_2 。

則 (R_1+R_2) 是 d 的函數，圖形為雙曲線的一支。

【證明】

設 A 的坐標為 $(0,a)$ ，依正弦定理， $R_1 = \frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B}$ ， $R_2 = \frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C}$

令一點 P 坐標為 (d, R_1+R_2)

$$\Rightarrow P(d, \frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle B} + \frac{\sqrt{d^2+a^2}}{2\sin\angle C})$$

$$\Rightarrow P(d, \frac{\sqrt{d^2+a^2}(\sin\angle B + \sin\angle C)}{2\sin\angle B\sin\angle C})$$

$$\Rightarrow P(d, \frac{\sqrt{d^2+a^2} \cdot (\frac{a}{AC} + \frac{a}{AB})}{2 \cdot \frac{a}{AB} \cdot \frac{a}{AC}})$$

$$\Rightarrow P(d, \frac{\sqrt{d^2+a^2} (\overline{AB} + \overline{AC})}{2a})$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2a}$ 為常數，令 $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2a} = k \Rightarrow P(d, \sqrt{d^2+a^2} \cdot k)$

P 點在函數 $y = f(x) = \sqrt{x^2+a^2} \cdot k$ 上

$$y = \sqrt{x^2+a^2} \cdot k$$

$$(\frac{y}{k})^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow \frac{y^2}{k^2} - x^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{a^2 k^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad , \quad \text{符合雙曲線關係式 (型如 } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1)$$

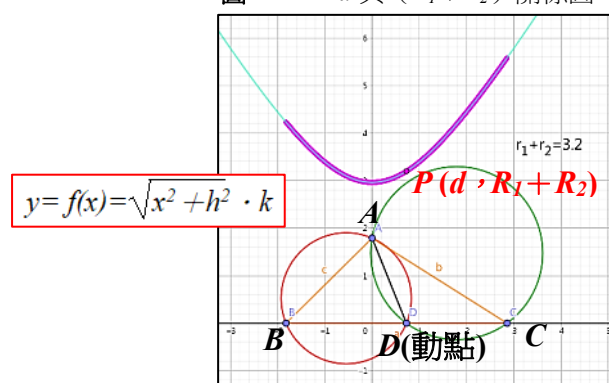
\therefore 函數 $f(x) = \sqrt{x^2+a^2} \cdot k$ 為一雙曲線

故當動點 D 坐標為 $(d,0)$ ，共邊三角形外接圓半徑分別為 R_1 和 R_2 時，

(R_1+R_2) 是 d 的函數，圖形為雙曲線的一支得證。

觀察此雙曲線圖形的特性，具有最低點，代表半徑和存在最小值，這也開展出討論共邊三角形外接圓面積和關係的一條新路徑。

圖 4-2-7 d 與 (R_1+R_2) 關係圖



延伸推論 因為 d 與 $(R_1 + R_2)$ 的關係為雙曲線，從圖形可以得知當 $d=0$ 時， $(R_1 + R_2)$ 出現最小值，也就是當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓半徑和最小。我們也利用正弦定理證明出這個推論是正確的。

【證明】

根據正弦定理， $R_1 = \frac{\overline{AB}}{2\sin \angle ADB}$ ， $R_2 = \frac{\overline{AC}}{2\sin \angle ADC}$

\therefore 分母越大，分數越小

若 $\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \sin \angle ADB = \sin 90^\circ = 1 = \sin \angle ADC$ ，此時分母最大

\therefore 當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓半徑最小 \Rightarrow 半徑和最小

而此時 $(R_1 + R_2)$ 的最小值 $= \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$

(五) 探討任意三角形中，共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係

問題帶來的新問題，從雙曲線的最低點可知，當分割線為三角形的高時，共邊三角形外接圓的半徑和 $R_1 + R_2$ 最小，同時半徑 R_1 與 R_2 也最小，故此時共邊三角形的外接圓面積最小，當然其面積和也是最小。因此我們以分割線為三角形的高為前提，共邊三角形外接圓面積和最小的情況下，分為直角三角形、銳角三角形及鈍角三角形，來探討共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積的關係。

前提 任意 $\triangle ABC$ ，頂角為 $\angle A$ ，作 \overline{BC} 上的高 \overline{AD} ，且 D 點在 \overline{BC} 上，分割出共邊 $\triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ ，令 $\triangle ABD$ 外接圓圓心 O_1 ，半徑 R_1 ， $\triangle ACD$ 外接圓圓心 O_2 ，半徑 R_2 ，原三角形外接圓圓心 O ，半徑 R 。

圖 4-2-8 討論共邊三角形外接圓面積流程圖



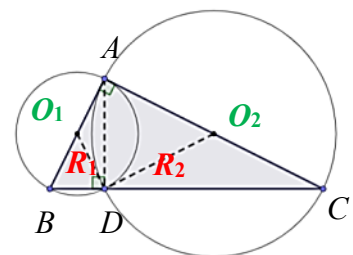
命題 5.1：若 $\angle A = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ 為直角三角形 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 = 圓 O 面積

【證明】

當 $\angle A = 90^\circ$ ， $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $R = \frac{\overline{BC}}{2}$

又 $\overline{AD} \perp \overline{BC} \Rightarrow \triangle ABD$ 及 $\triangle ACD$ 亦為直角三角形

圖 4-2-9 直角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



$$\Rightarrow \Delta ABD \text{ 外接圓半徑 } R_1 = \frac{\overline{AB}}{2}, \Delta ACD \text{ 外接圓半徑 } R_2 = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$\therefore \Delta ABC$ 為直角三角形，根據畢氏定理， $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

$$\therefore (2R_1)^2 + (2R_2)^2 = (2R)^2 \Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = R^2 \Rightarrow \pi \cdot R_1^2 + \pi \cdot R_2^2 = \pi \cdot R^2$$

故圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 = 圓 O 面積

延伸思考 如果分割線不為三角形的高時，面積關係又是如何呢？

$$\text{令 } \angle ADB = \theta, \text{ 此時 } 2R_1 = \frac{\overline{AB}}{\sin\theta}, 2R_2 = \frac{\overline{AC}}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \pi \cdot R_1^2 + \pi \cdot R_2^2 = \pi \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4\sin^2\theta} + \pi \cdot \frac{\overline{AC}^2}{4\sin^2\theta} = \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4\sin^2\theta} > \pi \cdot \frac{\overline{BC}^2}{4} = \pi \cdot R^2$$

可知直角三角形其分割線不為高時，圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 > 圓 O 面積

命題 5.2：若 $\angle A < 90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ 為銳角三角形 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 > 圓 O 面積

【證明】

$$\begin{cases} \overline{AB} = 2R\sin C \\ \overline{AC} = 2R\sin B \end{cases} \Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = R^2(\sin^2 C + \sin^2 B)$$

$$\text{又 } \angle B + \angle C > 90^\circ \Rightarrow \angle B > 90^\circ - \angle C$$

$$\Rightarrow \sin B > \sin(90^\circ - \angle C) = \cos C$$

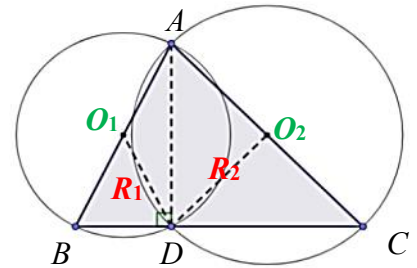
$$\Rightarrow \sin^2 B > \cos^2 C = 1 - \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 C + \sin^2 B > 1$$

$$\Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = R^2(\sin^2 C + \sin^2 B) > R^2 \Rightarrow \pi \cdot R_1^2 + \pi \cdot R_2^2 > \pi \cdot R^2$$

\therefore 此時共邊三角形的外接圓面積和最小

\therefore 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積恆大於圓 O 面積

圖 4-2-10 銳角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



命題 5.3：若 $\angle A > 90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ 為鈍角三角形 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 < 圓 O 面積

【證明】

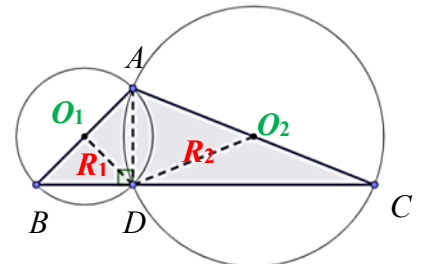
$$\text{此時 } \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 < \overline{BC}^2$$

$$\Rightarrow R_1^2 + R_2^2 < R^2$$

$$\Rightarrow \pi \cdot R_1^2 + \pi \cdot R_2^2 < \pi \cdot R^2$$

\Rightarrow 共邊三角形的外接圓面積和最小值 < 圓 O 面積

圖 4-2-11 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積關係



鈍角三角形的這個結果，只能說明當分割線是高的時候，「面積和的最小值」會小於圓

O 面積，動點在其他位置時面積關係可不見得如此。

當時我們觀察 GGB 繪圖所得數據，發現在鈍角三角形中，當動點 D 越來越靠近端點的 B 或 C 點時，共邊三角形的外接圓面積和會跟著增加，並且大於圓 O 面積。猜測這個從「 $<$ 」到「 $>$ 」的過程，必定經過「 $=$ 」的關係，我們很好奇這個關鍵的時刻， D 點會在哪個位置，然而又卡住了，因為很想解決這個問題，於是接續開啟「雙圓記」後半段的研究，堅持思考終於讓我們突破困難。

延伸思考 鈍角三角形中，何時共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積相等？

我們假定鈍角 $\triangle ABC$ 的兩邊長 $\overline{AB} = m$ 與 $\overline{AC} = n$ ，此時可以根據正弦定理求出共邊三角形兩個外接圓的半徑，再透過 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於 $\triangle ABC$ 的外接圓面積的關係列式，進而求出 $\overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ，推導過程如後。

命題 5.4 若 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於 $\triangle ABC$ 的外接圓面積，則 $\overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$

【推導過程】

設 $\angle A > 90^\circ$ ， $\overline{AB} = m$ ， $\overline{AC} = n$ ， $\angle ADB = \theta$ ，令 A 到 \overline{BC} 的距離為 h

依正弦定理， $R_1 = \frac{m}{2\sin\theta}$ ， $R_2 = \frac{n}{2\sin(180^\circ-\theta)}$ ， $R = \frac{m}{2\sin C}$

$$\pi \cdot R_1^2 + \pi \cdot R_2^2 = \pi \cdot R^2 \Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = R^2$$

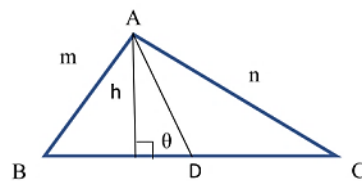
$$\Rightarrow \frac{m^2}{4\sin^2\theta} + \frac{n^2}{4\sin^2(180^\circ-\theta)} = \frac{m^2}{4\sin^2 C} \Rightarrow \frac{m^2+n^2}{4\sin^2\theta} = \frac{m^2}{4\sin^2 C}$$

$$\text{又 } \sin\theta = \frac{h}{AD}, \quad \sin C = \frac{h}{n}$$

$$\frac{m^2+n^2}{4 \cdot \frac{h^2}{(AD)^2}} = \frac{m^2}{4 \cdot \frac{h^2}{n^2}} \Rightarrow (m^2+n^2)(\overline{AD})^2 = (mn)^2$$

$$\text{故 } \overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

圖 4-2-12 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積相等時 \overline{AD} 長度推導



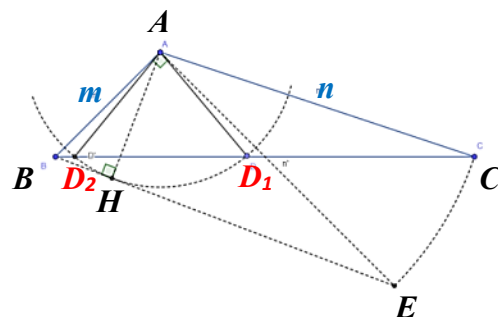
作圖 透過尺規作圖確定出 D 點的位置

求出 \overline{AD} 之後， $\overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$ 的形式讓我們聯想到已知兩股分別為 m 、 n 的直角三角形斜邊上的高，突然靈光一閃：如果我們透過直角三角形，用尺規作圖先畫出 \overline{AD} 的長度，再以此為半徑，以 A 為圓心畫弧，不就能找出 D 點的位置了！

1.尺規作圖【作法】

- (1)作一點 E ，使得 $\angle BAE = 90^\circ$ 且 $\overline{AC} = \overline{AE}$
- (2)連接 \overline{BE} ， $\triangle ABE$ 為直角三角形
- (3)作 $\triangle ABE$ 斜邊上的高 \overline{AH}
- (4)以 A 為圓心， \overline{AH} 為半徑畫弧，交 \overline{BC} 於 D_1 、 D_2
- (5) D_1 、 D_2 即為所求

圖 4-2-13 尺規作圖 D 點位置



2.確定 D 點的坐標

畫出 D 點的位置，接著找出其坐標。令三頂點坐標為 $A(0, a)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(c, 0)$ ，且 $c > b$ ，動點 D 坐標設為 $(x, 0)$ ，

$$\Rightarrow m = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad n = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於 $\triangle ABC$ 的外接

圓面積時 $\overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$

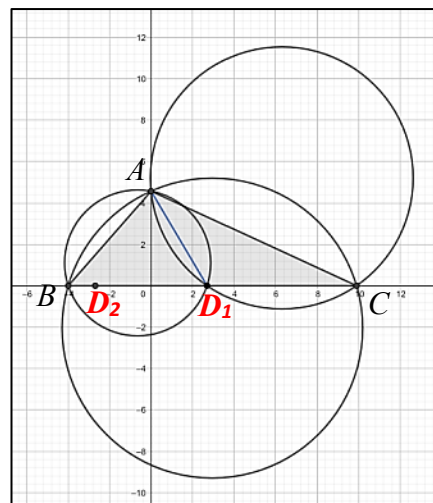
$$\therefore \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + a^2 + c^2}} = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\frac{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}{(2a^2 + b^2 + c^2)} = a^2 + x^2$$

$$x^2 = \frac{b^2 c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{b^2 c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\text{故 } D_1(\sqrt{\frac{b^2 c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2}}, 0), \quad D_2(-\sqrt{\frac{b^2 c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2}}, 0)$$

圖 4-2-14 鈍角三角形之共邊三角形外接圓面積相等時 D 點座標推導



解決鈍角三角形中共邊三角形的外接圓面積和等於圓 O 面積時動點 D 所在的位置，是我們這兩個階段研究的銜接點，第二階段我們將焦點關注到連心線。因為 $(R_1 + R_2)$ 是動點 D 的 x 坐標的函數且圖形為雙曲線的發現，讓我們想到與 R_1 、 R_2 圍成一個三角形三邊的連心線 $\overline{O_1 O_2}$ 或許也具有尚未發現的特性。

有了這樣的想法，先用 *GGB* 觀察，看到 D 點移動時，連心線 $\overline{O_1 O_2}$ 斜率從負到正，圖形擺盪的軌跡似乎呈現平滑對稱的曲線，我們決定一探究竟，果然出現許多有意思的發現。

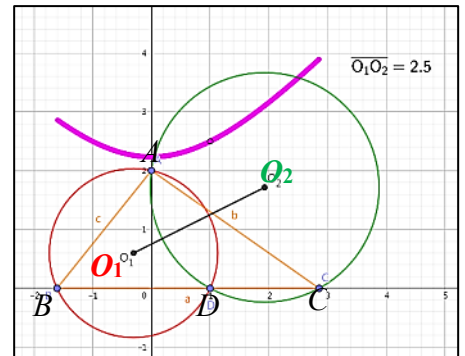
(六) 探討動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線 O_1O_2 長度的變化

1. 觀察圖形及數據形成猜想

因為 R_1, R_2 與連心線 O_1O_2 正好圍成一個三角形，加上 (R_1+R_2) 是動點 D 的 x 坐標 d 的函數且圖形為雙曲線的發現，讓我們聯想到連心線 O_1O_2 與動點 D 的 x 坐標 d 是不是也具有特殊關係。

將 (d, R_1+R_2) 數據坐標化，透過 GGB 模擬圖形，竟然也得出圖中紫色的雙曲線，以下透過證明來加以確定。

圖 4-2-15 $(d, \overline{O_1O_2})$ 軌跡圖



2. 幾何論證猜想為真

命題 6.1：在直角坐標平面中，對於任意 $\triangle ABC$ ，令三頂點坐標為 $A(0, a)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(c, 0)$ ，

且 $c > b$ ， \overline{BC} 上的動點 D 坐標設為 $(d, 0)$ ，連接 \overline{AD} ，分割出兩個共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ ，其外接圓圓心分別為 O_1, O_2 ，半徑分別為 R_1 和 R_2 。

則共邊三角形外接圓連心線 O_1O_2 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

【證明】

I^0 利用 O_1, O_2 在 \overline{AD} 的中垂線上，先求出 O_1, O_2 的坐標，再求出 $\overline{O_1O_2}$ 長度

(1) $\because O_1$ 必落在 \overline{BD} 的中垂線上故其 x 坐標必為 $\frac{b+d}{2}$ ；同理可知， O_2 的 x 坐標必為 $\frac{c+d}{2}$

(2) 求 \overline{AD} 的方程式：

$$\frac{y-0}{x-d} = \frac{y-a}{x-0}$$

$$\Rightarrow xy = xy - ax - dy + ad \Rightarrow ax + dy - ad = 0$$

(3) 求 \overline{AD} 的中垂線 $\overline{O_1O_2}$ 的方程式

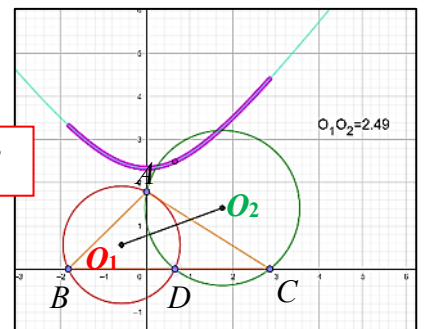
設 $\overline{O_1O_2}$ 的方程式為 $y = \frac{d}{a}x + u$

代入 \overline{AD} 中點 $(\frac{d}{2}, \frac{a}{2})$

$$\frac{a}{2} = \frac{d}{a} \cdot \frac{d}{2} + u \Rightarrow u = \frac{a^2 - d^2}{2a}$$

$$y = g(x) = k\sqrt{a^2 + x^2}$$

圖 4-2-16 $(d, \overline{O_1O_2})$ 軌跡圖證明



$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} \text{的方程式: } y = \frac{d}{a}x + \frac{a^2 - d^2}{2a}$$

$$\Rightarrow -2dx + 2ay + d^2 - a^2 = 0$$

(4) 求出 O_1 、 O_2 的座標及 $\overline{O_1O_2}$ 的長度

將 O_1 及 O_2 的 x 坐標代入中垂線方程式求出 O_1 及 O_2 的坐標

$$y = \frac{d}{a} \cdot \frac{b+d}{2} + \frac{a^2 - d^2}{2a} \Rightarrow y = \frac{a^2 + bd}{2a}$$

$$\therefore O_1 \text{的座標為} \left(\frac{b+d}{2}, \frac{a^2 + bd}{2a} \right)$$

$$\text{同理可解得 } O_2 \text{的座標為 } O_2 \left(\frac{c+d}{2}, \frac{a^2 + cd}{2a} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{得出 } \overline{O_1O_2} &= \sqrt{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{(b-c)d}{2a}\right)^2} \\ &= \frac{c-b}{2} \sqrt{1 + \frac{d^2}{a^2}} = \frac{(c-b)\sqrt{a^2 + d^2}}{2a} \end{aligned}$$

2° 證明 $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支

$$\because \frac{c-b}{2a} \text{ 為常數，令 } \frac{c-b}{2a} = k$$

$$\text{由 } g(d) = \overline{O_1O_2} = \frac{(c-b)\sqrt{a^2 + d^2}}{2a}$$

可知共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的長度 y 與動點 D 的 x 坐標

呈現 $g(x) = y = k\sqrt{a^2 + x^2}$ 的函數關係

$$\Rightarrow y^2 = k^2(a^2 + x^2)$$

$$\Rightarrow y^2 = k^2a^2 + k^2x^2$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{k^2a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ 符合雙曲線關係式 (型如 } \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1)$$

$$\therefore g(x) = \frac{(c-b)\sqrt{a^2 + x^2}}{2a} \text{ 的圖形為雙曲線的一支}$$

故共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支得證。

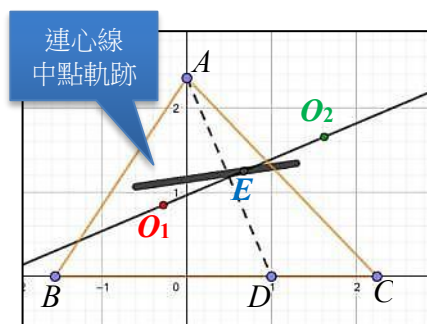
$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 跟先前討論過的 $(R_1 + R_2)$ 與 d 同樣是函數關係且圖形皆為雙曲線的一部分，這讓我們覺得很特別，後續將在第陸章討論的時候探究其原因。

(七) 探討動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線中點的軌跡圖形

1. 觀察圖形及數據形成猜想

透過 *GGB* 模擬觀察，發現動點 D 位置改變，連心線的長度與斜率跟著改變，然而其中點卻會落於同一直線上，究竟是否真的如此？如果是，那麼這一條直線的方程式是否能找得出來呢？接下來是我們的推論與證明。

圖 4-2-17 共邊三角形連心線中點軌跡



2. 幾何論證猜想為真

命題 7.1：在直角坐標平面中，對於任意 $\triangle ABC$ ，令三頂點坐標為 $A(0,a)$ ， $B(b,0)$ ， $C(c,0)$ ，且 $c > b$ ， BC 上的動點 D 坐標設為 $(d,0)$ ，連接 AD ，分割出兩個共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ ，其外接圓圓心分別為 O_1 、 O_2 ，半徑分別為 R_1 和 R_2 。

若 E 為連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的中點，則當動點 D 移動時， E 點會落於同一條直線上。

【證明】

1⁰ 利用 O_1 、 O_2 在 \overline{AD} 的中垂線上，先求出 O_1 、 O_2 的坐標，再求出 O_1 、 O_2 的中點坐標

$\because O_1$ 必落在 \overline{BD} 的中垂線上故其 x 坐標必為 $\frac{b+d}{2}$ ；同理可知， O_2 的 x 坐標必為 $\frac{c+d}{2}$

又 O_1 、 O_2 在 \overline{AD} 的中垂線上，此中垂線方程式為 $-2dx + 2ay + d^2 - a^2 = 0$

$\therefore O_1(\frac{b+d}{2}, \frac{a^2+bd}{2a})$ ， $O_2(\frac{c+d}{2}, \frac{a^2+cd}{2a})$

E 為 $\overline{O_1O_2}$ 的中點 $\Rightarrow E(\frac{b+c+2d}{4}, \frac{2a^2+bd+cd}{4a})$

2⁰ 利用 O_1 、 O_2 的中點坐標，找出其方程式

$$\text{令 } x = \frac{b+c+2d}{4} \Rightarrow d = \frac{4x-b-c}{2} \text{ 代入 } y = \frac{2a^2+bd+cd}{4a}$$

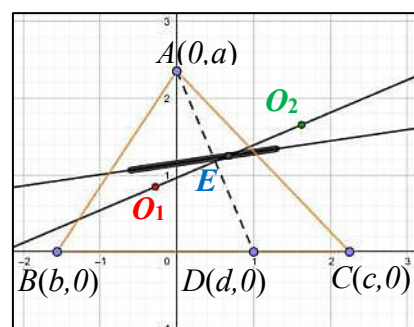
$$y = \frac{2a^2 + (b+c) \cdot \frac{4x-b-c}{2}}{4a} \Rightarrow y = \frac{a^2 + (b+c) \cdot \frac{4x-b-c}{4}}{2a}$$

$$2ay = a^2 + (b+c) \cdot \frac{4x-b-c}{4} \Rightarrow 2ay = a^2 + (b+c)x - \frac{(b+c)^2}{4}$$

$$\Rightarrow -(b+c)x + 2ay + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0 \text{ 為二元一次方程式，}$$

故動點 D 移動時 E 點軌跡為一直線得證。

圖 4-2-18 共邊三角形連心線中點軌跡



(八) 探討動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線軌跡形成的圖形

1. 觀察圖形及數據形成猜想

透過 *GGB* 觀察，看到動點 D 由 B 點向 C 點移動時，連心線斜率從負到正，圖形擺盪的軌跡似乎呈現平滑對稱的曲線，這又會是雙曲線嗎？我們不禁好奇的這樣想。

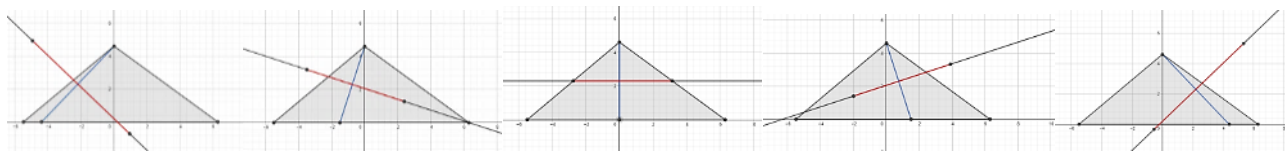
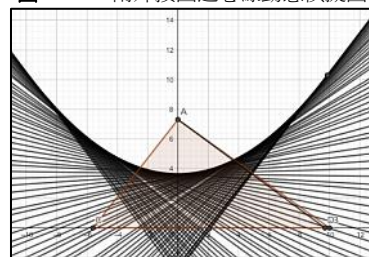


圖 4-2-19 連心線擺盪軌跡

結果觀察動態模擬的曲線方程式及圖形，很奇妙的會是拋物線，而且這條曲線與連心線的交點貌似在動點 D 的正上方，於是我們大膽猜測，外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的軌跡，會切於一拋物線，且切點的 x 坐標為 d 。以下是我們論證的過程。

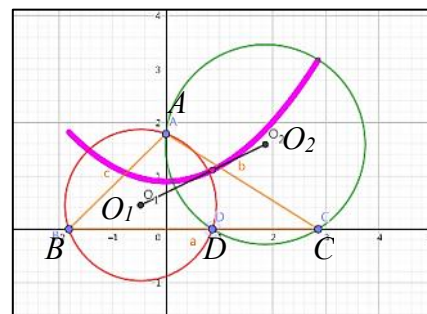
圖 4-2-20 兩外接圓連心線動態模擬圖



2. 幾何論證猜想為真

命題 8.1 在直角坐標平面中，對於任意 $\triangle ABC$ ，令三頂點坐標為 $A(0, a)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(c, 0)$ ，且 $c > b$ ， BC 上的動點 D 坐標設為 $(d, 0)$ ，連接 \overline{AD} ，分割出兩個共邊 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ ，其外接圓圓心分別為 O_1 、 O_2 。

圖 4-2-21 兩外接圓連心線軌跡切於同一拋物線



則外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的軌跡會切於同一拋物線，且切點的 x 坐標為 d 。

【證明】

I^0 證明每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點， x 軸為準線的拋物線上

$\because \triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 會在 \overline{AD} 之中垂線上

令 \overline{AD} 之中垂線為直線 M ，過動點 D 作一垂直 x 軸的直線交直線 M 於 P 點

此時 P 點為 \overline{AD} 的中垂線上一點，

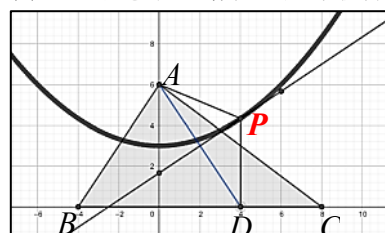
$$\therefore \overline{PA} = \overline{PD}$$

令 P 點坐標為 (x, y)

$$y = \sqrt{(d-0)^2 + (y-a)^2} \Rightarrow y^2 = (x-0)^2 + (y-a)^2$$

$$\Rightarrow y^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2} \quad (\text{拋物線的二次函數式})$$

圖 4-2-22 連心線上必存在一點 P 在拋物線上



由此可知，隨著 D 點的移動，每一條連心線上必存在一個點 P 落在以頂點 A 為焦點， \overleftrightarrow{BC} 為準線的拋物線上，此拋物線的二次函數式為 $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$

2° 證明 P 點為切點

已知直線 M 方程式為 $-2dx + 2ay + d^2 - a^2 = 0$ ，

可求連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所在之直線 M 與以頂點 A 為焦點， \overleftrightarrow{BC} 為準線的拋物線的交點

$$\begin{cases} -2dx + 2ay + d^2 - a^2 = 0 \\ y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$-2dx + 2a\left(\frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}\right) + d^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 - 2dx + d^2 = 0 \Rightarrow (x-d)^2 = 0 \Rightarrow x = d \text{ (重根)}$$

可知這樣的交點只有一個，且此點即為 P 點

由 1° 及 2° 得證，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 會與同一拋物線相切，且切點的 x 坐標為 d 。

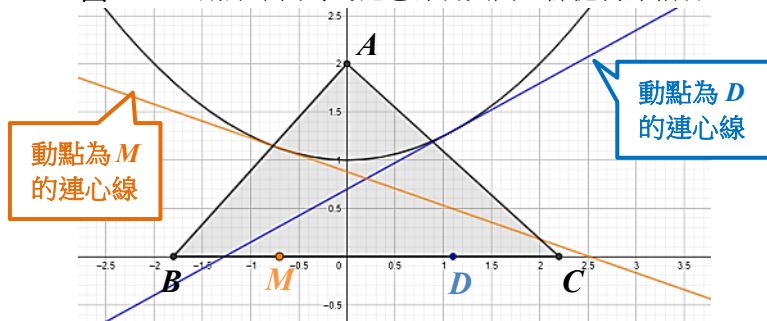
連心線軌跡的動態模擬讓我們聯想到童軍露營時，搭建精神堡壘會以繩子拉出直線來構成的拋物線。

圖 4-2-23 童軍精神堡壘



除上述的結果，從拋物線方程式，可以發現僅與頂點 A 的坐標及 \overline{BC} 的方程式有關，由此可以推論出無論 B 點、 C 點的坐標為何，隨著動點 D 移動，共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所形成的軌跡，會包絡出同一拋物線。

圖 4-2-24 動點不同時的連心線皆與同一條拋物線相切



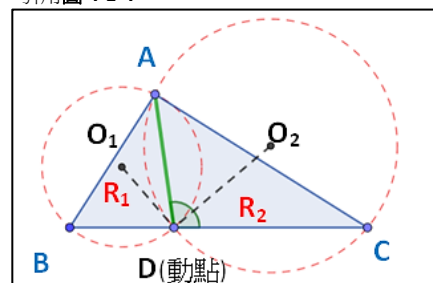
換句話說，這代表只有頂點 A 到 \overline{BC} 的距離能影響拋物線的開口大小，也就是對於任意三角形，若頂點 A 到 \overline{BC} 的距離相等，當動點 D 移動時，其共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所包絡出的拋物線全等。

伍、研究結果

我們將此次探究過程中，關於共邊三角形的外接圓具有的特性，整理出以下結果：

一、當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，動點在腰上時，則含底角之 $\triangle CBD$ 的外接圓圓心 O_1 ，會落於含頂角之 $\triangle CAD$ 的外接圓 O_2 上。

引用圖 4-2-4

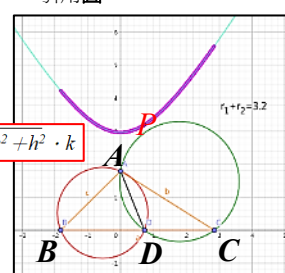


二、當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的外接圓全等。

三、將特殊三角形中發現的關係，推廣到任意三角形，得知共邊三角形外接圓半徑 $R_1 : R_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 。

四、發現共邊三角形外接圓半徑和 $(R_1 + R_2)$ 與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支，進而得知當分割線 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 時，半徑和 $(R_1 + R_2)$ 有最小值 $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$ 。

引用圖 4-2-7



五、承結果四，發現共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積具有以下的關係：

(一) 若 $\triangle ABC$ 為直角三角形時，圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 \geq 圓 O 面積，
當分割線為斜邊上的高時，等號成立。

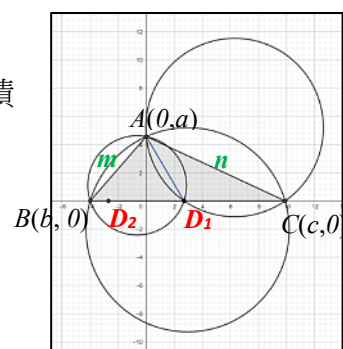
(二) 若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

(三) 若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形時，(圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積) 與圓 O 面積存在大於、等於或小於的關係。

當 $\overline{AD} = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ 時，面積相等，

動點 D 可在 $D_1(\sqrt{\frac{b^2c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2}}, 0)$ 或 $D_2(-\sqrt{\frac{b^2c^2 - a^4}{2a^2 + b^2 + c^2}}, 0)$ 。

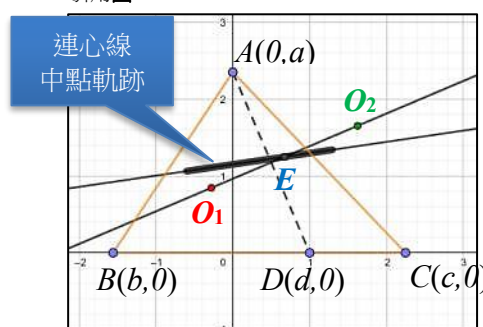
引用圖 4-2-14



(* 圖中 $\overline{AB} = m$, $\overline{AC} = n$)

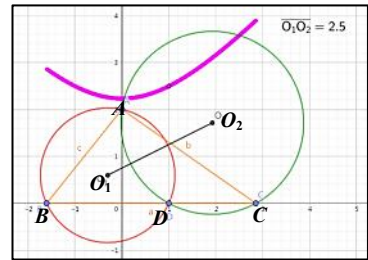
六、任意三角形中，當動點 D 移動時，
連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的中點 E 會落於同一條直線上，
直線方程式為 $-(b+c)x + 2ay + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0$

引用圖 4-2-17



七、任意三角形中，共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標呈函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

引用圖 4-2-21

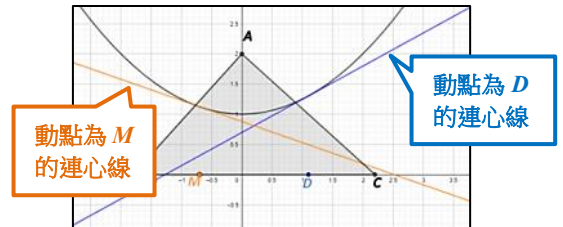


八、任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 會與同一拋物線相切，此

拋物線焦點為頂點 A ，準線為 \overleftrightarrow{BC} ，

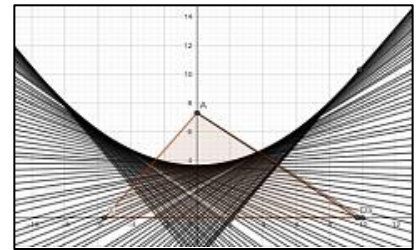
方程式為 $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$ ，且切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

引用圖 4-2-24



九、對於任意三角形，若頂點 A 到 \overline{BC} 的距離相等，當動點 D 移動時，其共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所形成的軌跡包絡出的拋物線全等。

引用圖 4-2-20



陸、討論

一、在鈍角三角形中，發現使（圓 O_1 面積+圓 O_2 面積）與圓 O 面積相等的動點 D 位置有兩個可能，一定有兩個嗎？

根據作圖結果發現在鈍角 $\triangle ABC$ 中，有兩個動點的位置可符合共邊三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於原 $\triangle ABC$ 的外接圓面積，於是我們想：這樣的點一定有兩個嗎？有沒有可能只有一個？如果只有一個，會是什麼情況下呢？

我們假設鈍角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A > 90^\circ$ ， $\overline{AB} = m$ ， $\overline{AC} = n$ ，只存在一個動點 D ，使得 \overline{AD} 所裁切出的共邊三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於原 $\triangle ABC$ 的外接圓面積。結果發現這個假設是不成立的，也就是鈍角 $\triangle ABC$ 中一定有兩個動點的位置可以符合前述的面積關係，證明如後。

【證明】

如果只存在一個動點 D 點

\Rightarrow 只有一個動點在 \overline{BC} 上

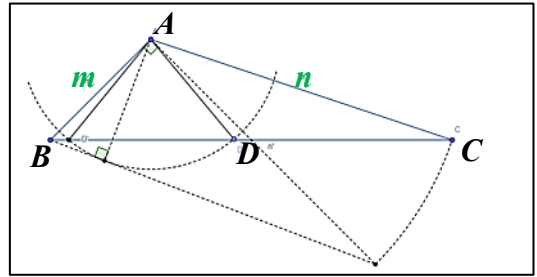
$$\Rightarrow \overline{AD} \geq \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}} \geq m$$

$$\Rightarrow n \geq \sqrt{m^2+n^2}$$

$$\Rightarrow n^2 \geq m^2+n^2 \Rightarrow m^2 \leq 0 \Rightarrow m=0$$

引用圖 4-2-13



但若 $m=0$ ，三角形便不存在，故得知這樣的點不可能只有一個。

二、承一，將鈍角 $\triangle ABC$ 外接圓面積和與原三角形的外接圓面積大小關係依區間列出

因為確定使得共邊三角形 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓面積和等於原 $\triangle ABC$ 外接圓面積的動點有兩個，於是我們能將面積大小關係做出更明確的描述。令三頂點坐標為 $A(0,a)$ ， $B(b,0)$ ，

$C(c,0)$ ，動點 D 的坐標為 $(x,0)$ ， $\overline{AD}_1 = \overline{AD}_2 = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ，則面積關係如下：

(一)若動點 D 在 B 點與 D_2 之間或在 C 點與 D_1 之間

\Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

此時 $b < x < -\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ 或 $\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}} < x < c$ ，如圖 6-2-1

(二)若動點 D 為 D_1 或 D_2

\Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 = 圓 O 面積

此時 $x = \pm\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ ，如圖 6-2-2

(三)若動點 D 在 D_1 點與 D_2 之間

\Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $<$ 圓 O 面積

此時 $-\sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}} < x < \sqrt{\frac{b^2c^2-a^4}{2a^2+b^2+c^2}}$ ，如圖 6-2-3

圖 6-2-1 D 在 B 與 D_2 間或 C 與 D_1 間

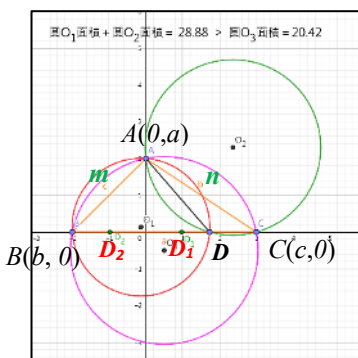


圖 6-2-2 D 在 D_1 或 D_2

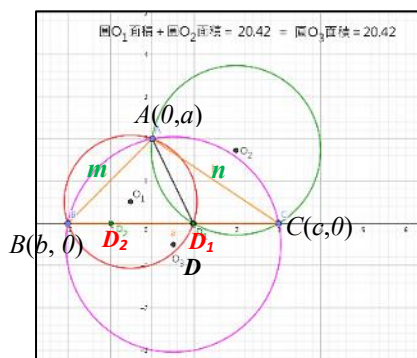
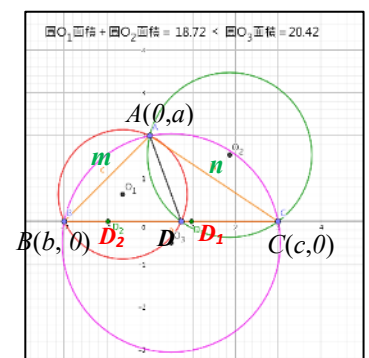


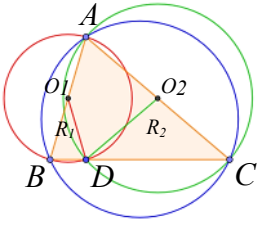
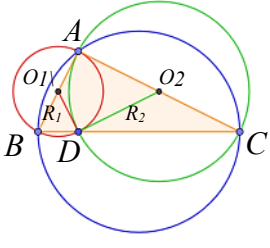
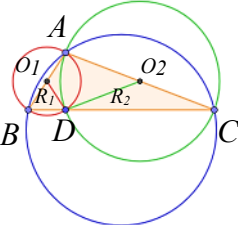
圖 6-2-3 D 在 D_2 與 D_1 間



(* 圖中 $\overline{AB}=m$ ， $\overline{AC}=n$)

以三角形的高為前提，進行共邊三角形外接圓面積和與其原三角形外接圓面積討論的過程，感受到以角分類三角形種類與外接圓面積關係存在系統性的關聯：

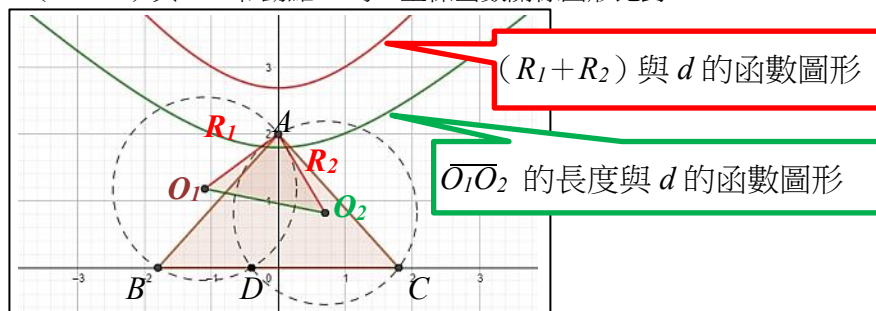
表 6-2-1 不同三角形其共邊三角形外接圓的面積關係

銳角三角形 $\angle A < 90^\circ$	直角三角形 $\angle A = 90^\circ$	鈍角三角形 $\angle A > 90^\circ$
		
圓 $O_1 +$ 圓 $O_2 >$ 圓 O 面積	圓 $O_1 +$ 圓 $O_2 \geq$ 圓 O 面積	1. D 在區間 $(B, D_2), (D_1, C)$ $\Rightarrow O_1 + O_2 >$ 圓 O 面積 2. D 在 D_1 或 D_2 $\Rightarrow O_1 + O_2 =$ 圓 O 面積 3. D 在區間 (D_2, D_1) $\Rightarrow O_1 + O_2 <$ 圓 O 面積
恆大於（沒有等於的情況）	出現一個等於的位置一高，其他皆為大於	出現兩個等於的位置，居兩點間小於，其外則為大於

三、為什麼 $(R_1 + R_2)$ 及 $\overline{O_1O_2}$ 與動點 D 的 x 坐標 d 會一樣呈現圖形是雙曲線一支的函數關係？

$\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 跟 $(R_1 + R_2)$ 與 d 同樣是函數關係且圖形皆為雙曲線的一部分，這讓我們覺得很特別，因此觀察這兩個雙曲線方程式，發現係數成比例。

圖 6-3-1 $(R_1 + R_2)$ 與 $\overline{O_1O_2}$ 和動點 D 的 x 坐標函數關係圖形比對



◎ $(R_1 + R_2)$ 與動點 D 的 x 坐標 d 的關係：
$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2a}$$

◎ $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標 d 的關係：
$$g(x) = \sqrt{x^2 + a^2} \cdot \frac{\overline{BC}}{2a}$$

加上 R_1 、 R_2 與 $\overline{O_1O_2}$ 正好是三角形的三邊，猜測與原三角形是否呈現某種關係，進一步發現 $\triangle AO_1O_2$ 與 $\triangle ABC$ 相似。

【證明】

在 ΔAO_1O_2 與 ΔABC 中

$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

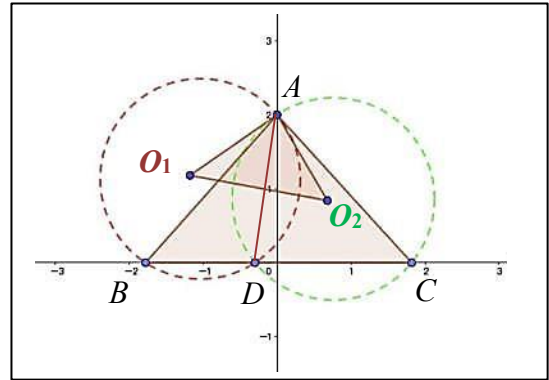
$$\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AO_1D = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

$$\therefore \angle AO_1O_2 = \angle ABD$$

同理 $\angle AO_2O_1 = \angle ACD$

故 $\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$ (AA 相似)

圖 6-3-2 ΔAO_1O_2 與 ΔABC 示意圖



突然恍然大悟！因為 ΔAO_1O_2 與 ΔABC 相似，所以 (R_1+R_2) 與 $\overline{O_1O_2}$ 長度間的關係會跟 $(\overline{AB}+\overline{AC})$ 與 \overline{BC} 相同，既然 ΔABC 三邊長皆為已知，代表 $(\overline{AB}+\overline{AC})$ 與 \overline{BC} 的長度關係固定，這也意味即使 (R_1+R_2) 與 $\overline{O_1O_2}$ 的長度雖然會隨著動點 D 的位置改變而改變，但其長度關係是不變的，因此為什麼 (R_1+R_2) 及 $\overline{O_1O_2}$ 與動點 D 的 x 坐標 d 會一樣呈現圖形是雙曲線的函數關係終於真相大白。

四、因為 ΔAO_1O_2 與 ΔABC 相似，進一步得出三角形頂點 A 、 ΔABC 外接圓圓心 O 、共邊三角形兩外接圓圓心 O_1 及 O_2 ，此四點共圓

假設在 ΔABC 中，動點 D 在 \overline{BC} 上， ΔABC 、 ΔABD 、 ΔACD 外接圓圓心分別為 O 、 O_1 及 O_2 ，則 A 、 O 、 O_1 、 O_2 四點共圓。

【證明】

$\therefore \overrightarrow{OO_1}$ 為 \overline{AB} 中垂線， $\overrightarrow{OO_2}$ 為 \overline{AC} 中垂線，

令 $\overrightarrow{OO_1}$ 與 \overline{AB} 交於 E ， $\overrightarrow{OO_2}$ 與 \overline{AC} 交於 F

\therefore 連接 $\overline{AO_1}$ 、 $\overline{AO_2}$ 、 $\overline{OO_1}$ 、 $\overline{OO_2}$ ，

在四邊形 $AEOF$ 中， $\angle AEO=90^\circ$ ， $\angle AFO=90^\circ$ ， $\angle EAF + \angle EOF = 180^\circ$

$\therefore A$ 、 E 、 O 、 F 共圓

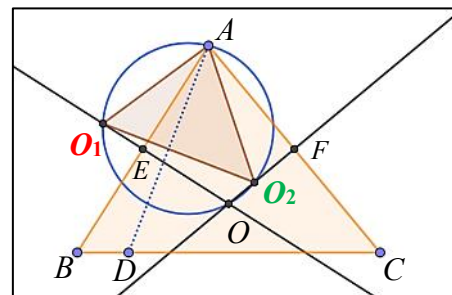
當動點 D 移動時， O_1 軌跡在 $\overleftrightarrow{OO_1}$ 上， O_2 軌跡為在 $\overleftrightarrow{OO_2}$ 上 $\Rightarrow \angle O_1OO_2$ 不變

又 $\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$ ， $\angle O_1AO_2 = \angle BAC = \angle EAF$

$\angle EAF + \angle EOF = 180^\circ \Rightarrow \angle O_1AO_2 + \angle O_1OO_2 = 180^\circ$

故 A 、 O 、 O_1 、 O_2 四點共圓

圖 6-4-1 $A O_1 O O_2$ 四點共圓



五、動點 D 移動時，連心線中點的軌跡與拋物線會不會有交點？如果有會相交於何處呢？

既然找出了連心線中點的軌跡方程式，以及拋物線的方程式，我們也想知道這兩個圖形是否會有交點，於是透過聯立求解來尋求答案。

$$\begin{cases} -(b+c)x + 2ay + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0 \\ y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -(b+c)x + 2a\left(\frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}\right) + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow -(b+c)x + x^2 + a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow -(b+c)x + x^2 + \frac{(b+c)^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow 4x^2 - 4(b+c)x + (b+c)^2 = 0$$

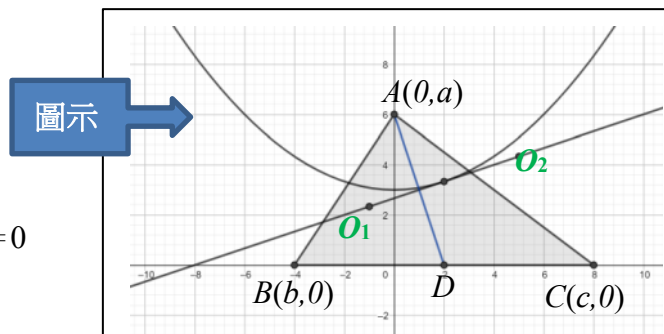
$$\Rightarrow [2x - (b+c)]^2 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{b+c}{2} \text{ (重根)}$$

因為重根的結果，表示這兩個圖形為相切的情況。

根據之前的研究結果可知，拋物線的每一條切線皆為共邊三角形外接圓的連心線，再由 $x = \frac{b+c}{2}$ 的結果推知，當動點 D 為 \overline{BC} 中點時，連心線與拋物線相切的點，正好也是連心線的中點，而且這條連心線與連心線中點軌跡的直線重疊。

原來，共邊三角形外接圓連心線中點軌跡就是當動點 D 為 \overline{BC} 中點時， \overline{AD} 的中垂線。日後求連心線中點軌跡方程式就不需要使用解決問題七時繁瑣的方法了！

圖 6-5-1 連心線中點軌跡與拋物線相切關係



柒、結論

整個雙圓記以外心狂想曲階段獲得的外心位置、半徑及外接圓面積初步關係的研究成果為基礎，接續解決先前未解之謎，同時加入對連心線的探究，使得對於三角形中共邊三角形的外接圓有更深入而完整的探討，彙整研究結果與討論，歸納出以下幾個面向的關係：

一、特定三角形中存在的關係

(一)當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，動點在腰上時，則含底角之 $\triangle CBD$ 的外接圓圓心 O_1 ，會落於含頂角之 $\triangle CAD$ 的外接圓 O_2 上。

(二)當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，則 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 的外接圓全等。

二、發現函數關係及其軌跡

(一)發現 (R_1+R_2) 與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且圖形為雙曲線的一支，進而得知

當分割線 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 時，半徑和 (R_1+R_2) 有最小值 $\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$ 。

(二)任意三角形中，共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的長度與動點 D 的 x 坐標呈現函數關係，且函數圖形為雙曲線的一支。

(三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的中點 E 會落於同一條直線上，直線方程式為 $-(b+c)x + 2ay + \frac{(b+c)^2}{4} - a^2 = 0$ 。同時發現共邊三角形外接圓連心線中點 E 的軌跡就是當動點 D 在 \overline{BC} 中點時 \overline{AD} 的中垂線。

(四)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 會與同一拋物線相切，拋物線的焦點是頂點 A ，準線為 \overleftrightarrow{BC} ，其方程式為 $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$ ，且切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。

三、建立三角形種類與外接圓面積關係的系統性關聯

(一)共邊三角形外接圓面積和與原三角形外接圓面積具有以下的關係：

1.若 $\triangle ABC$ 為直角三角形時，圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 \geq 圓 O 面積，
當分割線為斜邊上的高時，等號成立。

2.若 $\triangle ABC$ 為銳角三角形，則圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

3.若 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形，令三頂點坐標為 $A(0,a)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$ ，動點 D 的坐標為 $(x,0)$ ，

$\overline{AB} = m$, $\overline{AC} = n$, 且 $\overline{AD}_1 = \overline{AD}_2 = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}$ ，則：

(1)若動點 D 在 (B, D_2) 或 (D_1, C) 之間 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $>$ 圓 O 面積

(2)若動點 D 為 D_1 或 D_2 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 = 圓 O 面積

(3)若動點 D 在 (D_2, D_1) 之間 \Rightarrow 圓 O_1 面積 + 圓 O_2 面積 $<$ 圓 O 面積

(二)以三角形的高為前提進行討論，建立三角形種類（以頂角 A 分類）與外接圓面積關係存在系統性的關聯：

圖 7-3-1 三角形種類與外接圓面積關係的系統性關聯



四、幾何不變性

- (一)比例關係不變：從特殊三角形推廣到任意三角形，得知外接圓半徑 $R_1 : R_2 = \overline{AB} : \overline{AC}$ 。
- (二) AO_1O_2 四點共圓不變：承雙曲線關係，發現 $\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$ 。又因為 $\Delta AO_1O_2 \sim \Delta ABC$ ，進而得知三角形頂點 A 與三個外接圓圓心 O 、 O_1 及 O_2 ，此四點共圓。

五、原圖形變動與產出圖形的關係

- (一)任意三角形中，隨著動點 D 移動，所形成的每一條共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 會包絡出焦點是頂點 A ，準線為 \overleftrightarrow{BC} ，其方程式為 $y = \frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2}$ 的拋物線，且連心線 $\overline{O_1O_2}$ 與拋物線之切點的 x 坐標即為動點 D 的 x 坐標。
- (二)對於任意三角形，當動點 D 移動時，若頂點 A 到 \overline{BC} 的距離相等，無論 A 、 B 、 C 坐標為何，其共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 所包絡出的拋物線皆全等。
- (三)任意三角形中，當動點 D 移動時，共邊三角形外接圓連心線 $\overline{O_1O_2}$ 的中點 E 會形成一條直線上，就是當動點 D 為 \overline{BC} 中點時的中垂線。

原本只是出於好奇，想看看共邊三角形的外接圓會不會有什麼特殊的關係，沒想到竟有這麼多令人驚喜的發現，原來在數學的世界裡，想像力就是我們的超能力；原來不是只有解出數學題令人開心，自由的想數學也充滿著樂趣。

研究過程中我們還有觀察到當頂角 A 為銳角、直角跟鈍角時、連心線中點所構成的直線斜率會有相對應的變化，可以作為未來想在這個主題繼續深究的方向，也可嘗試增加為兩個動點或將動點移至三角形內部進行更多的探索。

捌、參考資料及其他

- 辛佳亮、柯亞承、鄭經獻、龔詩尹（2015）。環「徑」變遷。中華民國第 55 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 洪有情、朱峻賢、馬榮喜、陳世易、莊豐兆、顏德琮(2021)。康軒版數學課本第五冊及第六冊。
- 陳俐安、陳品璇、柯明錦（2011）。共邊三角形的內切圓。中華民國第 51 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 曾琮鈞、徐正皓、劉誠恩、蕭偉智（2021）。圓外切三角形與四邊形之構造與性質探究。中華民國第 61 屆中小學科學展覽會作品說明書。
- 游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明(2008)。高中數學課本。翰林。
- 黃勤聰（2010）。20100305 三五童軍節慶祝大會_場地佈置。花蓮縣童軍會。
- 蘇敏文、吳浩安、黃國斌（2018）。用心。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。

【評語】 010021

本作品研究兩共邊三角形的外接圓性質。作者首先做了完整的文獻回顧，並且嘗試移動底點，尋找兩共邊三角形外接圓面積和的極值，以及圓心連線特殊點的軌跡。在外接圓面積和的部份，作者只論證，當考慮銳角三角形，兩共邊外接圓面積和必大於(且不等於)原三角形之外接圓面積，但卻未真正算出兩共邊外接圓面積和之最大值和最小值。當考慮鈍角三角形時，隨 D 點由左移到右，兩共邊外接圓面積和首先由大於原三角形之外接圓面積，到相等，到小於，再回升，到相等，最後又大於原三角形之外接圓面積。雖然作者完整刻劃這個由大變小再變大的過程，但是兩共邊外接圓面積和之最大值和最小值依舊沒有明確被算出來，算是比較可惜的美中不足。

在兩共邊三角形外接圓圓心連線長度的研究方面，是此份作品比較有趣的部份。但儘管作者找到許多性質，其推導難度並不高，多半是座標化後直接計算可得。整體而言，本件作品研究詳盡，作品說明書撰寫清楚，在所有參賽作品中已是水準之上。