2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010012

參展科別　數學

作品名稱　格點多邊形的邊數最大值及其作圖法探討

得獎獎項

就讀學校　臺北市立永春高級中學

指導教師　蔡春風、陳宏賓

作者姓名　劉冠陞

關鍵詞　格點多邊形、坐標平面、對稱作圖法

作者簡介

我是劉冠陞，就讀臺北市立永春高中三年級數理資優班。學術研究是我的興趣，不但有趣，還能夠精進我的各項能力，尤其是製作報告以及上台發表。我很喜歡花許多時間去對一件事分析、理解，常常花幾個小時、幾天去思考一個問題，或下課纏著老師討論。這種態度讓我比一般人更有耐心、毅力去認真做每一件事。這次很幸運地能再次來到國際科展的舞台，除了發表自己的作品外，也希望日後我的研究能夠為學術界做出貢獻。

Abstract

In previous research, properties of specific lattice (grid) polygon like squares and rectangular triangles on Cartesian coordinate plane had been discussed, but few had used mathematical methods to extend this topic to arbitrary polygons. Properties of lattice polygons have always been classified into computer information study, and their purpose turns to estimate the numerical solution of different shapes or largest area which contain.

The purpose of this study is to find mathematical ways to calculate the maximum edge number of lattice polygons. The researcher proposed the "Symmetry Graphing Method (SGM)", and successfully derived and proved that the maximum number of edges of lattice polygons in arbitrary rectangle range. A special case of edge length 4 was also discussed.

This study features on general solutions of concave and convex lattice polygons, but it doesn't contain non-simple polygon. The maximum number of edges of polygon in the area determined by $x = n$, $y = n$, x-axis, and y-axis $\{(n, m) \in N$, let $m \leq n$ without loss of generality$\}$ can be expressed as follows.

$$S(n,m) = \begin{cases} 4 \ \{if\ n = 1 \vee m = 1\} \\ 3n + 1\ \{if\ n = 2 \vee m = 2\} \\ 24\ \{if\ m = n = 4\} \\ (n+1)(m+1)\ \{otherwise\} \end{cases}$$

Using the result of this study, we can easily find the maximum and minimum number of edges of arbitrary lattice polygons among specific range. The SGM helps us to find the best way, shortest path, or lowest cost, to make design or construction in limited space such as the roller coaster, the driver training center, or a maze.

摘要

在先前的研究中，特定的格點多邊形如正方形與直角三角形曾經被探討過。任意格點多邊形性質被歸類於資訊研究，目的為用程式估計當範圍很廣或邊數很多時格點多邊形性質的數值解。

先前研究中，作者已針對格點多邊形的性質進行初步的探討，本研究進一步補足先前研究的缺陷：用數學化的方式探討格點多邊形的邊數最大值。研究當中探討的多邊形包含凹多邊形及凸多邊形，研究者改良先前研究中的「迂迴作圖法」，提出新的「對稱作圖法」，以「定義基本構形、先作短邊、再作中間」的順序，確保必定可在特定範圍內建構出符合最大邊數解的格點多邊形；並以數學歸納法證明當矩形範圍短邊為 12 單位以上時，必存在格點數與邊數相等的格點多邊形，達成重要的突破。

本研究推導出格點多邊形的邊數最大值如下式。運用本研究的結果，將有助於在有限區域或空間中依照特定規律設計最大路徑，例如遊樂場迷宮、駕訓班車道、或積體電路設計。

$$S(n,m)=\begin{cases} 4\ \{if\ n=1 \vee m=1\} \\ 3n+1\ \{if\ n=2 \vee m=2\} \\ 24\ \{if\ m=n=4\} \\ (n+1)(m+1)\ \{otherwise\} \end{cases}$$

前言

一、研究動機

有許多科展主題皆是探討格點正方形[1][2][3]或直角三角形[4]在特定範圍內的種類與個數，但是沒有人推廣到其他的多邊形，還有學者用程式去預測當多邊形邊數很多（或範圍很大時）的數值解[5]，我認為這些工作應該存在更數學化的方法，以函式簡潔且精確地表示。因此本研究將會研究坐標平面上的各種凹多邊形及凸多邊形，也就是簡單多邊形[6]的邊數最大值，並嘗試推導出公式解。

二、研究目的

（一）探討不同作圖法的可行性。

（二）探討作圖法的操作型步驟及特例。

（三）探討作圖法的可行性並嚴謹證明。

（四）推導多邊形邊數最大值公式解。

三、文獻回顧

出於對幾何的興趣，我們參考了許多關於格點多邊形的研究[1][2][3][4]。但先前的研究主要都是探討已知邊數的格點多邊形，例如格點三角形或四邊形。後來我看到一篇論文，提到了在$n \times n$網格中的凸多邊形邊數極值[5]，一時間我以為找到了曙光，但隨即發現這仍然不是我們想要的。

格點多邊形的相關研究大多探討格點多邊形的個數，而我們認為關於凸多邊形邊數極值[5]的研究成果可能對我們有所幫助，因此翻譯了此篇論文，我們發現它主要是探討當方形範圍很大時，最多邊數的多邊形邊數，以及當多邊形邊數很多時，方形區域邊長的極小值兩者近似值的電腦程式。基於上述原因，研究者曾以數學化的觀點對格點多邊形進行探討[8]，而

本研究則是進一步強化先前研究，尤其在邊數最大值與作圖法上達到精確性與嚴謹性，而非觀察規律或近似值，以完成前人尚未達成的目標。

研究方法

考慮平面笛卡兒（直角）坐標系，平面坐標系的格子點為x坐標、y坐標均為整數的點。所謂的格點多邊形則是以格子點為頂點的多邊形，包含凹多邊形及凸多邊形，不包含邊與邊之間存在交點的複雜多邊形，也不考慮平角。稱此種多邊形為P。本文所探討的邊數最大值是指在由$x = n$、$y = m$、x軸、y軸圍成的$n \times m$矩形範圍($(n, m) \in \mathbb{N}$, 不失一般性設$m \leq n$)（如圖 1）中，多邊形能擁有的最大邊數。

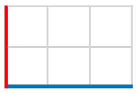


圖 1：(3,2)示意圖

一、名詞定義

（一）邊數k：格點多邊形P（每個頂點皆為格子點，含凸k邊形與凹k邊形）的邊數。

（二）函式$S(n, m)$：$\max\limits_{P}\{|P|: P$ 是(n, m)中的格點多邊形$\}$，亦即(n, m)範圍內，格點多邊形的邊數最大值。

二、研究架構與流程

本研究按照以下流程進行（圖 2）。

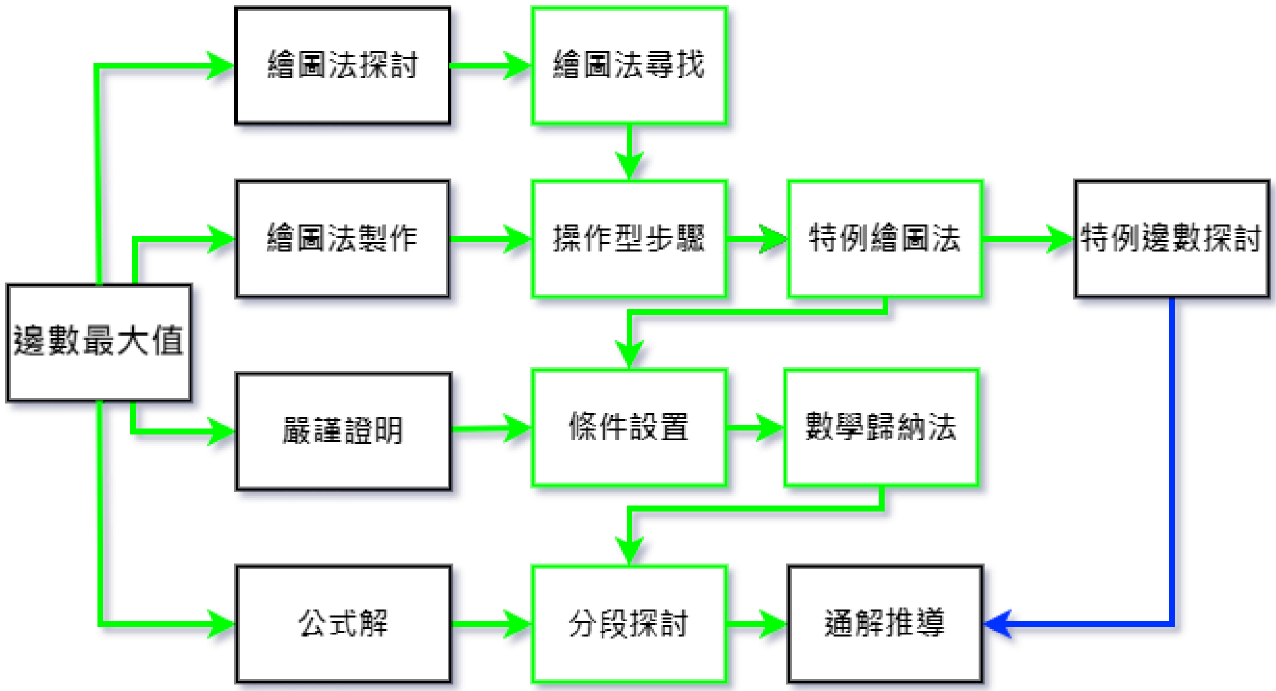


圖 2：研究架構圖

三、研究設備與器材

電腦、The Geometer's Sketchpad、GeoGebra、Excel、Wolfram Alpha。

研究結果與討論

一、探討不同作圖法的可行性

在先前的研究中[8]，研究者提出了「迂迴作圖法」用以推測多邊形邊數最大值，但是由於作圖法過於複雜，且由於此繪圖法各圖形之間並關聯性不強，因此可能無法證明。

在多方考量以及教授的指導下，作者開始研究對稱作圖法。目標為能以較小範圍的邊數最大值情況，推導至較大範圍。如此便能以數學歸納法推導出較大範圍的邊數最大值，較有機會推導證明。

二、探討作圖法的操作型步驟及特例

為使邊數達到最大值，必須充分利用每個格點，我們先從角落區塊著手，顯然擁有最大邊數的格點多邊形必須滿足以下性質。

定義： 有一格點多邊形P，其四個角落形成類似 U 及其旋轉而得的形狀(如圖 3 所示)，則稱此多邊形P具有「U 性質」。

此作圖法是藉由將各個矩形四個角落固定為圖 3 的樣子，並以相同的操作型步驟相連形成更大的圖形。

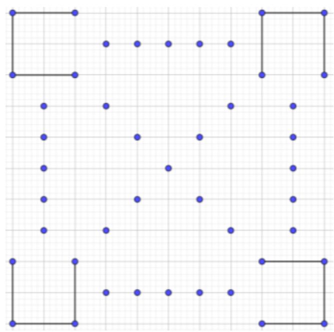


圖 3：U 性質示意圖

1. 結合法

此繪圖法有兩種合成方法，設a、b分別為兩種矩形的短邊：

(1) 間隔1單位結合法

各矩形之間間隔1單位，此時可依圖 4 的方法結合。

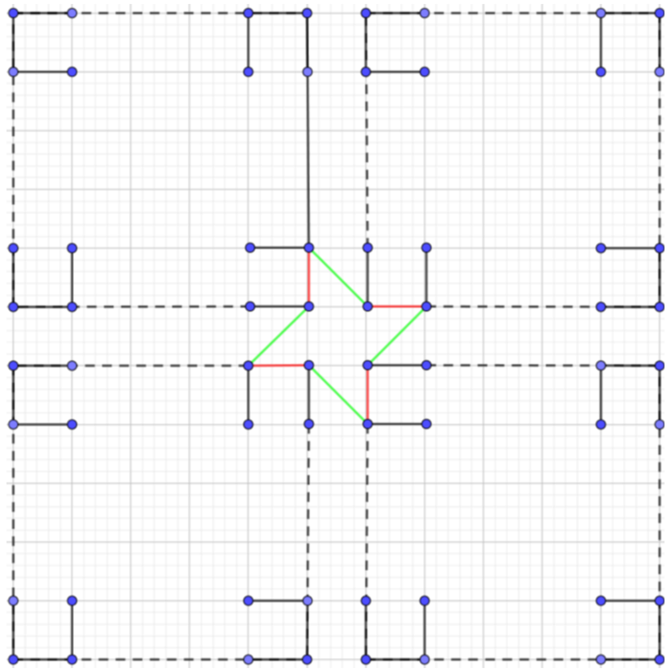


圖 4：間隔1單位結合法（刪除紅線、新增綠線）

(2) 間隔4單位結合法

各矩形之間間隔4單位，此時可依圖 5 的規律畫法結合。

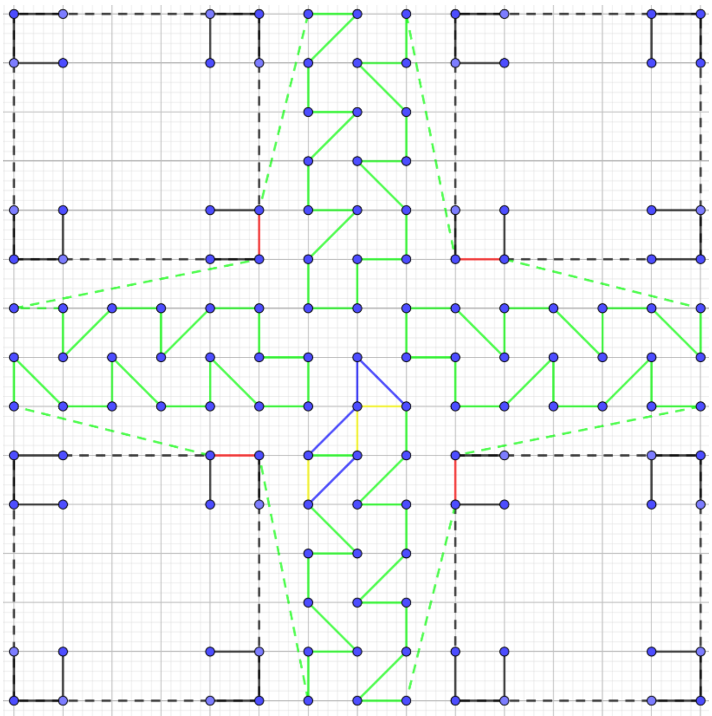


圖 5：間隔4單位結合法（刪除紅線、新增綠線、藍線為單邊獨有、黃線為單邊獨無，類推到各邊）

2. 作圖法基底探討

由於$\frac{1-1}{2}=0$、$\frac{2-4}{2}=-1$、$\frac{4-4}{2}=0$，因此無法藉由結合法得出的矩形範圍為$n\times1$、$n\times2$或$n\times4$。由於$n\times1$、$n\times2$與$n\times4$的三種基本範圍目前均無法確保繪出頂點數與格點數相等的多邊形，因此以此三者為基底的範圍（表 1）均需另外設置繪圖法，以此確保邊長大於12的矩形範圍均適用對稱作圖法。

表 1：範圍特例關係表

基本範圍	組成範圍
$n\times1$	$n\times3$
	$n\times6$
$n\times2$	$n\times5$
	$n\times8$
$n\times4$	$n\times9$
	$n\times12$

3. 基底操作型步驟

(1) $n\times3$範圍

(1-1) 基本構形（圖 6）：

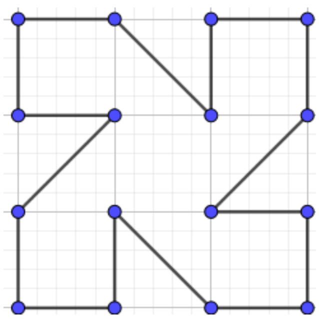


圖 6：$3\times m$範圍基本構形

(1-2) 兩短邊（圖 7）：

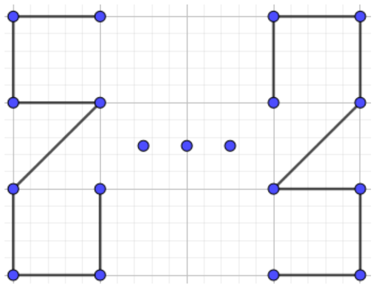


圖 7：$n\times3$範圍兩短邊畫法

(1-3) 中間部分（圖 8）（圖 9）（圖 10）：

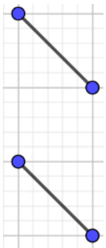


圖 8：$n\times3$範圍中間長1

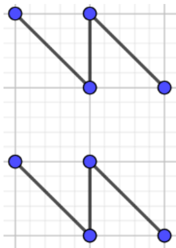


圖 9：$n\times3$範圍中間長2

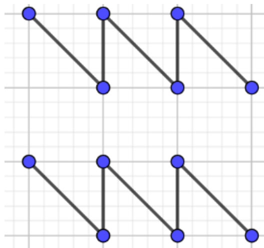


圖 10：$n\times3$範圍中間長3

(2) $n\times4$範圍：

由於我們發現僅有當長邊同為4時，繪圖法才無法運用所有格點，因此仍將討論長邊超過4的情況，方便之後討論原本應$n\times4$範圍為基底的矩形範圍。

(2-1) 基本構形（圖 11）（圖 12）：

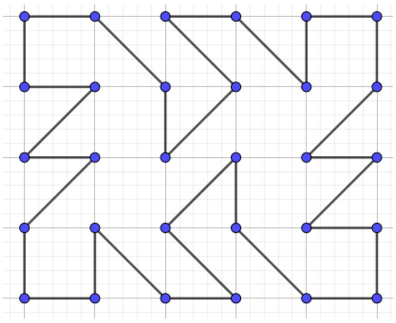


圖 11：$n\times4$範圍長邊奇數基本構形

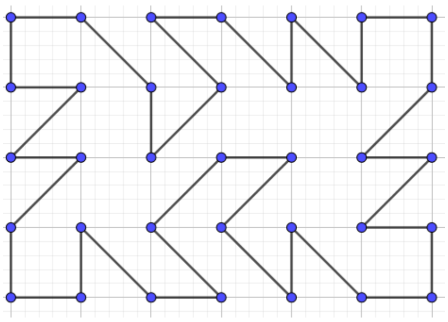


圖 12：$n\times4$範圍長邊偶數基本構形

(2-2) 兩短邊（圖 13）（圖 14）：

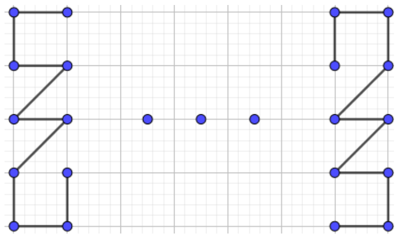


圖 13：$n\times 4$範圍兩短邊奇數畫法

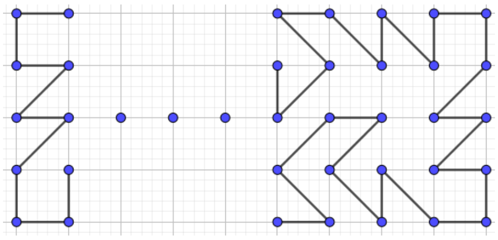


圖 14：$n\times 4$範圍兩短邊偶數畫法

先從兩短邊畫起，由上圖可知此時中間部分必為奇數，因此中間部分每兩個一循環。

(2-3) 中間部分（圖 15）（圖 16）（圖 17）：

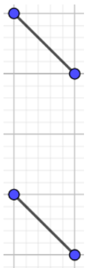


圖 15：$n\times 4$範圍中間長1

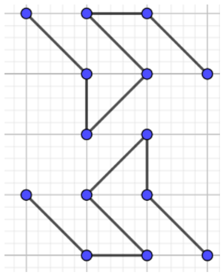


圖 16：$n\times 4$範圍中間長3

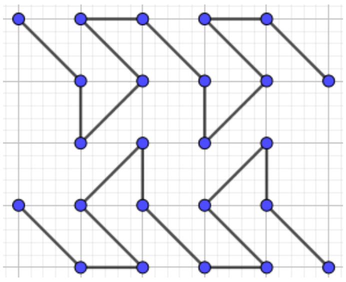


圖 17：$n\times 4$範圍中間長5

由$n\times 4$範圍組成的$n\times 9$範圍，除了9×9、9×10兩者由4×4組成的範圍外，均可合成，而特例圖形畫法如圖 18、圖 19。

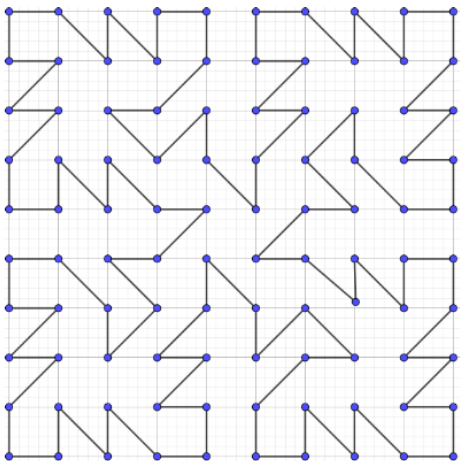


圖 18：9×9對稱繪圖法

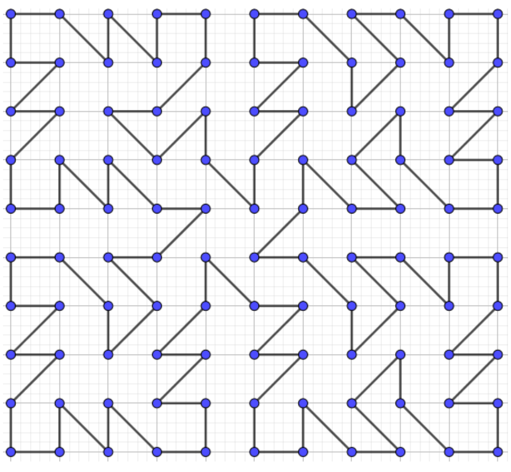


圖 19：10×9對稱繪圖法

由$n\times4$範圍組成的$n\times12$範圍，可改為用$n\times5$、$n\times6$範圍透過間隔1單位結合法組成。

(3) $n\times5$範圍：

(3-1) 基本構形（圖 20）（圖 21）：

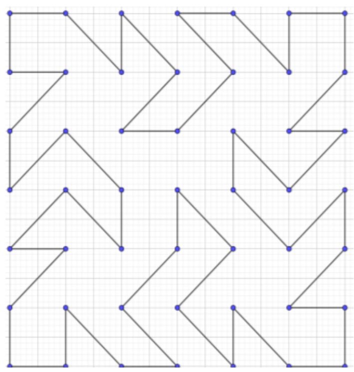


圖 20：$n\times5$範圍長邊偶數基本構形

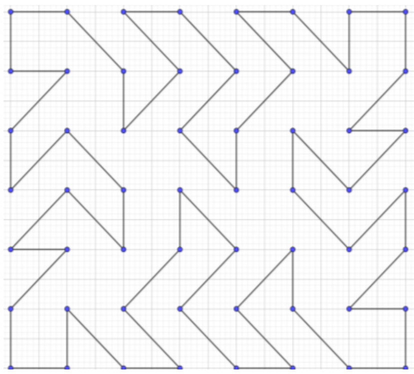


圖 21：$n\times5$範圍長邊奇數基本構形

(3-2) 兩短邊（圖 22）（圖 23）：

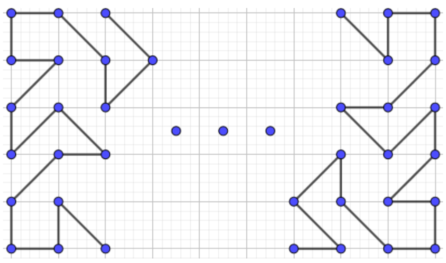


圖 22：$n\times5$範圍兩短邊奇數畫法

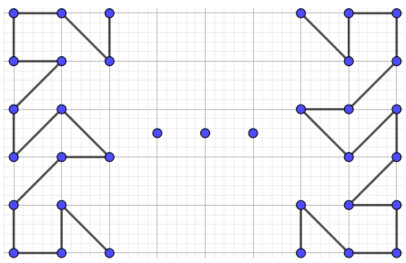
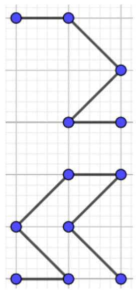


圖 23：$n\times5$範圍兩短邊偶數畫法

由上圖可知中間部分每兩個一循環，且須分奇偶數討論。

(3-3) 中間部分（圖 24）（圖 25）（圖 26）（圖 27）（圖 28）（圖 29）：



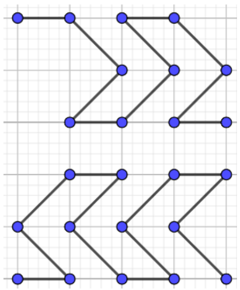


圖 24：$n \times 5$奇數範圍中間長1　圖 25：$n \times 5$奇數範圍中間長3

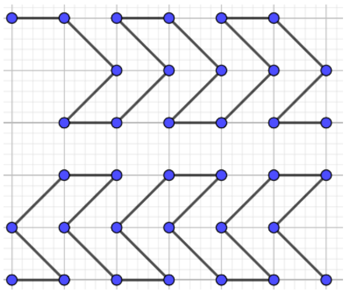
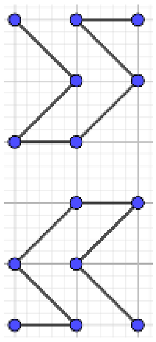


圖 26：$n \times 5$奇數範圍中間長5



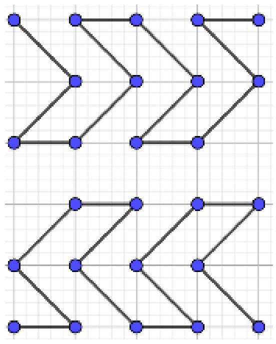


圖 27：$n \times 5$偶數範圍中間長2　圖 28：$n \times 5$偶數範圍中間長4

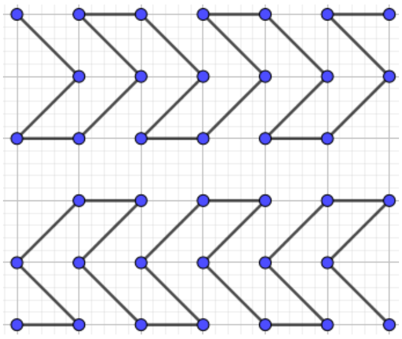


圖 29：$n \times 5$偶數範圍中間長6

(4) $n \times 6$範圍：

(4-1) 基本構形（圖 30）（圖 31）：

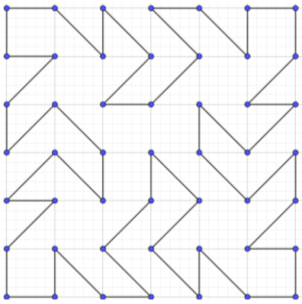


圖 30：$n \times 6$範圍兩短邊奇數畫法

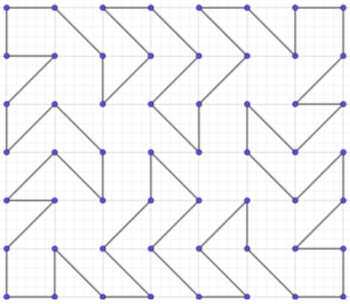


圖 31：$n \times 6$範圍兩短邊偶數畫法

(4-2) 兩短邊（圖 32）（圖 33）：

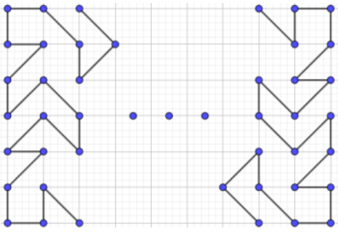


圖 32：$n \times 6$範圍兩短邊奇數畫法

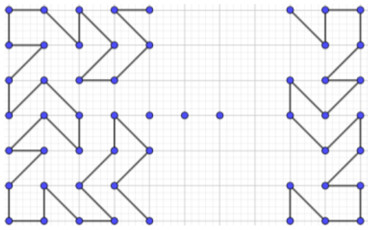


圖 33：$n \times 6$範圍兩短邊偶數畫法

由上圖可知中間部分每兩個一循環，且須分奇偶數討論。

(4-3) 中間部分（圖 34）（圖 35）（圖 36）（圖 37）（圖 38）（圖 39）：

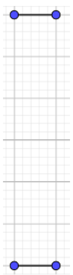


圖 34：$n \times 6$奇數範圍中間長1

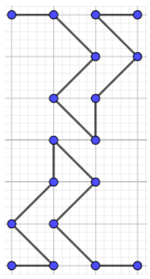


圖 35：$n \times 6$奇數範圍中間長3

以及以4×4為基底的9×8、10×8、是否存在頂點數與格點數相等的多邊形。畫法如圖 40、

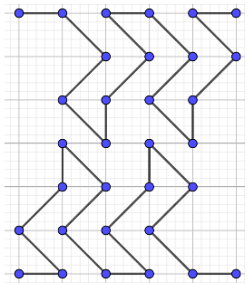
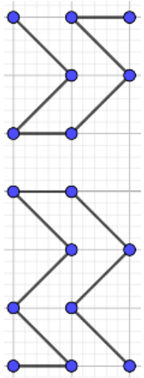


圖 36：$n\times 6$奇數範圍中間長5



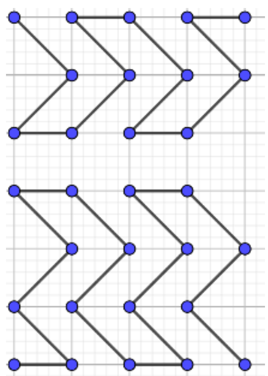


圖 37：$n\times 6$偶數範圍中間長2　圖 38：$n\times 6$偶數範圍中間長4

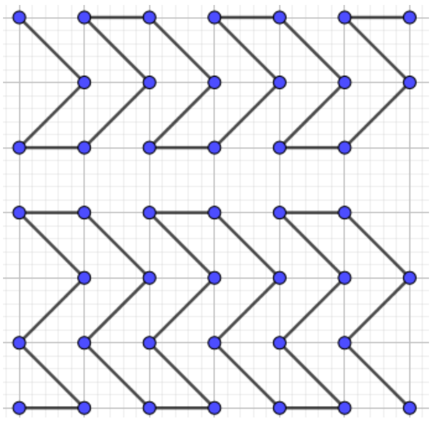


圖 39：$n\times 6$偶數範圍中間長6

$n\times 8$範圍的矩形則可由較短邊為3、4的矩形合成，因此只須討論以2×2為基底的8×8，以及以4×4為基底的9×8、10×8、是否存在頂點數與格點數相等的多邊形。畫法如圖 40、圖 41、圖 42。

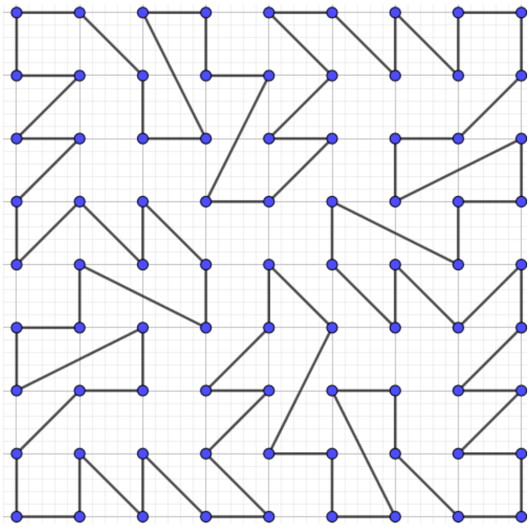


圖 40：8×8對稱繪圖法

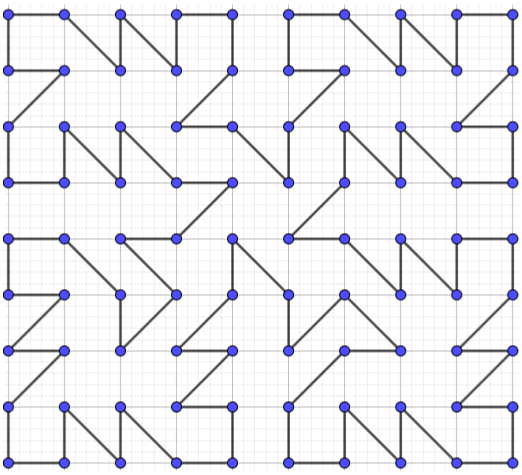


圖 41：9×8對稱繪圖法

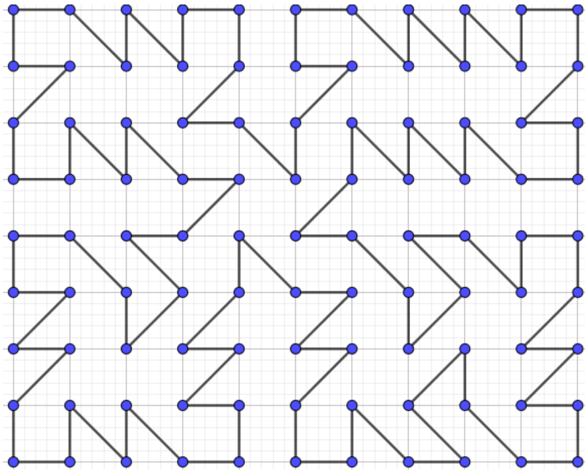


圖 42：10×8對稱繪圖法

此外，$n\times7$範圍可由$n\times3$範圍合成、$n\times10$範圍可由$n\times3$範圍合成、$n\times11$範圍可由$n\times5$範圍合成，在此不多贅述。至此，$n\times1$至$n\times11$的情況已完全推出。

三、嚴謹證明作圖法的可行性

只要存在符合條件且短邊為k的矩形，那短邊分別為$2k+1$、$2k+4$的矩形也就能合成出來。先前討論的部分，僅有短邊為3的繪圖法能運用所有格點作為頂點。因為任何數超過4，都必定能透過不斷$-1\div2$或$-4\div2$的動作使數字變小，而$(3-1)\div2=1$。因此不論短邊為多少，都應該能以短邊為1、2、4的繪圖法合成，但因三者均無作圖法可證明任意長邊均存

在頂點數與格點數相同的多邊形，因此以其為基底的圖形均需另外探討。

定理一： 除下述特例外，對於任意正整數(n,m)，其中$m \leq n$，存在k邊的格點多邊形P滿足 U 性質，且$k=(n+1)(m+1)$。

當$m \neq 1 \vee 2$ 或$m=n \neq 4$或$m=n=1$時，$n \times m$矩形範圍中均存在頂點數與總格點數相同的多邊形，且四個角落滿足 U 性質，以下證明。

設$m=k\{k>12\}$時，短邊為k的矩形範圍中，頂點數與總格點數相等的多邊形，皆可由短邊$1 \sim k-1$的矩形範圍中，頂點數與格點數相等的多邊形組成。

則$m=k+1$時：

$\because$若$k+1$為偶數$\frac{k+1-4}{2}=\frac{k-3}{2}<k$、若$k+1$為奇數$\frac{k+1-1}{2}=\frac{k}{2}<k$

$\therefore m=k+1$時成立

依照二種結合法，我們可以將相同四塊矩形內頂點數與格點數相等的多邊形結合成更大矩形範圍內頂點數與格點數相等的多邊形。

由$m=12$時成立且數學歸納法成立可知性質成立。

四、推導多邊形邊數最大值公式解

（一）一般性情況

不失一般性設$n \geq m$，由對稱作圖法及數學歸納法可知，當$m \neq 1 \vee 2 \wedge$當$m=1$時$n=1 \wedge$

若$m=4$則$n\neq 4$時，則多邊形邊數最大值為總格點數，也就是$(n+1)(m+1)$。

（二）$m=1$

因為矩形本身就是四邊形，因此邊數最大值至少為4。

定理二： 對於任意正整數$n\geq 1$，在$n\times 1$的矩形範圍內，格點多邊形的邊數最大值恆為4。

證明：

五邊形有五個頂點，對於$n\times 1$的矩形範圍而言，可分成以下三種情況討論。

若一長邊上有五頂點，則五頂點y坐標相同，因超過三點共線，無法形成五邊形。

若一長邊上有四頂點，另一長邊上有一頂點，則四頂點y坐標相同，一頂點不同，則五頂點共有四頂點y坐標相同，一頂點不同，將各點y坐標經環狀排列後可發現共有$\frac{\frac{5!}{4!1!}}{5}=1$種結果，也就是$y$坐標相同4點必定相鄰，因超過三點共線，無法形成五邊形。

若一長邊上有三頂點，另一長邊上有二頂點，則三頂點y坐標相同，另外兩頂點y坐標相同，但兩長邊上的點y坐標互不相同，不失一般性設五頂點為$A(a,0)$、$B(b,0)$、$C(c,0)$、$D(d,1)$、$E(e,1)$ $\{a\geq b\geq c,d\leq e,(a,b,c,d,e)\in Z\}$，則經環狀排列後可發現共有$\frac{5!}{5}=24$種結果，$(a,0)$、$(b,0)$、$(c,0)$三點相鄰的方法數為$\frac{3!}{3}\times 3!=12$種，又同一種簡單多邊形有兩種繪圖方向，因此可形成五邊形的方法數為$\frac{24-12}{2}=6$種，按頂點繪圖順序排列：

A、B、D、C、E 因頂點B位於頂點C右邊且頂點D位於頂點E左邊，所以邊$\overline{BD}$與邊$\overline{CE}$相交，因此不為簡單五邊形（圖 43）。

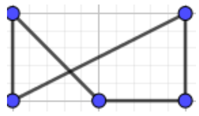


圖 43：多邊形A、B、D、C、E示意圖

A、C、D、B、E 因頂點B位於邊$\overline{AC}$上，因此不為簡單五邊形（圖 44）。

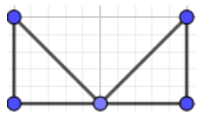


圖 44：多邊形A、C、D、B、E示意圖

A、B、E、C、D 因頂點A位於頂點C右邊且頂點D位於頂點E左邊，所以邊$\overline{DA}$與邊$\overline{EC}$相交，因此不為簡單五邊形（圖 45）。

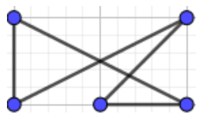


圖 45：多邊形A、B、E、C、D示意圖

A、C、E、B、D 因頂點B位於邊$\overline{AC}$上，因此不為簡單五邊形（圖 46）。

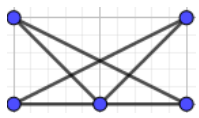


圖 46：多邊形A、C、E、B、D示意圖

A、D、C、B、E 因頂點A位於頂點B右邊且頂點D位於頂點E左邊，所以邊$\overline{AD}$與邊$\overline{BE}$相交，因此不為簡單五邊形（圖 47）。

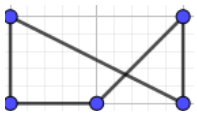


圖 47：多邊形A、D、C、B、E示意圖

A、E、C、B、D 因頂點B位於頂點C右邊且頂點D位於頂點E左邊，所以邊$\overline{BD}$與邊$\overline{CE}$相交，因此不為簡單五邊形（圖 48）。

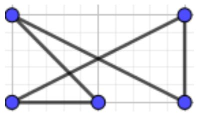


圖 48：多邊形A、E、C、B、D示意圖

由上可知對於$n \times 1$的矩形範圍而言，我們不可能建構出簡單格點五邊形，邊數更多的多邊形自然也就不可能，因此邊數最大值恆為4，也就是$S(n,1)=4$。

（三）$m=2$

定理三： 對於任意正整數$n \geq 2$，在$n \times 2$的矩形範圍內，格點多邊形的邊數最大值恆比範圍內的格點總數少2。

證明：

由圖 49 的繪圖法可發現，無論n為多少，所有格點中均有兩點不為矩形的頂點，且後續圖形均為前一圖形向右延伸一梯形，此時多邊形邊數恆比格點數少2，也就是$3(n+1)-2=3n+1$，因此$S(n,2) \geq 3n+1$。

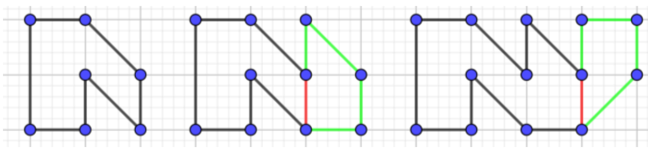


圖 49：$m=2$、$n \geq 2$範圍內的一種繪圖法（紅線為前一圖刪除邊，綠線為新增邊）

考慮切除一個面積$\frac{1}{2}$單位的格點三角形，邊數增加情況：

若三角形三頂點為2圖形內部格點、1圖形邊上格點，則由於圖形頂點重合，圖形變為複雜多邊形（圖 50）。

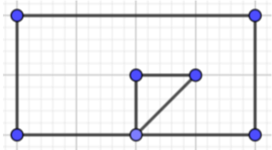


圖 50：切除三角形三頂點為2圖形內部格點、1圖形邊上格點示意圖

若三角形三頂點為3圖形內部格點，則圖形邊數增加3，但由於當$m = 2$時，範圍內所有內部格點共線，且本研究排除平角，因此無法切割。

若三角形三頂點為1個圖形內部格點、2個圖形邊上格點，則若三角形一邊為圖形原邊中段（圖 51），則邊數增加3。

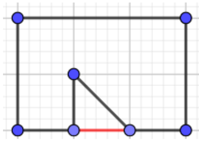


圖 51：三角形一邊為圖形原邊中段示意圖

若三角形三頂點為1個矩形內部格點、1個矩形邊上格點、1個矩形頂點，則透過截角可使得邊數增加3（圖 52）。

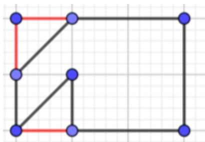


圖 52：三角形三頂點為1個矩形內部格點、1個矩形邊上格點、1個矩形頂點示意圖

因此利用1個內點至多使$2 \times n$範圍內圖形增加3邊，而內點數為$(2-1)(n-1) = n-1$，所以$S(n,2) \leq 4 + 3(n-1) = 3n+1$。

由上可知$3n+1 \leq S(n,2) \leq 3n+1 \Rightarrow S(n,2)=3n+1=(n+1)(m+1)-2$。

（四）$m=n=4$

由圖 53 的繪圖法可推得當$n=m=4$時，$S(4,4) \geq 24$，目前上界除了窮舉，尚未找到其他有效方式證明$S(4,4)=24$，但窮舉所需討論的情況過多，因此仍在尋找其他有效證明。

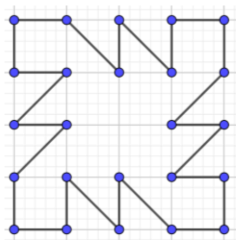


圖 53：$S(4,4)$下界圖

（五）公式解

表 2：不同m、n值的邊數最大值

（綠底為4、藍底為$3n+1$、黃底尚待證明、白底為$(n+1)(m+1)$）

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2		7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37
3			16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
4				24	30	35	40	45	50	55	60	65
5					36	42	48	54	60	66	72	78
6						49	56	63	70	77	84	91
7							64	72	80	88	96	104

8	×	×	×	×	×	×	×	81	90	99	108	117
9	×	×	×	×	×	×	×	×	100	110	120	130
10	×	×	×	×	×	×	×	×	×	121	132	143
11	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	144	156
12	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	169

如上所示，由於分段情況複雜，難以簡單函數表示。格點多邊形最大值的公式解如下：

$$S(n,m)=\begin{cases}4\ \{if\ n=1\vee m=1\}\\3n+1\ \{if\ n=2\vee m=2\}\\24\ \{if\ m=n=4\}\\(n+1)(m+1)\ \{otherwise\}\end{cases}$$

五、討論

（一）公式解嚴謹性

先前研究中所推導出的通解，均是依靠圖形規律或直觀概念進行推導，然而推導與證明為二件事，因此目前正在試著證明以提升嚴謹性。

（二）作圖法可行性

先前研究中所使用的迂迴作圖法太複雜因此無法證明，也就無法透過作圖法證明除了特例之外，其餘範圍均存在邊數與總格點數相同的多邊形。目前提出了對稱作圖法驗證上述性質，並成功藉由數學歸納法證明了作圖法的可行性，但$n\times 1\{n>1\}$、$n\times 2$以及4×4範圍還需另外探討。

（三）研究目的的聚焦

先前研究同時探討格點多邊形的多種性質，因此無法聚焦於較顯著的研究成果上。目前將研究目的限縮至目前最完整的格點多邊形邊數最大值。

結論與應用

一、總結

（一）探討不同作圖法的可行性

比較先前作圖法的缺點，並提出能解決多數情況的對稱作圖法。可以試著尋找其他作圖法。

（二）探討作圖法的操作型步驟及特例

成功寫出對稱作圖法的操作型步驟並解決多數特例繪圖法與邊數最大值。短邊為2，以及長短邊同為4的矩形範圍需另外討論作圖法。

（三）嚴謹證明作圖法的可行性

目前以數學歸納法成功證明，短邊12單位以上的任意矩形範圍均適用對稱作圖法。迂迴作圖法的可行性還需另外探討。

（四）推導多邊形邊數最大值公式解

證明除了短邊為1、2，或長短邊同為4外的任意矩形範圍均存在邊數與總格點數相等的多邊形。另外藉由環狀排列以及排除平角，證明短邊為1的矩形範圍邊數極值為4，以及藉由夾擠定理證明短邊為 2 的矩形範圍邊數極值為$3n+1$。

二、未來展望

（一）推導出邊長為4的方形範圍內格點多邊形的邊數最大值。

（二）試著尋找其他作圖法。

（三）推廣到任意多邊形範圍。

（四）推廣到三角、六角坐標系。

（五）應用至特定範圍內的空間規劃，如遊樂場的迷宮、駕訓班車道與積體電路設計。

參考文獻

1. 蔡郁茹、鄧欽祥（2004）。中小學科學展覽會作品：正方形的捉迷藏。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/44/c08/080406.pdf。
2. 健賓、林祈詮、鍾昕陽、白竟言、葉心慈（2008）。中小學科學展覽會作品：方之律動--方格板上的「斜」正方形。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/elementary/080401.pdf。
3. 陳昱廷、陳靖、劉子瑋（2015）。中小學科學展覽會作品：$n\times n$方格中的正方形。2021 年 8 月 7 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/55/pdf/030403.pdf。
4. 廖宥翔、林艾彤、田宜禾、蔡敦尹（2019）。中小學科學展覽會作品：翻滾吧！正方形—探討正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。2021 年 8 月 10 日取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/59/pdf/NPHSF2019-080403.pdf。
5. Dragan M. Acketa, Jovisa D. Zunic (1995)。語意學者論文：On the Maximal Number of Edges of Convex Digital Polygons Included into an m×m-Grid。2021 年 8 月 31 日取自 https://reurl.cc/8227OX。
6. 維基百科（2021）。多邊形。2021 年 9 月 20 日取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%A4%9A%E8%BE%B9%E5%BD%A2#%E7%B0%A1%E5%96%AE%E5%A4%9A%E9%82%8A%E5%BD%A2。
7. 蔡聰明（2000）。數學的發現趣談。臺北市：三民出版社。
8. 劉冠陞（2022）。臺灣國際科學展覽會作品：坐標平面上的格點多邊形性質。2022 年 3 月 7 日取自 https://reurl.cc/91eadj。

【評語】010012

作者在一些特殊情況繪出各個基本圖形，進而在矩形短邊為 12 單位以上時，以數學歸納法證明格點多邊形存在性，實屬不易。但誠如作者所言，可再改進論證的嚴謹性。

作者以 nxm 的二維格子點為頂點，嘗試畫出邊數最多的多邊形。作者以一系列方法畫出符合某些條件的多邊形，它們看似邊數很多，但它們與最佳解的相異程度則未被探討。建議未來可嘗試完整解出 m=2 的情況，抑或研究最佳解邊數