# 2023 年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號　**010006**

參展科別　數學

作品名稱　「分」庭抗禮—礦石分配之研究

得獎獎項

就讀學校　臺北市立建國高級中學

指導教師　蔡韋弘

作者姓名　陳諺德

關鍵詞　整數分割、幺半群、霍爾定理

# 作者簡介

我是陳諺德，就讀建中科學班。我喜歡彈吉他、彈鋼琴、打籃球。從國中開始對數學產生興趣，也曾在國中參加臺北市科展。雖然做科展充滿了不確定性，且不知道會不會有結果產生，但在研究過程中，不像制式化的課程教育，而是自己探索喜歡的問題，結合各個領域的知識進行探究，得出結論時更是有滿滿的成就感。除了課業、社團活動外，科展也為我的高中生活增添不少色彩。

# 摘要

現在手中有許多礦石及$k$個袋子，我們認定「一套」礦石是將$n$個礦石分成$k$份的$k$堆礦石。每次取一套礦石，僅改變每堆礦石對應的袋子而不改變每堆的數量，將礦石放入對應的袋子中，這個操作稱為「放一套」。本研究先探討需放入的最少套數使得每個袋子中的礦石數一樣多，後段則討論可使礦石均分在袋子中的所有套數所形成之集合，亦結合部分圖論性質以完整證明。如果改變$n, k$及一套中的礦石分配方式，對於所需放入的套數有何影響？我從$k = 2$、$k = 3$慢慢試驗，搭配程式的輔助，進而快速找出需放最少套數的方法，及可達成均分套數與礦石分配的關聯。

# Abstract

Now there are lots of ores and $k$ bags for filling up ores that have been numbered as 1 to $k$. Define "a set" of ores as a partition of $k$ groups of ores with a total of $n$ ores. For each time we can do the following operation called "arranging". First permute these $k$ groups of ores, then put the $i^{th}$ group to the $i^{th}$ bag.

In this research, I tried to observe the pattern of the least arranging required, defined as $s$, to make every bag contain the same number of ores. The second half of this research is about every number $x$ that satisfies the following condition: there exists at least one way to arrange the ores $x$ times so that every bag contains the same number of ores. I combined some graph theory properties and discussed some cases to prove the results I have found. If we change the value of $n$, $k$, and the way to partition the ores in a set, how will it affect the number of arrangements that meets the condition? I used some programming skills to carry out experiments starting from $k = 2$ and categorized the sets by the value of $s$. I tried to find the similarities in each category, which turned into some results in the research.

# 壹、 前言

## 一、研究動機

在科學研習月刊第60-4期中看見「森棚教官數學題-撿礦石」這道題目，覺得他十分具發展性，也讓我藉此機會碰觸較不熟悉的組合問題。我好奇如果改變題目中一套中的礦石數、全部的袋子數，關於所需最少套數使得每個袋子中的礦石數相同的問題，是否可以找出公式或是快速的求法呢？在此兩變數都固定的情況下，一套的礦石分配又會造成什麼結果？

原題：阿冠在地球科學野外採集課程中，帶著三個袋子到野外撿礦石；他自己認定「一套」 是指分成 1,2,4個的七個礦石。每湊齊一套， 他就把這七個礦石往袋子裡放。但是 1,2,4 分別要放到不同的袋子中，這樣叫做「放一套」，而他發現放三套，就可以讓三個袋子的礦石數目一樣：(1,2,4) + (4,1,2) + (2,4,1) = (7,7,7)而且如果只放一套或兩套，則不可能讓三個袋子的礦石數一樣。換言之，阿冠有三個袋子，若要求放三套才能讓各袋礦石數相同，那把1,2,4 稱為一套就可以辦到。(注意：若阿冠把 1,2,3 稱為一套是不對的，雖然有 (1,2,3) + (2,3,1) + (3,1,2) = (6,6,6)，但是其實放兩套就可以讓礦石數相同了： (1,2,3) + (3,2,1) = (4,4,4)。)另外，小誼則有四個袋子，但她希望放兩套就能讓礦石數相同，那她可以把10個礦石按1,2,3,4 分稱為一套，因為這樣有 (1,2,3,4) + (4,3,2,1) = (5,5,5,5)，而且只放一套顯然不能成功。

## 二、研究目的

設一套中有$n$個礦石，共有$k$個袋子，將一套（將$n$個礦石分成$k$份）中各堆礦石數以$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$記（不失一般性，可假設$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$）。以$s(a_1, a_2, \ldots, a_k)$表示所需最少的套數使得每個袋子中的礦石數相同，已知相關條件時，也會以$s$表示之。

（一） 探討在不同的$n$與$k$值下，$s(a_1, a_2, \ldots, a_k)$值與$a_i$ 、$n$ 、$k$的關係。

（二） 找出使得$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) < k$的條件。

（三） 找出可達成均分套數之集合與$a_1, a_2, \ldots, a_k$關係

# 貳、 研究方法與過程

## 一、研究方法

利用 C++寫出輸入$n$及$k$值，能輸出所有$(a_1, a_2, \dots, a_k)$滿足$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$且$\sum_{i=1}^{k} a_i = n$的非負整數解，先前以手算得出每組$(a_1, a_2, \dots, a_k)$所對應的$s(a_1, a_2, \dots, a_k)$。將$k$代入2 、3等較小的數字，計算改變$n$時的各組$s(a_1, a_2, \dots, a_k)$值，發現$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = k$的$(a_1, a_2, \dots, a_k)$佔大多數，僅少數解使$s(a_1, a_2, \dots, a_k) < k$，故也將$s(a_1, a_2, \dots, a_k) < k$解的討論納入研究問題中。

在研究中為紀錄礦石擺放的方式找出規律與共同性，試圖以矩陣紀錄礦石擺放方式，將每一直行視為每個袋子，而每一橫列代表放入一套礦石。例如若依序以(1,2,4) 、(2,4,1) 、(4,1,2)放入礦石，則以下列矩陣表示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

隨著$k$的數值越來越大，手算數據花費大量時間，也容易出錯，故目前以程式解決，當輸入$n$時可輸出對於此組$n, k$對應的所有分配方式（利用圖一輸出的順序）之$s$值。

## 二、定義

（一）$\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$表示關於$(a_1, a_2, \dots, a_k)$這$k$個數量礦石的一種操作，代表將放$b_i$個礦石進入第$i$個袋子。一次操作即代表放入一套礦石入袋，其中$b_1, b_2, \dots, b_k$為$a_1, a_2, \dots, a_k$重新排列的結果。

（二）$T$代表各個袋子礦石數的總和。

（三）$A(n, k, s)$代表在一套中有$n$個礦石，且有$k$個袋子的情況下，使每個袋子中礦石數相同的所需最小套數為$s$的礦石分配方式個數。

（四）$App(a_1, a_2, \dots, a_k)$代表可達成均分之套數集合，即$x$屬於此集合若且唯若放入$x$套礦石時至少有一種方法使得每個袋子中的礦石數相同。已知相關條件時，以$App$表示之。

三、研究過程

首先，我從$k = 2$開始進行試驗，發現許多組$(a_1, a_2)$得出的$s(a_1, a_2)$皆為2，唯獨當$a_1 = a_2$時$s(a_1, a_2)$才為1。經過思考發現以下三個性質：

**性質1：$s(0, 0, \dots, n) = k$。**

證明：令$s(0,0, \dots, n) = m$。若$m < k$，則有一種方法可使當放入$m$套礦石時，每個袋子的礦石數相同，即將$m$堆礦石數為$n$的礦石放入$k$個袋子可使每個袋子礦石數相同。由於$m < k$，故必至少有一個袋子中沒有礦石（矛盾），所以$m < k$不合。在放入$k$套時，可以以下列的矩陣置入礦石達成條件，故$k$為所需最小套數，即$s(0,0, \dots, n) = k$，證畢。

$$\begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

**性質2：$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$若且唯若$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$。**

證明：先證充分性。假設$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a$，則一次$\{a, a, \dots, a\}$（共$k$項）的操作就可使每個袋子中都有$a$個礦石，故有$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$。再證必要性。若$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$，則代表一次操作即可使各袋中的礦石數相同。因可將袋子重新排列，故可假設此次操作為$\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$（即將有$a_i$個礦石放入的袋子編號為第$i$個袋子），若有兩數$a_i, a_j$（其中$1 \leq i < j \leq k$）滿足$a_i \neq a_j$，則經過1次操作後第$i$及第$j$個袋子中的礦石數不同，與$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = 1$矛盾，故$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$。證畢。

**性質3：對於任意一組$(a_1, a_2, \dots, a_k)$皆滿足$s(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq k$。**

證明：若有一數$m < k$使得放入$m$套礦石進入袋子後，可使$k$個袋子中的礦石數相同，則定理成立。若不然，則當放入$k$套礦石時，必可依序以$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \to \{a_2, a_3, \dots, a_k, a_1\} \to \{a_3, \dots, a_k, a_1, a_2\} \to \cdots \to \{a_k, a_1, a_2 \dots, a_{k-1}\}$的方式放入這$k$套礦石，因每個袋子皆裝了$\sum_{i=1}^{k} a_i = n$個礦石，即符合題目條件，故$s(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq k$。證畢。

接著，我便開始對$k = 3$進行試驗，以下為我對$n = 2$、3、4、5、6，利用窮舉法得到的實驗結果：

$n = 2$：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $s(a_1, a_2, a_3)$ |
|---|---|
| (0,0,2) | 3 |
| (0,1,1) | 3 |

$n = 3$：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $s(a_1, a_2, a_3)$ |
|---|---|
| (0,0,3) | 3 |
| (0,1,2) | 2 |
| (1,1,1) | 1 |

$n = 4$：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $s(a_1, a_2, a_3)$ |
|---|---|
| (0,0,4) | 3 |
| (0,1,3) | 3 |
| (0,2,2) | 3 |
| (1,1,2) | 3 |

$n = 5$：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $s(a_1, a_2, a_3)$ |
|---|---|
| (0,0,5) | 3 |
| (0,1,4) | 3 |
| (0,2,3) | 3 |
| (1,1,3) | 3 |
| (1,2,2) | 3 |

$n = 6$：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $s(a_1, a_2, a_3)$ |
|---|---|
| (0,0,6) | 3 |
| (0,1,5) | 3 |
| (0,2,4) | 2 |
| (0,3,3) | 3 |
| (1,1,4) | 3 |
| (1,2,3) | 2 |
| (2,2,2) | 1 |

由於有性質2的輔助，我們知道已經解決$s(a_1, a_2, a_3) = 1$的情況。從以上結果可以發現，$n = 2$、4、5時，對於每一組$(a_1, a_2, a_3)$，得到的$s(a_1, a_2, a_3)$皆為3（即為此時的$k$）。再觀察$n = 3$、6時，$s(a_1, a_2, a_3)$不等於3的$(a_1, a_2, a_3)$皆為等差數列。這些實驗讓我先猜測以下的性質4，後來也提出了證明。

**性質4：若$\boldsymbol{n, k}$互質，則$\boldsymbol{s(a_1, a_2, \dots, a_k) = k}$。**

證明：利用反證法。假設$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = m$，且$m < k$，則在放入$m$套礦石後，$T = mn$。假設每個袋子裡有$b$個礦石，則$T = kb$，故$kb = mn$。可得$k|mn$。又因$n, k$互質，所以$k|m$。由整除基本性質可知$m \geq k$，與題設$m < k$矛盾，搭配性質3可得$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = k$。證畢。

由性質4可知，現在情況數已經大量減少，全部$n, k$互質的情況皆已解決。也讓我有另一個研究的思路，可從$k$為質數的情形下手，再設法處理$k$為合數時的會有的性質。

另外，性質4可以推廣成對$n, k$非互質的$s$值條件：

**推廣：令$\boldsymbol{gcd(n, k) = d}$，則$\boldsymbol{\frac{k}{d} \mid s(a_1, a_2, \dots, a_k)}$。**

證明：假設$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = s$，則在放入$s$套礦石後，$T = sn$。假設每個袋子裡有$b$個礦石，則$T = kb$，故$kb = sn$，可得$\frac{k}{d} \times b = s \times \frac{n}{d}$，因$b \in \mathbb{N}$，故$\frac{k}{d} \mid s \times \frac{n}{d}$。因$gcd\left(\frac{k}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$，故$\frac{k}{d} \mid s$。證畢。

$k=3$時，經過性質3的大量情況排除，我們只剩下$n$為3的倍數需討論。用 C++列出$n=9$的所有$(a_1,a_2,a_3)$，再計算對應的$s(a_1,a_2,a_3)$，發現$a_1,a_2,a_3$成等差數列與$s(a_1,a_2,a_3)=2$亦和$n=3,n=6$時一樣同時發生。這讓我猜測以下的推論1：

**推論1：$k=3$時，$a_1,a_2,a_3$成等差數列（公差不為$0$）是$s(a_1,a_2,a_3)=2$的充要條件，且此時$n$為3的倍數。**

證明：先證充分性。若$a_1,a_2,a_3$成等差數列，則$a_1+a_3=2a_2$，由$\sum_{i=1}^{k}a_i=n$的初始條件可得$3a_2=n$，故$n$為3的倍數。利用兩次操作$\{a_1,a_2,a_3\}\to\{a_3,a_2,a_1\}$，即可使每個袋子都有$2a_2$個礦石，滿足題目條件，故$s(a_1,a_2,a_3)\le 2$，又$a_1\ne a_2\ne a_3$，由定理一知$s(a_1,a_2,a_3)\ne 1$，故$s(a_1,a_2,a_3)=2$。再證必要性。若$s(a_1,a_2,a_3)=2$，假設放入2套時，每個袋子中有$b$個礦石，則可得$2n=kb=3b$，故$n$為3的倍數。令$n=3m$（$m$為正整數），則$6m=3b$，$b=2m$。若因$3a_1<a_1+a_2+a_3=n=3m$，故$a_1<m$。由$2a_1<2m=b$可知，若兩次操作中，皆放$a_1$個入同一個袋子裡，則此袋子的總數不及$b$。故$a_2$、$a_3$其中必有一數等於$2m-a_1$，才能與$a_1$搭配，使兩數相加為$b$。利用$a_1+a_2+a_3=3m$可得到另一數為$m$，此時便發現$a_1,m,2m-a_1$成等差數列，即$a_1,a_2,a_3$成等差數列。證畢。

另外值得注意的是，性質4的證明考慮了礦石總數$T$，搭配整除的性質，證明出結論，我覺得這個思考方向可能會在這次研究中的證明多次出現，也利用此思路證明了推論1。

接著，我便對$k=5$進行實驗，利用程式計算每組$a_1\sim a_k$的$s$值，以 excel 記錄$n=5$、$10$、$15$、$20$、$25$、$30$的實驗結果。從實驗中發現下面的性質5：

**性質5：若$a_1,a_2,\dots,a_k$ 中有$i$個數為$\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$，則$s(a_1,a_2,\dots,a_k)\le k-i$。**

證明：可調整$a_1,a_2,\dots,a_k$的順序使得$a_1=a_2=\cdots=a_i=\frac{n}{k}$，且$a_{i+1}\le a_{i+2}\le\cdots\le a_k$。若有一數$m<k-i$使得放入$m$套礦石進入袋子後，可使$k$個袋子中的礦石數相同，則定理成立。若不然，則當放入$k-i$套礦石時，必可依序以$\{a_1,a_2,\dots,a_i,a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_k\}\to$
$\{a_1,a_2,\dots,a_i,a_{i+2},a_{i+3},\cdots,a_k,a_{i+1}\}\to\{a_1,\ \dots,a_i,a_{i+3},a_{i+4},\cdots,a_k,a_{i+1},a_{i+2}\}\to\cdots\to$
$\{a_1,a_2,\dots,a_i,a_k,a_{i+1},\cdots,a_{k-1}\}$的方式，此時每個袋子皆裝有$\frac{n(k-i)}{k}$個礦石，即符合題目條件，故$s(a_1,a_2,\dots,a_k)\le\ k-i$。證畢。

從這個性質亦可以進一步做推廣：

**推廣：若可將$\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}$分割成$\boldsymbol{P_1, P_2, \cdots, P_r}$兩兩互斥的$\boldsymbol{r}$個集合，使每組數字之平均皆為$\boldsymbol{\frac{n}{k}} \in \mathbb{N}$。若令$\boldsymbol{P_i}$內有$\boldsymbol{q_i}$個數，則$\boldsymbol{s(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq min\left(k, lcm(q_1, q_2, \ldots, q_r)\right)}$。**

證明：利用如性質5的$a_{i+1} \sim a_k$輪換擺放方式，可以將$P_1, P_2, \cdots, P_r$內的元素輪換擺放，將$P_i$內的$q_i$堆礦石放入$q_i$個袋子中，利用性質3，必可放入$q_i$套礦石使此$q_i$個袋子中礦石數相同。若放入$lcm(q_1, q_2, \ldots, q_r)$套礦石，只要以上述方式擺放礦石，可使每個袋子中均有$\frac{n}{k} \times lcm(q_1, q_2, \ldots, q_r)$個礦石，又$s(a_1, a_2, \ldots, a_k)$的上界為$k$，故可得$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq min\left(k, lcm(q_1, q_2, \ldots, q_r)\right)$。證畢。

同時，在計算數據時察覺$s(0,0,0,1,4) = s(1,1,1,2,5)$。此時嘗試將$a_1 \sim a_k$同加、同減、同乘、同除一個數，皆滿足$s$值相同。因此，我提出性質6並證明此性質。

**性質6：將$\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}$各項同加、減、乘、除一個數，則$\boldsymbol{s}$值不變。**

證明：令$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = m$，則放入$m$套礦石時，有一種放法可使每個袋子均有$\frac{mn}{k}$個礦石，若$a_1, a_2, \ldots, a_k$ 同加一數$x$，則以相同方法將礦石放入袋子，每個袋子均有$\frac{mn}{k} + mx$個礦石，故$s(a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_k + x) \leq m$。若$s(a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_k + x) < m$，令其為$m'$，則有一種放法可使每個袋子中均有$\frac{m'n}{k} + m'x$個礦石，若用此放法將$a_1, a_2, \ldots, a_k$放入袋子，每個袋子均有$\frac{m'n}{k}$個礦石，與$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = m$矛盾，故$s(a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_k + x) = m$。同理可證減、乘、除皆滿足此性質。證畢。

從性質6可知，之後的研究中在計算時皆可將礦石分配方式經過加減乘除的平移過程移至滿足$a_1 = 0$且$gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$，利用此方法簡化計算，加速實驗的進行。

經過$k = 5$的實驗，更加確認下面性質7的正確性，亦為推論1之推廣，並提出了證明。

**性質7：$\boldsymbol{a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = \cdots}$且每堆礦石數不完全相同若且唯若$\boldsymbol{s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 2}$。**

證明：先證充分性。若$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 2$，假設$b_1, b_2, \ldots, b_k$為$a_1, a_2, \ldots, a_k$重新排列的結果，則至少有一種$b_1, b_2, \ldots, b_k$的排列方式使得以$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \rightarrow \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$的方式擺放礦石能使每個袋子的礦石數相同。假設$b_1 = a_i$，則$a_1 + b_1 = a_1 + a_i = a_i + b_i$，故$b_i = a_1$，

即$a_1, a_i$配對相加。由此可知，若$k$為偶數，則$a_1 \sim a_k$中的$k$個數兩兩配對，若$k$為奇數，則僅有1數無配對，其餘皆兩兩配對。若$a_1$非與$a_k$配對，則假設$a_1$與$a_i$配對（$a_i \neq a_k$），$a_k$與$a_j$配對（$a_j \neq a_1$），因$a_1 \sim a_k$為遞增數列，故$a_1 < a_j$且$a_i < a_k$，可得$a_1 + a_i < a_j + a_k$，與$a_1 + a_i = a_j + a_k$矛盾，故$a_1$與$a_k$配對。同理依序得$a_2$與$a_{k-1}$配對，$a_3$與$a_{k-2}$配對，⋯。即$a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = \cdots$。再證必要性，以$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \to \{a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1\}$擺放礦石即可使每個袋子中的礦石數相同，又由性質2知 $s(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq 1$，故$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 2$。證畢。

在$k = 5$的實驗中，大部分$s < k$的情況皆可以利用性質5做解釋，但部分的礦石分配方式會出現較奇特的擺放方式能使$s$變小。例如在以下的$n = 10$的實驗中，發現了$(0,1,1,3,5)$這組無法以性質5解釋的分配方式，而 $s(0,1,1,3,5) = 4$。實際擺放方式如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

這種擺放方式並非之前提及的輪換擺放方式。在$n \geq 10$且$5|n$時皆有類似的情形發生。$n = 15$時出現了6組這類分配方式：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

其中最後一個分配方式為$n = 10$的$(0,1,1,3,5)$每一項加1，故擺放的方式也相同。這些特例皆是以程式計算後再經手算實驗找出擺放方式。各組分配方式之間的關係仍待釐清。

因指導教授及老師的建議，此時我也開始對於每一組$n, k$，利用$s$做分類，討論滿足各個$s$值的分配方式個數$A(n, k, s)$，故製作了以下的表格：

| $l$ | $n=5l$ | $s=1$ | $s=2$ | $s=3$ | $s=4$ | $s=5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $n=5$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | $n=10$ | 1 | 5 | 4 | 6 | 14 |
| 3 | $n=15$ | 1 | 9 | 8 | 22 | 44 |
| 4 | $n=20$ | 1 | 14 | 14 | 47 | 116 |
| 5 | $n=25$ | 1 | 20 | 21 | 89 | 246 |
| 6 | $n=30$ | 1 | 27 | 30 | 145 | 471 |

利用性質6可知，$l$與$l+1$的部分實驗數據是相同的，而剩餘不同的部分即為$a_1=0$的情況。利用性質2即可知道滿足$s=1$的分配方式僅有1組。關於$s=2$的關係如下：

$$A(5l,5,2)=\frac{l(l+3)}{2}$$

若令$f_l$為滿足$s=2$的分配方式個數，則可證明下列的遞迴式：

$$\begin{cases} f_l=2 & (l=1) \\ f_l=f_{l-1}+l+1 & (l\geq 2) \end{cases}$$

證明：$l=1$時僅有$(0,0,1,2,2),(0,1,1,1,2)$兩種分配方式滿足

$s=2$，故$f_1=2$。當$l\geq 2$時，$f_l-f_{l-1}$即為滿足$a_1=0$且$s=2$的分配方式個數。利用性質7我們可以知道$s=2$必須滿足$a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3=\frac{n}{k}=l$，故$a_1=0,\ a_3=l,\ a_5=2l$，且$0\leq a_2\leq l$。當$a_2$確定時，$a_4$即可得出。共有$l+1$個$a_2$滿足上述條件，故$f_l-f_{l-1}=l+1$，即$f_l=f_{l-1}+l+1$。證畢。

利用遞迴關係式及初始條件便可以得到$f_l$的一般式：

$$f_l=\frac{l(l+3)}{2}$$

經由觀察推測滿足$s=3$的分配方式為第$l$與第$l+1$項之間相差$\left\lfloor\frac{3l}{2}\right\rfloor$，其中$\lfloor\ \rfloor$代表下高斯符號。從$\left\lfloor\frac{3l}{2}\right\rfloor$及$s=2$推導過程進行發想，只要證明在$k=5$時，$s=3$若且唯若$a_1\sim a_5$中有兩數等於$\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$。若此性質成立則可以使用如$s=2$的方式證明$s=3$的情況。以下證明此性質。

**性質8：在$k=5$且 $\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$時，$s(a_1,a_2,\dots,a_5)=3$若且唯若$a_1,a_2,\dots,a_5$中恰有兩數等於$\frac{n}{k}$。**

令$l=\frac{n}{k}$。先證明充分性。由性質5即可知$s(a_1,a_2,\dots,a_5)\le 3$。因若$s=1$，利用性質2可知$a_1$~$a_5$需皆為$l$，故不合題目設定。又若$s=2$，利用性質7可知必須滿足$a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3=\frac{n}{k}=l$，若已知有2個數為$l$，則必須有另一個數等於$l$，才能使$a_2+a_4=2l$，亦不合。故$s(a_1,a_2,\dots,a_5)=3$。

在證明必要性前，我需要另一個小性質。

**性質9：在$k=4$且 $\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$時，$s(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$若且唯若$a_1,a_2,a_3,a_4$中恰有一數等於$\frac{n}{k}$。**

證明：令$l=\frac{n}{k}$。先證明充分性。由性質5即可知$s(a_1,a_2,a_3,a_4)\le 3$。∵若$s=1$，利用性質2可知$a_1,a_2,a_3,a_4$需皆為$l$，故不合題目設定。又若$s=2$，利用性質7可知必須滿足$a_1+a_4=a_2+a_3=2l$，已知僅有1個數為$l$，則必須有另一個數等於$l$，才能使$a_2+a_3=2l$，亦不合。故$s(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$。

再證必要性。若$a_1,a_2,a_3,a_4$中有兩個以上的數等於$l$，則由性質5可知$s(a_1,a_2,a_3,a_4)<3$，故只需證明若$a_1\sim a_4$中沒有數等於$l$，不可能滿足$s=3$。利用反證法，假設$a_1,a_2,a_3,a_4$有一種礦石擺放方式使得$s=3$，且$a_1,a_2,a_3,a_4$沒有數等於$l$。若有一個袋子滿足3次放入的礦石數量皆不相同，則$a_1,a_2,a_3,a_4$中未被選中放入袋子中的數量必定為$4l-3l=l$（不合）。又若有一個袋子滿足3次放入的礦石數量皆相同，則此數量必為$l$，即$a_1,a_2,a_3,a_4$中至少有一數為$l$，亦不合。故每個袋子必滿足3次放入的礦石數量中有兩數相同且與另一數量相異。可以視為將$a_1,a_2,a_3,a_4$與$2a_1,2a_2,2a_3,2a_4$進行兩兩配對，使得配對的兩數相加為$3l$。由大小關係可知$2a_1$與$a_4$配對，而$2a_4$與$a_1$配對。由此可得
$2a_1+a_4=a_1+2a_4=3l$，進而得知$a_1=a_4=l$（不合）。由反證法可知，原命題成立。證畢。

接著我們證明性質8的必要性。

若$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$中有三個以上的數等於$l$，則由性質5可知$s(a_1,a_2,\dots,a_5)<3$，故只需證明若$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$中沒有或僅一數等於$l$，不可能滿足$s=3$。利用反證法，假設

$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$有一種礦石擺放方式使得$s=3$，且$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$沒有或僅一數等於$l$。

若僅一數等於$l$，可分成以下三種情況：

Case1：有一個袋子每次皆放入$l$個礦石，則可視為除了$l$以外的4個數量放入4個袋子中，可滿足$s=3$。由性質9我們可知道這是不可能的。

Case2：有一個袋子放入2次$l$個礦石，則可知另一次放入的礦石數為$3l-2l=l$個礦石，即與 Case1相同。

Case3：3個$l$被分在3個不同的袋子中，假設礦石擺放的過程如下圖矩陣所示：

$$\begin{bmatrix} l & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & l & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & l & x_{34} & x_{35} \end{bmatrix}$$

由此可知$x_{21}+x_{31}=2l$，若$x_{21}=x_{31}$，則$x_{21}=x_{31}=l$（不合）。若$x_{21}\neq x_{31}$，則除了$l,x_{21},x_{31}$以外的其他兩數相加必等於$2l$。利用性質7可知$s(a_1,a_2,\ldots,a_5)=2$（不合）

因此$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$僅一數等於$l$的分配方式不可能滿足$s=3$。

接著討論$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$沒有數等於$l$的情況。

假設$b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$為$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$重新排列之結果，且其中一個袋子3次分別放入$b_1,b_2,b_3$個礦石，則$b_4+b_5=5l-3l=2l$。若$b_1=b_2=b_3$，則由$b_1+b_2+b_3=3l$可得$b_1=b_2=b_3=l$（不合）。考慮其餘的四個袋子，若有一個袋子放入的3次礦石中有一次放入$b_4$個礦石，而有一次放入$b_5$個礦石，則剩餘的一次必須放入$l$個礦石，與題目設定不合，又無法使一個袋子每次皆放入$b_4$或$b_5$個礦石，否則會有$b_4=b_5=l$，因此必須將3個$b_4$及3個$b_5$以$2b_4,2b_5,b_4,b_5$的方式分到這4個袋子中。觀察已放入2次$b_4$個礦石的袋子，最後放入的礦石數不能為$b_4$或$b_5$，故應放入$b_1,b_2,b_3$其中一個數量的礦石，假設為$b_1$。則$b_1+b_2+b_3=b_1+2b_4$，可得$b_2+b_3=2b_4$。若$b_4=b_5$，則由$b_4+b_5=2l$得知$b_4=b_5=l$（不合），故$b_4\neq b_5$，因此有另一數（令為$b_2$）滿足$b_2+2b_5=3l$且$b_1\neq b_2$，再由$b_1+b_2+b_3=b_2+2b_5$得到$b_1+b_3=2b_5$。接下來則要處理已分別擺放$b_4$及$b_5$個礦石的兩個袋子。若將2個$b_3$放入同一個袋子中，假設放入裝有$b_4$的袋子中，則由另一個袋子的礦石數可得$b_1+b_2+b_5=3l=b_2+2b_5$，則$b_1=b_5$。搭配$b_1+2b_4=3l$及$b_4+b_5=2l$可得$b_4=l$（不合），故2個$b_3$必須放入不同的袋子中，即將$b_1+b_3$與$b_2+b_3$個礦石放入兩個袋子中，亦可視為將$2b_4$與$2b_5$個礦

石放入兩個袋子中。若將$2b_4$個礦石放入已裝有$b_4$個礦石的袋子中，則$3b_4 = 3l$，得$b_4 = l$（不合）。若將$2b_4$個礦石放入已裝有$b_5$個礦石的袋子中，則由兩個袋子中的礦石數可得$b_4 + 2b_5 = 2b_4 + b_5 = 3l$，也會得到$b_4 = b_5 = l$（不合）。由上述推導可得$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$沒有數等於$l$的情況中無分配方式滿足$s = 3$。

由反證法可證明性質8之必要性。證畢。

利用性質8，我們可以進一步推得$k = 5$，$n = 5l$時，滿足$s = 3$的礦石分配方式個數遞迴式：（令$f_l$為滿足$s = 3$的分配方式個數）

$$\begin{cases} f_l = 1 & (l = 1) \\ f_l = f_{l-1} + \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor & (l \geq 2) \end{cases}$$

證明：$l = 1$時，僅$(0,0,1,1,3)$滿足$s = 3$，故$f_1 = 1$。當$l \geq 2$時，$f_l - f_{l-1}$即為滿足$a_1 = 0$且$s = 3$的分配方式個數。由性質8可知，$a_2, a_3, a_4, a_5$恰好有兩數等於$l$，其餘兩數之和則為$3l$。經排列組合計算後（不考慮兩數順序）可知共有$\left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor$組非負整數解，故$f_l - f_{l-1} = \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor$，即$f_l = f_{l-1} + \left\lfloor \frac{3l}{2} \right\rfloor$。證畢。

由遞迴式可推得$A(5l, 5{,}3)$一般式為：

$$\begin{cases} A(5l, 5{,}3) = \dfrac{(l+1)(3l-1)}{4} & (l \in 奇數) \\ A(5l, 5{,}3) = \dfrac{l(3l+2)}{4} & (l \in 偶數) \end{cases}$$

此時我也開始思考若將所需最小套數$s$延伸至可達成均分的套數，是否會有進一步的結果出現。若可以解決可達成均分的套數$App(a_1, a_2, \ldots, a_k)$，則只要取集合中最小的正元素即為$s$。

此集合會有些性質可以使用，也結合了離散數學中的郵票問題，以下列出部分性質：

**性質10：$App$為一個運算為加法的么半群。**

證明：

1. 由加法之結合律可知$App$有結合律
2. 當放入0套礦石時，每個袋子皆裝有0個礦石，因此$0 \in App$。因0為加法單位元素，故$App$有單位元素。

3. 若$a,b\in App$，則表示各存在一種方法使在放入$a$套和$b$套礦石時每個袋子的礦石數相同。若將這兩種方法結合，便可將$a+b$套礦石平分於各袋子中，故$a+b\in App$，即$App$具封閉性。

由以上三性質知$App$為一么半群。證畢。

**性質11：若$\boldsymbol{s=1}$，則$\boldsymbol{App=\mathbb{N}\cup\{0\}}$。**

**性質12：$\boldsymbol{k=2}$時，若$\boldsymbol{s=2}$，則$\boldsymbol{App=\{x|x=2k,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}$。**

證明：令兩堆礦石分別有$a_1$和$a_2$個，其中$a_1\neq a_2$。若一數$x\in App$，則有一礦石擺放方式使放入$x$套礦石時，兩個袋子的礦石數相同。假設在其中一個袋子中放入$m$次$a_1$，$x-m$次$a_2$，則可得：

$$\begin{cases} ma_1+(x-m)a_2=\dfrac{xn}{2} \\ a_1+a_2=n \end{cases}$$

解出$x=2m$，故$x$為偶數。從推理過程亦可知，欲放入$2m$套礦石使得兩袋礦石數相同，只需$a_1,a_2$各放$m$次入袋即可，故所有偶數皆在$App$中，且所有奇數皆不屬於$App$。證畢。

**性質13：$\boldsymbol{k=3}$時，若$\boldsymbol{s=2}$，則$\boldsymbol{App=\{x|x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x\neq 1\}}$。**

證明：由$s$之定義可知$2\in App$，又可利用輪換的方式進行擺放，故$3\in App$。由么半群之封閉性知$2i+3j\ (i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\})$皆屬於$App$。由郵票問題的結論可知2,3之線性組合可得出$(2-1)(3-1)=2$以上的所有正整數，又$1\notin App$，故$App=\{x|x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x\neq 1\}$。證畢。

由性質13的推導，指出$App$封閉性的實用性，也讓我思考如何以線性組合的形式表示$App$。例如性質13之條件對應的$App$可表示為$\{x|x=2i+3j,\ \ i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$。在這個例子中，將2,3稱為其生成元。生成元變成一個可研究之對象，可從其數量以及大小進行討論，試著找出這些因素與$a_1,a_2,\ldots,a_k$的關聯。

首先，我們知道$k\in App(a_1,a_2,\cdots,a_k)$，若$s(a_1,a_2,\cdots,a_k)=k$，則$App(a_1,a_2,\cdots,a_k)$會不會等於$\{x|x=rk,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$？

過去關於性質4及其推廣的應用僅限於所需最少套數$s$之討論，但是其證明說明了在$App$

中的元素皆會被$\frac{k}{d}$整除，可以得到以下的性質14：

**性質14：**$n, k$互質時，$App(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{x | x = rk, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。

證明：$d = gcd(n, k) = 1$，由上述之性質可知，在$App$中的元素皆會被$k$整除（條件一）。由$n, k$互質及性質4知$s(a_1, a_2, \dots, a_k) = k$，且利用性質10可知所有$k$的倍數皆在$App$中（條件二）。綜合上述兩個條件可得$App(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{x | x = rk, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$。證畢。

可惜剩下的情況並非像$n, k$互質一樣那麼簡單。這時我將程式修改成另一個版本，在輸入$a_1, a_2, \cdots, a_k$時能輸出$App$中小於12的元素（元素過大會造成速度過慢）。因為$App$為么半群且$k \in App$，所以可將$App$中的元素以關於模$k$的剩餘作分類，取每一類的最小數便可決定此$App$，在之後的研究中亦會以$[e_1, e_2, \cdots, e_k]$表示$App$，其中$e_i$代表此$App$中滿足$x \equiv i \ (mod\ k)$之最小正元素。由前面的結論可知$e_k = k$。

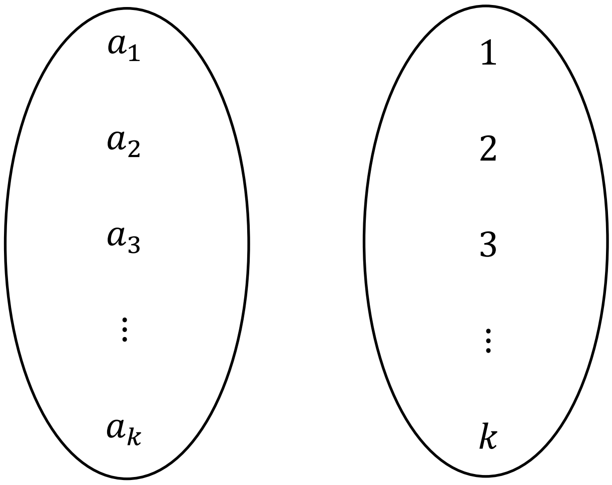
獲得$k = 3$數據後發現，許多礦石分配方式對應之$App$，其$e_1, e_2$有時會大於12，甚至大至20、30，因此以矩陣表示其實際操作方式變得十分繁瑣。我便製作一張「分配表」，表達各袋中一共放了$a_1, a_2, \cdots, a_k$各幾次，實際表格如下所示：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ | $\cdots$ | $bag\ no.k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $y_{1,1}$ | $y_{1,2}$ | $y_{1,3}$ | $\cdots$ | $y_{1,k}$ |
| $a_2$ | $y_{2,1}$ | $y_{2,2}$ | $y_{2,3}$ | $\cdots$ | $y_{2,k}$ |
| $a_3$ | $y_{3,1}$ | $y_{3,2}$ | $y_{3,3}$ | $\cdots$ | $y_{3,k}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $a_k$ | $y_{k,1}$ | $y_{k,2}$ | $y_{k,3}$ | $\cdots$ | $y_{k,k}$ |

由定義可知，$\sum_{i=1}^{k} y_{i,j} = k$且$\sum_{j=1}^{k} y_{i,j} = k$，此為分配表的一個特徵之一。我不禁好奇，若構造出一個放入$x$套的分配表，是否必然可利用$x$次操作，使得最終各袋子中$a_1, a_2, \cdots, a_k$的個數皆符合此表？此性質的證明中應用到圖論中 Hall’s Marriage Theorem 之延伸性質 Every k-regular bipartite graph has k perfect matchings。

**性質15：**若可構造出一個放入$x$套的分配表，則存在$x$次操作使得各袋中$a_1, a_2, \cdots, a_k$個數皆符合此分配表。

證明：可考慮一二分圖如下




其中對任意$1 \leq i, j \leq k$，$a_i$與$j$連有$y_{i,j}$條邊。由分配表之定義可知這$2k$個點的度數皆為$x$，因此其為一個$x$-regular bipartite graph，故此圖存在$x$個完美匹配，代表$x$次操作。考慮一組完美匹配中，若$a_i, j$相互配對，代表在這次操作中，數量為$a_i$的礦石堆被放入第$j$號袋子中。如此便得知必然存在$x$次操作使得各袋中$a_1, a_2, \cdots, a_k$個數皆符合此分配表。證畢。

發現性質15後，只需構造出放入$x$套均分時各袋子中$a_1, a_2, \cdots, a_k$個別個數之分配表，即可確定$x \in App(a_1, a_2, \cdots, a_k)$。

由於性質6之平移性質在此處亦適用，關於$3|n, k = 3, s = 3$的$App$討論可只先觀察滿足$a_1 = 0, gcd(a_1, a_2, a_3) = 1$的情況。首先，我先將$a_2 = 1$的分配方式數據做整理：

| $(a_1, a_2, a_3)$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|
| (0,1,2) | 4 | 2 | 3 |
| (0,1,5) | 10 | 8 | 3 |
| (0,1,8) | 16 | 14 | 3 |
| (0,1,11) | 22 | 20 | 3 |

可觀察$e_1, e_2$兩行可發現皆成等差數列，若令$n = 3l$，則可得以下性質：

**性質16**：$App(0,1,3l-1) = [6l-2, 6l-4, 3]$。

證明：

Claim 1：$e_1 = 6l - 2$。

令$e_1 = 3q + 1$，欲證$q \leq 2l - 2$時，$3q + 1 \notin App(0,1,3l-1)$，且

$6l-2 \in App(0,1,3l-1)$。

當$q < l-1$時，$3q+1 < 3l-2 < 3l-1$。因三個袋子中共擺放數量為1及$3l-1$的礦石各$3q+1$堆，而不可能使三袋放入$3l-1$的數量相同，故必有兩袋滿足$3l-1$個數之差不小於1，其中$3l-1$個數較少的袋子必裝有至少$3l-1$個數量為1的礦石堆，可得$3q+1 \geq 3l-1$（矛盾）。同理，若有兩袋滿足$3l-1$個數之差$\geq 2$，則$3q+1 \geq 6l-2$，$q \geq 2l-1$。

當$l-1 \leq q \leq 2l-2$時，不可能有兩袋$3l-1$個數之差$\geq 2$。因此$3l-1$在三個袋子中分別裝有$q+1, q, q$個，為滿足$App$之均分條件，做出以下關於各袋中1的個數之假設（未標示0之個數）：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $x$ | $x+3l-1$ | $x+3l-1$ |
| $3l-1$ | $q+1$ | $q$ | $q$ |

因上表為分配表的一部分，故每一列之總和需相同，即

$x+(x+3l-1)+(x+3l-1) = q+q+(q+1)$，故

$q = 2l-1+x \geq 2l-1$（矛盾）。

當$q = 2l-1$時，$3q+1 = 6l-2$可構造以下的分配表：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $l$ | $l$ | $4l-2$ |
| $1$ | $3l-1$ | $3l-1$ | $0$ |
| $3l-1$ | $2l-1$ | $2l-1$ | $2l$ |

由性質15知 $6l-2 \in App(0,1,3l-1)$，故$e_1 = 6l-2$。

Claim 2：$e_2 = 6l-4$。

令$e_2 = 3q+2$，欲證$q \leq 2l-3$時，$3q+2 \notin App(0,1,3l-1)$，且$6l-4 \in App(0,1,3l-1)$。

與 Claim 1類似可得$q < l-1$不合，而在$l-1 \leq q \leq 2l-3$時，用以下表格的假設：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $x$ | $x$ | $x+3l-1$ |
| $3l-1$ | $q+1$ | $q+1$ | $q$ |

與 Claim 1證明類似可得$x+x+(x+3l-1)=3q+2$，得

$x=q+1-l$。此表中一行的總和應不大於$3q+2$（差值為袋子中放入0的個數），由第3個袋子可得$(x+3l-1)+q\leq 3q+1$，$x=q+1-l$代入後整理知$q\geq 2l-2$（矛盾）。

當$q=2l-2$時，$3q+1=6l-4$可構造以下的分配表：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $3l-2$ | $3l-2$ |
| $1$ | $4l-2$ | $l-1$ | $l-1$ |
| $3l-1$ | $2l-2$ | $2l-1$ | $2l-1$ |

由性質15知 $6l-4\in App(0,1,3l-1)$，故$e_2=6l-4$。

結合 Claim 1及 Claim 2及$e_3=3$，即得性質16結果。證畢。

接著我便繼續做關於$App(0,2,3l-2)$的研究，以與性質16相似的方法得到

$App(0,2,3l-2)=[6l-8,6l-4,3]$。進而猜測當$a,3l-a$互質時，$App(0,a,3l-a)=$

$[6l-2a,6l-4a,3]$或$[6l-4a,6l-2a,3]$，其結果與$a$模$k$之剩餘為何有關。

**性質17：$\boldsymbol{gcd(a,3l-a)=1}$，$\boldsymbol{App(0,a,3l-a)}$的最小組成為$\boldsymbol{6l-2a}$,**

**$\boldsymbol{6l-4a,3}$。**

證明：

先證若$gcd(a,3l-a)=1$且$a\equiv 1(mod\ 3)$，則

$$App(0,a,3l-a)=[6l-2a,6l-4a,3]$$

令$e_1=3q+a$，欲證$q<2l-a$時，$3q+a\notin App(0,a,3l-a)$，且

$6l-2a\in App(0,a,3l-a)$。

因$3q+a$非3的倍數，故必有兩袋中放入的$a$數量不同，假設兩數量之差為$\Delta_a$，而兩袋中放入的$3l-a$數量之差令為$\Delta_{3l-a}$，則$a\times\Delta_a=(3l-a)\times\Delta_{3l-a}$，又$gcd(a,3l-a)=1$，故$a|\Delta_{3l-a}$且$(3l-a)|\Delta_a$。若$\Delta_a\geq 6l-2a,\Delta_{3l-a}\geq 2a$，則所放入套數$\geq 6l>6l-2a$，故只需討

論$\Delta_a = 3l - a, \Delta_{3l-a} = a$的情況。為此可做出以下表格的假設（未標示0之個數）：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $x$ | $x + 3l - a$ | $x + 3l - a$ |
| $3l - a$ | $q + a$ | $q$ | $q$ |

與性質16之證明相似從分配表的行與列之和性質可得

$$x + (x + 3l - a) + (x + 3l - a) = 3q + a$$

$$q = 2l - a + x \geq 2l - a$$

因此$q < 2l - a$無法達成礦石均分，而放入$6l - 2a$套礦石（即$q = 2l - a$）時，可以用構造以下的分配表：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $l$ | $l$ | $4l - 2a$ |
| $a$ | $3l - a$ | $3l - a$ | $0$ |
| $3l - a$ | $2l - a$ | $2l - a$ | $2l$ |

故可得$e_1 = 6l - 2a$。

令$e_2 = 3q - a$，則可利用與性質16相同的方法得出其部分分配表如下：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $x$ | $x$ | $x + 3l - a$ |
| $3l - a$ | $q$ | $q$ | $q - a$ |

可得以下兩關係式：

$$\begin{cases} x + x + (x + 3l - a) = 3q - a \\ 2x \geq q - a \end{cases}$$

整理後知$q \geq 2l - a$。

當$q = 2l - a$時，可構造以下分配表：

| | $bag\ no.1$ | $bag\ no.2$ | $bag\ no.3$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $3l-2a$ | $3l-2a$ |
| $a$ | $4l-2a$ | $l-a$ | $l-a$ |
| $3l-a$ | $2l-2a$ | $2l-a$ | $2l-a$ |

因此$e_2 = 3 \times (2l-a) - a = 6l - 4a$。

總結以上兩結果可知，$App(0,a,3l-a) = [6l-2a, 6l-4a, 3]$

同理可得到當$a \equiv 2(mod\ 3)$時，$App(0,a,3l-a) = [6l-4a, 6l-2a, 3]$。故在$gcd(a,3l-a) = 1$時，$App(0,a,3l-a)$的最小組成為$6l-2a, 6l-4a, 3$。

因為有性質6的平移性質，可將$App(0,a,3l-a)$延伸至更一般情況的$App(a,a+b,a+c)$，如此關於$k=3$的$App$研究便全部完成。

經由下列的操作，可將$App(a,a+b,c)$轉換為$App(0,a,3l-a)$的形式：

$$App(a,a+b,a+c) = App(0,b,c) = App\left(0, \frac{b}{gcd(b,c)}, \frac{c}{gcd(b,c)}\right)$$

再代入性質17的結果知，$App(a,b,c)$的基底為$\frac{2c}{gcd(b,c)}, \frac{2c-2b}{gcd(b,c)}, 3$。此為關於$k=3$，每套中礦石數為3的倍數的$App$研究最終結果。

**若$3|b+c$，則$App(a,a+b,a+c)$的最小組成為$\frac{2c}{gcd(b,c)}, \frac{2c-2b}{gcd(b,c)}, 3$。**

# 參、 研究結果與討論

## 一、研究結果

假設一套中有$n$個礦石，共有$k$個袋子，將一套（將$n$個礦石分成$k$份）中各堆礦石數以$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$表示，則有以下性質：

性質1：$s(0,0,\ldots,n) = k$。

性質2：$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$若且唯若$a_1 = a_2 = \cdots = a_k$。

性質3：對於任意一組$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$皆滿足$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq k$。

性質4：若$n, k$互質，則$s(a_1, a_2, \ldots, a_k) = k$。

- 推廣：令$gcd(n,k)=d$，則$\frac{k}{d} \mid s(a_1,a_2,\dots,a_k)$。

推論1：$k=3$時，$a_1,a_2,a_3$成等差數列（公差不為0）是$s(a_1,a_2,a_3)=2$的充要條件，且此時$n$為3的倍數。

性質5：若$a_1,a_2,\dots,a_k$中有$i$個數為$\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$，則$s(a_1,a_2,\dots,a_k)\le k-i$。

- 推廣：若可將$a_1,a_2,\dots,a_k$分割成$P_1,P_2,\cdots,P_r$兩兩互斥的$r$個集合，使每組數字之平均皆為$\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$。若令$P_i$內有$q_i$個數，則$s(a_1,a_2,\dots,a_k)\le min\big(k,lcm(q_1,q_2,\dots,q_r)\big)$。

性質6：將$a_1,a_2,\dots,a_k$各項同加、減、乘、除一個數，則$s$值不變。

性質7：$a_1+a_k=a_2+a_{k-1}=\cdots$且每堆礦石數不完全相同若且唯若$s(a_1,a_2,\dots,a_k)=2$。

性質8：在$k=5$且$\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$時，$s(a_1,a_2,\dots,a_5)=3$若且唯若$a_1,a_2,\dots,a_5$中恰有兩數等於$\frac{n}{k}$。

性質9：在$k=4$且 $\frac{n}{k}\in\mathbb{N}$時，$s(a_1,a_2,a_3,a_4)=3$若且唯若$a_1,a_2,a_3,a_4$中恰有一數等於$\frac{n}{k}$。

性質10：$App$為一個運算為加法的么半群。

性質11：若$s=1$，則$App=\mathbb{N}\cup\{0\}$。

性質12：$k=2$時，若$s=2$，則$App=\big\{x|x=2k,k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\big\}$。

性質13：$k=3$時，若$s=2$，則$App=\{x|x\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x\neq 1\}$。

性質14：$n,k$互質時，$App(a_1,a_2,\dots,a_k)=\big\{x|x=rk,r\in\mathbb{N}\cup\{0\}\big\}$。

性質15：若可構造出一個放入$x$套的分配表，則存在$x$次操作使得各袋中$a_1,a_2,\cdots,a_k$個數皆符合此分配表。

性質16：$App(0,1,3l-1)=[6l-2,6l-4,3]$。

性質17：$gcd(a,3l-a)=1$時，$App(0,a,3l-a)$的最小組成為$6l-2a$, $6l-4a,3$。

性質18：若$3|b+c$，則$App(a,a+b,a+c)$的最小組成為$\frac{2c}{gcd(b,c)},\frac{2c-2b}{gcd(b,c)},3$。

**二、討論**

在發現分配表後，若將分配表的概念引入程式中，是否可以縮短其計算速度？若以時間複雜度討論，在放入套數較少的情況下，原來的程式應能較快計算完畢；但是當放入套數越

來越多時，添加分配表的元素進入程式並刪去一些已知不合的情況，應可以改良原來的程式。目前尚未搭配分配表寫出一套程式，但構造分配表在未來的研究中應有許多用途。

# 肆、 未來展望

在討論完$k = 3$的全部情況後，可先從滿足$k = 5$，$s = 1$、2、3的礦石分配方式作$App$之討論，再試圖善用分配表找出關於$k = 5$時$s$及$App$的所有結論。接著便繼續推廣，尋找其他在$k$值時的$App$型態。

# 伍、 參考資料 (文獻) 及其他

一、 游森棚（2021年8月）。森棚教官數學題—撿礦石。60-04科學研習月刊。
https://www.ntsec.edu.tw/LiveSupply-Content.aspx?cat=6842&a=6829&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&lsid=17009

## 【評語】010006

本作品是一個組合設計問題,研究 k 個整數,經循環重排之後,各分量之和皆為 n 的最少重排數。本作品窮舉了 $n \leq 6$ 的可能情況,並給出最少重排數為 3 的一些等價條件。作品整體結構完整，論述清楚，並以基礎的方法，得出很好的結果，是相當不錯的作品。

但作者對該問題與圖論之間的關係，刻畫不深，十分可惜。建議作者費心思考箇中關係，尋求後續發展。