2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010004

參展科別　數學

作品名稱　整數模 n 的加法組合設計之探討

得獎獎項　三等獎

韓國科學博覽會 KSEF

就讀學校　臺北市立第一女子高級中學

指導教師　楊宗穎

作者姓名　唐敏軒

關鍵詞　同餘、距離數列、組合設計

作者簡介

我是唐敏軒，目前就讀北一女中二年級。很榮幸有機會進入數學研究的領域，因而開啟我的研究之旅，過程中雖然遭遇困難，但很慶幸有老師從旁協助，讓我順利完成這個作品並與大家分享。

研究過程中所獲得的數學知識與研究方法，有這些寶貴的研究經驗，讓我更具有研究精神，希望在未來能繼續保有熱忱探索數學領域的奧妙。

摘要

將兩個相同的n角齒輪重疊後，再砍去若干個特定重合的角，欲使上層齒輪在繞公轉軸旋轉一圈的過程中，兩齒輪皆有重合的缺角，在這個目的之下探討砍去的角數量，使其最小化，將其最小值稱為n角齒輪的最小可行數，以符號記為$f(n)$。我的研究是考慮自然數n，對於砍去角的位置，制訂設計方法，在數量上求得$f(n)$較好的上界與下界。我將這個問題代數化，運用集合與數列的概念進行研究，進而轉換為組合設計的最佳化問題。特別的，若齒輪中任意兩個缺角在圓周上的最短距離皆相異，則表示砍去重合角的位置為最緊緻的狀態，將這些特殊的缺角位置稱為完美集合，我也試著探討缺角為最緊緻的特殊情形，分析完美集合的存在性。

Abstract

If two gears that have the same number of gear teeth are overlapped, and several specific gear teeth of the two gears are cut. I want to make the two gears that have missing teeth touch each other when the one on the top revolves around the axis of revolution. If I can achieve this goal, I want to discuss the number of gear teeth that were cut off and minimize the number, which will be named "*minimum feasible number*" and represented by $f(n)$. My research will take into consideration natural number n, discuss where the gear teeth should be cut off and find the upper and lower bounds of $f(n)$. Algebraically, I use the concept of set and sequence, turn the question into optimization problem of combinatorial design. Specially, if the smallest distance of any two missing teeth are distinct, it means that this is the tightest condition. I name the set of missing gear teeth "*perfect set*". I also try to discuss the special situation while the missing gear teeth are in the tightest condition, and analyze the existence of perfect set.

壹、前言

一、研究動機

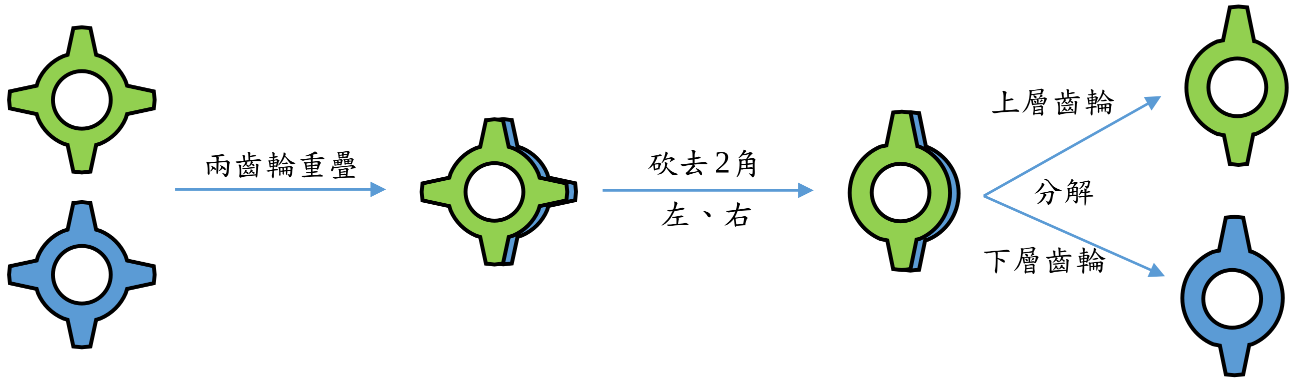
在課餘時間與老師討論數學專題的過程中，老師介紹了各種數學領域的問題，我從中瞭解數學領域的多樣性，而組合學中的問題經常有實際的情境來相呼應，在探索研究的主題時，我偶然發現了這個齒輪問題，題目敘述如下：

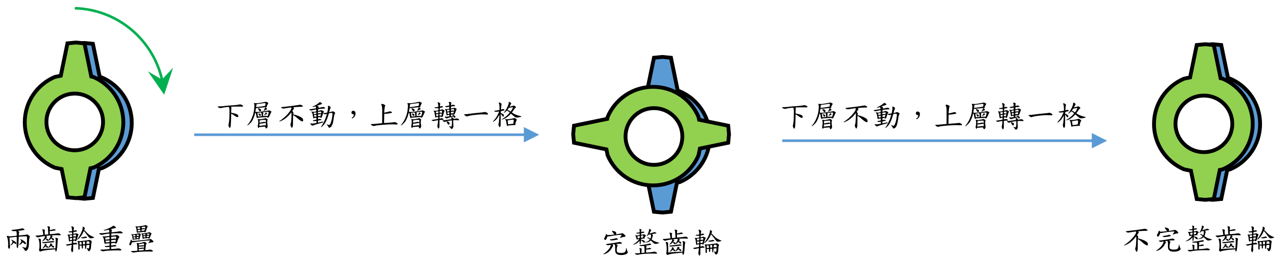
> 設有兩個完全相同的齒輪 A、B，各有13角，將兩者重疊在一起，然後任意砍去4對重合的角。請問：是否能將上方的齒輪繞公轉軸旋轉至一適當位置，使得兩齒輪在水平面上的投影仍為一個完整齒輪？

在一開始看到此題目時，我直覺地認為答案是肯定的，然而卻無從證明，於是採用窮舉法的方式來驗證自己的想法，結果答案出乎意料地背離了我最初的判斷，因此令我想要更深入的研究這個有趣的齒輪問題。而在這之後產生第一個聯想的方向正好和原問題有所不同，我想要得知兩個角數相同齒輪在重疊的情況下，至少要砍去幾對重合的角，才能使上層齒輪無論如何轉動，都無法在水平面上的投影形成一個完整的齒輪，也就是說存在一種特殊砍去重合角的方式，在砍去重合的角之後，不論上層齒輪如何轉動，其相對位置從上往下看時，必然都會有共同缺角的情形。

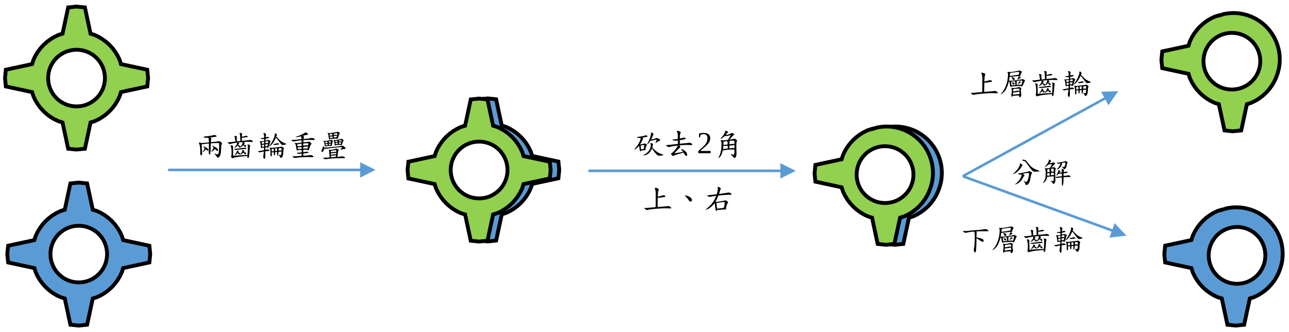
我想要研究出：固定齒輪的角數時，至少要砍去多少重合的角才能讓上層齒輪在旋轉的過程中，能達成水平投影皆為不完整的效果？齒輪的角數和須砍去的最小角數有什麼關聯？要怎麼設計砍去的位置？砍去的位置有特定規律嗎？

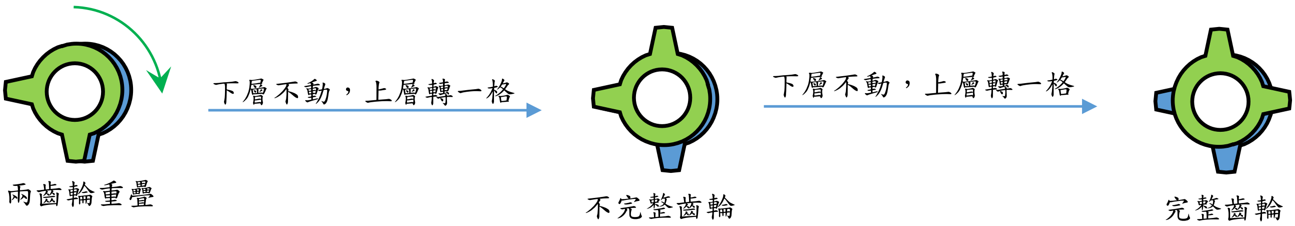
以下圖為例，將兩個4角齒輪重疊在一起，砍去左方與右方兩個重合的角，若將上層齒輪順時針轉動1格（順時針轉$90°$），則水平投影即為完整的齒輪；若將上層齒輪順時針轉動2格（順時針轉$180°$），則水平投影即為不完整的齒輪。



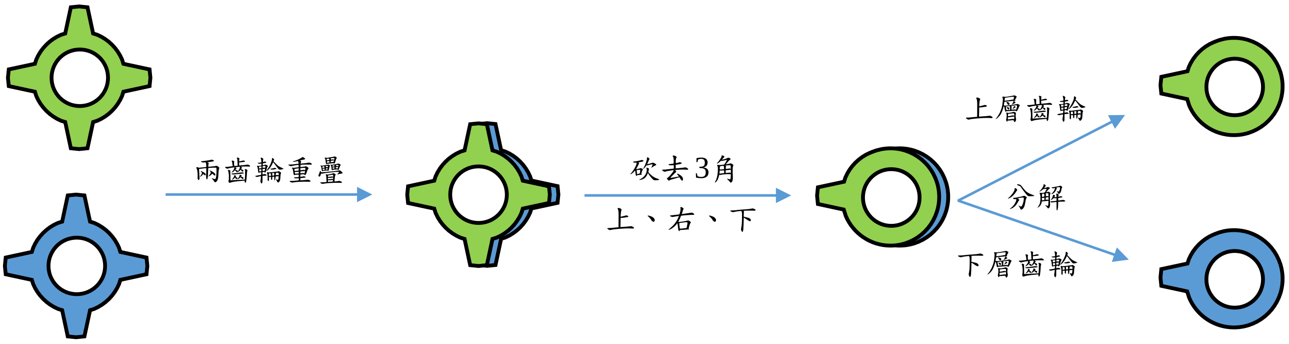


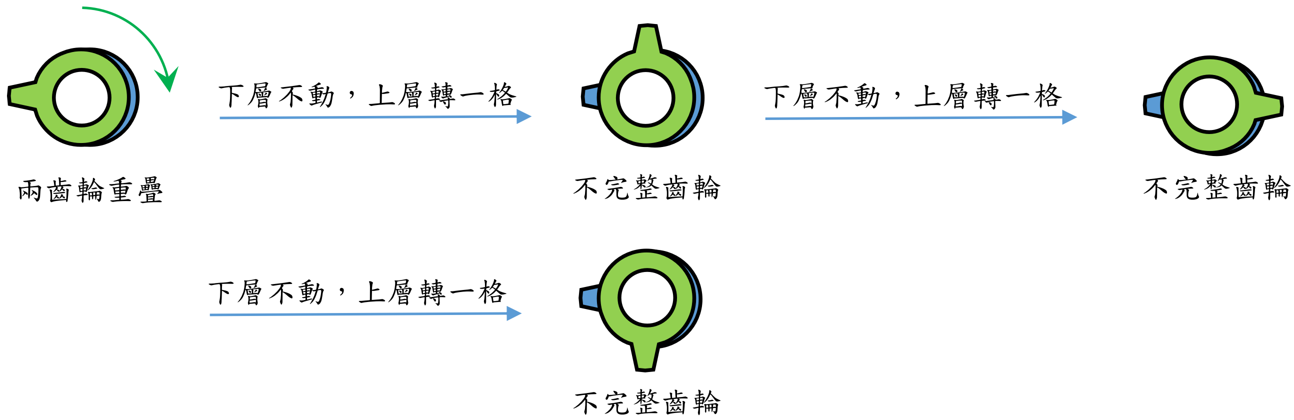
而當兩個 4 角齒輪重疊在一起，且砍去的重合角數為 2 時，除上述砍法，還可砍去上方與右方兩對重合的角，若將上層齒輪順時針轉動 1 格（順時針轉 90°），則水平投影即為不完整的齒輪；若將上層齒輪順時針轉動 2 格（順時針轉 180°），則水平投影即為完整的齒輪。





當兩個 4 角齒輪重疊在一起，砍去上方、右方與下方三對重合的角時，無論是將上層齒輪順時針轉動 1 格（順時針轉 90°）、2 格（順時針轉 180°）還是 3 格（順時針轉 270°），水平投影皆為不完整的齒輪。





由上述可知，對於4角齒輪，砍去2對重合的角是無法達成讓齒輪在任何轉動的情況下皆為不完整的效果，而砍去3對重合的角則可達成。也就是說：對於4角齒輪，須砍去的最小角數為3。

二、研究目的

若齒輪共有n個角，則稱為n角齒輪。將兩個相同的n角齒輪上下重疊後，若至少需砍去$f(n)$對重合的角，才能使得齒輪在任何轉動的情況下，水平投影皆為不完整的齒輪，則$f(n)$稱為n角齒輪的**『最小可行數』**。以下為我的研究目的：

（1）設計砍去重合角的數量以及位置，從中得知$f(n)$的上界；

（2）對於一般的n，得出$f(n)$的下界。對於特殊的n，探討缺角位置為最緊緻的可能性。

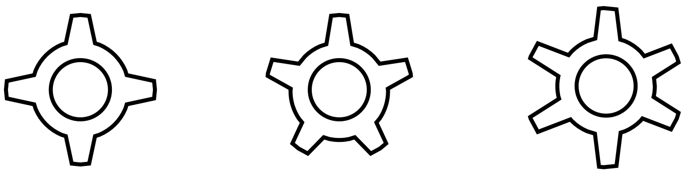
貳、研究方法或過程

一、基本概念、名詞解釋與先備知識

在考慮砍去重合角的位置時，為了找出具有規律性的砍去方法，我一開始利用繪圖來呈現對於齒輪問題的構思，然後進一步將其代數化，透過代數的方法來呈現角的位置。為了能清楚表達我的研究過程與思路，我設計了一些符號，以下將依序介紹n角齒輪、可行集合、最小可行集合與最小可行數的概念。

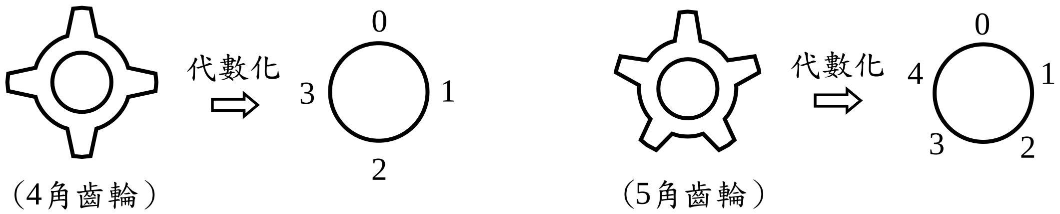
將齒輪的角用數字表示

首先我將具有n個角的齒輪稱為**『n角齒輪』**。下圖即為4角齒輪、5角齒輪與6角齒輪的示意圖。



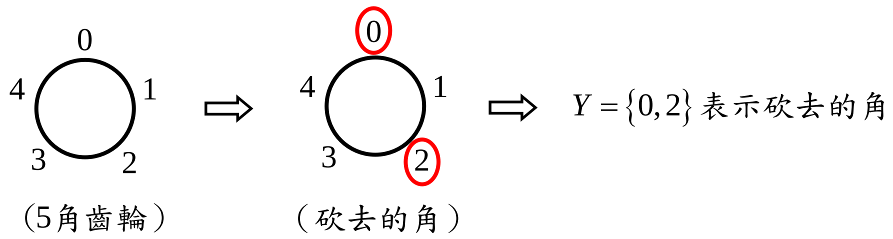
（4角齒輪）　（5角齒輪）　（6角齒輪）

為了將原本複雜的圖形簡化，我將齒輪上的每個角都用一個數字來表示，齒輪正上方為 0 ，並以順時針依序遞增填入自然數。



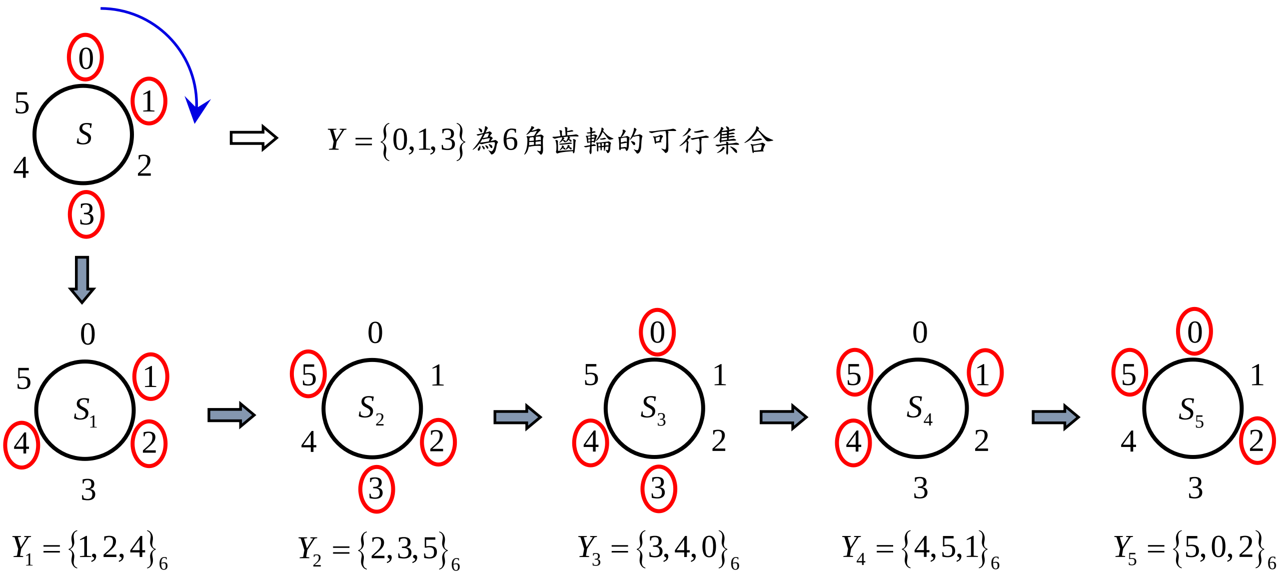
將砍去的角用集合表示

以 5 角齒輪為例，我以紅色圓圈標記要砍去的角在齒輪上的位置，再將被標記的位置用集合 Y 表示，如下圖的 5 角齒輪，我將其位於 0 和 2 的角砍去，所以集合 $Y=\{0,2\}$ 即可表示被砍去的角之相對位置。

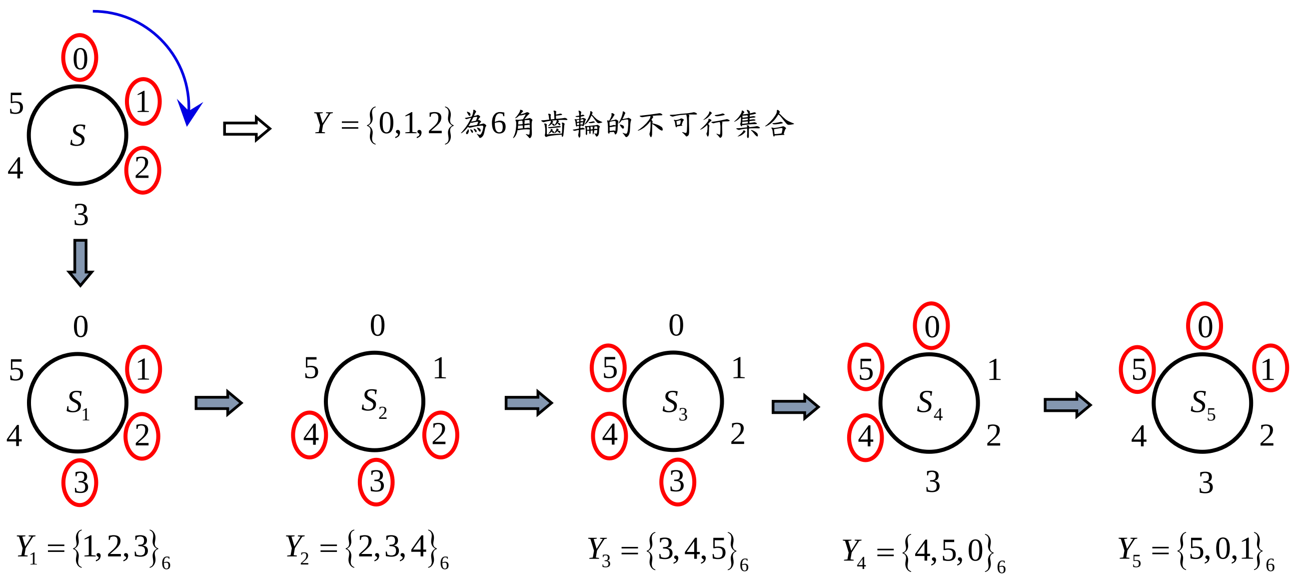


可行集合與不可行集合

考慮 6 角齒輪，其六個角分別以 $0,1,2,3,4,5$ 表示。若砍去的角為 $0,1,3$ 時，將砍去的角記錄為集合 $Y=\{0,1,3\}$ ，稱為**『缺角集合』**，並將此被砍去的下層齒輪狀態記為 S 。將上方的齒輪依順時針旋轉，旋轉將造成缺角的地方有所改變，我將每次旋轉後上層齒輪的狀態依序記為 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 與 S_5 ，其每種狀態缺角的位置依序記為 $Y_1=\{1,2,4\}_6$ 、 $Y_2=\{2,3,5\}_6$ 、 $Y_3=\{3,4,0\}_6$ 、 $Y_4=\{4,5,1\}_6$ 與 $Y_5=\{5,0,2\}_6$ 。因為上層齒輪狀態 S_1 與下層齒輪狀態 S ，在水平面上的投影為不完整的齒輪，這表示集合 Y_1 與 Y 有交集，其交集即為共同的缺角位置。換句話說， $Y_1\cap Y=\{1\}\neq\varnothing$ ，而 $\{1\}$ 就代表上下層齒輪此時有共同的缺角。由此可知，欲判斷『上層齒輪狀態 S_i 與下層齒輪狀態 S 是否有共同的缺角』，等價於『集合 Y_i 與 Y 是否有交集』。同理可知，因為對任意 $i\in\{1,2,\cdots,5\}$ ， $Y_i\cap Y\neq\varnothing$ ，所以不論上層齒輪如何旋轉，重疊的兩齒輪必然會有共同的缺角。由於一開始砍去共同角的集合為 $Y=\{0,1,3\}$ ，造成上下層齒輪經旋轉過後總是仍有缺角的情形，我特別將集合 $Y=\{0,1,3\}$ 稱為 6 角齒輪的一個**『可行集合』**。



若6角齒輪砍去的角集合為$Y=\{0,1,2\}$，將被砍去的下層齒輪狀態記為S，我亦將每次旋轉後上層齒輪的狀態依序記為S_1、S_2、S_3、S_4與S_5，其每種狀態缺角的位置依序記為$Y_1=\{1,2,3\}_6$、$Y_2=\{2,3,4\}_6$、$Y_3=\{3,4,5\}_6$、$Y_4=\{4,5,0\}_6$與$Y_5=\{5,0,1\}_6$。因為$Y_3\cap Y=\varnothing$，所以上層齒輪狀態S_3與下層齒輪狀態S，沒有共同的缺角，兩者在水平面上的投影為完整的齒輪。我將這樣的集合$Y=\{0,1,2\}$稱為6角齒輪的一個**『不可行集合』**。



為了將這個問題代數化，我將n角齒輪上的角依順時針用$0,1,2,\cdots,n-1$表示，對於砍去的角我用$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$的子集合Y來記錄。將上層齒輪順時針旋轉i格後，上層齒輪缺角的位置則用集合$Y_i=\{k:k=y+i\ (\mathrm{mod}\ n)，y\in Y\}_n$表示，其中大括號下方的標號$n$代表集合內元素的加法為同餘$n$的結果。我有以下定義：

n 角齒輪的可行集合

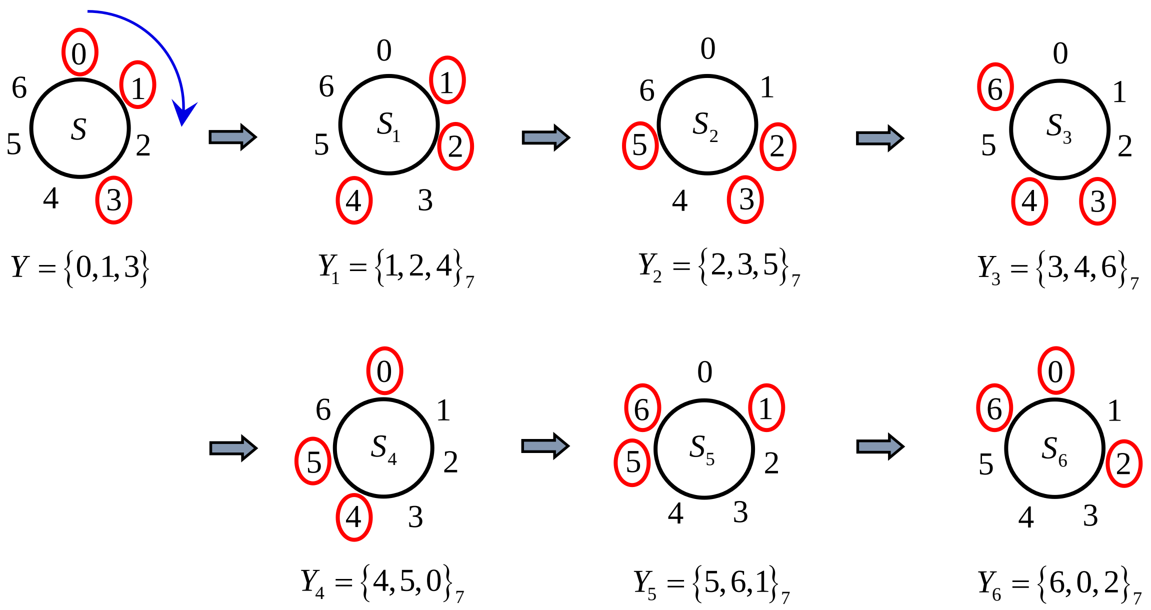
對於重疊的兩個 n 角齒輪，令砍去共同角的集合為 $Y \subseteq \{0,1,2,\cdots,n-1\}$。

對任意 $i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，令 $Y_i = \{k : k = y + i \pmod{n}，y \in Y\}_n$。

1. 將集合 Y 稱為**『缺角集合』**；
2. 若任意 $i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，$Y_i \cap Y \neq \varnothing$，則 Y 為 n 角齒輪的**『可行集合』**；
3. 若 Y 為 n 角齒輪的可行集合，則 $|Y|$ 稱為 n 角齒輪的**『可行數』**；
4. 若存在 $i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$，$Y_i \cap Y = \varnothing$，則 Y 為 n 角齒輪的**『不可行集合』**。

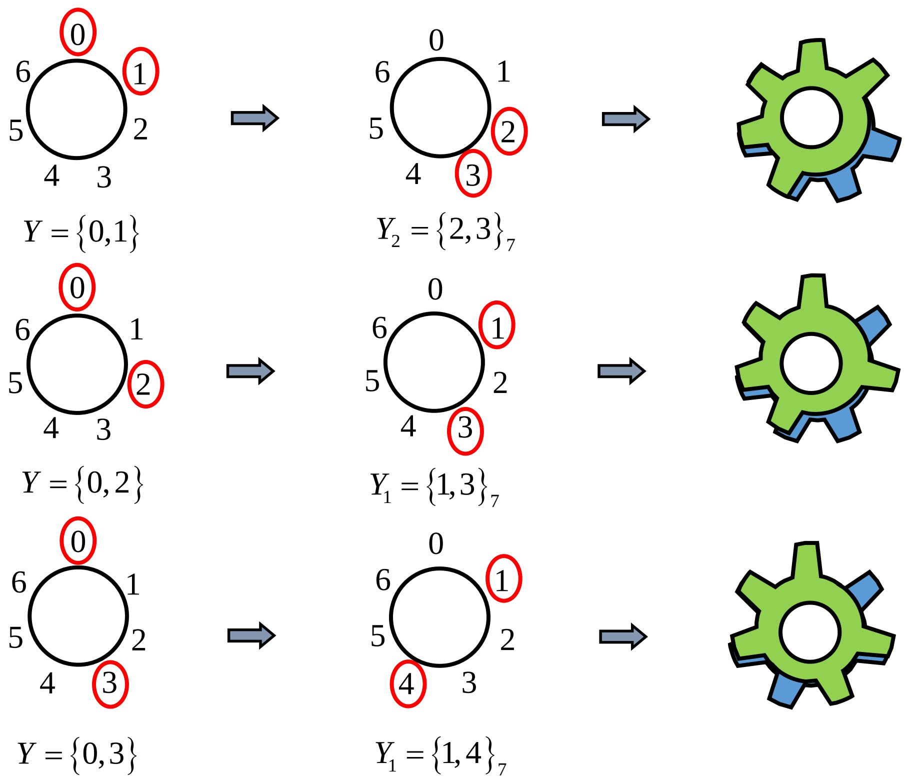
最小可行集合的定義

在承接先前可行集合的概念之下，我考慮 7 角齒輪缺 3 角的情形，由下圖可得知，當缺角集合為 $Y = \{0,1,3\}$ 時，將上層的齒輪依順時針旋轉，每次旋轉後將上層齒輪缺角的位置依序記為 $Y_1 = \{1,2,4\}_7$、$Y_2 = \{2,3,5\}_7$、$Y_3 = \{3,4,6\}_7$、$Y_4 = \{4,5,0\}_7$、$Y_5 = \{5,6,1\}_7$ 與 $Y_6 = \{6,0,2\}_7$。因為對任意 $i \in \{1,2,\cdots,6\}$，$Y_i \cap Y \neq \varnothing$，不論上層齒輪如何旋轉，重疊的兩齒輪必然會有共同的缺角，也就是說它們的水平投影皆為不完整齒輪。由於一開始砍去共同角的集合為 $Y = \{0,1,3\}$，所以集合 $Y = \{0,1,3\}$ 即為 7 角齒輪的一個可行集合。因為缺角集合 Y 包含的元素數量為 3，意即 $|Y| = 3$，所以 3 為 7 角齒輪的一個可行數。



已知 3 為 7 角齒輪的可行數，我好奇是否能用更少的缺角數量來達到目的？因此進一步確

認 2 是否仍為 7 角齒輪的可行數，若考慮砍去的角數為 2 時，我有以下三種不同的砍法，不失一般性考慮缺角集合 Y 為 $\{0,1\}$ 、$\{0,2\}$ 與 $\{0,3\}$ 其中之一，將上層的齒輪依順時針旋轉，旋轉將造成缺角的地方有所改變，可以發現，當 $Y=\{0,1\}$ 時，$Y \cap Y_2=\varnothing$ ；當 $Y=\{0,2\}$ 時，$Y \cap Y_1=\varnothing$ ；當 $Y=\{0,3\}$ 時，$Y \cap Y_1=\varnothing$ 。不論砍去角的集合 Y 是哪一種情形，三者皆會產生空集合，也就是存在某一種旋轉後的狀態使得上層齒輪和下層齒輪沒有共同的缺角，此時兩者在水平面上的投影為完整的齒輪。換句話說，考慮 7 角齒輪且 $|Y|=2$ 時，集合 Y 皆為不可行集合。由此可知，2 不為 7 角齒輪的可行數。



由上述可知，對於 7 角齒輪，3 為可行數，但是 2 不為可行數，也就是說 3 為 7 角齒輪的可行數中之最小值，因此我稱 3 為 7 角齒輪之**『最小可行數』**。

以代數的方法來分析，當考慮 n 角齒輪時，如存在一個可行集合 Y ，其中 $|Y|$ 即為 n 角齒輪的可行數。此外，若所有元素數量為 $|Y|-1$ 的集合皆為 n 角齒輪的不可行集合，也就是 $|Y|-1$ 不為 n 角齒輪的可行數時，我定義這樣的集合 Y 為 n 角齒輪的**『最小可行集合』**，而集合 Y 中的元素數量 $|Y|$ 稱為 n 角齒輪的**『最小可行數』**，特別將 $|Y|$ 的值記為『 $\boldsymbol{f(n)}$ 』。對於 n 角齒輪，最小可行數的定義如下：

n 角齒輪的最小可行數

對於 n 角齒輪，若 Y 為元素數量最少的可行集合，則稱此 Y 為**『最小可行集合』**。

若 Y 為最小可行集合，則元素數量 $|Y|$ 稱為**『最小可行數』**，特別記為**『 $f(n)$ 』**。

意即 $f(n)=\min\left\{|Y|:Y\text{為}n\text{角齒輪的可行集合}\right\}$ 。

由上述定義可知，n 角齒輪的最小可行集合可以是不唯一的，但最小可行數 $f(n)$ 是必然存在且唯一。將問題代數化後，可視為組合設計領域中的集合問題，以下將陸續介紹我所發展的方法，對於 n 角齒輪，說明如何設計可行集合，並從中陸續優化最小可行數 $f(n)$ 的上界。

二、策略一

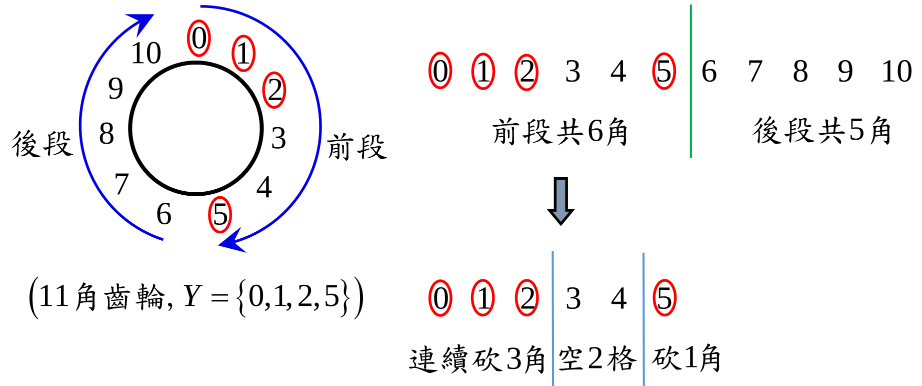
以下將說明一種設計可行集合的策略，我先分別以11角齒輪與17角齒輪為例，用以說明策略的設計理念以及原則。

11 角齒輪的範例

考慮11角齒輪，首先將所有的角區分為兩段，位於編號0的角到最後一個砍去的角之間的範圍稱為**『前段』**，而後方連續沒被砍去的角則稱為**『後段』**。令缺角集合為 $Y=\{0,1,2,5\}$ ，是從0開始順時針連續砍去編號為 $0,1,2$ 的三個角，之後空下編號為 $3,4$ 的兩格，最後再砍去編號5的角。所以在這個砍法中，前段的範圍即為編號 $0,1,\cdots,5$ 的角，角數量為6 ，後段的範圍則為編號 $6,7,\cdots,10$ 的角。由於前段中沒有連續3個完好的角，因此當上層齒輪轉動 $1,2,\cdots,5$ 格時，其前段齒輪最初連砍的三個角必與下層齒輪缺角的位置有所重合，也就是兩齒輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。

因為前段的齒輪角數6大於後段的齒輪角數5，且前段齒輪為一開始先連續砍去3角，而又沒有連續3個完好的角，所以當上層齒輪旋轉 $6,7,\cdots,10$ 格時，上層齒輪的前段會逐一經過編號0的位置，且上層齒輪前段砍去的位置必與下層齒輪連續砍去的3角有所重合，也就是齒輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。

可知，當使用上述策略的方式砍去4角時，可使11角齒輪在任何的旋轉狀態，其水平投影皆有缺角，為不完整齒輪。意即集合 $Y=\{0,1,2,5\}$ 為11角齒輪的可行集合。



對於一般n角齒輪，考慮缺角集合$Y=\{0,1,2,5\}$，根據上述的討論可知，若欲使集合$Y=\{0,1,2,5\}$為n角齒輪的可行集合，則『前段齒輪的角數必須要大於後段齒輪的角數』。由於前段齒輪角數為6，因此當後段齒輪角數為$0,1,2,3,4,5$時，皆可使集合$Y=\{0,1,2,5\}$為可行集合。也就是說，使用上述策略所砍去的缺角集合$Y=\{0,1,2,5\}$，可以分別為$6,7,\cdots,11$角齒輪的可行集合，而11角齒輪則為齒輪數最多的情形。換句話說，當$6\le n\le 11$時，集合$Y=\{0,1,2,5\}$必為n角齒輪的可行集合。

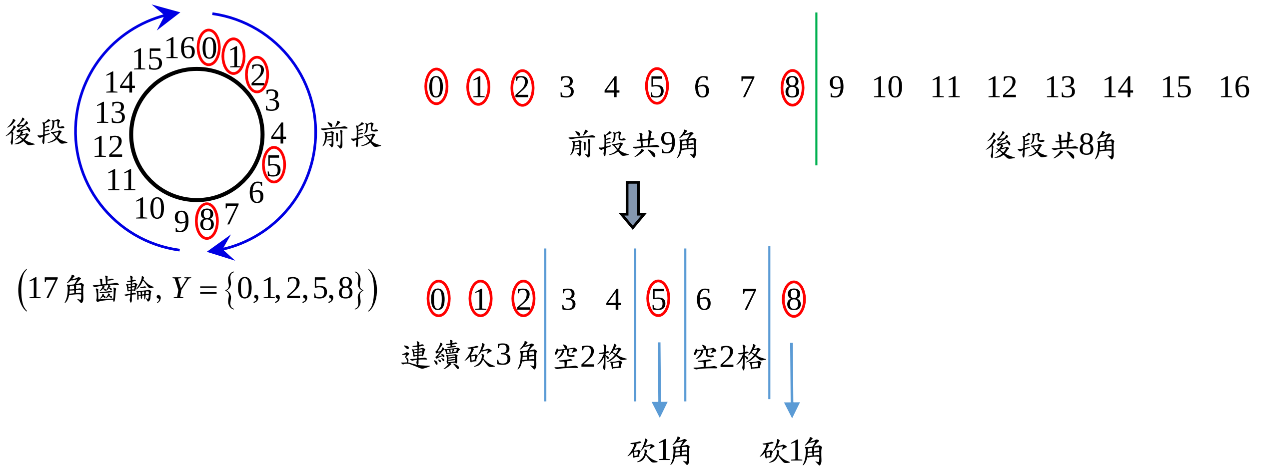
17角齒輪的範例

考慮17角齒輪，我也將其分為前段與後段，我將位於編號0的角到最後一個砍去的角之間的範圍稱為前段，而後方連續沒被砍去的角稱為後段。令缺角集合$Y=\{0,1,2,5,8\}$，是從0開始順時針連續砍去編號為$0,1,2$的三個角，之後空下編號為$3,4$的兩格再砍去編號5的角，然後空下編號為$6,7$的兩格再砍去編號8的角，也就是『空兩格再砍一角』的動作重複2次。所以在這個砍法中，前段的範圍即為編號$0,1,\cdots,8$的角，角數量為9，後段的範圍則為編號$9,10,\cdots,16$的角。由於前段中沒有連續3個完好的角。因此當上層齒輪轉動$1,2,\cdots,8$格時，其前段齒輪最初連砍的三個角必與下層齒輪缺角的位置有所重合，也就是兩齒輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。

因為前段的齒輪數9大於後段的齒輪數8，且前段齒輪為一開始先連續砍去3角，而後面又沒有連續3個完好的角，所以當上層齒輪旋轉$9,10,\cdots,16$格時，上層齒輪的前段會逐一經過編號0的位置，且上層齒輪前段砍去的位置必與下層齒輪連續砍去的3角有所重合，也就是齒輪的水平投影必定有缺角，為不完整齒輪。

可知，當使用上述策略砍去5角時，可使17角齒輪在任何的旋轉狀態，其水平投影皆有

缺角，為不完整齒輪。意即集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$ 為17角齒輪的可行集合。



同理，對於一般 n 角齒輪，考慮缺角集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$，若欲使集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$ 為 n 角齒輪的可行集合，則『前段齒輪的角數必須要大於後段齒輪的角數』。由於前段齒輪的角數為9，因此當後段齒輪角數為 $0,1,\cdots,8$ 時，皆可使集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$ 為可行集合。也就是說，使用上述策略所砍去的角集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$，可以分別為 $9,10,\cdots,17$ 角齒輪的可行集合，而17角齒輪則為齒輪數最多的情形。換句話說，當 $9\le n\le 17$ 時，集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$ 必為 n 角齒輪的可行集合。

可行集合的設計-策略一

根據上述的範例，將設計的方式一般化，對於 n 角齒輪，我即可依循固定的方式，設計一個可行集合，我將設計的方式稱為『**策略一**』，其建構的原則如下。

可行集合的設計-策略一

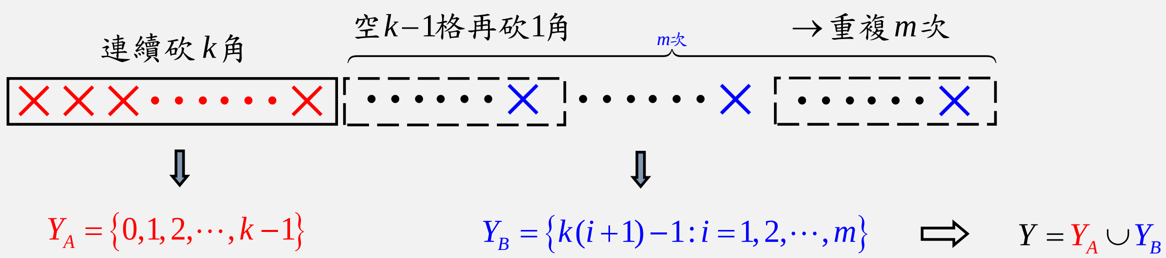
對於 n 角齒輪，以下兩步驟決定缺角集合 $Y\subseteq\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，其中 $k\ge 2$，$m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$：

Step-1：將編號 $0,1,\cdots,k-1$ 這連續 k 個角砍去；

Step-2：由編號 $k-1$ 的角開始，每空 $k-1$ 格後砍去下一個角，重複 m 遍。

經過兩步驟所決定砍去的角集合為 $Y=\{0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$。

其中令 $Y_A=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$，$Y_B=\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$，故 $Y=Y_A\cup Y_B$。



在策略一中，連續砍去的k個角，搭配重複m遍所砍去的個別角，決定了缺角集合Y，因此集合Y的元素數量$|Y|=k+m$受到參數k與m的影響。後續我將會分析k與m的關係，試著在Y為可行集合的情況下降低$|Y|=k+m$的值。

Lemma 1：策略一為可行集合的條件

對於n角齒輪，令k與m分別為策略一中 Step-1 與 Step-2 所決定的參數。

當$k(m+1)\le n\le 2k(m+1)-1$時，策略一所決定的缺角集合Y必為n角齒輪的可行集合。

【證明】

對於n角齒輪，在策略一中，我先將齒輪分為前段和後段，前段即為編號$0,1,\cdots,k(m+1)-1$的角，而後續未被砍去的角即為後段。我將前段齒輪設計為先連續砍去k角得Y_A，之後每空$k-1$格再砍去 1 角（重複m遍）得Y_B，則砍去的角集合為$Y=Y_A\cup Y_B=\{0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$。前段齒輪的角數為$k(m+1)$，因為前段的$Y_A$為連續砍去$k$角，而$Y_B$造成前段沒有連續$k$個完整的角，因此上層齒輪在旋轉$1,2,3,\cdots,k(m+1)-1$格時，上層齒輪的$Y_A$會不斷地和下層齒輪砍去位置有所重合。此外，當上層齒輪轉$k(m+1),\cdots,2k(m+1)-2$格時，其前段會逐一經過編號0的位置，則上層前段齒輪的砍去位置必與下層齒輪的Y_A亦有所重合。也就是說，若欲使集合Y為n角齒輪的可行集合，則前段齒輪的角數必須大於後段齒輪的角數，因此後段齒輪的角數最多可為$k(m+1)-1$。也就是說，當使用策略一砍去$k+m$角且要求集合Y為可行集合時，n的最大值為$2k(m+1)-1$。意即當$k(m+1)\le n\le 2k(m+1)-1$時，策略一所決定的缺角集合Y必為n角齒輪的可行集合。■

給定n角齒輪，根據 Lemma 1，我可得最小可行數$f(n)$的一個上界，故有以下定理：

Theorem 1：

對於n角齒輪，針對策略一，令k為 Step-1 砍去的角數量，$y=\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$，則：

（1）最小可行數$f(n)\le y$；

（2）$\dfrac{(y+1)-\sqrt{(y+1)^2-2(n+1)}}{2}\le k\le\dfrac{(y+1)+\sqrt{(y+1)^2-2(n+1)}}{2}$；

（3）特別的，當$\dfrac{y}{2}\le k\le\dfrac{y}{2}+1$時，前段齒輪的角數為最大。

【證明】

（1）在策略一中，缺角集合為$Y=\{0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$，令所砍去的總角

數為 $y=k+m$ 。因為前段齒輪的角數為 $k(m+1)$ ，且欲使策略一所設計的集合 Y 為可行集合，則前段齒輪的角數必須大於後段齒輪的角數，意即後段齒輪角數最多為 $k(m+1)-1$。因此在策略一中，根據 Lemma 1 可知，當 $k(m+1)\le n\le 2k(m+1)-1$時，集合 Y 會為 n 角齒輪的可行集合。依照 n 的奇偶性進行分類討論，當 n 為奇數時，n 的上界為不等式 $n\le 2k(m+1)-1$；當 n 為偶數時， n 的上界為不等式 $n\le 2k(m+1)-2$ 。

①（當 n 為奇數）

因為 $n\le 2k(m+1)-1$，所以 $k(m+1)\ge\frac{n+1}{2}$。根據算幾不等式可知 $\frac{k+(m+1)}{2}\ge\sqrt{k(m+1)}$ ，

因為 $y=k+m$ ，所以可得知 $\frac{y+1}{2}\ge\sqrt{k(m+1)}\ge\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ ，移項後可得 $y\ge\sqrt{2(n+1)}-1$。意即在策略一中，對於 n 角齒輪，因為 y 為自然數，所以砍去的角數 y 至少要為 $\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$才可以使集合 Y 為可行集合。

②（當 n 為偶數）

因為 $n\le 2k(m+1)-2$，所以 $k(m+1)\ge\frac{n+2}{2}$。根據算幾不等式可知 $\frac{k+(m+1)}{2}\ge\sqrt{k(m+1)}$ ，

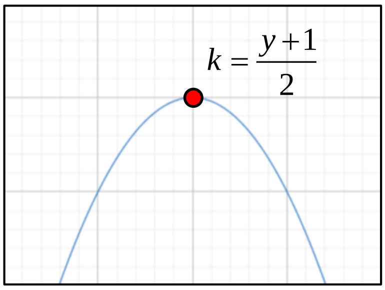
因為 $y=k+m$ ，所以可得知 $\frac{y+1}{2}\ge\sqrt{k(m+1)}\ge\sqrt{\frac{n+2}{2}}$ ，移項後可得 $y\ge\sqrt{2(n+2)}-1$。意即在策略一中，對於 n 角齒輪，因為 y 為自然數，所以砍去的角數 y 至少要為 $\left\lceil\sqrt{2(n+2)}-1\right\rceil$才可以使集合 Y 為可行集合。

總和上述結論，可知 $y\ge\begin{cases}\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil & ,\text{當}n\text{為奇數}\\ \left\lceil\sqrt{2(n+2)}-1\right\rceil & ,\text{當}n\text{為偶數}\end{cases}$，綜合 n 的奇偶性，我發現可將此結論合併為 $\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$。意即在策略一中，對於 n 角齒輪，砍去的角數 y 至少要為 $\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$才可以使集合 Y 為可行集合，由策略一可知 $\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$為最小可行數的上界，也就是最小可行數 $f(n)\le\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$。

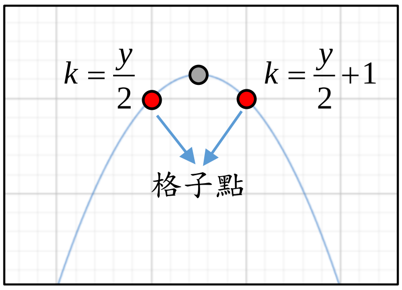
（2）根據結論（1）可知，在策略一中 $y=k+m$ 的值為 $\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$，我還要了解參數 k 與 m 的值要如何分配方能達成策略一的目標。換句話說，當 $k+m=y$ 時，k 和 m 要如何分配才能使前段齒輪的角數大於後段齒輪的角數，意即 $k(m+1)\ge\frac{n+1}{2}$。由於 $m=y-k$ ，利

用變數代換可將不等式表示為$k(y-k+1)\ge \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow k^2-(y+1)k+\frac{n+1}{2}\le 0$。利用二次方程式的公式解，即可知不等式的解為$\frac{(y+1)-\sqrt{(y+1)^2-2(n+1)}}{2}\le k\le \frac{(y+1)+\sqrt{(y+1)^2-2(n+1)}}{2}$。

（3）根據結論（1）可知，在策略一中$y=k+m$的值為$\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$，這裡我要了解當$y$固定時，$k$和$m$要如何分配才能使前段齒輪的角數$k(m+1)$有最大值。由於$m=y-k$，利用變數代換，前段齒輪的角數$k(m+1)$可改寫為$k$的二次式$g(k)=k(y-k+1)=-k^2+(y+1)k=-\left(k-(\frac{y+1}{2})\right)^2+(\frac{y+1}{2})^2$，由此可知，在砍去角數$y$為固定的情況下（$y$視為已知數），當$k$越接近$\frac{y+1}{2}$時，前段齒輪的角數會越大。我令$g(k)=-\left(k-(\frac{y+1}{2})\right)^2+(\frac{y+1}{2})^2$，為$k$的二次函數，函數圖形為拋物線開口朝下，頂點為$\left(\frac{y+1}{2},(\frac{y+1}{2})^2\right)$。當$y$為奇數時，$\frac{y+1}{2}$為自然數，因此當$k=\frac{y+1}{2}$時，函數$g(k)$的最大值亦為自然數$(\frac{y+1}{2})^2$，意即前段角數有最大值$(\frac{y+1}{2})^2$。當$y$為偶數時，$\frac{y+1}{2}$不為自然數，因此$(\frac{y+1}{2})^2$也必不為自然數，我要考慮自然數$k$，求$g(k)$的最大值。由於此二次函數為左右對稱圖形，而頂點的$x$坐標位於$\frac{y+1}{2}$，且$y$為偶數，因此當$k=\frac{y}{2}$或$k=\frac{y}{2}+1$時，即可得函數圖形最高的兩個格子點，此時$g(k)$為最大的自然數值。



（y為奇數）



（y為偶數）

綜合上述討論可知，在考慮格子點的情況下，不論y的奇偶性，當自然數k滿足$\frac{y}{2}\le k\le \frac{y}{2}+1$時，則$g(k)$有最大值。這表示對於$n$角齒輪，欲使策略一所設計的集合$Y$為可行集合且令前段齒輪的角數為最大時，則$\frac{\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil}{2}\le k\le \frac{\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil}{2}+1$。■

例如：以11角齒輪為例，根據 Theorem 1 的結論（1）可知策略一所得的可行數 $y=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$，將 $n=11$ 代入可得 $y=\left\lceil 2\sqrt{6}-1 \right\rceil=4$，因此在策略一中存在一種砍去 4 個角的方式，可使其為可行集合，意即 $k+m=4$。接下來將分析這砍去的 4 角應該如何分配在 k 和 m。若把 $y=4$ 代入 Theorem 1 的結論（2），可得 $2\le k\le 3$，因為 k 需為自然數，所以 $k=2$ 和 $k=3$ 皆符合條件。這表示策略一所砍去的角，可為 $k=2$，$m=2$，此時的可行集合為 $Y=\{0,1,3,5\}$；也可為 $k=3$，$m=1$，此時的可行集合 $Y=\{0,1,2,5\}$。因此對11角齒輪，$Y=\{0,1,3,5\}$ 與 $Y=\{0,1,2,5\}$ 皆為策略一的可行集合。

砍去4角的可行集合
- $k=3$，$m=1$，$Y=\{0,1,2,5\}$　0　1　2　3　4　5
- $k=2$，$m=2$，$Y=\{0,1,3,5\}$　0　1　2　3　4　5

特別的，若把 $y=4$ 代入 Theorem 1 的結論（3），亦可得 $2\le k\le 3$，所以當 $k=2$ 和 $k=3$ 時，其可行集合皆使得前段齒輪的角數為最大值。

例如：以13角齒輪為例，根據 Theorem 1 的結論（1）可知策略一中所得的可行數 $y=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$，將 $n=13$ 代入可得 $y=\left\lceil \sqrt{28}-1 \right\rceil=5$，因此在策略一中存在一種砍去 5 個角的方式，可使其為可行集合，意即 $k+m=5$。接下來將分析這砍去的 5 角應該如何分配在 k 和 m。若把 $y=5$ 代入 Theorem 1 的結論（2），可得 $3-\sqrt{2}\le k\le 3+\sqrt{2}$，因為 k 需為自然數，所以 $k=2,3,4$ 皆符合條件。這表示策略一所砍去的角，可為 $k=2$，$m=3$，此時的可行集合為 $Y=\{0,1,3,5,7\}$；也可為 $k=3$，$m=2$，此時的可行集合 $Y=\{0,1,2,5,8\}$；也可為 $k=4$，$m=1$，此時的可行集合 $Y=\{0,1,2,3,7\}$。因此考慮13角齒輪，$Y=\{0,1,3,5,7\}$、$Y=\{0,1,2,5,8\}$ 與 $Y=\{0,1,2,3,7\}$ 皆為策略一中的可行集合。

砍去5角的可行集合
- $k=2$，$m=3$，$Y=\{0,1,3,5,7\}$　0　1　2　3　4　5　6　7　較短
- $k=3$，$m=2$，$Y=\{0,1,2,5,8\}$　0　1　2　3　4　5　6　7　8　最長
- $k=4$，$m=1$，$Y=\{0,1,2,3,7\}$　0　1　2　3　4　5　6　7　較短

特別的，若把 $y=5$ 代入 Theorem 1 的結論（3），可得 $\frac{5}{2}\le k\le \frac{7}{2}$，所以 $k=3$ 時，其可行集合使得前段齒輪的角數為最大值。

三、可行集合的等價定義

對於n角齒輪，集合$Y=\left\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\right\}$，若對任意$i\in\left\{1,2,\cdots,n-1\right\}$，$Y_i\cap Y\neq\varnothing$，則$Y$即為可行集合。依照可行集合的定義，必須要將上層齒輪旋轉一整圈來確認是否皆有共同的缺角，共有$n-1$個情形需要檢驗，但實際上我發現上層齒輪順時針旋轉與逆時針旋轉有對稱的關係，透過這樣的思維，可以簡化檢驗的過程，我用以下的引理來說明概念如何簡化。

Lemma 2：順逆時針旋轉的對稱性

令n為自然數，集合$Y=\left\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\right\}$，若對任意$i\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$，$Y_i\cap Y\neq\varnothing$恆成立，則$Y$為$n$角齒輪的可行集合。

【證明】：

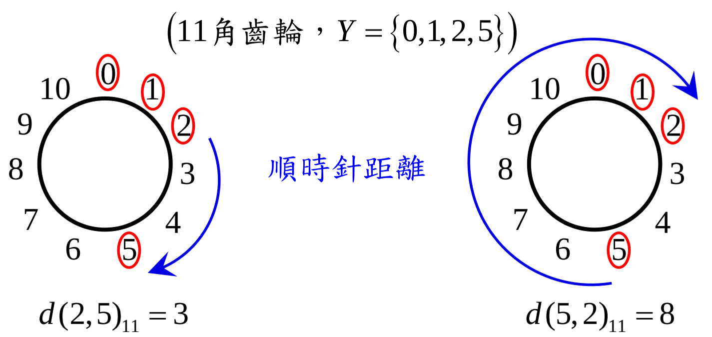
給定$i\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$，因為集合$Y_i$與$Y$有交集，所以存在$\{a_q\}\in Y_i\cap Y$，這表示存在$\{a_p\}\in Y$滿足$a_p+i=a_q$。由此可知當上層齒輪順時針旋轉$i$格之後，上層齒輪編號為$a_p$的缺角將與下層齒輪編號為$a_q$重合。換句話說，當上層齒輪逆時針旋轉$i$格之後，上層齒輪編號為$a_q$的缺角將與下層齒輪編號為$a_p$重合。因為上層齒輪逆時針旋轉$i$格的狀態等價於順時針旋轉$n-i$格的狀態，可知對任意$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，$Y_i\cap Y\neq\varnothing$恆成立，意即$Y$為$n$角齒輪的可行集合。■

Lemma 2 說明著，對於集合Y，只要檢驗上層齒輪順時針依序旋轉至半圈的結果，即可用來判斷Y是否為可行集合。這樣的推論也呼應著用策略一所設計的集合Y時，我要求『前段齒輪的角數必須要大於後段齒輪的角數』的理由，使得Y為可行集合。

距離數列與可行數列的定義

給定一個集合$Y=\left\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\right\}$，欲說明$Y$為$n$角齒輪的可行集合，必須考慮集合$Y_i$是否與$Y$有共同元素。若$\{a_q\}\in Y_i\cap Y$，則表示存在$\{a_p\}\in Y$滿足$a_p+i=a_q$，其中$i$可以視為在$n$角齒輪上，編號為$a_p$的角與編號為$a_q$的角之間的順時針的距離。因此我提出圓周上元素的距離概念，試圖建立可行集合的等價定義，使得後續能幫助我研究可行集合的建構策略。

將$\left\{0,1,2,\cdots,n-1\right\}$以順時針依序安排在圓周上表示一個$n$角齒輪，每個數字代表其中一個角，對於兩個數$a,b\in\left\{0,1,2,\cdots,n-1\right\}$，我定義$a$到$b$在圓周上的順時針距離為$b-a$除以$n$的餘數，將此距離記為『$\boldsymbol{d(a,b)_n}$』，意即$d(a,b)_n=b-a\ (\mathrm{mod}\ n)$。例如：$d(2,5)_{11}=3$、$d(5,2)_{11}=8$。



對於11角齒輪，令$Y=\{0,1,2,5\}$表示缺角集合，則$Y_3=\{3,4,5,8\}_{11}$。因為$Y\cap Y_3=\{5\}\neq\varnothing$，這表示上層齒輪順時針轉3格後與下層齒輪將有共同的缺角，其共同缺角為上層齒輪的2號缺角與下層齒輪的5號缺角。由此可知，若兩個缺角在圓周上的順時針距離為i，則表示上層齒輪順時針旋轉i格後，與下層齒輪必有共同的缺角。對於集合$Y=\{0,1,2,5\}$，我依序紀錄相鄰兩元素在圓周上的順時針距離，分別為$d(0,1)_{11}=1$、$d(1,2)_{11}=1$、$d(2,5)_{11}=3$、$d(5,0)_{11}=6$，並表示為數列$(1,1,3,6)_{11}$，以符號記為『$\boldsymbol{D_Y}$』。對於集合$Y=\{0,1,2,5\}$所對應的數列$D_Y=(1,1,3,6)_{11}$，我稱D_Y為缺角集合Y所決定的『**距離數列**』。

令$D_Y=(1,1,3,6)_{11}=(d_0,d_1,d_2,d_3)_{11}$，因為$d_0=1$、$d_0+d_1=2$、$d_3=3$、$d_2+d_3=4$、$d_1+d_2+d_3=5$，根據距離數列的概念，可知對任意$i\in\{1,2,3,4,5\}$，當上層齒輪順時針旋轉$i$格時，上下層齒輪必有共同缺角。又因為 Lemma 2 的結論說明了『上層齒輪順時針旋轉i格有共同缺角』等價於『上層齒輪逆時針旋轉i格有共同缺角』。可知上層齒輪不論是順時針旋轉$1\sim5$格或是逆時針旋轉$1\sim5$格，上下兩齒輪皆將有共同的缺角，因此集合Y必為11角齒輪的可行集合。例如$d_2+d_3=4$，即表示上層齒輪旋轉4格後，上層齒輪的1號缺角將與下層齒輪的5號缺角重合；而當上層齒輪逆時針旋轉4格後，上層齒輪的5號缺角將與下層齒輪的1號缺角重合。由此可知，對於距離數列D_Y，利用D_Y中連續元素相加的可能值，可以幫助我判斷集合Y是否為可行集合。

n 角齒輪的可行數列 D_Y

對於重疊的兩個n角齒輪，令缺角集合為$Y=\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\}\subseteq\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，特別規定$a_p=a_{p(\mathrm{mod}\,y)}$。對任意$t\in\{0,1,2,\cdots,y-1\}$，定義以下符號：

1. 定義$d(a_t,a_{t+1})_n=a_{t+1}-a_t \pmod n$為在$n$角齒輪上『**$\boldsymbol{a_t}$到$\boldsymbol{a_{t+1}}$的順時針距離**』；
2. 令$d_t=d(a_t,a_{t+1})_n$，定義數列『$\boldsymbol{D_Y=(d_0,d_1,\cdots,d_{y-1})_n}$』為集合$Y$決定的『**距離數列**』；
3. 若Y為n角齒輪的可行集合，則數列D_Y稱為n角齒輪『**可行數列**』。

固定自然數 n，每一個集合 Y 皆可以對應一個距離數列 D_Y，兩者為多對一的對應關係。反之，若 D_Y 為可行數列，則必可建構一個集合 Y 使其成為 n 角齒輪的可行集合。以下我將刻劃如何直接判斷 D_Y 是否為可行數列，故有以下引理：

Lemma 3： D_Y 為可行數列的條件

令 n 為自然數，y 元數列 $D_Y=(d_0,d_1,\cdots,d_{y-1})_n$，其中對任意 $0\le t\le y-1$，$d_t\in\{1,2,\cdots,n-1\}$。特別的，數列的下標皆為除以 y 後的餘數，當 $t\ge y$，規定 $d_t=d_{t(\bmod y)}$，則有以下結論：

（1）集合 $Y=\{0\}\cup\left\{\sum_{j=0}^{k-1}d_j:k\in\{1,2,\cdots,y-1\}\right\}$ 決定的距離數列即為 D_Y；

（2）若對任意 $d\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$，皆存在 $0\le t,k\le y-1$，滿足連續元素相加之和 $\sum_{j=0}^{k-1}d_{t+j}=d$，

則 D_Y 為 n 角齒輪的可行數列。

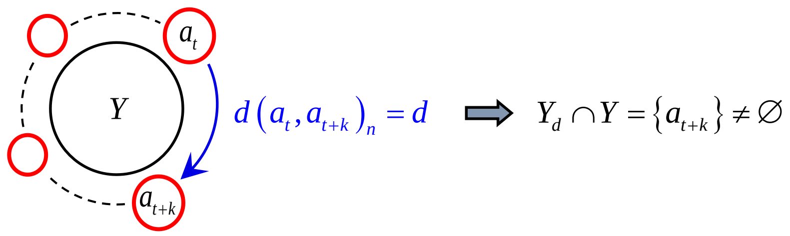
【證明】:

（1）考慮集合 $Y=\{0\}\cup\left\{\sum_{j=0}^{k-1}d_j:k\in\{1,2,\cdots,y-1\}\right\}$，令 $a_0=0$ 且 $a_k=\sum_{j=0}^{k-1}d_j$，$k\in\{1,2,\cdots,y-1\}$，

可知 $Y=\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\}$。對任意 $a_t\in Y$，不難得知 $d(a_t,a_{t+1})_n=a_{t+1}-a_t\ (\bmod\ n)=d_t$，故集合 Y 決定的距離數列即為 $D_Y=(d_0,d_1,\cdots,d_{y-1})_n$。

（2）令數列 $D_Y=(d_0,d_1,\cdots,d_{y-1})_n$，集合 $Y=\{a_0,a_1,\cdots,a_{y-1}\}=\{0\}\cup\left\{\sum_{j=0}^{k-1}d_j:k\in\{1,2,\cdots,y-1\}\right\}$，

其中 $a_0=0$ 且 $a_k=\sum_{j=0}^{k-1}d_j$，$k\in\{1,2,\cdots,y-1\}$。根據結論（1）可知集合 Y 決定的距離數列即為 $D_Y=(d_0,d_1,\cdots,d_{y-1})_n$。因為對任意 $d\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\}$，皆存在 $0\le t,k\le y-1$，滿足 $\sum_{j=0}^{k-1}d_{t+j}=d$，所以 $\{a_t+d\}=\{a_{t+k}\}\in Y_d\cap Y\ne\varnothing$。根據 Lemma 2 可知，集合 Y 為 n 角齒輪的可行集合，故 D_Y 為 n 角齒輪的可行數列。■



利用可行數列說明策略一

策略一所設計的缺角集合 $Y=\{0,1,2,\cdots,k-1\}\cup\{k(i+1)-1:i=1,2,\cdots,m\}$，其中 $|Y|=y=k+m$。考慮 n 角齒輪，集合 Y 決定的距離數列即為 $D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{y-1}$，其中

$$d_t=\begin{cases}1 & ,當\ 0\le t\le k-2\\ k & ,當\ k-1\le t\le k+m-2\\ n-(m+1)k+1 & ,當\ t=k+m-1\end{cases}$$

。對任意 $d\in\{1,2,\cdots,(m+1)k-1\}$，若 $d=\alpha k+\beta$，其中 $0\le\alpha\le m$ 且 $0\le\beta\le k-1$，則可知 $\sum_{t=k-\beta-1}^{k+\alpha-2}d_t=d$。當 $(m+1)k-1\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 時，根據 Lemma 3 的結論（2）可知，D_Y 為 n 角齒輪的可行數列且 Y 為可行集合。因為 n,k,m 皆為自然數，所以 $(m+1)k-1\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 可推得 $(m+1)k\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\ge\frac{n+1}{2}$，由此亦可獲得 Lemma 1 的結論，進一步再利用 Theorem 1 的分析方法，透過算幾不等式即可推得關係式 $y=k+m\ge\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$，由此可知 n 角齒輪的最小可行數 $f(n)\le\left\lceil\sqrt{2(n+1)}-1\right\rceil$。

$$D_Y=(\underbrace{\overbrace{1\quad 1\quad \cdots\cdots\quad 1\quad 1}^{k-1個}\quad \overbrace{k\quad k\quad \cdots\cdots\quad k}^{m個}}_{\sum_{t=k-\beta-1}^{k+\alpha-2}d_t=d=\alpha k+\beta}\ k\quad n-(m+1)k+1\ )_n$$

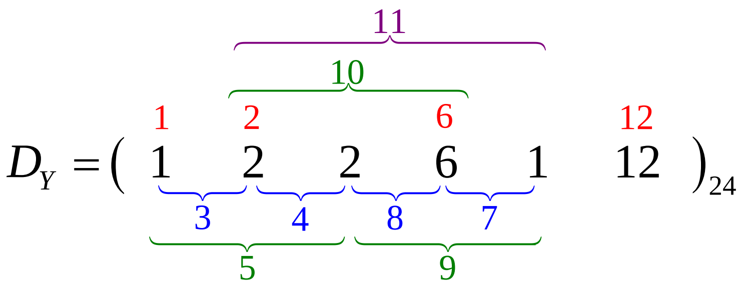
四、策略二

將一個集合 Y 對應一個距離數列 D_Y，利用距離數列中部分連續元素相加的數值，我更容易判斷集合 Y 是否為可行集合。然而我進一步利用距離數列的概念，設計可行集合，發展新的策略，試圖將策略一進行優化。以下我先以 24 角齒輪為例來說明

24 角齒輪的範例

考慮 24 角齒輪，令缺角集合 $Y=\{0,1,3,5,11,12\}$，是從 0 開始順時針先連續砍去編號為 0,1 的兩個角，之後空下編號為 2 再砍去編號 3 的角，空下編號為 4 再砍去編號 5 的角（也就是『空一格再砍一角』的動作重複 2 次），最後再空下編號為 $6,7,\cdots,10$ 的五格再砍去編號 11,12 連續兩個角。我可以利用距離數列的概念來說明集合 Y 必為 24 角齒輪的可行集合。

集合$Y=\{0,1,3,5,11,12\}$決定的距離數列為$D_Y=(1,2,2,6,1,12)_{24}=(d_0,d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)_{24}$。因為$d_0=1$、$d_1=2$、$d_0+d_1=3$、$d_1+d_2=4$、$d_0+d_1+d_2=5$、$d_3=6$、$d_3+d_4=7$、$d_2+d_3=8$、$d_2+d_3+d_4=9$、$d_1+d_2+d_3=10$、$d_1+d_2+d_3+d_4=11$、$d_5=12$，所以$D_Y$中連續元素相加之和可為$1,2,\cdots,12$，根據 Lemma 3 的結論（2）可知，集合$Y=\{0,1,3,5,11,12\}$為 24 角齒輪的可行集合，$D_Y$即為對應的可行數列。



可行集合的設計-策略二

根據上述缺角集合的設計概念進行推廣，將設計的方式一般化，對於n角齒輪，我即可依循固定的方式，發展出第二個設計可行集合的策略，我將設計的方式稱為**『策略二』**，其建構的原則如下。

可行集合的設計-策略二

對於n角齒輪，以下三步驟決定缺角集合$Y\subseteq\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，其中$k,m$皆為非負整數：

Step-1：將編號$0,1$這連續2個角砍去；

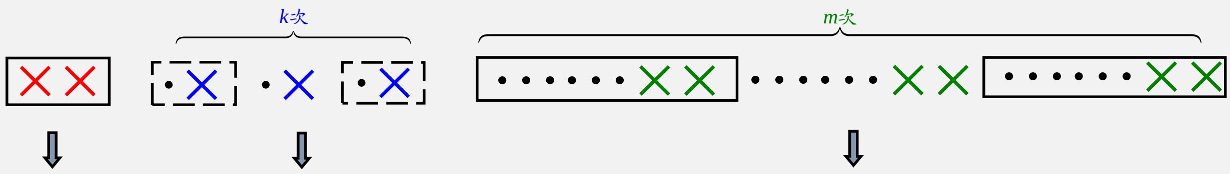
Step-2：由編號1的角開始，每空1格後砍去下一個角，重複k遍；

Step-3：由編號$2k+1$的角開始，每連續空$2k+1$格後砍去連續兩角，重複m遍。

令$Y_A=\{0,1\}$，$Y_B=\{1+2i:i=1,2,\cdots,k\}$，$Y_C=\{2k+(2k+3)j,1+2k+(2k+3)j:j=1,2,\cdots,m\}$。

經過三步驟所決定砍去的角集合為$Y=Y_A\cup Y_B\cup Y_C$，其中$|Y|=2+k+2m$。

砍 2 角　空 1 格再砍 1 角 $\rightarrow$ 重複 k 次　　空 $2k+1$ 格再砍 2 角 $\rightarrow$ 重複 m 次



$Y_A=\{0,1\}$　$Y_B=\{1+2i:i=1,2,\cdots,k\}$　$Y_C=\{2k+(2k+3)j,1+2k+(2k+3)j:j=1,2,\cdots,m\}$

$\Rightarrow\ Y=Y_A\cup Y_B\cup Y_C$

在策略二中，首先連續砍去的2個角，我稱為集合Y_A；之後空1格砍1角的動作重複k遍，砍去的k個角構成集合Y_B；最後空$2k+1$格再砍2角的動作重複m次，砍去的$2m$個角構成集合Y_C，這三個集合決定了缺角集合Y，故集合Y的元素數量$|Y|=2+k+2m$受到參數k與m的影響。後續我將會分析k與m的關係，試著在Y為可行集合的情況下降低$|Y|=2+k+2m$的值。

Lemma 4：策略二為可行集合的條件

對於n角齒輪，令k與m分別為策略二中 Step-2 與 Step-3 所決定的參數。

當$(2k+3)(m+1)-1\le n\le 2(2k+3)(m+1)-3$時，策略二所決定的缺角集合$Y$必為$n$角齒輪的可行集合。

【證明】

對於n角齒輪，策略二所設計的缺角集合為$Y=Y_A\cup Y_B\cup Y_C$，其中$Y_A=\{0,1\}$，$Y_B=\{1+2i:i=1,2,\cdots,k\}$，$Y_C=\{2k+(2k+3)j,1+2k+(2k+3)j:j=1,2,\cdots,m\}$。集合$Y$決定的距離數列即為$D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{y-1}$，其中$y=|Y|=2+k+2m$，而$D_Y$中的元素即為

$$d_t=\begin{cases}1 & ,\text{當 } t\in\{0\}\cup\{k+2j:j=1,2,\cdots m\}\\ 2 & ,\text{當 } t\in\{1,2,\cdots,k\}\\ 2k+2 & ,\text{當 } t\in\{k+2j-1:j=1,2,\cdots,m\}\end{cases}$$

和$d_{1+k+2m}=n-(2k+3)(m+1)+2$。對任意$i\in\{1,\cdots,k\}$、$j\in\{1,\cdots,m\}$，由$d_0=1$和$k$個$d_i=2$的連續元素加法的組合可創造出$1,2,\cdots,2k+1$的距離數，且加上接下來的$m$組$d_{k+2j-1}=2k+2$和$m$組$d_{k+2j}=1$後可組合成$2k+2,\cdots,(2k+3)(m+1)-2$的距離數。因此當$(2k+3)(m+1)-2\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$時，根據 Lemma 3 的結論（2）可知，$D_Y$為$n$角齒輪的可行數列且$Y$為可行集合。因為$n,k,m$皆為自然數，所以$(2k+3)(m+1)-2\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$可推得$(2k+3)(m+1)-1\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\ge\frac{n+1}{2}$，故$n\le 2(2k+3)(m+1)-3$。又因為$Y_C$中最後一個被砍去的角編號為$1+2k+(2k+3)m=(2k+3)(m+1)-2$，所以$n\ge(2k+3)(m+1)-1$。可知，當$n$的範圍限制在$(2k+3)(m+1)-1\le n\le 2(2k+3)(m+1)-3$時，則缺角集合$Y$必為$n$角齒輪的可行集合。■

$$D_Y=(\ 1,\ \overbrace{2,\ 2,\cdots,\ 2}^{k\text{個}},\ \overbrace{2k+2,\ 1,\ \ 2k+2,\ 1,\cdots,\ \ 2k+2,\ 1}^{m\text{組}},\ *\ )_n$$

➡ 可創造出距離$1,2,\sim,2k+1$與$2k+2,\sim,(2k+3)(m+1)-2$

給定n角齒輪，透過策略二，我可得最小可行數$f(n)$的一個上界，故有以下定理：

Theorem 2：

對於n角齒輪，針對策略二，令k為 Step-2 重複的次數，m為 Step-3 重複的次數，$y=\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil}-\frac{3}{2} \right\rceil$為所需砍去角數，則有以下結論：

（1） 最小可行數$f(n)\le y$；

（2） $\frac{(2y-5)-\sqrt{4(y+\frac{3}{2})^2-8(n+3)}}{8}\le m\le \frac{(2y-5)+\sqrt{4(y+\frac{3}{2})^2-8(n+3)}}{8}$；

（3） 特別的，當$\frac{2y-9}{8}\le m\le \frac{2y-1}{8}$時，前段齒輪的角數為最大。

【證明】

（1）在策略二中，缺角集合$Y=Y_A\cup Y_B\cup Y_C$，其中$Y_A=\{0,1\}$，$Y_B=\{1+2i:i=1,2,\cdots,k\}$，$Y_C=\{2k+(2k+3)j,1+2k+(2k+3)j:j=1,2,\cdots,m\}$，所砍去的角數量為$|Y|=y=2+k+2m$。因為$Y_A$的2個角、$Y_B$的$k$個角和$Y_C$的$2m$個角中，$k$與$m$皆屬於自然數，符合算幾不等式的條件，所以可以將砍去的角數$y=2+k+2m$設計成$y=(k+\frac{3}{2})+(2m+2)-\frac{3}{2}$。根據 Lemma 4 的結論可知$n\le 2(2k+3)(m+1)-3$，依照$n$的奇偶性進行分類討論，當$n$為奇數時，$n$的上界為不等式$n\le 2(2k+3)(m+1)-3$；當$n$為偶數時，$n$的上界為不等式$n\le 2(2k+3)(m+1)-4$。

① （當n為奇數）

我將n的上界之不等式改寫成$y=(k+\frac{3}{2})+(2m+2)-\frac{3}{2}$，由於改寫後的$y$和$n$的上界中都有出現$k+\frac{3}{2}$和$2m+2$，我令$a=k+\frac{3}{2}$，$b=2m+2$，因此砍去的角數$y=a+b-\frac{3}{2}$移項後得$a+b=y+\frac{3}{2}$。因為$n\le 2ab-3$，移項後得$ab\ge\frac{n+3}{2}$，所以根據算幾不等式$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，將$a+b$和$ab$分別以$y+\frac{3}{2}$和$\frac{n+3}{2}$代入後，可得$y+\frac{3}{2}\ge 2\sqrt{\frac{n+3}{2}}$，進一步可將不等式整理為$y\ge\sqrt{2(n+3)}-\frac{3}{2}$。因為$y$為自然數，所以$y$的最小值為$\left\lceil \sqrt{2(n+3)}-\frac{3}{2} \right\rceil$。

② （當 n 為偶數）

我將 n 的上界之不等式改寫成 $y=(k+\frac{3}{2})+(2m+2)-\frac{3}{2}$，透過上述一樣的分析，根據算幾不等式即可將關係式整理為 $y\geq\sqrt{2(n+4)}-\frac{3}{2}$。因為 y 為自然數，所以 y 的最小值為 $\left\lceil\sqrt{2(n+4)}-\frac{3}{2}\right\rceil$。

總和上述結論，可知 $y\geq\begin{cases}\left\lceil\sqrt{2(n+3)}-\frac{3}{2}\right\rceil & ,\text{當}n\text{為奇數}\\ \left\lceil\sqrt{2(n+4)}-\frac{3}{2}\right\rceil & ,\text{當}n\text{為偶數}\end{cases}$，綜合 n 的奇偶性，可將此結論整合為 $y\geq\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$。意即在策略二中，對於 n 角齒輪，砍去的角數 y 至少要為 $\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$ 才可以使集合 Y 為可行集合，由策略二可知 $\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$ 為最小可行數的上界，也就是最小可行數 $f(n)\leq\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$。

（2）除了根據結論（1）可知，在策略二中 $y=2+k+2m$ 的最小值為 $\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$，我還要了解參數 k 與 m 的值需如何分配方能使缺角集合 Y 為可行集合。根據 Lemma 4 的結論可知 $(2k+3)(m+1)-1\leq n\leq 2(2k+3)(m+1)-3$，其中 $n\leq 2(2k+3)(m+1)-3$ 可移項成 $(2k+3)(m+1)-1\geq\frac{n+1}{2}$。由於 $k=y-2m-2$，利用變數代換可將不等式表示為 $(2y-4m-1)(m+1)-1\geq\frac{n+1}{2}\Leftrightarrow 8m^2+(10-4y)m+(n-4y+5)\leq 0$。利用二次方程式的公式解，即可知不等式的解為

$$\frac{(2y-5)-\sqrt{4(y+\frac{3}{2})^2-8(n+3)}}{8}\leq m\leq\frac{(2y-5)+\sqrt{4(y+\frac{3}{2})^2-8(n+3)}}{8}$$。

（3）根據結論（1）可知，在策略二中 $y=2+k+2m$ 的最小值為 $y=\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$，這裡我要了解 y 固定時，k 和 m 如何分配才能使前段齒輪的角數 $(2k+3)(m+1)-1$ 有最大值。由

於 $k=y-2m-2$，利用變數代換前段齒輪的角數 $(2k+3)(m+1)-1$ 可改寫為 m 的二次式

$$g(m)=(2y-4m-1)(m+1)-1=-4m^2+2my-5m+2y-2=-4\left(m-(\frac{2y-5}{8})\right)^2+\frac{4y^2+12y-7}{16}$$

，由此可知，在砍去角數 y 為固定的情況下（ y 視為已知數），當 m 越接近 $\frac{2y-5}{8}$ 時，前段齒輪的角數會越大。我令 $g(m)=-4\left(m-(\frac{2y-5}{8})\right)^2+\frac{4y^2+12y-7}{16}$ ，為 m 的二次函數，函數圖形為拋物線開口朝下，頂點為 $\left((\frac{2y-5}{8}),\frac{4y^2+12y-7}{16}\right)$。由於 y 為正整數，因此 $m=\frac{2y-5}{8}$ 必不為正整數，則可知由二次方程式運算出的最大前段角數不會發生，我為了找出最接近它的數值，決定取離二次函數圖形頂點最近的格子點， 因此可得知在符合條件 $\frac{2y-9}{8}\le m\le\frac{2y-1}{8}$ 且 m 為正整數的狀況下，求出的正整數 m 可使前段角數為最大值，也就是說，當我用已知的 y 求出 m 後，再以 $y=2+k+2m$（砍去角數）求出 k ，即可使策略二中的前段角數為最大值。■

例如：以17 角齒輪為例，根據 Theorem 2 的結論（1）可知在策略二中 $y=2+k+2m$ 的最小值為 $\left\lceil\sqrt{4\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$，將 $n=17$ 代入可得 $y=\left\lceil\sqrt{40}-\frac{3}{2}\right\rceil=5$，因此在策略二中存在一種砍去5個角的方式，可使其為可行集合，意即 $2+k+2m=5$ 。因為 $k+2m=3$ ，接下來將分析其中砍去的3角應該如何分配在 k 和 m 。若把 $y=5$ 代入 Theorem 2 的結論（ 2 ），可得 $\frac{1}{4}\le m\le 1$，因為 m 需為非負整數，所以只有 $m=1$ 符合條件。這表示策略二所砍去的角中， $m=1$， $k=y-2-2m=1$ ，也就是說此時的可行集合 $Y=\{0,1,3,7,8\}$ 。因此考慮17 角齒輪， $Y=\{0,1,3,7,8\}$ 必為策略二中的可行集合。

砍去5角的可行集合 $\longrightarrow$ $k=1$，$m=1$，$Y=\{0,1,3,7,8\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8

特別的，若把 $y=5$ 代入 Theorem 2 的結論（3），亦可得 $\frac{1}{4}\le m\le\frac{9}{8}$ ，所以當 $m=1$ 時，其可行集合使得前段齒輪的角數為最大值。

例如：以18角齒輪為例，可知根據 Theorem 2 的結論（1）可知在策略二中 $y=2+k+2m$ 的最小值為 $\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil} - \frac{3}{2} \right\rceil$，將 $n=18$ 代入可得 $y=\left\lceil \sqrt{44}-\frac{3}{2} \right\rceil = 6$，因此在策略二中存在一種砍去6個角的方式，可使其為可行集合，意即 $2+k+2m=6$。因為 $k+2m=4$，接下來將分析其中砍去的4角應該如何分配在 k 和 m。若把 $y=6$ 代入 Theorem 2 的結論（2），可得 $\frac{7-\sqrt{57}}{8} \le m \le \frac{7+\sqrt{57}}{8}$，因為 m 需為非負整數，所以 $m=0$ 或1皆符合條件。這表示策略二所砍去的角中，當 $m=0$，$k=4$ 時，則缺角集合 $Y=\{0,1,3,5,7,9\}$；當 $m=1$，$k=2$ 時，則缺角集合 $Y=\{0,1,3,5,11,12\}$。因此考慮18角齒輪，$Y=\{0,1,3,5,7,9\}$ 或 $Y=\{0,1,3,5,11,12\}$ 皆為策略二中的可行集合。

砍去6角的可行集合

$k=2$，$m=1$，$Y=\{0,1,3,5,11,12\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 較長

$k=4$，$m=0$，$Y=\{0,1,3,5,7,9\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 較短

特別的，若把 $y=6$ 代入 Theorem 2 的結論（3），可得 $\frac{3}{8} \le m \le \frac{11}{8}$，所以 $m=1$ 時，其可行集合使得前段齒輪的角數為最大值。

策略一與策略二的優劣分析

對於24角齒輪，若使用策略一，根據 Theorem 1 的結論（1），可知 $y=k+m$ 的最小值為 $\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$。將 $n=24$ 代入可得 $y=\left\lceil \sqrt{50}-1 \right\rceil = 7$，意即 $k+m=7$。接下來把 $y=7$ 代入 Theorem 1 的結論（2），可得 $\frac{8-\sqrt{14}}{2} \le k \le \frac{8+\sqrt{14}}{2}$，因為 k 須為自然數，若考慮 $k=3$，則 $m=y-k=4$，也就是 $Y=\{0,1,2,5,8,11,14\}$ 時，此為策略一所設計的可行集合。若使用策略二，根據 Theorem 2 的結論（1），可知 $y=2+k+2m$ 的最小值為 $\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil} - \frac{3}{2} \right\rceil$，將 $n=24$ 代入可得 $y=\left\lceil \sqrt{56}-\frac{3}{2} \right\rceil = 6$，意即 $2+k+2m=6$。接下來把 $y=6$ 代入 Theorem 2 的結論（2），可得 $\frac{7-\sqrt{9}}{8} \le m \le \frac{7+\sqrt{9}}{8}$，因為 m 須為非負整數，所以 $m=1$ 符合條件。這表示當 $m=1$，$k=y-2-2m=2$，也就是 $Y=\{0,1,3,5,11,12\}$ 時，此為策略二所設計的24角齒輪之可行集合。

由上述可知，對於 24 角齒輪的可行集合，策略二需砍去角數的最小值為 6 ，較策略一的 7 角少 1 角，因此可確定策略二為策略一之優化。

24角齒輪

策略一：砍去 7 角的可行集合 → $k=3$，$m=4$，$Y=\{0,1,2,5,8,11,14\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

策略二：砍去 6 角的可行集合 → $k=2$，$m=1$，$Y=\{0,1,3,5,11,12\}$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

考慮 n 角齒輪，將策略一與策略二所設計的可行集合元素數量的最小值分別記為 $f_1(n)$ 與 $f_2(n)$，意即 $f_1(n)=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$、 $f_2(n)=\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil}-\frac{3}{2} \right\rceil$。可以發現兩者大約都是 $\sqrt{2n}$ 的級別，我用 Excel 試算表即可發現以下幾點現象：

（1）對於任意自然數 n ， $f_1(n)\geq f_2(n)$ 恆成立；

（2）當 n 為某些特定的值時， $f_1(n)-1=f_2(n)$ ，這表示策略二的設計確實優於策略一；

（3）兩個策略所設計的可行集合的元素數量差距最多為 1，意即 $0\leq f_1(n)-f_2(n)\leq 1$ 。

五、完美可行集合

若可行集合 Y 中滿足『任意兩個元素的最短距離都沒有重複』，則我將其視為一種特殊的可行集合，因為這表示上層齒輪在旋轉的過程中，上下齒輪重合的缺角數量皆已達最小化，這表示初始砍去重合角的位置為最緊緻的狀態，所以我想討論這種特殊可行集合的性質。

完美集合的定義與基本性質

對於 n 角齒輪，令 Y 為缺角集合，其中 $|Y|=y$ ，而 D_Y 為 Y 所決定的距離數列，其中 $|D_Y|=y$ 。根據 Lemma 3 的結論（2）可知，若距離數列 D_Y 中連續元素相加之和的可能值包含 $\{1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$ ，則 D_Y 為可行數列且 Y 為可行集合。因為 D_Y 的連續元素相加的情形共有 $C_2^y=\frac{y(y-1)}{2}$ 組狀態，所以當 $\frac{y(y-1)}{2}=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 時，這樣子的可行集合 Y ，任兩個元素的最短距離皆為相異，且可以產生出 $1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 這些距離，這表示可行集合 Y 的數量達到一種最緊緻的

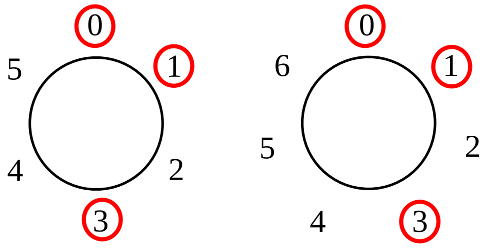
狀態，意即在固定n的情況下，可用最少的元素數量創造出所需要的最短距離，我特別將具備這種特質的可行集合稱為n角齒輪的『**完美集合**』。

完美集合的定義

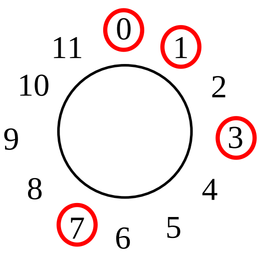
對於n角齒輪，Y為可行集合，其中$|Y|=y$。若$\dfrac{y(y-1)}{2}=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$，則稱$Y$為『**完美集合**』。

若Y為完美集合，則距離數列D_Y稱為『**完美數列**』。

例如：考慮6角齒輪與7角齒輪，當缺角集合$Y=\{0,1,3\}$時，其距離數列分別為$D_Y=(1,2,3)_6$與$D_Y=(1,2,4)_7$。個別考慮$D_Y=(1,2,3)_6$與$D_Y=(1,2,4)_7$，皆可得$d_0=1$、$d_1=2$、$d_0+d_1=3$，因此根據 Lemma 3 的結論（2）可知，$D_Y=(1,2,3)_6$與$D_Y=(1,2,4)_7$分別為6角齒輪與7角齒輪的可行數列，意即$Y=\{0,1,3\}$為6角齒輪與7角齒輪的可行集合。考慮6角齒輪與7角齒輪，當可行集合為$Y=\{0,1,3\}$時，將$y=|Y|=3$、$n=6$與$n=7$代入，皆滿足$\dfrac{y(y-1)}{2}=3=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$，因此可行集合$Y=\{0,1,3\}$即為6角齒輪與7角齒輪的完美集合。



例如：考慮12角齒輪，當缺角集合$Y=\{0,1,3,7\}$時，其距離數列$D_Y=(1,2,4,5)_{12}$。在$D_Y=(1,2,4,5)_{12}$中，可得$d_0=1$、$d_1=2$、$d_0+d_1=3$、$d_2=4$、$d_3=5$、$d_1+d_2=6$，因此根據 Lemma 3 的結論（2）可知，$D_Y=(1,2,4,5)_{12}$為12角齒輪的可行數列，意即$Y=\{0,1,3,7\}$為12角齒輪的可行集合。考慮12角齒輪，當可行集合為$Y=\{0,1,3,7\}$時，將$y=|Y|=4$、$n=12$代入，皆滿足$\dfrac{y(y-1)}{2}=6=\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$，因此可行集合$Y=\{0,1,3,7\}$即為12角齒輪的完美集合。



根據完美集合的定義，不難得知特定的n值，才有完美集合的可能性；而完美集合的概念可以得知$\lceil \sqrt{n} \rceil$可作為最小可行數$f(n)$的下界；完美集合所決定的距離數列也會有相對應的性質，我將這些容易觀察出來的性質羅列如下：

完美集合的基本性質

對於n角齒輪，若存在完美集合Y，則具備下列基本性質：

1. $n = p^2 - p$或$n = p^2 - p + 1$，其中正整數$p \geq 2$；
2. Y必為最小可行集合且$|Y| = p$，意即$f(n) = p = \lceil \sqrt{n} \rceil$；
3. Y中任意兩元素在圓周上的最短距離皆相異；
4. 當n為奇數，則完美數列D_Y中連續元素相加的值皆相異；

   當n為偶數，則完美數列D_Y中連續元素相加的值，僅$\dfrac{n}{2}$會出現恰兩次，其餘皆相異；
5. 若$D_Y = \langle d_t \rangle_{t=0}^{p-1}$為完美數列，則$\{d_0, d_1, \cdots, d_{p-1}\}$必包含$\{1,2\}$且為$n$的相異自然數的分拆。

目前我透過窮舉的方式，針對一些特殊的n值，確實有建構出完美集合。以下分別列出當$n = 2,3,6,7,12,13,21,31$時，我成功設計出的完美集合與對應的完美數列，表格呈現如下：

n	2	3	6	7	12	13	21	31
完美集合	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,3,7\}$	$\{0,1,3,9\}$	$\{0,1,4,14,16\}$	$\{0,1,3,8,12,18\}$
完美數列	$(1,1)_2$	$(1,2)_3$	$(1,2,3)_6$	$(1,2,4)_7$	$(1,2,4,5)_{12}$	$(1,2,6,4)_{13}$	$(1,3,10,2,5)_{21}$	$(1,2,5,4,6,13)_{31}$

完美集合不存在性的充分條件

在探討完美集合的過程中，我發現當$n = 20$時，完美集合意外的並不存在，說明如下。

$n = 20$的完美集合不存在（反證法−分類討論）

對於20角齒輪，不存在完美集合。由此可知最小可行數為$f(20) = 6$。

【證明】

假設Y為20角齒輪的完美集合，則$|Y| = 5$且$D_Y = (d_0, d_1, d_2, d_3, d_4)_{20}$為完美數列。因為$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 20$，所以集合$\{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4\}$必包含$\{1,2\}$且為20的相異自然數分拆，故共有5種情形，分別為$\{1,2,3,4,10\}$、$\{1,2,3,5,9\}$、$\{1,2,3,6,8\}$、$\{1,2,4,5,8\}$與$\{1,2,4,6,7\}$。

不失一般性可假設 $d_0=1$，利用完美集合的基本性質，我依序討論上述這五種狀態，皆不可能為完美數列。

① 考慮 $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{2,3,4,10\}$

因為集合內有 $3,4$，而 $d_0=1$，故 $1+d_1$ 與 d_4+1 皆不能重複為 3 與 4，所以 $d_1,d_4\notin\{2,3\}$，不失一般性，令 $d_2=2$ 且 $d_3=3$。因為 $d_2+d_3=5$，所以 $4\notin\{d_1,d_4\}$，這表示 $d_1=d_4=10$，此與完美數列的性質矛盾。

② 考慮 $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{2,3,5,9\}$

因為集合內有 3，所以 $2\notin\{d_1,d_4\}$，不失一般性，令 $d_2=2$。因為集合內有 5，所以 $3\notin\{d_1,d_3\}$，故 $d_4=3$。若 $d_1=5$ 且 $d_3=9$，則 $d_4+d_0+d_1=9=d_3$；若 $d_1=9$ 且 $d_3=5$，則 $d_3+d_4+d_0=9=d_1$。不論是哪種情形，皆與完美數列的性質矛盾。

③ 考慮 $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{2,3,6,8\}$

因為集合內有 3，所以 $2\notin\{d_1,d_4\}$，不失一般性，令 $d_2=2$。因為集合內有 8，所以 $6\notin\{d_1,d_3\}$，故 $d_4=6$。若 $d_1=3$ 且 $d_3=8$，則 $d_0+d_1+d_2=6=d_4$；若 $d_1=8$ 且 $d_3=3$，則 $d_0+d_1=9=d_3+d_4$。不論是哪種情形，皆與完美數列的性質矛盾。

④ $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{2,4,5,8\}$

因為集合沒有 3，所以 $2\in\{d_1,d_4\}$，不失一般性，令 $d_1=2$。因為集合內有 8，所以 $5\notin\{d_2,d_4\}$，故 $d_3=5$。若 $d_2=4$ 且 $d_4=8$，則 $d_2+d_3=9=d_4+d_0$；若 $d_2=8$ 且 $d_4=4$，則 $d_4+d_0=5=d_3$。不論是哪種情形，皆與完美數列的性質矛盾。

⑤ $\{d_1,d_2,d_3,d_4\}=\{2,4,6,7\}$

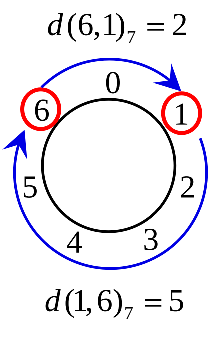
因為集合沒有 3，所以 $2\in\{d_1,d_4\}$，不失一般性，令 $d_1=2$。因為集合內有 7，所以 $4\notin\{d_2,d_4\}$，故 $d_3=4$。若 $d_2=6$ 且 $d_4=7$，則 $d_1+d_2=8=d_4+d_0$；若 $d_2=7$ 且 $d_4=6$，則 $d_4+d_0=7=d_2$。不論是哪種情形，皆與完美數列的性質矛盾。

根據上述討論可知，當 $n=20$ 時，不存在完美集合。這表示最小可行數 $f(20)>5$。根據 Theorem 2 的結論（1）可知，最小可行數 $f(20)\le 6$。故最小可行數 $f(20)=6$。■

此外，在研究的過程中，當$n=30$與$n=42$時，我也無法順利建構出完美集合，這讓我懷疑，完美集合的存在性，是否與$n=20$一樣是不存在？但若要沿用上述的討論方法來分析$n=30$與$n=42$的完美集合存在性，分類討論的過程會越來越複雜，我意識到上述說明$n=20$不存在完美集合的方法，難以具有一般性，因此我開始思考，能否改良使用另一種可推廣的論述方式來刻畫完美集合不存在性的充分條件。

對於n角齒輪，其中$n=p^2-p$或$n=p^2-p+1$，以下我先介紹一些新定義的符號以及完美數列的等價概念。定義集合$H_i=\{i,n-i\}$，其中$i=1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。令$Y=\{a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}\}$為$n$角齒輪的缺角集合且$\alpha,\beta\in Y$，考慮任意相異兩元素$\alpha,\beta$在圓周上的順時針距離，則存在$i\in\{1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$使得$d(\alpha,\beta)_n$與$d(\beta,\alpha)_n$皆為$H_i$中的元素，意即$H_i=\{d(\alpha,\beta)_n,d(\beta,\alpha)_n\}$。特別的，定義函數$h:\{1,2,\cdots,n-1\}\to\{1,2,\cdots,\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$，其中$h(i)=\begin{cases} i & ,\text{當}1\le i\le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ n-i & ,\text{當}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1\le i\le n-1 \end{cases}$，這個函數主要是用來判別$d(\alpha,\beta)_n$與$d(\beta,\alpha)_n$所屬集合$H_i$的下標$i$為何數，換句話說，若$\{d(\alpha,\beta)_n,d(\beta,\alpha)_n\}=H_i$，則$h(d(\alpha,\beta)_n)=h(d(\beta,\alpha)_n)=i$。這表示對任意相異兩元素$\alpha,\beta$在圓周上的距離有兩段，函數$h$就是要對應到兩段距離較小的值。

例如：考慮$n=7$，則$H_1=\{1,6\}$、$H_2=\{2,5\}$、$H_3=\{3,4\}$。考慮$\alpha=1$且$\beta=6$，則$d(1,6)_7=5$與$d(6,1)_7=2$，故$H_2=\{d(1,6)_7,d(6,1)_7\}=\{5,2\}$。考慮函數$h:\{1,2,\cdots,6\}\to\{1,2,3\}$，則$h(d(1,6)_7)=h(5)=2$且$h(d(6,1)_7)=h(2)=2$。



$\Rightarrow$ $H_2=\{d(1,6)_7,d(6,1)_7\}=\{5,2\}$

較小的數

$h(d(1,6)_7)=h(d(6,1)_7)=2$

令$D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$為缺角集合$Y$的距離數列，透過函數$h$的概念，以下引理為判斷$D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$是否為完美數列的等價條件。

Lemma 5： D_Y 為完美數列的條件

考慮 $n=p^2-p$ 或 $n=p^2-p+1$，令 $D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$ 為缺角集合 Y 的距離數列，則有以下結論：

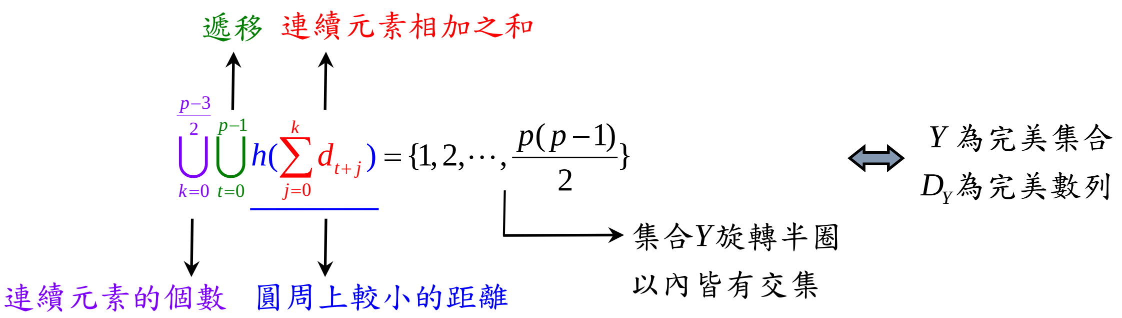
（1）當 p 為奇數時，若 $\bigcup_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\bigcup_{t=0}^{p-1}h(\sum_{j=0}^{k}d_{t+j})=\{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$，則 D_Y 為 n 角齒輪的完美數列；

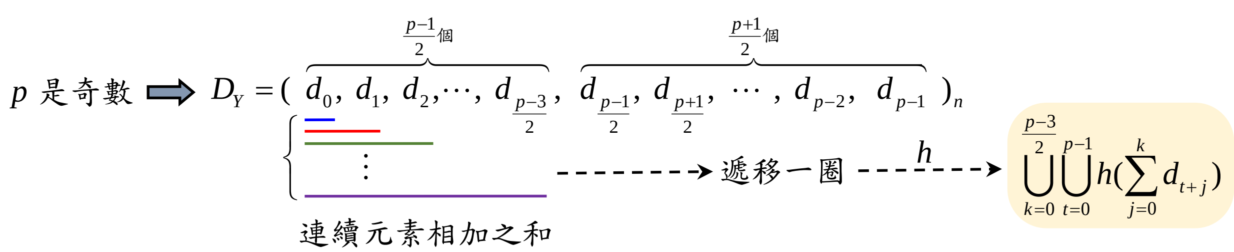
（2）當 p 為偶數時，若 $\left(\bigcup_{k=0}^{\frac{p}{2}-2}\bigcup_{t=0}^{p-1}h(\sum_{j=0}^{k}d_{t+j})\right)\cup\left(\bigcup_{t=0}^{\frac{p}{2}-1}h(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}d_{t+j})\right)=\{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$，則 D_Y 為 n 角齒輪的完美數列。

【證明】

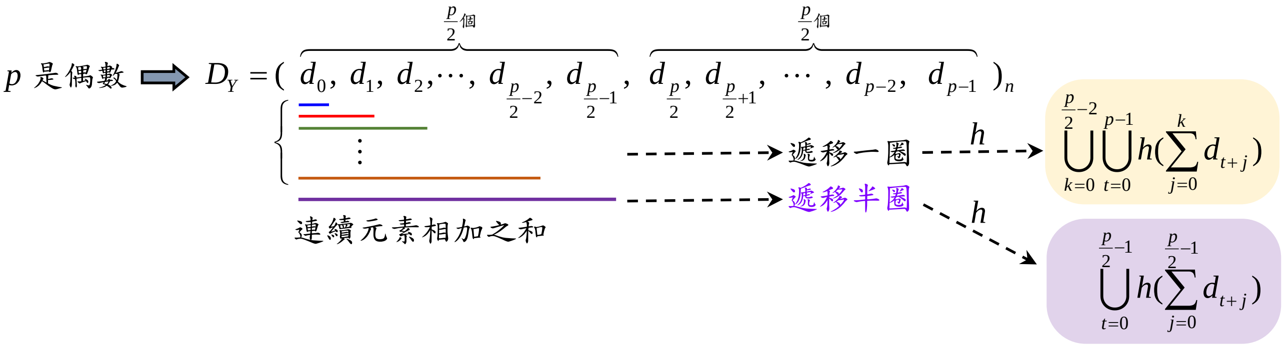
因為 $|D_Y|=p$ 且 $\frac{p(p-1)}{2}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，所以若 $D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$ 為可行數列，則必為 n 角齒輪的完美數列。

（1）當 p 為奇數，因為 $\bigcup_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\bigcup_{t=0}^{p-1}h(\sum_{j=0}^{k}d_{t+j})=\{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$，所以對任意 $d\in\{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$，存在 $0\le t\le p-1$ 與 $0\le k\le\frac{p-3}{2}$，使得 $h(\sum_{j=0}^{k}d_{t+j})=d$，則可知 $\sum_{j=0}^{k}d_{t+j}\in\{d,n-d\}$。由此可知 $\sum_{j=0}^{k}d_{t+j}=d$ 或 $\sum_{j=k+1}^{p-1}d_{t+j}=d$。因為 $\frac{p(p-1)}{2}=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，根據 Lemma 3（2）的結論可知，$D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$ 為 n 角齒輪的可行數列，所以 $D_Y=\langle d_t\rangle_{t=0}^{p-1}$ 必為 n 角齒輪的完美數列。





（2）當 p 為偶數，已知 $\left(\bigcup_{k=0}^{\frac{p}{2}-2}\bigcup_{t=0}^{p-1} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})\right) \cup \left(\bigcup_{t=0}^{\frac{p}{2}-1} h(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} d_{t+j})\right) = \{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$，考慮任意 $d \in \{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$。若 $d \in \bigcup_{k=0}^{\frac{p}{2}-2}\bigcup_{t=0}^{p-1} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})$，則存在 $0 \le t \le p-1$ 與 $0 \le k \le \frac{p}{2}-2$，使得 $h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j}) = d$，可知 $\sum_{j=0}^{k} d_{t+j} \in \{d, n-d\}$，故 $\sum_{j=0}^{k} d_{t+j} = d$ 或 $\sum_{j=k+1}^{p-1} d_{t+j} = d$；若 $d \in \bigcup_{t=0}^{\frac{p}{2}-1} h(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} d_{t+j})$，則存在 $0 \le t \le \frac{p}{2}-1$ 與 $k = \frac{p}{2}-1$，使得 $h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j}) = d$，可知 $\sum_{j=0}^{k} d_{t+j} \in \{d, n-d\}$，故 $\sum_{j=0}^{k} d_{t+j} = d$ 或 $\sum_{j=k+1}^{p-1} d_{t+j} = d$。因為 $\frac{p(p-1)}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，根據 Lemma 3（2）的結論可知，$D_Y = \langle d_t \rangle_{t=0}^{p-1}$ 為 n 角齒輪的可行數列，所以 $D_Y = \langle d_t \rangle_{t=0}^{p-1}$ 必為 n 角齒輪的完美數列。



■

有關 Lemma 5（2）的結論中，因為 p 為偶數，所以在考慮數列 $D_Y = \langle d_t \rangle_{t=0}^{p-1}$ 連續 $\frac{p}{2}$ 個元素的數值和時，因為 $\frac{p}{2}$ 個元素個數剛好為數列元素個數 p 的一半，所以 $h(\overbrace{d_0 + d_1 + \cdots + d_{\frac{p}{2}-1}}^{\frac{p}{2}\text{個}}) = h(\overbrace{d_{\frac{p}{2}} + d_{\frac{p}{2}+1} + \cdots + d_{p-1}}^{\frac{p}{2}\text{個}})$，因此這個情況只需要討論遞移半圈的情形即可，否則會出現重複的情形。這也就是結論（2）條件為何要分為 $\bigcup_{k=0}^{\frac{p}{2}-2}\bigcup_{t=0}^{p-1} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})$ 與 $\bigcup_{t=0}^{\frac{p}{2}-1} h(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} d_{t+j})$ 兩個情形的聯集。

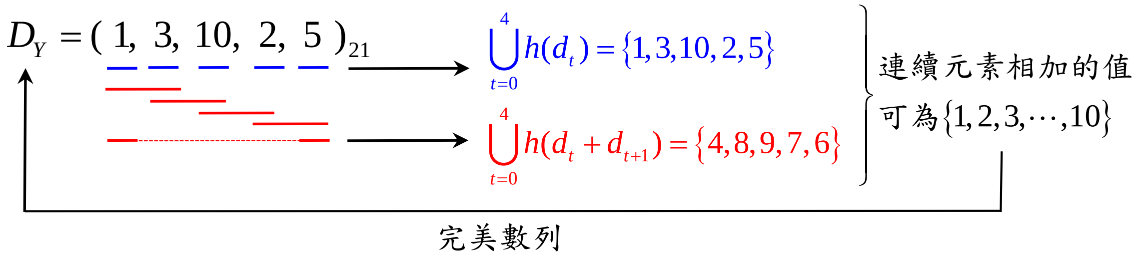
例如：考慮 $n=21$，此時 $p=5$ 為奇數，令 $D_Y=(1,3,10,2,5)_{21}=(d_0,d_1,d_2,d_3,d_4)_{21}$，依序可知

$$\bigcup_{t=0}^{4} h(\sum_{j=0}^{0} d_{t+j})=\bigcup_{t=0}^{4} h(d_t)=\{h(1),h(3),h(10),h(2),h(5)\}=\{1,3,10,2,5\}\text{、}$$

$$\bigcup_{t=0}^{4} h(\sum_{j=0}^{1} d_{t+j})=\bigcup_{t=0}^{4} h(d_t+d_{t+1})=\{h(4),h(13),h(12),h(7),h(6)\}=\{4,8,9,7,6\}\text{。}$$

將上述兩集合聯集後可得集合 $\bigcup_{k=0}^{1}\bigcup_{t=0}^{4} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})=\{1,3,10,2,5\}\cup\{4,8,9,7,6\}=\{1,2,\cdots,10\}$。

根據 Lemma 5（1）可知，$D_Y=(1,3,10,2,5)_{21}$ 為 21 角齒輪的完美數列。



例如：考慮 $n=31$，此時 $p=6$ 為偶數，令 $D_Y=(1,2,5,4,6,13)_{31}=(d_0,d_1,d_2,d_3,d_4,d_5)_{31}$，可知

$$\bigcup_{t=0}^{5} h(\sum_{j=0}^{0} d_{t+j})=\bigcup_{t=0}^{5} h(d_t)=\{h(1),h(2),h(5),h(4),h(6),h(13)\}=\{1,2,5,4,6,13\}\text{、}$$

$$\bigcup_{t=0}^{5} h(\sum_{j=0}^{1} d_{t+j})=\bigcup_{t=0}^{5} h(d_t+d_{t+1})=\{h(3),h(7),h(9),h(10),h(19),h(14)\}=\{3,7,9,10,12,14\}\text{、}$$

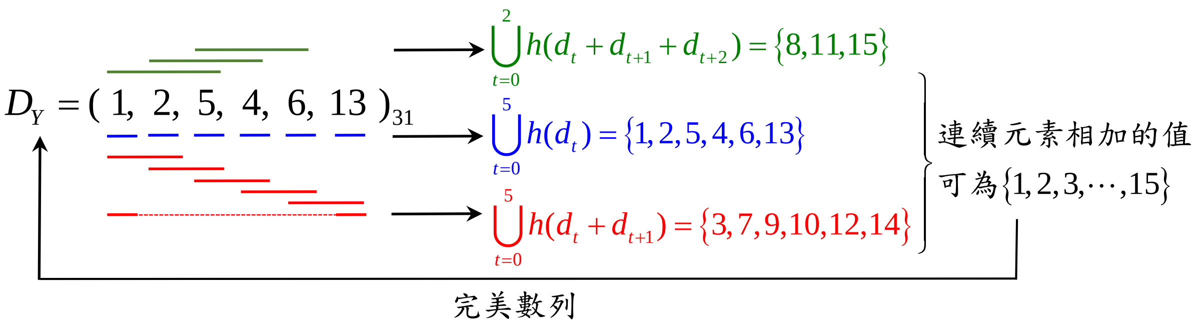
$$\bigcup_{t=0}^{2} h(\sum_{j=0}^{2} d_{t+j})=\bigcup_{t=0}^{2} h(d_t+d_{t+1}+d_{t+2})=\{h(8),h(11),h(15)\}=\{8,11,15\}\text{。}$$

將上述三集合聯集後可得集合

$$\left(\bigcup_{k=0}^{1}\bigcup_{t=0}^{4} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})\right)\cup\left(\bigcup_{t=0}^{2} h(\sum_{j=0}^{2} d_{t+j})\right)=\{1,2,5,4,6,13\}\cup\{3,7,9,10,12,14\}\cup\{8,11,15\}$$

$$=\{1,2,3,\cdots,15\}\text{。}$$

根據 Lemma 5（2）可知，$D_Y=(1,2,5,4,6,13)_{31}$ 為 31 角齒輪的完美數列。



以下我將利用 Lemma 5 的結論搭配反證法，再一次證明為何 20 角齒輪不存在完美集合。

$n=20$ 的完美集合不存在（反證法-奇偶性）

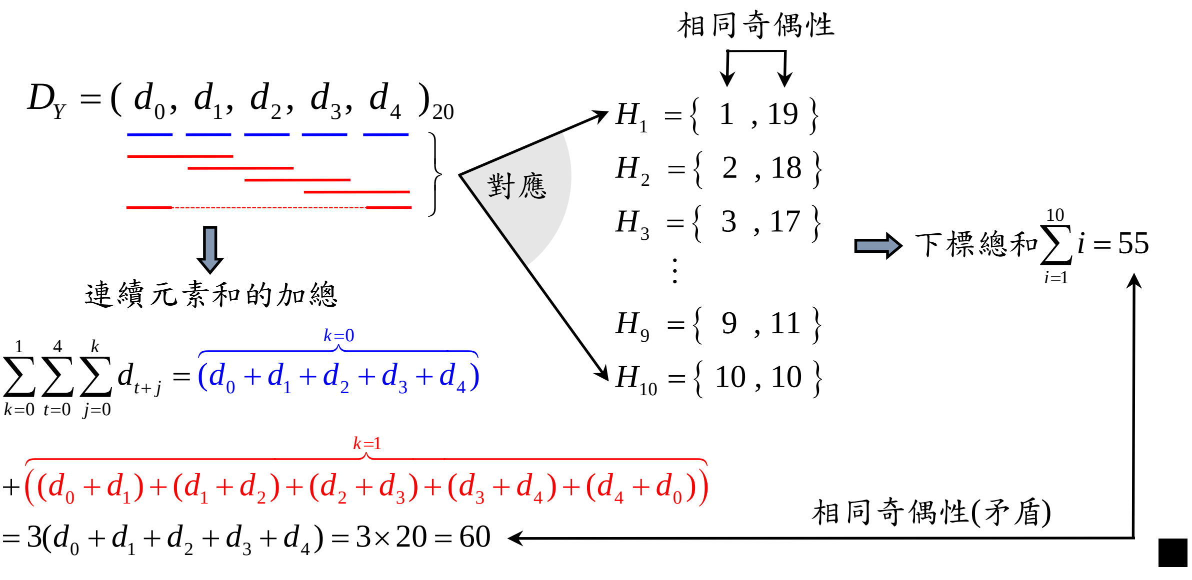
對於 20 角齒輪，不存在完美集合。由此可知最小可行數為 $f(20)=6$。

【證明】

假設 Y 為 20 角齒輪的完美集合，則 $|Y|=5$ 且 $D_Y=(d_0,d_1,d_2,d_3,d_4)_{20}$ 為完美數列，可知 $d_0+d_1+d_2+d_3+d_4=20$。對任意 $i=1,2,\cdots,10$，可知集合 $H_i=\{i,20-i\}$ 中的兩元素具有相同的奇偶性。因為 $n=20$，所以 $p=5$ 為奇數，根據 Lemma 5（1）的結論可知集合 $\bigcup_{k=0}^{1}\bigcup_{t=0}^{4}h(\sum_{j=0}^{k}d_{t+j})$ 中的10個元素恰為 $\{1,2,\cdots,10\}$。因為 H_i 中的兩元素具有相同的奇偶性，所以 $\sum_{k=0}^{1}\sum_{t=0}^{4}\sum_{j=0}^{k}d_{t+j}$ 與 $\sum_{i=1}^{10}i$ 亦具有相同的奇偶性。

因為 $\sum_{k=0}^{1}\sum_{t=0}^{4}\sum_{j=0}^{k}d_{t+j}=\overbrace{(d_0+d_1+d_2+d_3+d_4)}^{k=0}+\overbrace{((d_0+d_1)+(d_1+d_2)+(d_2+d_3)+(d_3+d_4)+(d_4+d_0))}^{k=1}$

$=3(d_0+d_1+d_2+d_3+d_4)=3\times 20=60$ 為偶數，但是 $\sum_{i=1}^{10}i=55$ 為奇數，此為矛盾，所以 $n=20$ 時，不存在完美集合。



■

可以發現，一旦有了 Lemma 5 對於完美數列的等價定義，20 角齒輪不存在完美集合的證明就相對簡潔，不僅如此，此論證的手法更能夠延伸推廣，進一步還可以找出不存在完美集合的充分條件。

給定n角齒輪，我給出了一個不存在完美集合的充分條件，故有以下定理：

Theorem 3：

對於n角齒輪，其中$n=p(p-1)$，若$p\equiv 5或7\ (\mathrm{mod}\ 8)$，則不存在完美集合，故$f(n)>\lceil \sqrt{n} \rceil$。

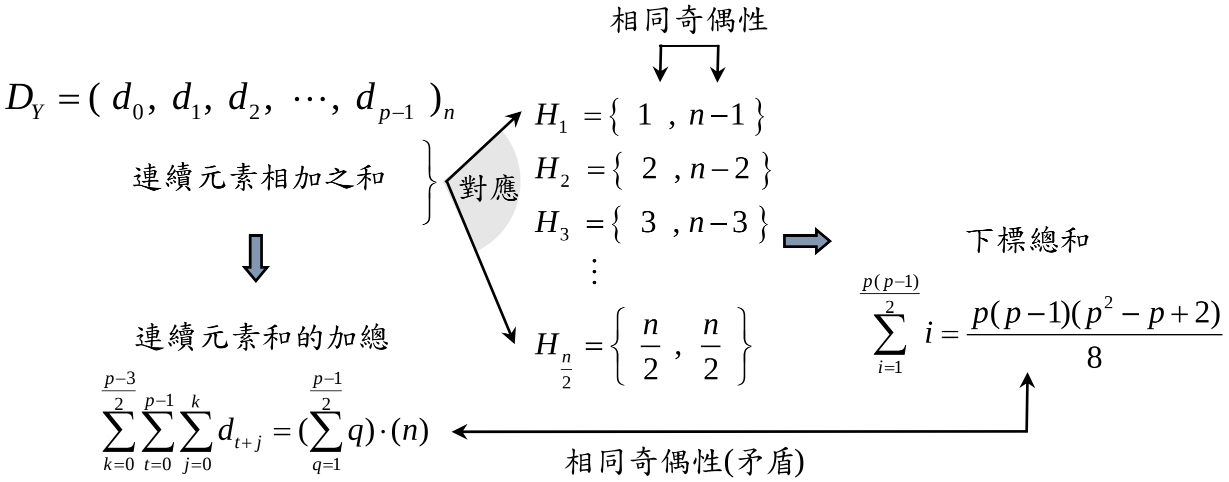
【證明】

令$n=p(p-1)$且$p\equiv 5或7\ (\mathrm{mod}\ 8)$，可知$n$為偶數且$p$為奇數。假設$Y$為$n$角齒輪的完美集合，則$|Y|=p$且$D_Y=(d_0,d_1,d_2,\cdots,d_{p-1})_n$為完美數列，可知$\sum_{i=0}^{p-1} d_i=n$。因為$n$為偶數，所以對任意$i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$，可知集合$H_i=\{i,n-i\}$中的兩元素具有相同的奇偶性。因為$p$為奇數，根據 Lemma 5（1）的結論可知$\bigcup_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\bigcup_{t=0}^{p-1} h(\sum_{j=0}^{k} d_{t+j})=\{1,2,\cdots,\frac{p(p-1)}{2}\}$。因為$H_i$中的兩元素具有相同的奇偶性，所以$\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{t=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k} d_{t+j}$與$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i$亦具有相同的奇偶性。因為$n$為偶數，所以$\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{t=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k} d_{t+j}=(\sum_{q=1}^{\frac{p-1}{2}} q)\cdot(\sum_{t=0}^{p-1} d_t)=(\sum_{q=1}^{\frac{p-1}{2}} q)\cdot(n)$也為偶數。接下來考慮$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i$的奇偶性，利用級數的求和公式可知$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i=\frac{1}{2}\frac{p(p-1)}{2}(\frac{p(p-1)}{2}+1)=\frac{p(p-1)(p^2-p+2)}{8}$。

若$p=8t+5$，其中t為非負整數，則
$$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i=\frac{(8t+5)(8t+4)(64t^2+72t+22)}{8}$$
$$=(8t+5)(2t+1)(32t^2+36t+11)$$為奇數；

若$p=8t+7$，其中t為非負整數，則
$$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i=\frac{(8t+7)(8t+6)(64t^2+104t+44)}{8}$$
$$=(8t+7)(4t+3)(16t^2+26t+11)$$為奇數。

由此可知，當$p\equiv 5或7\ (\mathrm{mod}\ 8)$時，$\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i$皆為奇數，此與$\sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{t=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{k} d_{t+j}$有相同奇偶性矛盾。故$n$角齒輪不存在完美集合。



■

由 Theorem 3 的結論可知，當 $n = 20, 42, 156, 210, 420, 506, 812, 930, 1332, 1482, \cdots$ 時，n 角齒輪皆不存在完美集合。對於 Theorem 3 中所提及的充分條件，若考慮 $p = 8t+1$，則 $\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i = t(8t+1)(64t^2+8t+2)$ 為偶數；若考慮 $p = 8t+3$，則 $\sum_{i=1}^{\frac{p(p-1)}{2}} i = (8t+3)(8t+2)(8t^2+5t+1)$ 亦為偶數。因此上述的論證方法，並沒有辦法判斷 $p \equiv 1 \text{或} 3 \pmod 8$ 時是否存在完美集合。

由於完美集合只會發生在當 n 為 p^2-p 與 p^2-p+1 兩種型態，元素數量為 p，且完美集合必定是最小可行集合，所以對於 $n \in \{p^2-p, p^2-p+1\}$ 時，$p = \lceil \sqrt{n} \rceil$ 可作為最小可行數 $f(n)$ 的一個自然的下界。至於一般自然數 n，利用完美集合的概念作為分水嶺，考慮 $n = p^2-p+1$，可得 $p = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$，我則可以得到另一個最小可行集合較好的下界。對於一般自然數 n，可知 $f(n) \geq \left\lceil \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \right\rceil$。

參、研究結果與討論

一、研究結果

對於 n 角齒輪的可行集合，我設計了兩種具有規律性的建構方法，其中策略一與策略二所得到的可行數分別為 $f_1(n) = \left\lceil \sqrt{2(n+1)} - 1 \right\rceil$ 與 $f_2(n) = \left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil} - \frac{3}{2} \right\rceil$，而 $f(n)$ 則是最小可行

數，令 $g(n)=\left\lceil \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \right\rceil$。我有以下結論：

1. 當 $n\in\mathbb{N}$，求得最小可行數的上下界為 $\lceil\sqrt{n}\rceil\le g(n)\le f(n)\le f_2(n)\le f_1(n)$；
2. 當 $n=2,3,6,7,12,13,21,31$ 時，具有完美集合，意即 $f(n)=\lceil\sqrt{n}\rceil$；
3. 當 $n=2,3,\sim,11$ 時，策略二所設計的可行集合皆為最小可行集合，意即 $f(n)=f_2(n)$；
4. 當 $n=20$ 時，不存在完美集合，可知 $f(20)=6$；
5. 當 $n=p(p-1)$ 且 $p\equiv 5或7 \pmod 8$，則 $f(n)>p=\lceil\sqrt{n}\rceil$；
6. 當 $n=12,13,\sim,31$ 時，分別使用策略一、策略二，以及依照完美集合延伸所得的結論，將目前所得到的資訊整理如下表：

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f(n)$	最小可行集合
12	5	5	4	$\{0,1,3,7\}$
13	5	5	4	$\{0,1,3,9\}$
14	5	5	5	策略二
15	5	5	5	策略二
16	5	5	5	策略二
17	5	5	5	策略二
18	6	6	5	$\{0,1,3,9,14\}$
19	6	6	5	$\{0,1,3,7,12\}$
20	6	6	6	策略二
21	6	6	5	$\{0,1,4,14,16\}$

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f(n)$	最小可行集合
22	6	6	6	策略二
23	6	6	6	策略二
24	7	6	6	策略二
25	7	6	6	策略二
26	7	7	6	$\{0,1,3,7,13,18\}$
27	7	7	6	$\{0,1,3,7,12,20\}$
28	7	7	?	?
29	7	7	?	?
30	7	7	?	?
31	7	7	6	$\{0,1,3,8,12,18\}$

二、討論

由齒輪情境所衍生的組合設計問題，在過去我未曾聽聞有人發表過相關研究結果，而參考資料也十分難尋得，為了將問題代數化，所以就先將齒輪上的每個角依序標上連續數字，並以列舉法的方式來畫圖，試圖尋找出不同總角數的齒輪之個別最佳解並歸納其規律。在嘗試窮舉法後，雖然有獲得一些齒輪的最小可行集合，但是卻未能歸納出對於任意 n 角齒輪的最小可行集合之規律，且隨著 n 的增加，以列舉法找最佳解的難度也逐漸提高，可行度不斷降低。因此我先以發展具規律性的可行集合為目標，規劃了策略一，而後我發現可行集合與

任兩相異被砍去角在圓周上的距離具有關聯性，因此我定義了距離數列的概念，可知『當距離數列中連續元素相加的值可為1至$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$時，則距離數列之元素數目即為$n$角齒輪的可行數』。之後依目前已知的$n$角齒輪之最小可行數，推測當砍去角數$p$固定時，其最多可為$p(p-1)+1$角齒輪的可行數，意即$p$可能是$(p-1)(p-2)+2,\cdots,p(p-1)+1$角齒輪的最小可行數。而當$p$為$p(p-1)$和$p(p-1)+1$角齒輪的最小可行數時，對於$n$角齒輪，任意兩個被砍去角之間的最短距離皆不會出現重複，我將達成上述條件的Y定義為完美集合。然而由目前已有的實際例子可知，$n=p^2-p$或$n=p^2-p+1$角齒輪並不一定會有完美可行集合。因為完美集合除了n為偶數時，$\frac{n}{2}$會重複一次外，其餘D_Y中連續元素相加的值皆為相異數，而n為奇數時更是D_Y的元素和連續元素相加的值皆未出現重複，因此當砍去角數固定為p，我尋找$p(p-1)$和$p(p-1)+1$角齒輪的最小可行集合時，可以藉由此概念有效減少需嘗試的排列組合。

策略一為先連續砍去k角，之後重複空$k-1$格後砍1角的動作m遍，因此其距離數列D_Y是由$k-1$個距離1、m個距離k，和1個為後段角數加一的距離所組成，可知其中有許多重複元素。為了減少D_Y重複的元素數，我對於策略一進行改良而設計出策略二，其主要針對策略一前端重複$k-1$個的距離1，因此將其改為先連續砍去2角，之後重複空1格後砍1角的動作k遍，然後再重複每連續空$2k+1$格後連續砍2角的動作m遍，因此其D_Y是由1個距離1、k個距離2、m組距離$2k$+2,1，和1個為後段角數加一的距離所組成。雖然D_Y依然有許多的重複元素，但n在某些特殊範圍時，策略二須砍去角數可比策略一少1角。

肆、結論與應用

一、結論

我為了找出n角齒輪的最小可行數$f(n)$，於是開始探討可行集合Y，並設計出兩種策略，其中$f_1(n)$和$f_2(n)$分別為策略一和策略二中可行集合的最小值。針對策略一的方法，發現$f_1(n)=\left\lceil \sqrt{2(n+1)}-1 \right\rceil$，從中設計出可行集合$Y$。由齒輪順逆時針旋轉的對稱性，發覺檢驗過程只要旋轉半圈即可，接著我引進距離數列的概念，從中優化策略一，設計了策略二，從中

得知 $f_2(n)=\left\lceil \sqrt{4\left\lceil \frac{n+3}{2}\right\rceil}-\frac{3}{2}\right\rceil$，設計出可行集合$Y$。因為有了距離數列的概念，我最後想探討完美可行集合的可能性，雖然目前尚未歸納出完美可行集合的一般設計方法，期待之後對於所有n角齒輪，能夠過系統性的操作找出其最小可行集合。針對特定的n角齒輪，我建立一個充分條件，確定其不存在完美集合。此外，透過完美集合的概念，我得到一個最小可行集合的下界$\left\lceil \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}\right\rceil$。

二、應用

將n角齒輪代數化之後，每個角即可視為圓周上順時針分布的非負整數$0,1,2,\cdots,n-1$，而砍去的角即為$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$的子集合Y，齒輪旋轉過後的缺角位置可視為缺角集合Y中的元素做加法運算，若順時針旋轉i格，則表示Y中的元素全部都加上i，因為元素始終在圓周上，所以這樣的加法運算必須考慮除以n後的餘數，在抽象代數中這些都可視為循環群$(\mathbb{Z}_n,+)$的運算問題，至於如何降低元素數量使得缺角集合Y滿足條件，這就是組合設計的範疇。可以意識到，這個研究問題，必須引進更多的代數學的數學知識才有可能有進一步的發展。

三、未來展望

1. 對於n角齒輪，能否有程序性的方式建構出元素數量較小的可行集合？
2. 對於存在完美集合的n角齒輪，能否刻劃n的值？
3. 考慮三個或三個以上重疊的n角齒輪，探討可行集合的可能性？
4. 考慮限制兩個齒輪每次旋轉後重合的缺角數量皆超過1個角，探討可行集合的可能性？

伍、參考文獻

1. 普通高級中學數學，第一、二、三、四冊，南一出版社。
2. 朱雅琪，鄧宜欣，《蜜蜂路徑－找回失落的數字》，第 54 屆全國科學展覽會高中組。

【評語】010004

本作品基於探討齒輪砍角問題：一個 n 角齒輪要至少砍去幾個角使得將它複製一份，而兩齒輪中軸重疊後不論如何旋轉皆無法互補成為一個完整的齒輪？本作品將該問題代數化後給出兩個可行的砍角策略，因而獲得上界估計。此外，通過其定義的「完美集合」，也找到了下界估計。整份作品是一個標準的組合設計研究過程，較可惜的是結論上並不算完整，未能實際算出問題的正確答案。