2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010002

參展科別　數學

作品名稱　Z 字型路徑長度及面積等量關係之探討

得獎獎項　二等獎

美國 ISEF 正選代表

就讀學校　臺中市立臺中第一高級中學

指導教師　林珮君、黃加欣

作者姓名　張竣淇

關鍵詞　Z 字形路徑、長度冪次、面積

作者簡介

我是張竣淇，目前就讀臺中一中二年級。我的興趣是思考數學以及跑步。因為最喜愛的科目是數學且未來想從事數學研究工作，所以投入大量時間做數學科展，希望能從中學習。感謝指導老師願意指導我，也感謝家人、老師、同學一路上的陪伴與支持，使我在過程中有所成長。

摘要

Z 字型路徑是一個由圓上一些點同時以特定角度連結成一組弦線段所構成之路徑。本研究主要在於探討 Z 字型路徑之兩類弦線段長度的冪次方等量關係，和它將該圓分割成兩個區域面積的等量關係。本研究結果如下，在長度關係方面，當圓上的點為奇數個時，則弦線段長度的平方和具有等量關係。而當圓上的點為偶數個時，弦線段長度的一次方和具有等量關係。在面積關係上，當圓上的點為奇數個時，則此路徑將圓分割成兩個區域面積也具有等量關係。此外，本研究之進階研究結果發現，長度的高次方和具有等量關係之條件與圓上點個數相關。

Abstract

Z-path consists of a set of chords in a circle, which are connected in a certain angle. The research is mainly about the equivalent relationship between the power sum of two types of chord length of a series of Z-paths and about the equivalent relationship between area of two regions in a circle divided by a series of Z-paths. The following are the results of my study. In the aspect of length, the sum of the square of the chord length has equivalent relationship when number of points on a circle is odd. However, the sum of the chord length to the power of one has equivalent relationship when number of points on a circle is even. In the aspect of area, the area of two regions in a circle divided by the paths has equivalent relationship when number of points on a circle is odd. Moreover, the advanced results of the research indicate that the conditions for the sum of length to many powers to have equivalent relationship have something to do with the numbers of points on the circle.

壹、 簡介

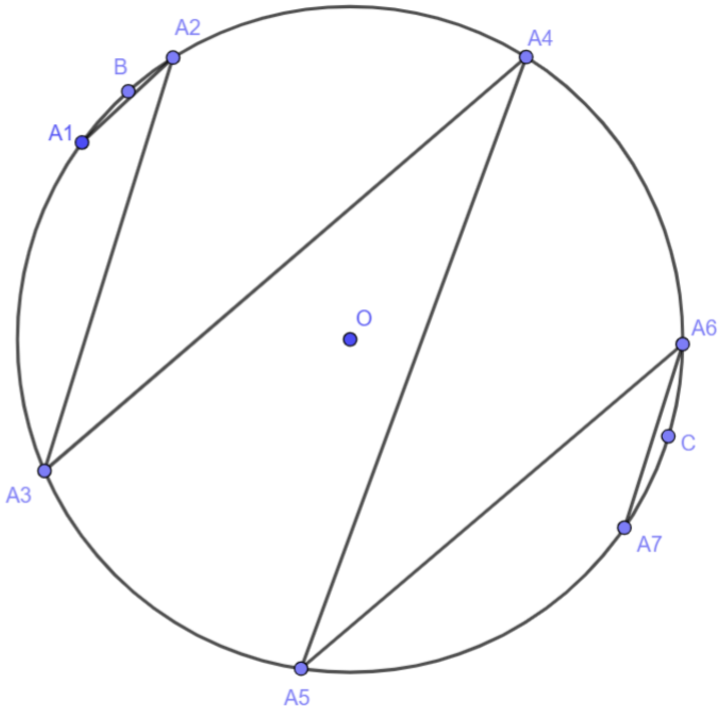
一、研究動機

高一時，喜歡到數學科辦公室的布告欄看有沒有新的訊息。有一次布告欄上公告了兩張海報大的「進階問題之探究饗宴」，是在探討圓上的 Z 字形路徑長度以及 Z 字形路徑所分割出的面積關係。國中時就對幾何有興趣的我，花了許多時間解決海報上問題，而後與數學老師討論。在數學老師的鼓勵下，決定繼續將海報上的問題推廣，做更進一步的探究。

二、研究初始問題

研究初始問題是來自數學科海報上的問題，分別有長度問題和面積問題。在此介紹初始問題，也就是圓上有七個點的情形:

一圓O上有七個點A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7，連成六個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_6A_7}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ Z(A_3-A_4-A_5-A_6),\ Z(A_4-A_5-A_6-A_7)$，如圖一。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{6}\ (k=1,2,\dots,5)$。



圖一

問以下兩等式是否成立?

1.關於面積:

$$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + S_{A_5A_4A_6} + S_{(A_6CA_7)} = S_{A_2A_1A_3} + S_{A_4A_3A_5} + S_{A_6A_5A_7}$$

，其中$S_{(A_iBA_j)}$為劣弧 A_iA_j 及$\overline{A_iA_j}$所圍成的面積，$S_{A_iA_{i-1}A_{i+1}}$為劣弧 A_iA_{i-1} 及$\overline{A_iA_{i-1}}$和$\overline{A_iA_{i+1}}$所圍成的面積。

2.關於長度:

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$$

貳、 研究目的與問題

一、研究目的

除了初始問題以外，數學科海報上還有 Z 字形路徑在圓上的更一般化情形

之相關問題。從初始問題的圓上七個點，討論到圓上有任意大於3的奇數點的 Z 字形路徑平方長度問題。再由奇數個點發展至任意大於2的偶數點的 Z 字形路徑平方長度問題。接著，探討有別於初始問題之外的一次方長度問題。而面積問題在本研究中，除了證明初始問題之等式成立以外，再將初始問題推廣至圓上有任意大於3個奇數點即有任意大於2個偶數點。這些分別是底下的研究問題 1.、2.和 3.。這些問題在本研究中，分成長度問題和面積問題討論。

然而，在解決海報上的問題之後，和老師討論海報上的問題時，也討論到了將此一問題繼續發展的可能性。因此，底下的問題 4.便是更進一步想要探討的問題。

二、研究問題

1. 以初始問題的 Z 字形路徑長度平方關係的圓上七個點為基礎，討論圓上有 $2n+1$ 及 $2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點之長度平方關係。
2. 討論圓上有$2n+1$ 及 $2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點之 Z 字形路徑一次方長度關係。
3. 以初始問題的 Z 字形路徑面積關係的圓上七個點為基礎，討論圓$2n+1$ 及 $2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點之面積關係。
4. 由 Z 字形路徑的長度一次方及平方關係推廣到長度的$k(k \in \mathbb{N})$次方關係。

參、 研究過程與方法

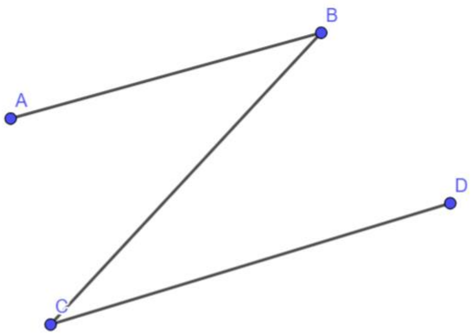
一、名詞定義及引理

(一)名詞定義

除了海報上的問題，對於Z字形路徑，我希望做進一步的探討。但在說明延伸問題之前，先介紹面積符號以及Z字形路徑的定義。

定義 1 在一圓上有X, Y, Z三點，其中點X不在給定的劣弧$\overset{\frown}{YZ}$上，則S_{XYZ}為$\overline{XY}$、$\overline{XZ}$、$\overset{\frown}{YZ}$所圍成之面積。若點X在給定的$\overset{\frown}{YZ}$上，則稱$S_{(YXZ)}$為$\overset{\frown}{YXZ}$所形成之弓形面積。

定義 2 如果平面上四點A, B, C, D構成一路徑$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$(如圖二)，則稱其為點$A, B, C, D$構成的 Z 字形路徑，記之以$Z(A-B-C-D)$。



圖二

為了往後方便討論長度的$k(k \in \mathbb{N})$次方關係，給出以下定義 3 及定義 4。

定義 3

$$a_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

以及

$$b_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

，其中m為偶數$2,4,\dots,k$。$(2 \le m \le k,\ k$為偶數$)$

定義 4

$$c_m = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

以及

$$d_m = \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

，其中m為奇數$1, 3, \dots, k$。$(1 \le m \le k,\ k$為奇數$)$

(二)引理

在接下來的討論中，將會大量用到三角級數求和公式，其中證明方法(法一)是由《神奇的複數—如何利用複數解中學數學難題》一書給出，如下:

引理 1 cos連加公式

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(\alpha + j\beta) = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos(\alpha + \frac{n-1}{2} \cdot \beta)$$

引理 2 sin連加公式

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(\alpha + j\beta) = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin(\alpha + \frac{n-1}{2} \cdot \beta)$$

[證明]

(法一)

法一的證明方法是參考自《神奇的複數—如何利用複數解中學數學難題》一書。符號i代表虛數單位。

若β不為2π之整數倍，則

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha+j\beta)+i\sum_{j=0}^{n-1}\sin(\alpha+j\beta)$$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))+\cdots$$

$$+(\cos(\alpha+(n-1)\beta)+i\sin(\alpha+(n-1)\beta))$$

$$=e^{i\alpha}+e^{i(\alpha+\beta)}+\cdots+e^{i(\alpha+(n-1)\beta)}$$

$$=e^{i\alpha}(1+e^{i\beta}+\cdots+e^{i(n-1)\beta})$$

$$=e^{i\alpha}\cdot\frac{1-e^{in\beta}}{1-e^{i\beta}}$$

$$=e^{i\alpha}\cdot\frac{1-\cos n\beta-i\sin n\beta}{1-\cos\beta-i\sin\beta}$$

$$=e^{i\alpha}\cdot\frac{2\sin^2\frac{n\beta}{2}-2i\sin\frac{n\beta}{2}\cdot\cos\frac{n\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\beta}{2}-2i\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$=e^{i\alpha}\cdot\frac{-2i\sin\frac{n\beta}{2}(\cos\frac{n\beta}{2}+i\sin\frac{n\beta}{2})}{-2i\sin\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\beta}{2}+i\sin\frac{\beta}{2})}$$

$$=e^{i\alpha}\cdot\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{n\beta}{2}}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\beta}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot e^{i(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cdot(\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)+i\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta))$$

比較實部和虛部得:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha+j\beta)=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)$$

及

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sin(\alpha+j\beta)=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)$$

■

(法二)

法二的證明方法是利用三角函數積化和差公式。

(i)

令

$$S_1=\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha+j\beta)$$

，若β不為2π之整數倍，則

$$S_1\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\cdots+\cos(\alpha+(n-2)\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$+\cos(\alpha+(n-1)\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)+\cdots+$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{(2n-3)\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{(2n-5)\beta}{2}\right)\right)+$$

$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{(2n-1)\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{(2n-3)\beta}{2}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{(2n-1)\beta}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\right)$

$=\sin\frac{n\beta}{2}\cdot\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)$

故

$$\sum_{j=0}^{n-1}\cos(\alpha+j\beta)=S_1=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)$$

(ii)

令

$$S_2=\sum_{j=0}^{n-1}\sin(\alpha+j\beta)$$

，若β不為2π之整數倍則

$S_2\sin\frac{\beta}{2}$

$=\sin\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\cdots+\sin(\alpha+(n-2)\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

$+\sin(\alpha+(n-1)\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)\right)+\cdots+$

$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{(2n-5)\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{(2n-3)\beta}{2}\right)\right)+$

$\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\frac{(2n-3)\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{(2n-1)\beta}{2}\right)\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{(2n-1)\beta}{2}\right)\right)$

$=\sin\frac{n\beta}{2}\cdot\sin(\alpha+\frac{n-1}{2}\cdot\beta)$

故

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(\alpha + l\beta) = S_2 = \frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin(\alpha + \frac{n-1}{2} \cdot \beta)$$

■

在探討長度的$k(k \in \mathbb{N})$次方關係，會用到以下兩個$\sin\theta$的k次方公式。此公式參考自《神奇的複數—如何利用複數解中學數學難題》一書。

引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式

$\sin^k \theta$

$$= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k} \cdot (2\cos k\theta - 2\binom{k}{1}\cos(k-2)\theta + \cdots + (-1)^{\frac{k}{2}-1} \cdot 2\binom{k}{\frac{k}{2}-1}\cos 2\theta$$

$$+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

其中，k為正偶數。

[證明]

$(2i\sin\theta)^k$

$= (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k$

$$= \left(e^{i\theta}\right)^k + \binom{k}{1}\left(e^{i\theta}\right)^{k-1}\left(-e^{-i\theta}\right) + \binom{k}{2}\left(e^{i\theta}\right)^{k-2}\left(-e^{-i\theta}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \binom{k}{k-1}\left(e^{i\theta}\right)\left(-e^{-i\theta}\right)^{k-1} + \left(-e^{-i\theta}\right)^k$$

$$= \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) - \binom{k}{1}e^{i\theta}e^{-i\theta}\left(e^{i(k-2)\theta} + \left(-e^{-i\theta}\right)^{k-2}\right) + \cdots$$

$$+ \binom{k}{\frac{k}{2}-1}e^{i(\frac{k}{2}-1)\theta}\left(-e^{-i\theta}\right)^{\frac{k}{2}-1}\left(e^{i2\theta} + \left(-e^{-i\theta}\right)^2\right) + (-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

$$= 2\cos k\theta - 2\binom{k}{1}\cos(k-2)\theta + \cdots + (-1)^{\frac{k}{2}-1} \cdot 2\binom{k}{\frac{k}{2}-1}\cos 2\theta + (-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

所以

$\sin^k\theta$

$$=\frac{1}{(2i)^k}\cdot\left(2\cos k\theta-2\binom{k}{1}\cos(k-2)\theta+\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}-1}\cdot 2\binom{k}{\frac{k}{2}-1}\cos 2\theta\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\cdot\left(2\cos k\theta-2\binom{k}{1}\cos(k-2)\theta+\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}-1}\cdot 2\binom{k}{\frac{k}{2}-1}\cos 2\theta\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}}\right)$$

■

引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式

$\sin^k\theta$

$$=\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot\left(\sin k\theta-\binom{k}{1}\sin(k-2)\theta+\binom{k}{2}\sin(k-4)\theta-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\theta\right)$$

其中，k為正奇數。

[證明]

$(2i\sin\theta)^k$

$$=(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^k$$

$$=\left(e^{ik\theta}-e^{-ik\theta}\right)-\binom{k}{1}e^{i\theta}e^{-i\theta}\left(e^{i(k-2)\theta}+\left(-e^{-i\theta}\right)^{k-2}\right)$$

$$+\binom{k}{2}e^{i2\theta}e^{-i2\theta}\left(e^{i(k-4)\theta}+\left(-e^{-i\theta}\right)^{k-4}\right)-\cdots$$

$$+\binom{k}{\frac{k-1}{2}}e^{i\left(\frac{k-1}{2}\right)\theta}(-e^{-i\theta})^{\frac{k-1}{2}}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=2i\sin k\theta-2i\binom{k}{1}\sin(k-2)\theta+2i\binom{k}{2}\sin(k-4)\theta-\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}(2i)\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\frac{k-1}{2}\theta)$$

所以

$\sin^k\theta$

$$=\frac{1}{(2i)^{k-1}}\cdot(\sin k\theta-\binom{k}{1}\sin(k-2)\theta+\binom{k}{2}\sin(k-4)\theta-\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\theta)$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot(\sin k\theta-\binom{k}{1}\sin(k-2)\theta+\binom{k}{2}\sin(k-4)\theta-\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\theta)$$

■

關於定義 3 中的a_m及b_m，有以下性質。

引理 5 a_m及b_m的性質

(i) $a_m=b_m=0$, m為偶數且$m\neq 2nt$, $2n\leq m\leq k$

(ii) $a_m=-b_m$, $m=2n(2t+1)$, $2n\leq m\leq k$

(iii) $a_m=b_m=n\cos 2tn\theta$, $m=2n(2t)$, $2n<m\leq k$

，其中k,m為正偶數，t為非負整數。

[證明]

(i)

若m為偶數且$m \neq 2nt$，$2n \leq m \leq k$，則$-\frac{m\pi}{n}$不是2π的整數倍，所以由引理 1.3 cos的連加公式得

$$a_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$= \frac{\sin(-\frac{m\pi}{2})}{\sin(-\frac{m\pi}{2n})} \cdot \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-1)\pi}{2n} + \frac{n-1}{2} \cdot (-\frac{m\pi}{n})\right)$$

由於m為偶數，故$\sin(-\frac{m\pi}{2}) = 0$，所以此時$a_m = 0$。類似的，可以證明 $b_m = 0$:

$$b_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n}\right), m = 0, 2, \dots, k$$

$$= \frac{\sin(-\frac{m\pi}{2})}{\sin(-\frac{m\pi}{2n})} \cdot \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2)\pi}{2n} + \frac{n-1}{2} \cdot (-\frac{m\pi}{n})\right)$$

由於m為偶數，故$\sin(-\frac{m\pi}{2}) = 0$，所以此時$b_m = 0$。綜上所述，若$m$為偶數且$m \neq 2nt$，$2n \leq m \leq k$，則$a_m = b_m = 0$。

(ii)

若$m = 2n(2t+1)$，$2n \leq m \leq k$，則

$$a_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \cos(n(2t+1)\theta + (2t+1)(2n+1-2j)\pi)$$

$$= n\cos(n(2t+1)\theta + \pi)$$

$$= -n\cos n(2t+1)\theta$$

以及

$$b_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \cos(n(2t+1)\theta + (2t+1)(2n-2j)\pi)$$

$$= n\cos n(2t+1)\theta$$

所以若$m = 2n(2t+1)$，$2n \le m \le k$，則a_m=$-b_m$。

(iii)

若$m = 2n(2t)$，$2n \le m \le k$，則

$$a_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \cos(2nt\theta + 2t(2n+1-2j)\pi)$$

$$= n\cos 2nt\theta$$

以及

$$b_m = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \cos(2nt\theta + 2t(2n-2j)\pi)$$

$$= n\cos 2nt\theta$$

所以若$m = 2n(2t)$，$2n < m \le k$，則$a_m = b_m = n\cos 2fn\theta$。

■

接著，研究c_m及d_m的性質。

引理 6 c_m及d_m的性質

$(i)\ c_m = d_m, m$為奇數且$m \neq (2n-1)t, 1 \leq m \leq k$

$(ii)\ c_m = n\sin\frac{m\theta}{2}, d_m = -(n-1)\sin\frac{m\theta}{2}, m = (2n-1)(2t+1),$

$(2n-1) \leq m \leq k$

，其中k, m為正奇數，t為非負整數。

[證明]

(i)

若m為奇數且$m \neq (2n-1)t$，$1 \leq m \leq k$，則$\frac{-2m\pi}{2n-1}$不是2π的整數倍，所以

由引理 2(sin連加公式)，得知

$$c_m = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{-mn\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}} \cdot \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-2)\pi}{2n-1} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{-2m\pi}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{-mn\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}} \cdot \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(n-1)\pi}{2n-1}\right)$$

同理由引理 2(sin連加公式)，得知

$$d_m = \sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{-m(n-1)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}} \cdot \sin\left(\frac{m\theta}{2} + \frac{m(2n-3)\pi}{2n-1} + \frac{n-2}{2} \cdot \frac{-2m\pi}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{-m(n-1)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}}\cdot\sin(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(n-1)\pi}{2n-1})$$

因為

c_m-d_m

$$=\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(n-1)\pi}{2n-1}\right)}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}}(\sin\frac{-mn\pi}{2n-1}-\sin\frac{-m(n-1)\pi}{2n-1})$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(n-1)\pi}{2n-1}\right)}{\sin\frac{-m\pi}{2n-1}}(2\cos\frac{-m\pi}{2}\sin\frac{-m\pi}{2(2n-1)})$$

在上式中，由於m為奇數，所以$\cos\frac{-m\pi}{2}=0$。所以若m為奇數且$m\neq(2n-1)t$，$1\leq m\leq k$，則$c_m=d_m$。

(ii)

若$m=(2n-1)(2t+1)$且 $(2n-1)\leq m\leq k$，則

$$c_m=\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{m\theta}{2}+(2t+1)(2n-2j)\pi\right)$$

$$=n\sin\frac{m\theta}{2}$$

以及

$$d_m=\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{m\theta}{2}+(2t+1)(2n-1-2j)\pi\right)$$

$$=(n-1)\sin(\frac{m\theta}{2}+\pi)$$

$= -(n-1)\sin\frac{m\theta}{2}$

所以若$m = (2n-1)(2t+1)$且 $(2n-1) \le m \le k$，則$c_m = n\sin\frac{m\theta}{2}$及

$d_m = -(n-1)\sin\frac{m\theta}{2}$。

■

二、圓上m個點所形成 Z 字形路徑之長度平方關係——針對m之奇偶性探究

本節要證明初始問題中的長度平方關係。然而，初始問題的條件是圓上有七個點。所以我們也想知道若圓上有偶數個點時，Z 字形路徑的長度平方關係為何?因此本節除了證明初始問題以外，也探討圓上點個數為奇數及偶數的長度平方關係，並且將圓上點個數推廣至大於三的任意奇數點及大於二的任意偶數點。

(一)初始問題長度平方關係的兩種證明方法

此小節想要證明初始問題中的長度問題，也就是證明

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$$

成立。

[證明]

(方法一)

(i)

方法一的證明方法主要是利用添增輔助線和餘弦定理。

連接$\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_4}$且設$\overline{A_2A_3}, \overline{A_1A_4}$交於點$A$，如圖三(因為此證明無需考

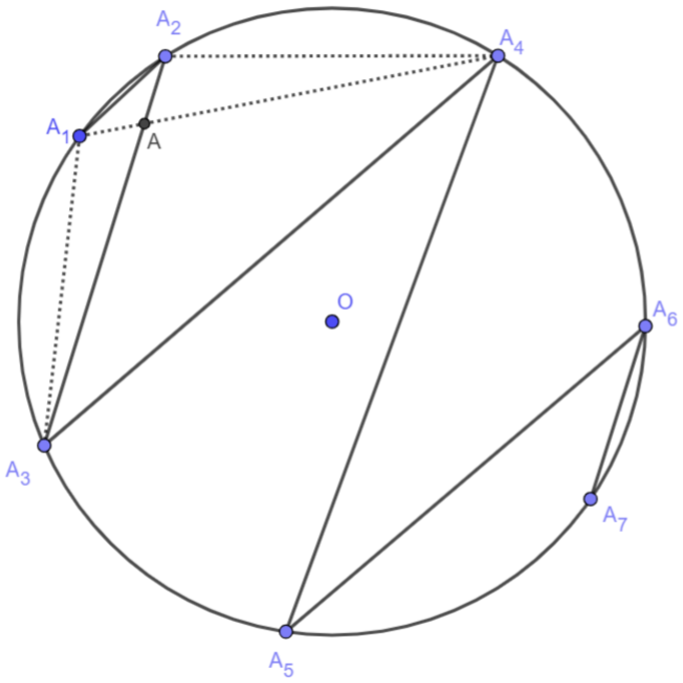
處點B,C，故無標明點B,C)。於是有

$$\angle A_1AA_3=\angle A_2AA_4=\frac{1}{2}(A_1A_3+A_2A_4)=\frac{1}{2}(2\angle A_1A_2A_3+2\angle A_2A_3A_4)=\frac{\pi}{3}$$

且

$$\angle A_1AA_2=\angle A_3AA_4=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

因為$\overline{A_1A_3}=\overline{A_2A_4}$ (等弧對等弦)且$\overline{A_1A_2}\parallel\overline{A_3A_4}$且$\angle A_1A_3A_4=\angle A_2A_4A_3$，故四邊形$A_1A_2A_4A_3$為等腰梯形，從而$\overline{A_1A_4}=\overline{A_2A_3}$。



圖三

利用餘弦定理，有

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2$$

$$=\left(\overline{A_1A}^2+\overline{A_2A}^2-2\overline{A_1A}\cdot\overline{A_2A}\,cos\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\overline{A_3A}^2+\overline{A_4A}^2-2\overline{A_3A}\cdot\overline{A_4A}\,cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=(\overline{A_1A}^2+\overline{A_3A}^2)+(\overline{A_2A}^2+\overline{A_4A}^2)+2\overline{A_1A}\cdot\overline{A_2A}\cos\frac{\pi}{3}+2\overline{A_3A}\cdot\overline{A_4A}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(\overline{A_1A}^2+\overline{A_3A}^2-2\overline{A_1A}\cdot\overline{A_3A}\cos\frac{\pi}{3}\right)+\left(\overline{A_2A}^2+\overline{A_4A}^2-2\overline{A_2A}\cdot\overline{A_4A}\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+2\overline{A_1A}\cdot\overline{A_2A}\cos\frac{\pi}{3}+2\overline{A_3A}\cdot\overline{A_4A}\cos\frac{\pi}{3}+2\overline{A_1A}\cdot\overline{A_3A}\cos\frac{\pi}{3}+2\overline{A_2A}\cdot\overline{A_4A}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + 2\overline{A_1A}(\overline{A_2A} + \overline{A_3A})\cos\frac{\pi}{3} + 2\overline{A_4A}(\overline{A_3A} + \overline{A_2A})\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + 2(\overline{A_1A} + \overline{A_4A})(\overline{A_2A} + \overline{A_3A})\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_4}^2 + 2\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3}\cos\frac{\pi}{3}$$

因為等弧對等弦，故令

$$\overline{A_1A_3}^2 = \overline{A_3A_5}^2 = \overline{A_5A_7}^2 = \overline{A_4A_6}^2 = \overline{A_2A_4}^2 = a$$

所以

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2$$

$$= 2a + 2\overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3}\cos\frac{\pi}{3} = 2a + \overline{A_1A_4} \cdot \overline{A_2A_3} = 2a + \overline{A_2A_3}^2 \ \ldots\ldots (1)$$

同理，有

$$\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 = 2a + \overline{A_3A_4} \cdot \overline{A_2A_5} = 2a + \overline{A_3A_4}^2 \ \ldots\ldots (2)$$

$$\overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 = 2a + \overline{A_4A_5} \cdot \overline{A_3A_6} = 2a + \overline{A_4A_5}^2 \ \ldots\ldots (3)$$

$$\overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2 = 2a + \overline{A_5A_6} \cdot \overline{A_4A_7} = 2a + \overline{A_5A_6}^2 \ \ldots\ldots (4)$$

(ii)

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2$$

$$= \left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2\right) + \left(\overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2\right) - \overline{A_3A_4}^2$$

$$= \left(2a + \overline{A_2A_3}^2\right) + \left(2a + \overline{A_4A_5}^2\right) - \overline{A_3A_4}^2 \qquad (\text{由}(1),(3))$$

$$= 4a + (\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 - \overline{A_3A_4}^2)$$

$$= 4a + 2a \qquad (\text{由}(2))$$

$$= 6a$$

(iii)

$$\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$$

$$= \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2\right) + \left(\overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2\right) - \overline{A_4A_5}^2$$

$$= \left(2a + \overline{A_3A_4}^2\right) + \left(2a + \overline{A_5A_6}^2\right) - \overline{A_4A_5}^2 \qquad (由(2),(4))$$

$$= 4a + (\overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 - \overline{A_4A_5}^2)$$

$$= 4a + 2a \qquad (由(3))$$

$$= 6a$$

由$(ii),(iii)$知

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$$

■

(方法二)

(i)

方法二的證明主要是利用餘弦定理和三角函數和差化積公式。

設圖二之圓半徑為R且$A_1A_2 = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{\pi}{3})$，注意到$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$，則由餘弦定理，有

$$\overline{A_1A_2}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos\theta = 2R^2 - 2R^2\cos\theta$$

$$\overline{A_2A_3}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})$$

$$\overline{A_3A_4}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$$

$$\overline{A_4A_5}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos(\theta + \frac{3\pi}{3}) = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \pi)$$

$$\overline{A_5A_6}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$$

$$\overline{A_6A_7}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\cos(\theta + \frac{5\pi}{3}) = 2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{5\pi}{3})$$

(ii)

$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2$

$= (2R^2 - 2R^2\cos\theta) + \left(2R^2 - 2R^2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \left(2R^2 - 2R^2\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$= 6R^2 - 2R^2\left(\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$

(由三角函數和差化積公式，上式又可表為)

$= 6R^2 - 2R^2(\cos\theta - \cos\theta)$

$= 6R^2$

由以上運算可知$\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$。事實上，$\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$就是引理 1 cos連加公式的一個特殊情形。

(iii)

$\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$

$= \left(2R^2 - 2R^2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right) + (2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \pi))$

$+ \left(2R^2 - 2R^2\cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$= 6R^2 - 2R^2\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \cos(\theta + \pi) + \cos\left(\theta + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$= 6R^2 + 2R^2\left(\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$= 6R^2$ (由(ii))

故由$(ii), (iii)$，有

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 = \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \overline{A_6A_7}^2$$

■

(二)圓上有奇數個點的長度平方關係

上一小節(**1.**)證明了圓上有七個點之 Z 字形路徑的長度平方關係，而此一小節則要將初始問題七個點的情形推廣，討論圓上有奇數個點之 Z 字形路徑的長度平方關係。我們知道七個點的結果是

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\overline{A_5A_6}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\overline{A_6A_7}^2$$

，但若有九個點呢?底下討論圓上有九個點的情形:

一圓O上有九個點A_1、A_2、…、A_6、A_9，連成八個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_8A_9}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots,\ Z(A_6-A_7-A_8-A_9)$，如圖四。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{8}\ (k=1,2,\dots,7)$。

設圖四之圓半徑為R且$\overset{\frown}{A_1A_2}=\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{\pi}{4})$，注意到$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$，則由餘弦定理，有

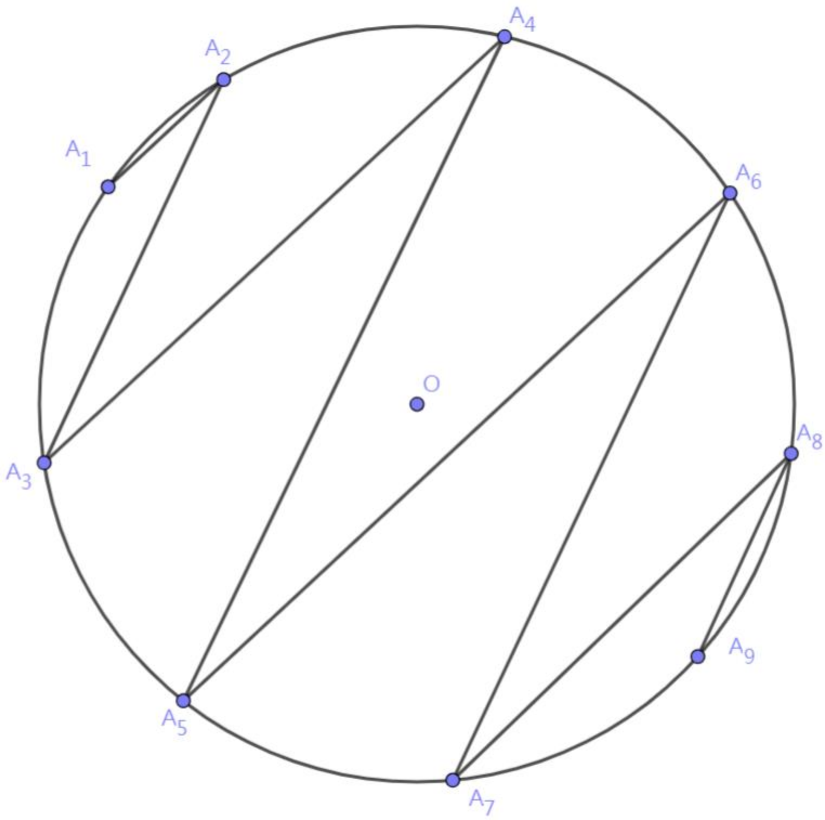
$$\overline{A_1A_2}^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos\theta=2R^2-2R^2\cos\theta$$

$$\overline{A_2A_3}^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$$

…

$$\overline{A_7A_8}^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos(\theta+\frac{6\pi}{4})=2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{6\pi}{4})$$

$$\overline{A_8A_9}^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos(\theta+\frac{7\pi}{4})=2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{7\pi}{4})$$



圖四

仿初始問題(法二)的作法，先算出

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\overline{A_5A_6}^2+\overline{A_7A_8}^2$$

的值。

$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\overline{A_5A_6}^2+\overline{A_7A_8}^2$

$=(2R^2-2R^2\cos\theta)+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{4}\right)\right)+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{4}\right)\right)$

$+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{6\pi}{4}\right)\right)$

$=8R^2-2R^2\sum_{j=0}^{3}\cos(\theta+\frac{2\pi j}{4})$

(由引理 1 cos連加公式，可以得到下列式子)

$=8R^2-2R^2\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos(\theta+\frac{4-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})$

$=8R^2$

再算出

$$\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\overline{A_6A_7}^2+\overline{A_8A_9}^2$$

的值。

$\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\overline{A_6A_7}^2+\overline{A_8A_9}^2$

$=\left(2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\right)+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{5\pi}{4}\right)\right)+\left(2R^2-2R^2\cos\left(\theta+\frac{7\pi}{4}\right)\right)$

$=8R^2-2R^2\sum_{j=0}^{3}\cos(\theta+\frac{(2j+1)\pi}{4})$

(由引理 1 cos連加公式，可以得到下列式子)

$=8R^2-2R^2\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}\cdot\cos(\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{4-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2})$

$=8R^2$

因此

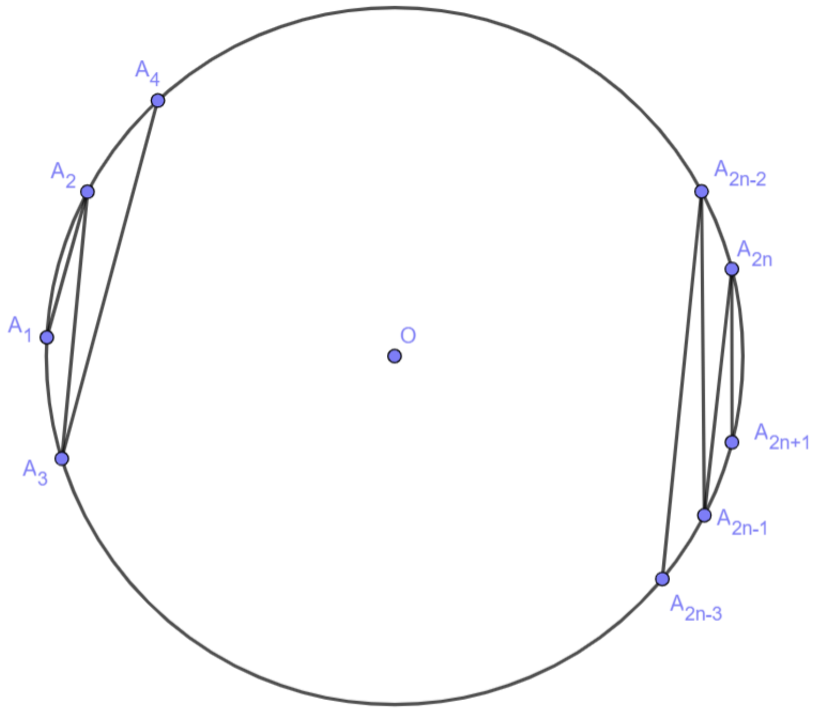
$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\overline{A_5A_6}^2+\overline{A_7A_8}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\overline{A_6A_7}^2+\overline{A_8A_9}^2$$

所以在九個點的情況下，仍保有此長度平方關係。

Z 字形路徑的長度平方關係在七個點、九個點的情況下皆成立，因此猜測在任意大於三之奇數個點的情況下，長度平方關係皆成立，也就是猜測:

猜想 1 一圓O上有$2n+1(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\dots,A_{2n},A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots, Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n}\ (k=1,2,\dots,2n-1)$。則

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2。$$



圖五

[證明]

(i)

仿初始問題(法二)的作法，利用餘弦定理和引理 1 cos連加公式。設圖四之圓半徑為R且$\widehat{A_1A_2}=\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{\pi}{n})$，注意到$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$，則由餘弦定理，有

$$\overline{A_1A_2}^2=2R^2-2R^2\cos\theta$$

$$\overline{A_2A_3}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{\pi}{n}+\theta)$$

$$\overline{A_3A_4}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\frac{2\pi}{n} + \theta)$$

…

$$\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\frac{(2n-2)\pi}{n} + \theta)$$

$$\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(\frac{(2n-1)\pi}{n} + \theta)$$

(ii)

計算

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2$$

的值。

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2$$

$$= (2R^2 - 2R^2\cos\theta) + (2R^2 - 2R^2\cos(\frac{2\pi}{n} + \theta))$$

$$+ \cdots + (2R^2 - 2R^2\cos(\frac{(2n-2)\pi}{n} + \theta))$$

$$= n \cdot 2R^2 - 2R^2\sum_{j=1}^{n}\cos(\frac{(2j-2)\pi}{n} + \theta)$$

(由引理 1 cos連加公式，可以得到下列式子)

$$= n \cdot 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin n \cdot \frac{\frac{2\pi}{n}}{2}}{\sin\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}} \cdot \cos(\theta + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n})$$

$$= n \cdot 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \cos(\theta + \frac{(n-1)\pi}{n})$$

$$= 2nR^2$$

(iii)

接著計算

$$\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2$$

的值。

$\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2$

$=(2R^2-2R^2\cos(\frac{\pi}{n}+\theta))+(2R^2-2R^2\cos(\frac{3\pi}{n}+\theta))$

$+\cdots+(2R^2-2R^2\cos(\frac{(2n-1)\pi}{n}+\theta))$

$= n\cdot 2R^2-2R^2\sum_{j=1}^{n}\cos(\frac{(2j-1)\pi}{n}+\theta)$

(由引理 1 cos連加公式，可以得到下列式子)

$=n\cdot 2R^2-2R^2\cdot\frac{\sin n\cdot\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}}{\sin\frac{\frac{2\pi}{n}}{2}}\cdot\cos((\frac{\pi}{n}+\theta)+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n})$

$=n\cdot 2R^2-2R^2\cdot\frac{\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\cos(\theta+\pi)$

$=2nR^2$

由(ii)、(iii)知

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2$$

■

於是驗證了猜想，將此寫成定理 1:

定理 1 一圓O上有$2n+1(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n},A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\ldots,\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ldots,\ Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n}\ (k=1,2,\ldots,2n-1)$。則

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2$$

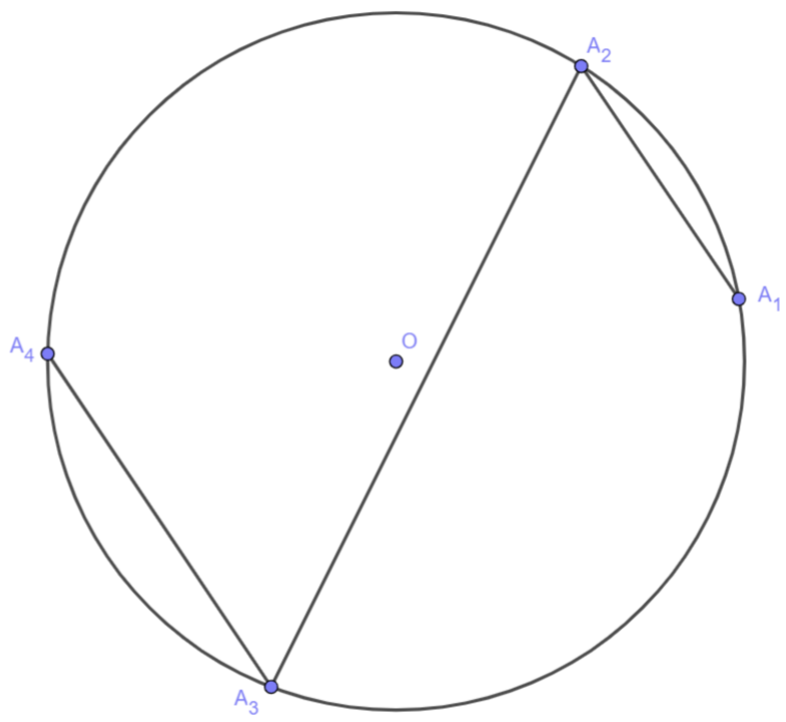
，且等式兩端之值為$2nR^2$。

注意到上一小節討論的初始問題的長度平方關係以及本小節討論的圓上有九個點的情形，分別是此定理$n=3$及$n=4$的特殊情形。

(三)討論圓上有偶數個點之長度平方關係

從初始問題的七個點的情形成立到上一小節**(2.)**的九個點的的情形成立，我們猜測圓上有$2n+1$個點的 Z 字形長度平方關係為相等關係。最後在該節證明了該猜測為真。然而，以上討論都是奇數個點的情形，但若偶數個點是否也成立呢?像討論奇數個點一樣，先舉一些例子觀察有無規律。

若一圓O上有四個點A_1,A_2,A_3,A_4，連成三個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_4}$，形成一個 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4)$，如圖六。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{3}\ (k=1,2)$。



圖六

那麼，我要討論等式

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2=\overline{A_2A_3}^2$$

是否像奇數個點一樣成立。

設圖六之圓半徑為R且 $A_1A_2=\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{2\pi}{3})$，則由餘弦定理及三角函數和差化積公式，有

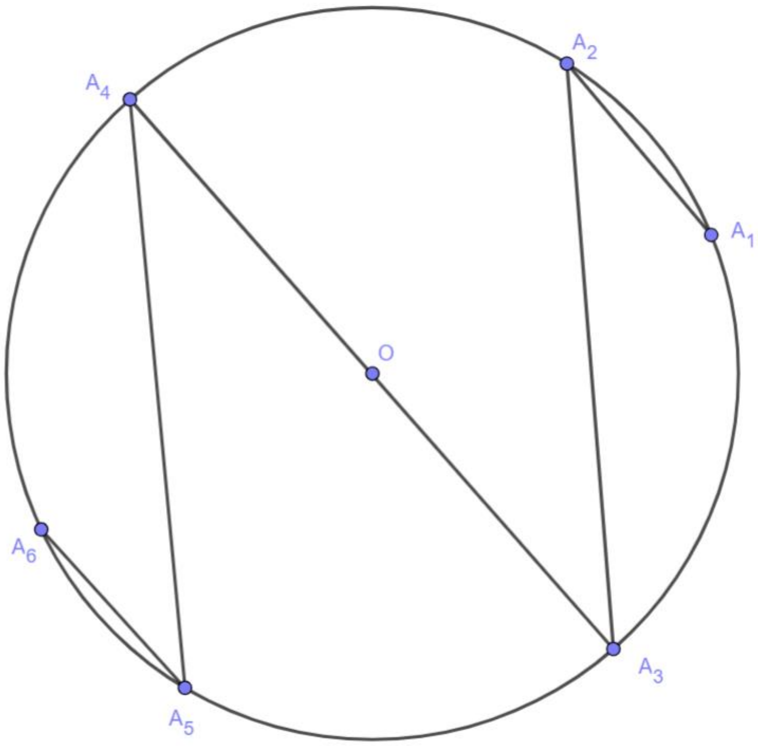
$$\begin{aligned}&\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2\\&=(2R^2-2R^2\cos\theta)+\left(2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{4\pi}{3})\right)\\&=4R^2-2R^2(\cos\theta+\cos(\theta+\frac{4\pi}{3}))\\&=4R^2+2R^2\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})\end{aligned}$$

，而

$$\overline{A_2A_3}^2=2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})$$

。若$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2=\overline{A_2A_3}^2$，則$\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}$，可是$0<\theta<\frac{2\pi}{3}$，所以$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2=\overline{A_2A_3}^2$對所有的$\theta(0<\theta<\frac{2\pi}{3})$都不成立，因此當圓上有四個點時，Z 字形長度平方關係不為相等關係。但注意到$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2$和$\overline{A_2A_3}^2$都含有$\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})$。雖然四個點不像奇數個點時一樣，會使等式成立，但為了找出$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2$和$\overline{A_2A_3}^2$之間的關係，再討論一個偶數個點的情況——圓上有六個點。

若一圓O上有六個點$A_1,A_2,\dots,A_6$，連成五個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_5A_6}$，形成三個 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),Z(A_3-A_4-A_5-A_6)$，如圖七。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{5}\ (k=1,2,3,4)$。



圖七

設圖七之圓半徑為R且$A_1A_2 = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{5})$，則由餘弦定理及引理 1 cos連加公式，有

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2$$

$$= (2R^2 - 2R^2\cos\theta) + \left(2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{4\pi}{5})\right) + \left(2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{8\pi}{5})\right)$$

$$= 6R^2 - 2R^2(\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\theta + \frac{8\pi}{5}\right))$$

$$= 6R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{5})$$

且

$$\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2$$

$$= \left(2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{2\pi}{5})\right) + \left(2R^2 - 2R^2\cos(\theta + \frac{6\pi}{5})\right)$$

$$= 4R^2 - 2R^2(\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\theta + \frac{6\pi}{5}\right))$$

$$= 4R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{5})$$

由上可知，

$$\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2 \neq \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2$$

，所以在六個點的情形，一樣無法像奇數個點一樣有相等關係。但是注意到 $\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2$ 及 $\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2$ 都含有 $\cos(\theta + \frac{4\pi}{5})$。

由以上四個點和六個點的討論，發現雖然無法像奇數個點一樣有相等關係，但「≠」兩邊的值依然存在某種關係。為了討論此關係，將四個點及六個點之情形所得出的結果，改為以下相減的形式討論。

四個點之情形:

$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2\right) - \overline{A_2A_3}^2$$

$$= \left(4R^2 + 2R^2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) - \left(2R^2 - 2R^2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2R^2 + 4R^2\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

六個點之情形:

$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \overline{A_5A_6}^2\right) - \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2\right)$$

$$= \left(6R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{6\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right)\right) - \left(4R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right)\right)$$

$$= 2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{2\pi}{5}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right)$$

改為相減的形式後，四個點及六個點之情形都有 $2R^2$ 一項，且依然分別保有 $\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ 及 $\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{5}\right)$。因此猜測若圓上有 $2n$ 個點，則

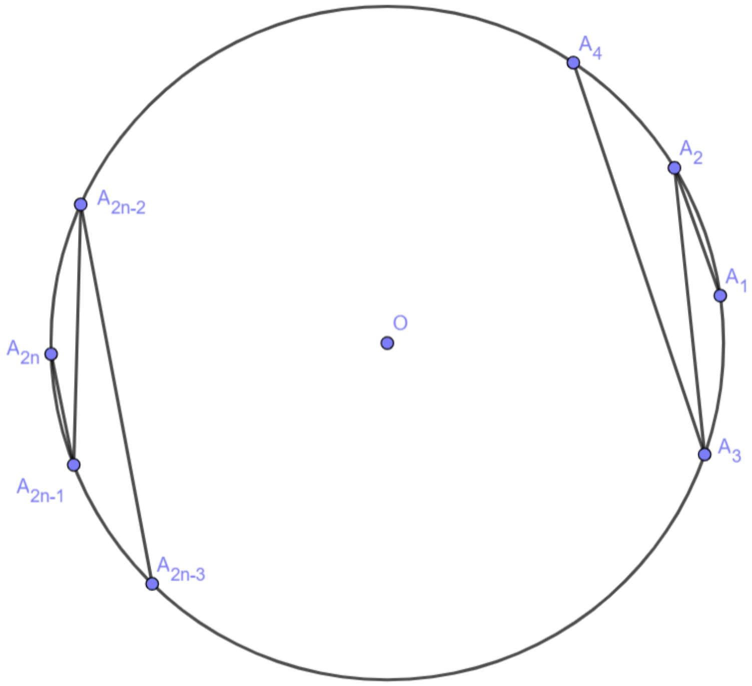
$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right) - \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

的值可表達為 $2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin(f(n))}{\sin(g(n))} \cdot \cos(\theta + h(n))$ 的形式，其中 $f(n), g(n), h(n)$ 為關於 n 的函數且 $\overset{\frown}{A_1A_2} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。所以有以下猜想:

猜想 2 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots,\ Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}\ (k = 1,2,\dots,2n-2)$且$\overset{\frown}{A_1A_2} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。則

$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right) - \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

的值可表達為$2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin(f(n))}{\sin(g(n))} \cdot \cos\big(\theta + h(n)\big)$，其中$f(n), g(n), h(n)$為關於$n$的函數。



圖八

[證明]

設圖八之圓半徑為R且$\overset{\frown}{A_1A_2} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$，注意到$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$，則由餘弦定理，有

$$\overline{A_1A_2}^2=2R^2-2R^2\cos\theta$$

$$\overline{A_2A_3}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{2\pi}{2n-1}+\theta)$$

$$\overline{A_3A_4}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{4\pi}{2n-1}+\theta)$$

…

$$\overline{A_{2n-3}A_{2n-2}}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{(4n-8)\pi}{2n-1}+\theta)$$

$$\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{(4n-6)\pi}{2n-1}+\theta)$$

$$\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2=2R^2-2R^2\cos(\frac{(4n-4)\pi}{2n-1}+\theta)$$

$$\left(\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right)-\left(\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

$$=\left(n\cdot 2R^2-2R^2\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{(4j-4)\pi}{2n-1}+\theta\right)\right)$$

$$-\left((n-1)\cdot 2R^2-2R^2\sum_{j=1}^{n-1}\cos\left(\frac{(4j-2)\pi}{2n-1}+\theta\right)\right)$$

$$=2R^2-2R^2\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{(4j-4)\pi}{2n-1}+\theta\right)+2R^2\sum_{j=1}^{n-1}\cos\left(\frac{(4j-2)\pi}{2n-1}+\theta\right)$$

(由引理 1 cos連加公式，可得到下式)

$$=2R^2-2R^2\cdot\frac{\sin\frac{n\cdot\frac{4\pi}{2n-1}}{2}}{\sin\frac{\frac{4\pi}{2n-1}}{2}}\cdot\cos\left(\theta+\frac{n-1}{2}\cdot\frac{4\pi}{2n-1}\right)$$

$$+2R^2\cdot\frac{\sin\frac{(n-1)\cdot\frac{4\pi}{2n-1}}{2}}{\sin\frac{\frac{4\pi}{2n-1}}{2}}\cdot\cos((\frac{2\pi}{2n-1}+\theta)+\frac{(n-1)-1}{2}\cdot\frac{4\pi}{2n-1})$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{2n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{2n-1}\right)$$

$$+2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{2(n-1)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}} \cdot \cos(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{2n-1})$$

$$= 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{\sin\frac{2n\pi}{2n-1} - \sin\frac{2(n-1)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{2n-1}\right)$$

$$= 2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{2n-1}\right)$$

由上可知，

$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right) - \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

的值的確可以表達成$2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin(f(n))}{\sin(g(n))} \cdot \cos(\theta + h(n))$的形式。

■

將此結果寫成定理 2。

定理 2 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \ldots,\ Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(k = 1,2, \ldots, 2n-2)$且$A_1A_2 = \theta\left(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1}\right)$。則

$$\left(\overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_3A_4}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right) - \left(\overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_4A_5}^2 + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

的值為$2R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}} \cdot \cos\left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{2n-1}\right)$ 。

此定理說明:圓上有偶數個點時，長度平方和的相等關係不總是成立。

由上可知本小節一開始討論的圓上有四個點及六個點之情形，分別為$n = 2$及$n = 3$的特殊情形。

三、圓上m個點之 Z 字形路徑一次方長度關係——針對m之奇偶性探究

上一節中所討論的是長度的「平方關係」，例如初始問題中，我們得到的等式:

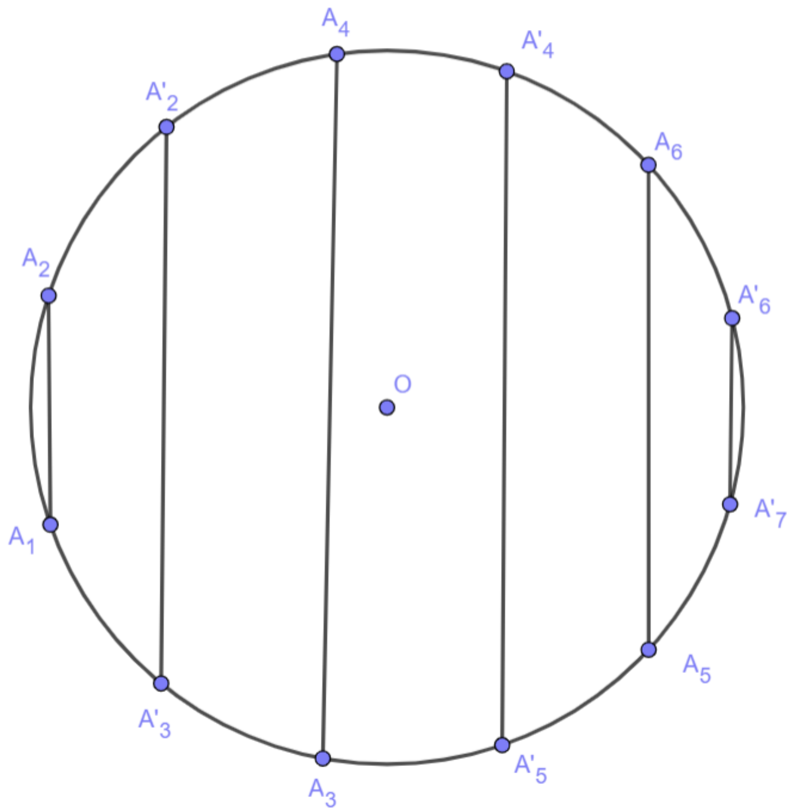
$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\overline{A_5A_6}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\overline{A_6A_7}^2$$

。而本節想討論的是長度的「一次方關係」，例如初始問題中$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}$和$\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}$的關係。

(一)初始問題條件下的一次方長度關係

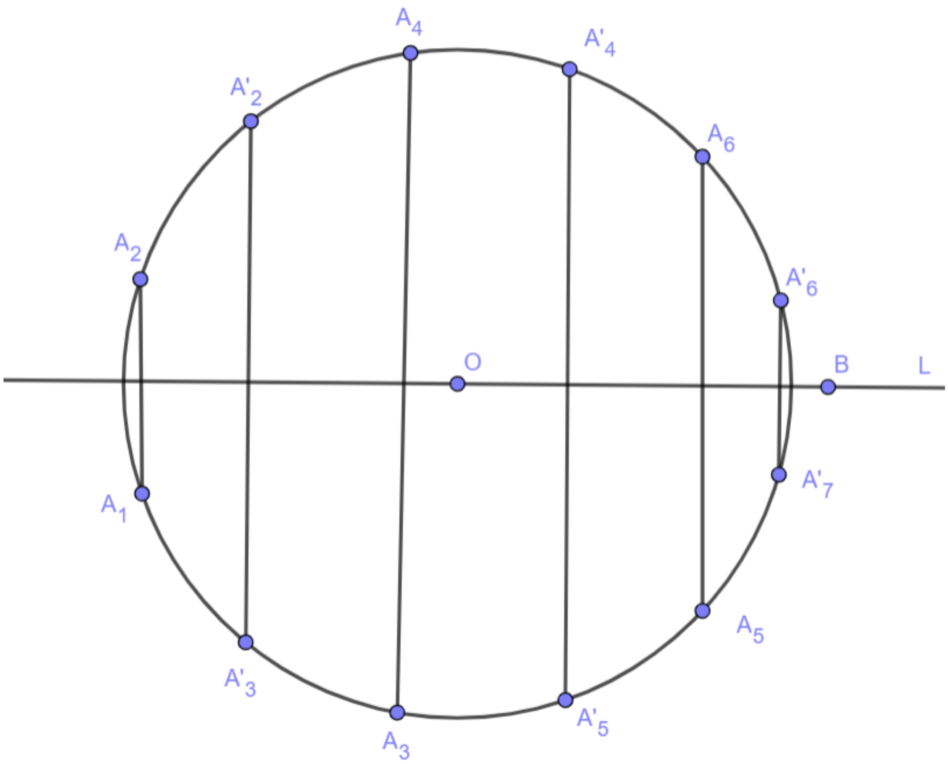
本小節將討論初始問題條件下$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}$和$\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}$的關係。和初始問題的討論方法一樣，先分別求$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}$和$\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}$的值，再討論他們之間的關係。但為了往後討論的方便，先將圖形變形。

在圖二中，將點A_2在圓周上向點A_4移動$\frac{\pi}{6}$弳至點A'_2，但保留原位置的點A_2。接著，將原有的點A_3在圓周上向點A_1移動$\frac{\pi}{6}$弳至點A'_3，但保留原位置的點A_3。連接點A'_2、A'_3。同理，A_4和點A_5分別至點A'_4和點A'_5，連接點A'_4、A'_5。最後，將點A_6和點A_7向點A_5移動$\frac{\pi}{6}$弳分別至點A'_6和點A'_7且連接點A'_6、A'_7，再刪除$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_4A_5}$和$\overline{A_6A_7}$，得圖九。



圖九

經過上述變形後，可得$\overline{A_2A_3} = \overline{A'_2A'_3}$、$\overline{A_4A_5} = \overline{A'_4A'_5}$和$\overline{A_6A_7} = \overline{A'_6A'_7}$，且除了 A_1A_2 和 $A'_6A'_7$ 外，其餘弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{6}$。接著，做一條直線L穿越圓心O，且平分各弦，如圖十。



圖十

將圖十中點O設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為R且$A'_6A'_7 = \theta$，則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6}$$
$$= 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{6}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{6}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})$$

且

$$\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}$$
$$= \overline{A'_2A'_3} + \overline{A'_4A'_5} + \overline{A'_6A'_7}$$
$$= 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{6}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{6}) + 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{6})$$

所以

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}$$

對於所有$\theta(0 < \theta < \frac{\pi}{3})$不一定成立。

(二)圓上有奇數個點的一次方長度關係

上一小節討論了初始問題的一次方長度關係，雖然未得到漂亮的等式結果，但仍可以討論不等號兩邊的關係。為了方便研究，將上一節不等號兩邊相減，如下:

$$(\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6}) - (\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7})$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - 2R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{6}\right)$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot (\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{6}\right))$$

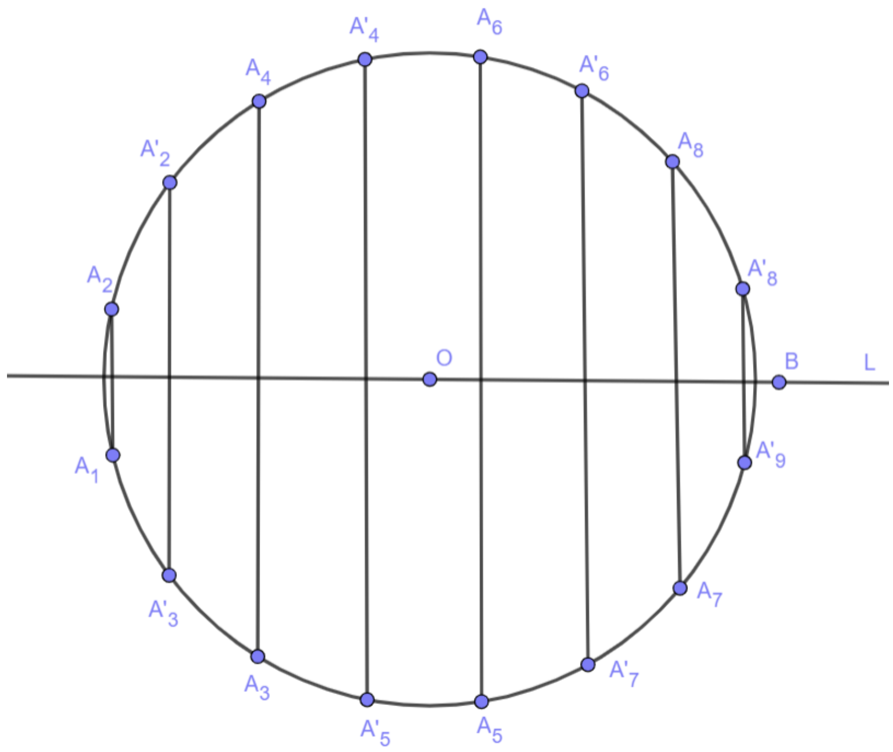
$$= 4R \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{12})$$

$$= 2R \cdot \frac{\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{12})}{\cos\frac{\pi}{12}}$$

一次方長度關係在推廣到奇數個點之前，再看圓上有九個點的情形，觀察其與初始問題之間的共通點。在九個點的情形下，線段的分布如本章第一節之第二小節所述:

一圓O上有九個點A_1、A_2、…、A_8、A_9，連成八個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_8A_9}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots, Z(A_6 - A_7 - A_8 - A_9)$，如圖四。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{8}$ $(k = 1,2, \dots ,7)$。

仿照上一小節在討論初始問題中的一次方長度關係一樣，將圖形變形且做一條直線L穿越圓心O，並平分各弦，如圖十一。



圖十一

經過上述變形後，可得$\overline{A_2A_3}=\overline{A'_2A'_3}$、$\overline{A_4A_5}=\overline{A'_4A'_5}$、$\overline{A_6A_7}=\overline{A'_6A'_7}$和$\overline{A_8A_9}=\overline{A'_8A'_9}$，且除了 A_1A_2 和 $A'_8A'_9$ 外，其餘弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{8}$。

將圖十中點O設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為R且 $A'_8A'_9=\theta$，則

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}+\overline{A_7A_8}$$

$$=2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{8})+2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{5\pi}{8})+2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})+2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{8})$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=2R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{8})$$

且

$\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}+\overline{A_8A_9}$

$=\overline{A'_2A'_3}+\overline{A'_4A'_5}+\overline{A'_6A'_7}+\overline{A'_8A'_9}$

$=2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{6\pi}{8})+2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{8})+2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2\pi}{8})+2R\sin\frac{\theta}{2}$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$=2R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8})$

將兩式相減。

$(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}+\overline{A_7A_8})-(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\overline{A_6A_7}+\overline{A_8A_9})$

$=2R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{8}\right)-2R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$

$=2R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot(\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{4\pi}{8}\right)-\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{8}\right))$

$=4R\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{8}}\cdot\sin\frac{\pi}{16}\cdot\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{16})$

$=2R\cdot\frac{\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{16})}{\cos\frac{\pi}{16}}$

在初始問題及九個點的情況的一次方長度關係中，因為相減後的值均可表達為$2R\cdot\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+f(n)\right)}{\cos(g(n))}$的形式，其中$f(n),g(n)$為關於$n$的函數且$A_{2n}A_{2n+1}=\theta$ $(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{\pi}{n})$，固有以下猜想:

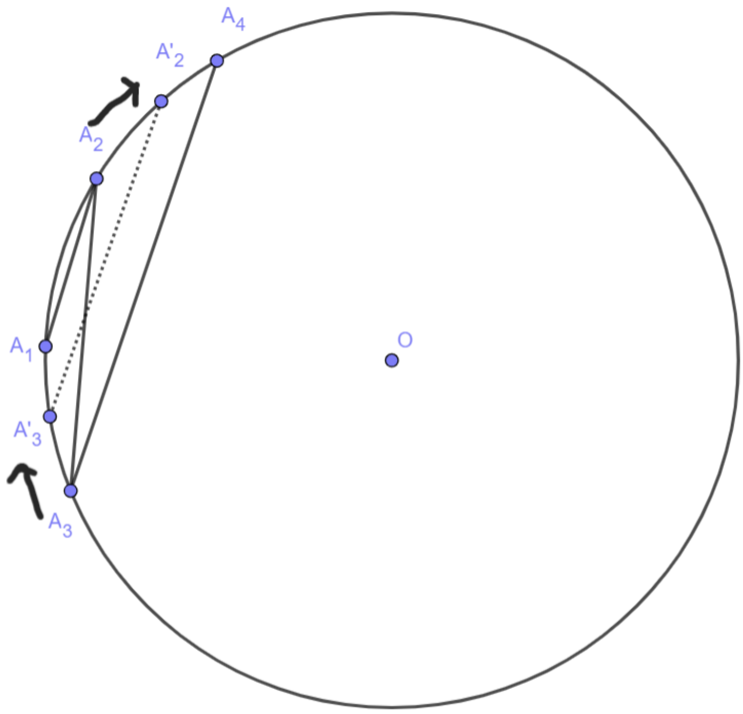
猜想 3 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \dots,\ Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n}\ (k=1,2,\dots,2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1}=\theta(\theta \in \mathbb{R}, 0<\theta<\frac{\pi}{n})$。則

$$(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}})-(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}})$$

的值可以表達為$2R\cdot\frac{\cos(\frac{\theta}{2}+f(n))}{\cos(g(n))}$的形式，其中$f(n), g(n)$為關於$n$的函數。

[證明]

如上述將初始問題變形的方式，先將圖五做一點變形。以點A_2, A_3來說，將點A_2在圓周上向點A_4移動$\frac{\pi}{2n}$弳至點A'_2，但保留原位置的點A_2。同理，將原有的點A_3在圓周上向點A_1移動$\frac{\pi}{2n}$弳至點A'_3，但保留原位置的點A_3。連接點A'_2、A'_3，如圖十二。

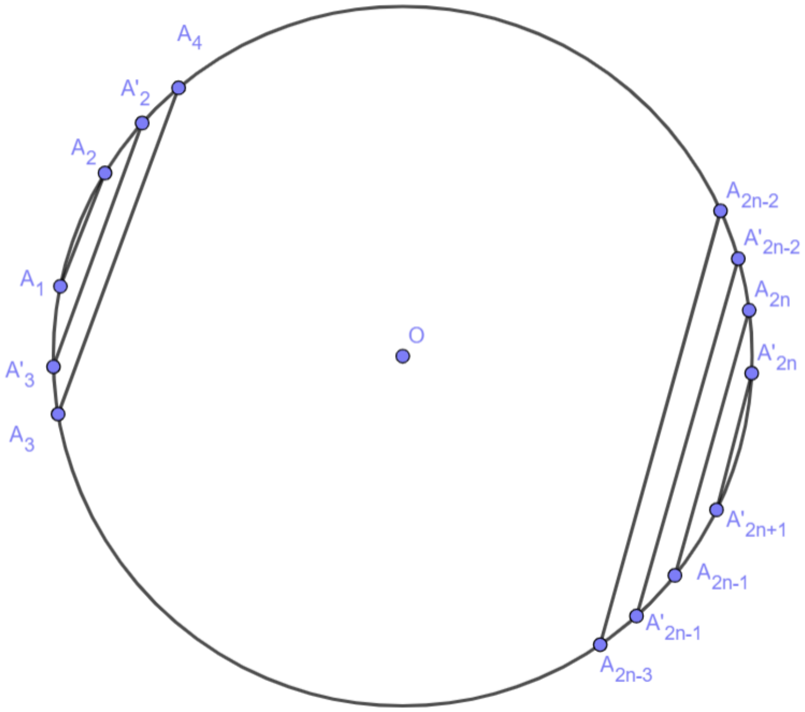


圖十二

則 $A'_2A_4 = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}$，同理，$A_1A'_3 = \frac{\pi}{2n}$。由

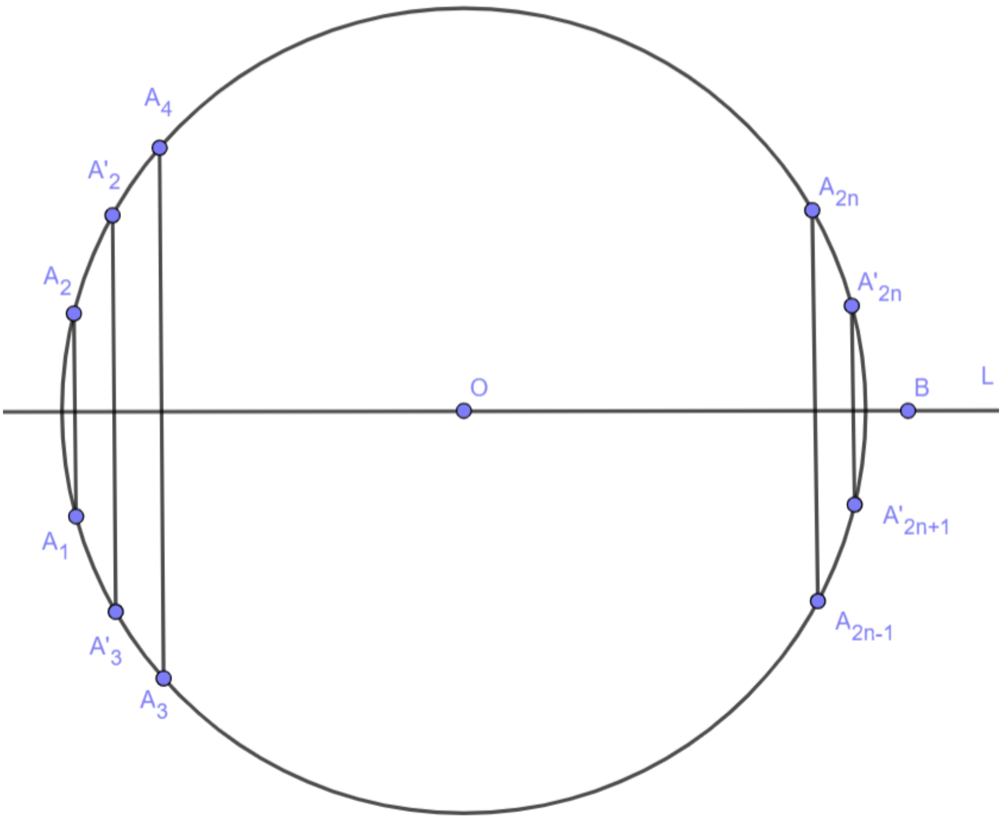
$A_1A'_3 = A_2A'_2 = A'_3A_3 = A'_2A_4$，得$\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A'_2A'_3} \parallel \overline{A_3A_4}$和$\overline{A_2A_3} = \overline{A'_2A'_3}$。

一般地，將圖五中原有的點A_k在圓周上向點A_{k+2}移動$\frac{\pi}{2n}$弳至點A'_k(k為偶數，$k = 2,4,\dots,2n-2$)，但保留原位置的點A_k。同理，將圖四中原有的點A_l在圓周上向點A_{l-2}移動$\frac{\pi}{2n}$弳至點A'_l(l為奇數，$l = 3,5,\dots,2n-1$)，但保留原位置的點A_l。接著，去除$\overline{A_kA_{k+1}}$($k = 2,4,\dots,2n-2$)。最後，將點A_{2n}和點A_{2n+1}向點A_{2n-1}移動$\frac{\pi}{2n}$弳分別至點A'_{2n}和點A'_{2n+1}，並去除$\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，如下圖十三。



圖十三

除了 A_1A_2 和 $A'_{2n}A'_{2n+1}$ 以外，其他相鄰兩弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{2n}$。任兩弦互相平行。經平移的弦與原來的弦，有以下的長度關係:$\overline{A_mA_{m+1}} = \overline{A'_mA'_{m+1}}(m = 2,4,\ldots,2n)$。接著，做一條直線$L$穿越圓心$O$，且平分各弦，如圖十四。



圖十四

接著求

$$(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}})-(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}})$$

，將圖十四中點O設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為R且$A_{2n}A_{2n+1}=\theta$，則

$$(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}})-(\overline{A_2A_3}+\overline{A_4A_5}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}})$$

$$=(\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}})-(\overline{A'_2A'_3}+\overline{A'_4A'_5}+\cdots+\overline{A'_{2n}A'_{2n+1}})$$

$$=(2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)+2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-3)\pi}{2n}\right)+\cdots+2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2n}\right))$$

$$-(2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2)\pi}{2n}\right)+2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-4)\pi}{2n}\right)+\cdots+2R\sin\frac{\theta}{2})$$

$$=2R\sum_{j=1}^{n}\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2j-1)\pi}{2n})-2R\sum_{j=1}^{n}\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2j-2)\pi}{2n})$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin \frac{n \cdot \frac{\pi}{n}}{2}}{\sin \frac{\frac{\pi}{n}}{2}} \cdot \sin\left(\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right) - 2R \cdot \frac{\sin \frac{n \cdot \frac{\pi}{n}}{2}}{\sin \frac{\frac{\pi}{n}}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{2R \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right)$$

$$= \frac{2R \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4n} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)$$

$$= 2R \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)}{\cos \frac{\pi}{4n}}$$

我們將此結果寫成定理 3:

定理 3 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots, Z(A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n} - A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n}$ $(k = 1,2,\dots,2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{\pi}{n})$。則

$$(\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}) - (\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n}A_{2n+1}})$$

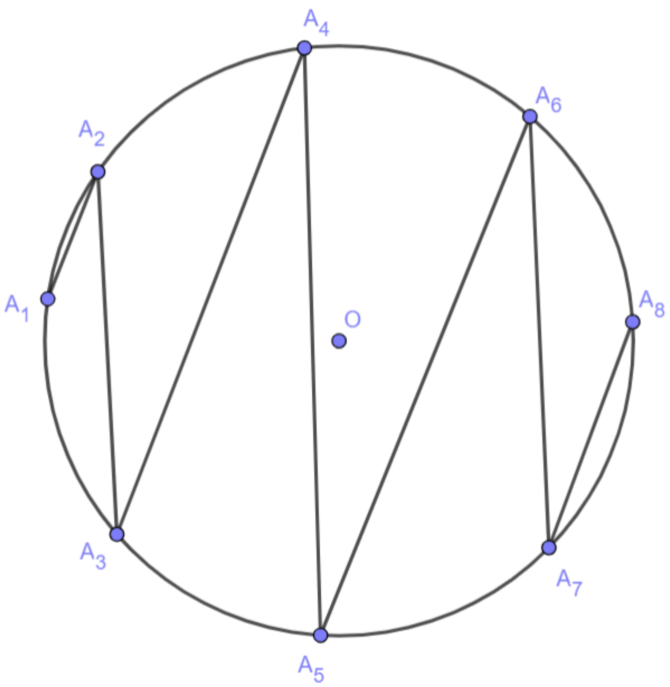
的值為$2R \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)}{\cos \frac{\pi}{4n}}$。

此定理說明:圓上有奇數個點時，長度的一次方和不總是有相等關係。而上一小節和本小節討論的初始問題條件下(也就是圓上有七個點的情形)和本小節討論的圓上有九個點的情形，分別是此定理$n = 3$及$n = 4$的特殊情形。特別注意當$\theta = \frac{\pi}{2n}$時，$2R \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)}{\cos \frac{\pi}{4n}} = 0$，此時有相等關係。

(三)圓上有偶數個點的一次方長度關係

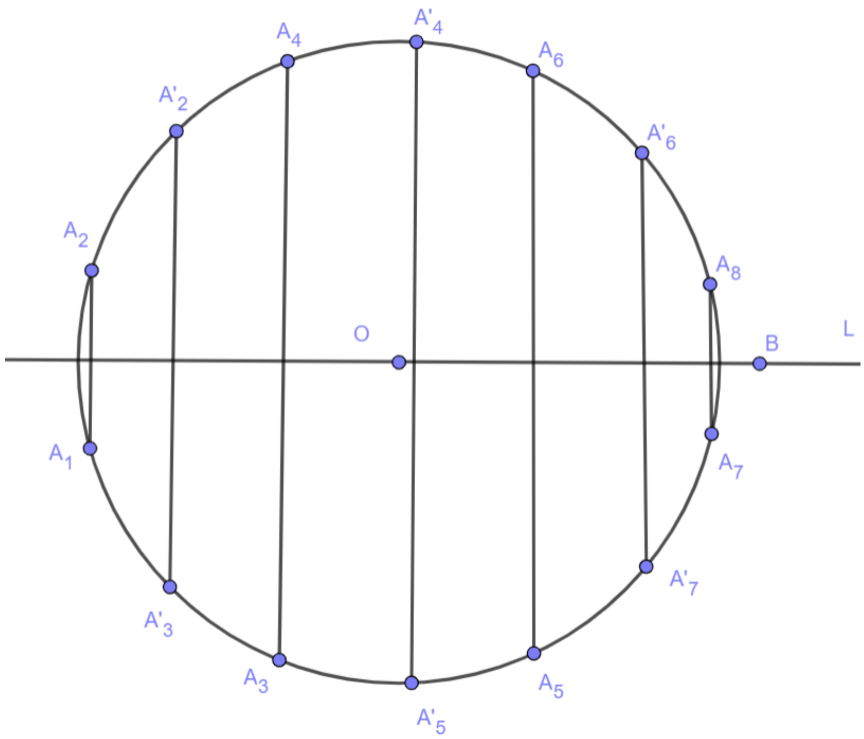
就像此章的第二節一樣，當討論完奇數個點的情形時，也會想知道偶數個點的情況為何?但由前一節的討論知，偶數和奇數的長度關係情況可能會不一樣。因此，在提出猜想前，先舉兩個特別的例子，以提出圓上有偶數個點之猜想。首先，討論圓上有八個點的情形:

一圓O上有八個點A_1、A_2、…、A_7、A_8，連成七個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_7A_8}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \dots,\ Z(A_5-A_6-A_7-A_8)$，如圖十五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{7}\ (k=1,2,\dots,6)$。



圖十五

由此節前述的變形方法，可得圖十六。且圖十六具有以下性質:$\overline{A_2A_3}=\overline{A'_2A'_3}$、$\overline{A_4A_5}=\overline{A'_4A'_5}$和$\overline{A_6A_7}=\overline{A'_6A'_7}$，且除了$A_1A_2$和$A_7A_8$外，其餘弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{7}$。直線$L$穿越圓心$O$，且平分各弦。



圖十六

將圖十六中點O設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為R且$\angle A_7 A_8 = \theta (0 < \theta < \frac{2\pi}{7})$，則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_7A_8}$$

$$= 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{6\pi}{7}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{7}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{7}) + 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{7})$$

且

$$\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}$$

$$= \overline{A'_2A'_3} + \overline{A'_4A'_5} + \overline{A'_6A'_7}$$

$$= 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{7}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{7}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{7})$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{7})$$

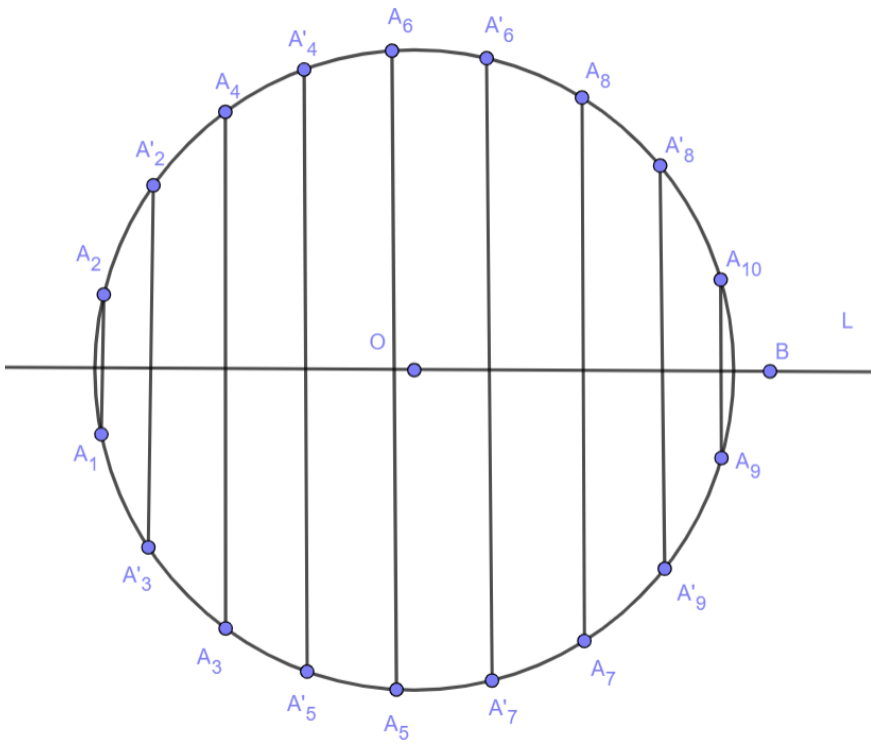
$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{7})$$

所以

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_7A_8} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7}$$

在八個點的情形中，一次方長度有以上的相等關係。接著，再討論圓上有十個點的情形:

一圓O上有十個點A_1、A_2、…、A_9、A_{10}，連成九個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_9A_{10}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots,\ Z(A_7 - A_8 - A_9 - A_{10})$。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{9}\ (k = 1,2,\dots,8)$。接著，再仿上述圓上有八個點的情形將圖形做變形。最後，做一直線L穿越圓心O，且平分各弦，如圖十七。



圖十七

則除了 A_1A_2 和 A_9A_{10} 以外，其他相鄰兩弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{9}$。經平移的弦與原來的弦，有以下的長度關係:$\overline{A_mA_{m+1}} = \overline{A'_mA'_{m+1}}(m = 2,4, \dots ,8)$。將圖十七中點$O$設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為$R$且

$A_9A_{10} = \theta(0 < \theta < \frac{2\pi}{9})$，則

$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_7A_8} + \overline{A_9A_{10}}$

$= 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{8\pi}{9}\right) + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{6\pi}{9}\right) + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{9}\right) + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2\pi}{9}\right)$

$+2R\sin\frac{\theta}{2}$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{9})$$

且

$\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7} + \overline{A_8A_9}$

$= \overline{A'_2A'_3} + \overline{A'_4A'_5} + \overline{A'_6A'_7} + \overline{A'_8A'_9}$

$= 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{7\pi}{9}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{5\pi}{9}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{9}) + 2R\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{9})$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{9})$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{5\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{4\pi}{9}\right)$$

所以

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_5A_6} + \overline{A_7A_8} + \overline{A_9A_{10}} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \overline{A_6A_7} + \overline{A_8A_9}$$

在十個點的情形，一次方長度關係仍然有如上式的相等關係。而且觀察在八個點及十個點的情形中，等式兩邊的值都可表示為$2R \cdot \frac{\sin f(n)}{\sin g(n)} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + h(n))$的形式，其中$f(n), g(n), h(n)$為關於$n$的函數且 $A_{2n-1}A_{2n} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$，固有以下猜想:

猜想 4 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots, Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(k = 1,2, \dots, 2n-2)$且$\widehat{A_{2n-1}A_{2n}} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。

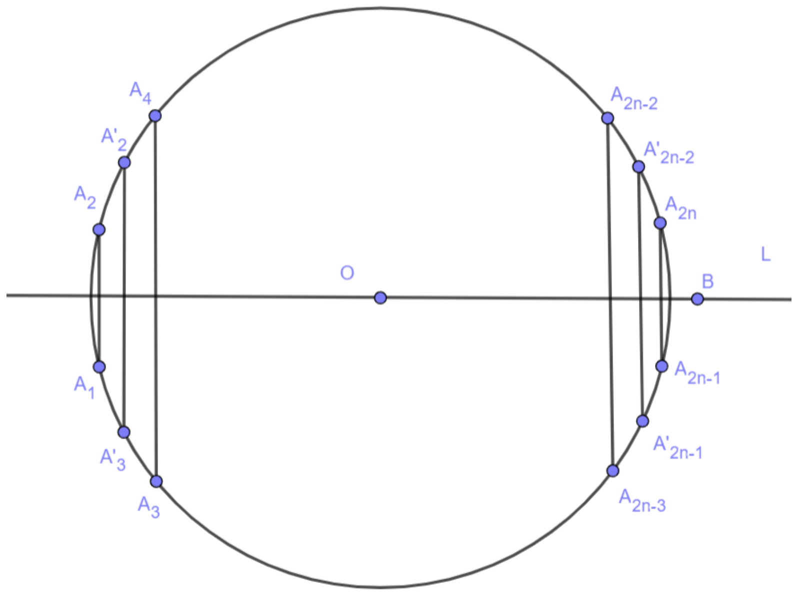
則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$$

且等號兩邊的值可以表達為$2R \cdot \frac{\sin f(n)}{\sin g(n)} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + h(n))$的形式，其中$f(n), g(n), h(n)$為關於$n$的函數。

[證明]

如此小節將圖形變形的方式，將圖八變形為圖十八。



圖十八

則除了$\widehat{A_1A_2}$和$\widehat{A_{2n-1}A_{2n}}$以外，其他相鄰兩弦所截的弧度皆為$\frac{\pi}{2n-1}$。經平移的弦與原來的弦，有以下的長度關係:$\overline{A_mA_{m+1}} = \overline{A'_mA'_{m+1}}$ $\big(m = 2,4, \dots, (2n-2)\big)$。接著，做一條直線$L$穿越圓心$O$，且平分各弦。將圖十

八中點O設為極座標系極點，$\overrightarrow{OB}$設為極軸。設圓半徑為R且$\overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \theta$

$(0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$，則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$$

$$= 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-2)\pi}{2n-1}\right) + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-4)\pi}{2n-1}\right) + \cdots + 2R\sin\frac{\theta}{2}$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n-1})$$

且

$$\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$$

$$= \overline{A'_2A'_3} + \overline{A'_4A'_5} + \cdots + \overline{A'_{2n-2}A'_{2n-1}}$$

$$= 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-3)\pi}{2n-1}\right) + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{(2n-5)\pi}{2n-1}\right) + \cdots + 2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2n-1}\right)$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n-1})$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n-1})$$

所以

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$$

■

將以上結果寫成定理 4。

定理 4 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots,\ Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}\ (k = 1,2,\dots,2n-2)$且$\overset{\frown}{A_{2n-1}A_{2n}} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。

則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$$

且等號兩邊的值為$2R \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n-1})$。

而本小節所討論圓上有八個點及十個點的一次方長度關係，即為此定理$n = 4$及$n = 5$的特殊情形。

四、圓以 Z 字形路徑分割之面積關係

本節的一開始將證明初始問題中 Z 字形路徑所分割的面積關係。接著討論圓上點個數有奇數個點及偶數個點時面積關係如何?並且將面積關係問題的圓上點個數推廣至大於三的任意奇數以及大於二的任意偶數。

(一)初始問題的面積關係證明

在第一章的第二節中，提到了初始問題，其中

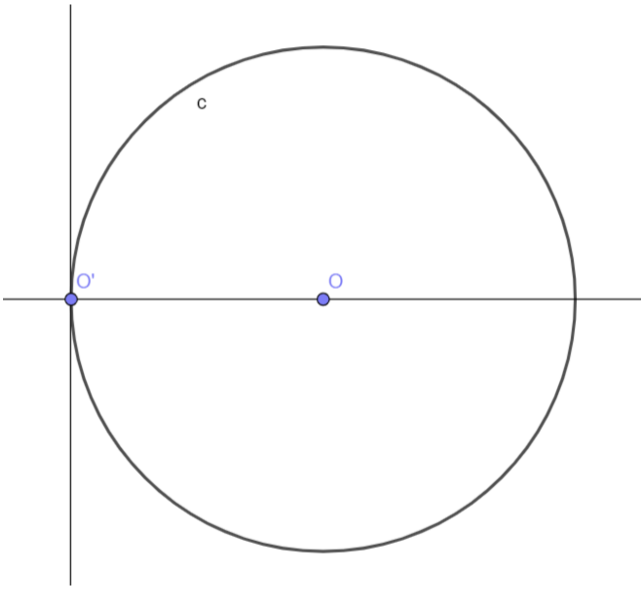
$$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + S_{A_5A_4A_6} + S_{(A_6CA_7)} = S_{A_2A_1A_3} + S_{A_4A_3A_5} + S_{A_6A_5A_7}$$

是否成立是本節所關注的，以下證明上式成立。

[證明]

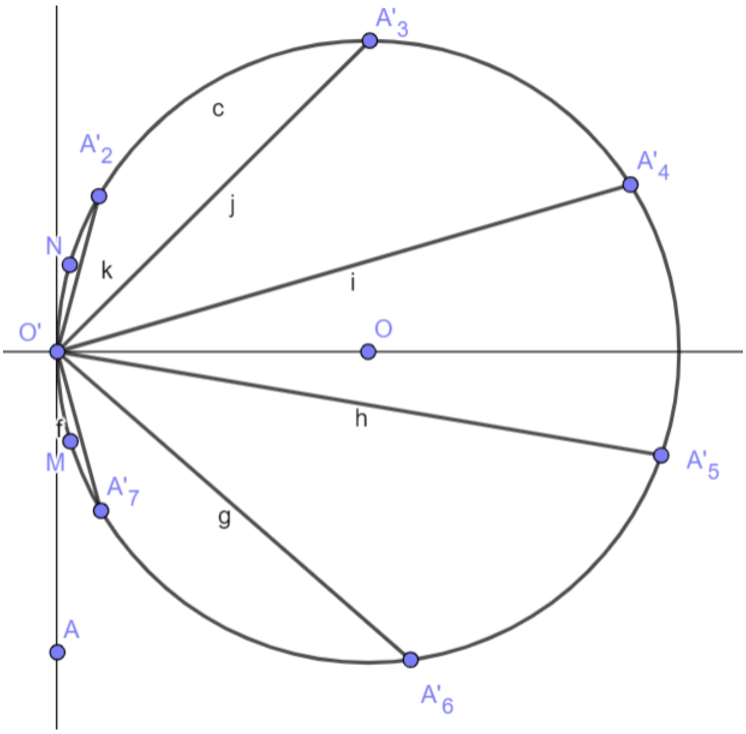
計算面積之前，需要將原來的圖形變形，且建立一極座標，極點為O'，

$\overrightarrow{O'O}$為極軸。在此極座標上，令$\overline{O'O} = R$，以點O為圓心，$\overline{O'O}$為半徑作一圓，如圖十九。



圖十九

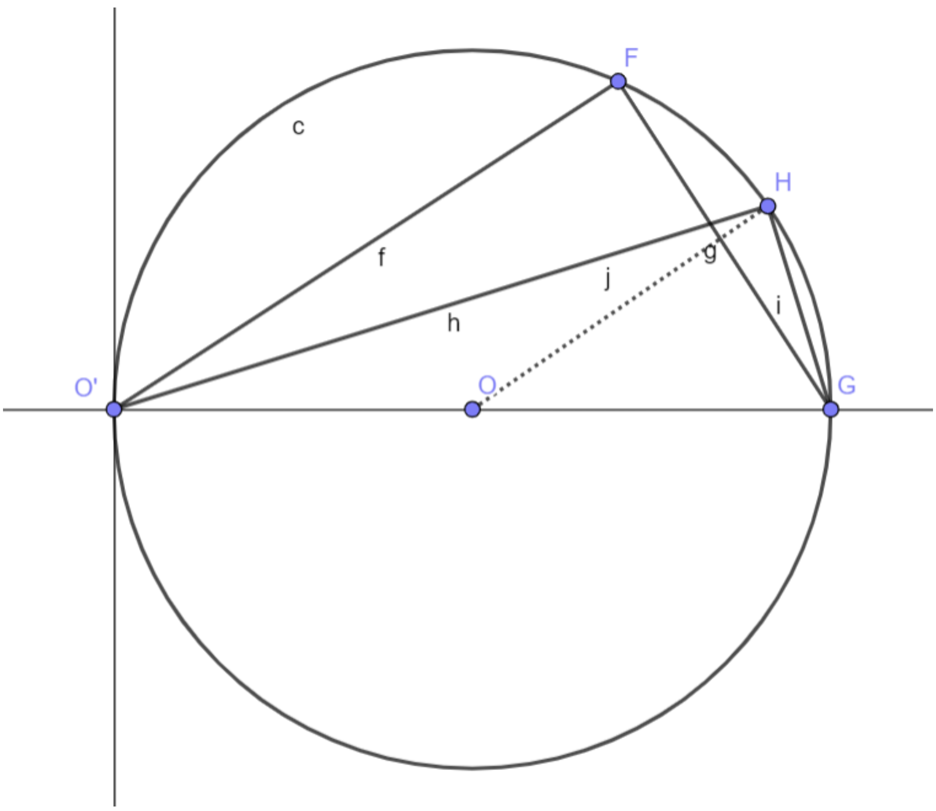
設初始問題中，圓半徑為R，$\overline{A_6A_7} = \theta(0 < \theta < \frac{\pi}{3})$。接著作出與圖二中$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_6A_7}$等長的線段於圖十九中，其中$\overline{O'A'_k} = \overline{A_{k-1}A_k}(k = 2,3, \ldots, 7)$，$\angle A'_lO'A'_{l-1} = \frac{\pi}{6}(l = 3,4, \ldots, 7)$且使$\angle A'_7O'A = \frac{\theta}{2}$，如圖二十。



圖二十

則$S_{O'A'_aA'_{a-1}} = S_{A_{a-1}A_{a-2}A_a}(a = 3,4,5,6,7)$，$S_{(O'MA'_7)} = S_{(A_6CA_7)}$，$S_{(O'NA'_2)} = S_{(A_1BA_2)}$。

現在來看此圓的極座標方程式。設圓與始邊交於另一點G，且圓上有一動點F。令$\angle FO'G = \alpha(\alpha \in \mathbb{R})$，因$\angle O'FG = \frac{\pi}{2}$，所以此圓的極座標方程式為$r = 2R\cos\alpha$，如圖二十一。



圖二十一

設$\overrightarrow{O'F}$之標準位置角為x，$\overrightarrow{O'H}$之標準位置角為y。則FH ,$\overline{O'F}$,$\overline{O'H}$所圍成之面積

$$S_{O'FH} = \frac{1}{2}\int_x^y r^2\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x}^{y} (2R\cos\alpha)^2\, d\alpha$$

$$= 2R^2 \int_{x}^{y} \cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$= 2R^2 \int_{x}^{y} \frac{1+\cos 2\alpha}{2} d\alpha$$

$$= R^2\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\Big|_{x}^{y}$$

$$= R^2\left(y - x + \frac{1}{2}\sin 2y - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

原本我用微積分算面積，但此方法較為複雜。在初稿請指導老師過目後，老師教我一個更簡潔有力的算法，如下:

設圖十九中的圓與極軸交於另一點G點，且圓上有兩動點，分別為F點和H點。設$\angle FO'G = y, \angle HO'G = x (0 \le x \le y \le \frac{\pi}{2})$，如圖二十一。

則

$S_{O'HG}$

$$= \frac{1}{2}R^2\sin(\pi - 2x) + \frac{1}{2}R^2 \cdot 2x$$

$$= \frac{1}{2}R^2\sin 2x + R^2 x$$

同理

$S_{O'FG}$

$$= \frac{1}{2}R^2\sin 2y + R^2 y$$

所以

$S_{O'FH}$

$$= S_{O'FG} - S_{O'HG}$$

$$=\left(\frac{1}{2}R^2\sin 2y+R^2y\right)-\left(\frac{1}{2}R^2\sin 2x+R^2x\right)$$

$$=R^2(y-x+\frac{1}{2}\sin 2y-\frac{1}{2}\sin 2x)$$

當F點和H點分別在極軸的不同側，或者兩點都在極軸下方時，用類似的方法也能得到同樣的結果。所以若$\overline{O'F}$之標準位置角為x，$\overline{O'H}$之標準位置角為y，則$S_{O'FH}=R^2(y-x+\frac{1}{2}\sin 2y-\frac{1}{2}\sin 2x)$，$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq y\leq\frac{\pi}{2}$。

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{(A_6CA_7)}$$

$$=S_{(O'NA'_2)}+S_{O'A'_4A'_3}+S_{O'A'_6A'_5}+S_{(O'MA'_7)}$$

$$=R^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{6\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin(\frac{4\pi}{6}+\theta))$$

$$+R^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$+R^2(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{6}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin(-\frac{4\pi}{6}+\theta))$$

$$+R^2(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{6\pi}{6}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin(-\frac{6\pi}{6}))$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\sum_{j=1}^{3}\sin(\frac{(6-4j)\pi}{6}+\theta)-\frac{1}{2}R^2\sum_{j=1}^{3}\sin(\frac{(8-4j)\pi}{6}+\theta)$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin(-\frac{\pi}{3})}\cdot\sin(-\frac{\pi}{3}+\theta)-\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin(-\frac{\pi}{3})}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi$$

因此$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{(A_6CA_7)}$為圓面積的一半，故有

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{(A_6CA_7)}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+S_{A_6A_5A_7}$$

■

(二)圓上有奇數個點的面積關係

上一小節中證明了初始問題中的面積問題，得到等式

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{(A_6CA_7)}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+S_{A_6A_5A_7}$$

，這是一個漂亮的結果。然而，若圓上有任意奇數個點，這個漂亮的相等關係結果是否都成立?這是本小節想要討論的問題。初始問題中的七個點情形，有面積的相等關係。接著再看看圓上有九個點時是否也有?

一圓O上有九個點$A_1,A_2,A_3,\dots,A_8,A_9$，連成8個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_8A_9}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots,$ $Z(A_6-A_7-A_8-A_9)$，如圖四。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{8}\ (k=1,2,\dots,7)$。

接著在 A_1A_2 和 A_8A_9 上分別加上點B和點C，仿照上一小節的討論，將此圖形變形，一樣可以用類似的方法解決問題:

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{A_7A_6A_8}+S_{(A_8CA_9)}$$

$$=R^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{8}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{6\pi}{8}+\theta\right)\right)$$

$$+R^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{8}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{8}+\theta)\right)$$

$$+\cdots+R^2(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{8\pi}{8}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin(-\frac{8\pi}{8}))$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\sum_{j=1}^{4}\sin(\frac{(8-4j)\pi}{8}+\theta)-\frac{1}{2}R^2\sum_{j=1}^{4}\sin(\frac{(10-4j)\pi}{8}+\theta)$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin(-\frac{\pi}{4})}\cdot\sin(-\frac{\pi}{4}+\theta)-\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin(-\frac{\pi}{4})}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi$$

在圓上有九個點時，依然有等式關係:

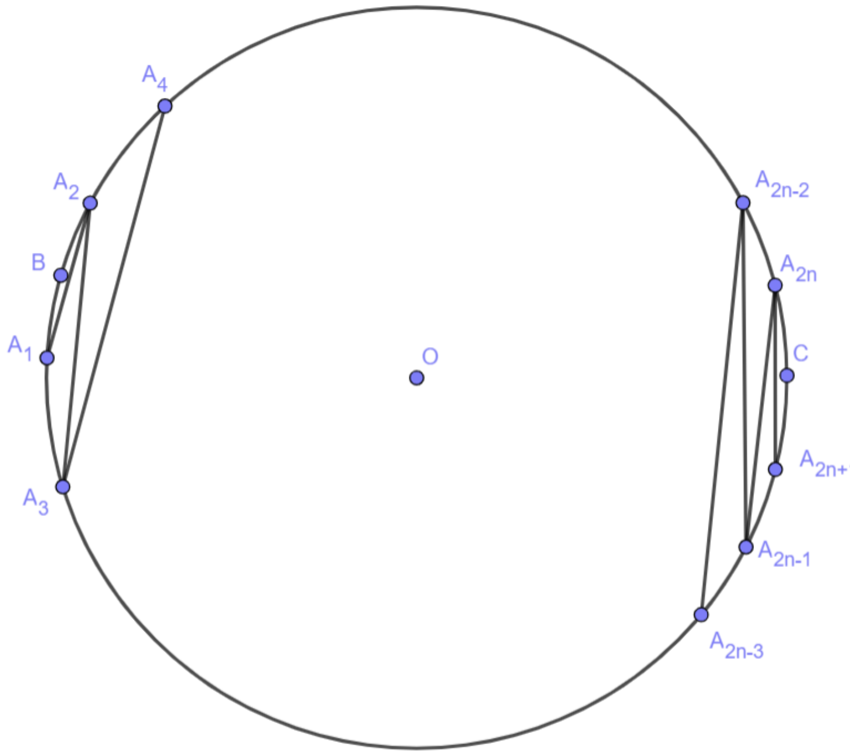
$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{A_7A_6A_8}+S_{(A_8CA_9)}$$
$$=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+S_{A_6A_5A_7}+S_{A_8A_7A_9}$$

所以對於圓上有奇數個點，有以下面積關係的猜測:

猜想 5 一圓O上有$2n+1(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \dots,\ Z(A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n} - A_{2n+1})$，如圖二十二。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n}\ (k = 1,2,\dots,2n-1)$。則

$$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + \cdots + S_{(A_{2n}CA_{2n+1})} = S_{A_2A_1A_3} + S_{A_4A_3A_5} + \cdots + S_{A_{2n}A_{2n-1}A_{2n+1}}$$

成立。



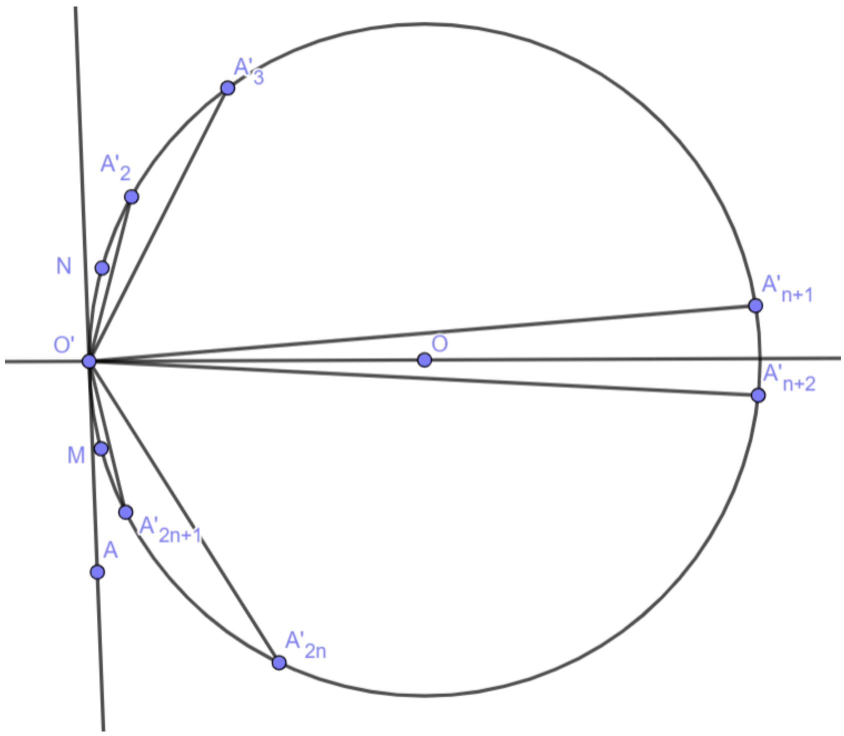
圖二十二

[證明]

設圖二十二圓半徑為R，$A_{2n}A_{2n+1} = \theta(\theta < \frac{\pi}{n})$。

一極座標上，$\overrightarrow{O'O}$為極軸，令$\overline{O'O} = R$，以點O為圓心作一圓，如圖十九。仿上一小節，作出與圖二十二中$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$等長的線段於圖十九

中，其中$\overline{O'A'_k} = \overline{A_{k-1}A_k}(k = 2,3,\dots,2n+1)$，$\angle A'_l O' A_{l-1}' = \frac{\pi}{2n}(l = 3,4,\dots,2n+1)$且使$\angle A'_{2n+1}O'A = \frac{\theta}{2}$，如圖二十三。



圖二十三

則$S_{O'A'_aA'_{a-1}} = S_{A_{a-1}A_{a-2}A_a}(a = 3,4,\dots,2n+1)$，$S_{(O'MA'_{2n+1})} = S_{(A_{2n}CA_{2n+1})}$，$S_{(O'NA'_2)} = S_{(A_1BA_2)}$。

由前一小節知，此圓的極座標方程式為$r = 2R\cos\alpha\,(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$，且曲線$r = 2R\cos\alpha\,(-\frac{\pi}{2} \le x \le \alpha \le y \le \frac{\pi}{2})$所圍成的面積為

$R^2(y - x + \frac{1}{2}\sin 2y - \frac{1}{2}\sin 2x)$。

所以

$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + \cdots + S_{(A_{2n}CA_{2n+1})}$

$= S_{(O'NA'_2)} + S_{O'A'_4A'_3} + \cdots + S_{(O'MA'_{2n+1})}$

$$=R^2(\frac{\pi}{2n}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin(\frac{(n-1)\pi}{n}+\theta))$$

$$+R^2(\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{2}\sin(\frac{(n-2)\pi}{n}+\theta)-\frac{1}{2}\sin(\frac{(n-3)\pi}{n}+\theta))$$

$$+\cdots+R^2(\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{n\pi}{n}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{n\pi}{n}\right))$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{(n-2j)\pi}{n}+\theta\right)-\frac{1}{2}R^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\sin(\frac{(n+1-2j)\pi}{n}+\theta)$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=\frac{1}{2}R^2\pi+\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{n}+\theta\right)-\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\sin(-\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi$$

因此$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{(A_{2n}CA_{2n+1})}$為圓面積的一半，固有

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{(A_{2n}CA_{2n+1})}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+\cdots+S_{A_{2n}A_{2n-1}A_{2n+1}}$$

■

將此結果寫成以下定理 5:

定理 5 一圓O上有$2n+1(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n},A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\ldots,\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ldots, Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖二十二。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n}$ $(k=1,2,\ldots,2n-1)$。則

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{(A_{2n}CA_{2n+1})}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+\cdots+S_{A_{2n}A_{2n-1}A_{2n+1}}$$

。

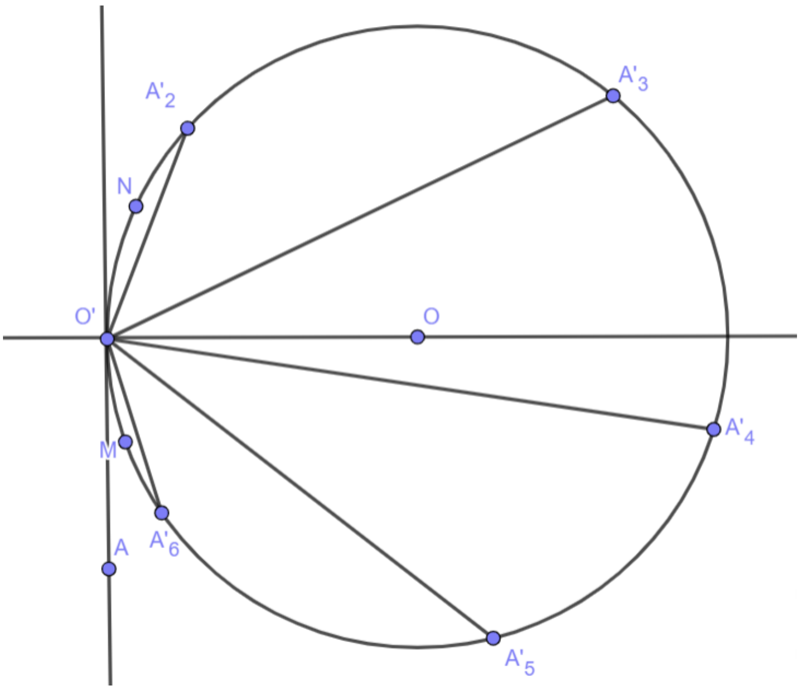
而第一小節所討論的初始問題(圓上有七個點)之面積關係及本小節所討論的圓上有九個點之面積關係，即為此定理$n=3$和$n=4$的特殊情形。

(三)圓上有偶數個點的面積關係

在上一小節中，證明了在圓上有任意奇數個點時，會有像初始問題一樣的相等面積關係。在此節中，我想討論在圓上有任意偶數個點時，是否會像有任意奇數個點一樣，有如此的面積關係。為此，先討論圓上有六個點的特殊情形。

一圓O上有六個點$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$，連成五個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_5A_6}$，形成三個 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), Z(A_3-A_4-A_5-A_6)$，如圖七，且在圖七的劣弧 A_1A_2 和 A_5A_6 上分別加上點B和點C。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{5}\ (k=1,2,3,4)$。

設 $A_5A_6=\theta(\theta<\frac{2\pi}{5})$。現在要來將圖形做變形。在極座標圖十九中，做出與原來的$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_5A_6}$等長的線段。其中$\overline{O'A'_k}=\overline{A_{k-1}A_k}(k=2,3,4,5,6)$，$\angle A'_lO'A'_{l-1}=\frac{\pi}{5}\ (l=3,4,5,6)$且使$\angle A'_6O'A=\frac{1}{2}A_5A_6=\frac{\theta}{2}(\theta<\frac{2\pi}{5})$，如圖二十四。



圖二十四

現在想要知道的是等式

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+S_{(A_5CA_6)}$$

是否成立。要討論此關係，就要計算$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}$，看它是否為圓面積的一半。

$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}$

$=S_{(O'NA'_2)}+S_{O'A'_4A'_3}+S_{O'A'_6A'_5}$

$=R^2(\frac{\pi}{5}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{10\pi}{10}-\frac{1}{2}\sin(\frac{6\pi}{10}+\theta))$

$+R^2(\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi}{10}+\theta)-\frac{1}{2}\sin(\frac{-2\pi}{10}+\theta))$

$+R^2(\frac{\pi}{5}+\frac{1}{2}\sin(\frac{-6\pi}{10}+\theta)-\frac{1}{2}\sin(\frac{-10\pi}{10}+\theta))$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$=R^2(\frac{3\pi}{5}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{-8\pi}{10}}{\sin\frac{-4\pi}{10}}\cdot\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{-12\pi}{10}}{\sin\frac{-4\pi}{10}}\cdot\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right))$

$=R^2(\frac{3\pi}{5}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right)}{\sin\frac{-4\pi}{10}}\left(\sin\frac{-8\pi}{10}-\sin\frac{-12\pi}{10}\right))$

$=R^2(\frac{3\pi}{5}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right)}{-2\sin\frac{2\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}}\left(2\cos(-\pi)\sin\frac{2\pi}{10}\right))$

$=R^2(\frac{3\pi}{5}-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right)}{2\cos\frac{2\pi}{10}})$

雖然$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}$隨著$\theta$的變動，其值不一定是圓面積的一半，但是$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}$和$S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+S_{(A_5CA_6)}$之間還是存在某種關係，值得探討。所以，再討論圓上有八個點的例子。

一圓O上有八個點$A_1,A_2,A_3,\dots,A_7,A_8$，連成七個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_7A_8}$，形成五個 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots,\ Z(A_5-A_6-A_7-A_8)$，如圖十五，且在圖十五的劣弧$A_1A_2$和$A_7A_8$上分別加上點$B$和點$C$。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{7}\ (k=1,2,\dots,6)$。

仿此小節圓上有六個點的變形方法，則有

$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+S_{A_5A_4A_6}+S_{A_7A_6A_8}$

$$=R^2\left(\frac{4\pi}{7}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sin\left(\frac{(14-8j)\pi}{14}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\sin\left(\frac{(18-8j)\pi}{14}+\theta\right)\right)$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=R^2\left(\frac{4\pi}{7}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{-12\pi}{14}}{\sin\frac{-4\pi}{14}}\cdot\sin\left(\frac{-2\pi}{10}+\theta\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{-16\pi}{14}}{\sin\frac{-4\pi}{14}}\cdot\sin\left(\frac{-2\pi}{14}+\theta\right)\right)$$

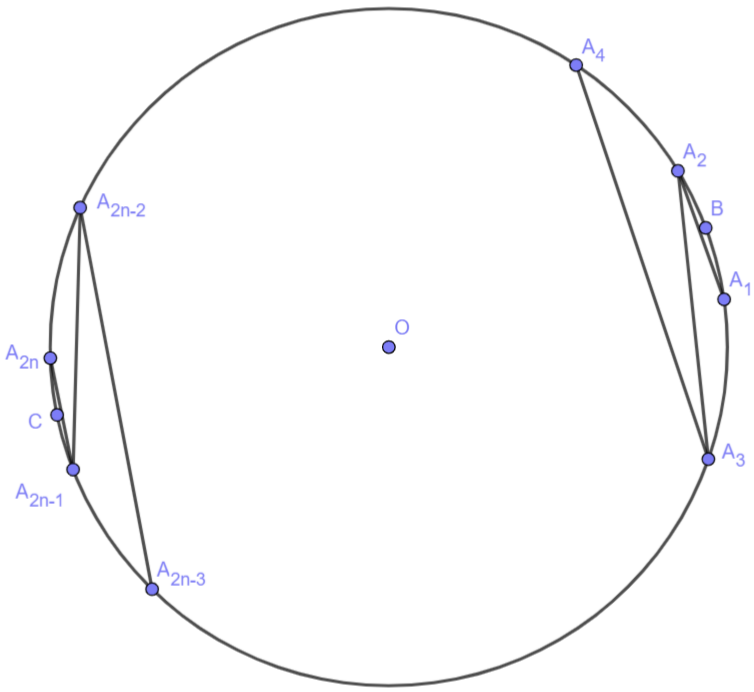
$$=R^2\left(\frac{4\pi}{7}-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\left(\frac{-2\pi}{14}+\theta\right)}{2\cos\frac{2\pi}{14}}\right)$$

從圓上有六個點、八個點的特殊情形來看，若圓上有偶數$2n(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點，則$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$似乎可以表達為$R^2\left(f(n)-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(g(n)+\theta)}{2\cos h(n)}\right)$的形式，其中$f(n), g(n), h(n)$為關於$n$的函數。因此提出以下猜測:

猜想 6 一圓O上有$2n(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots, Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖二十五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n-1}$ $(k=1,2,\dots,2n-2)$。則

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$$

的值可以表達為$R^2\left(f(n)-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(g(n)+\theta)}{2\cos h(n)}\right)$的形式，其中$f(n), g(n), h(n)$為關於$n$的函數。



圖二十五

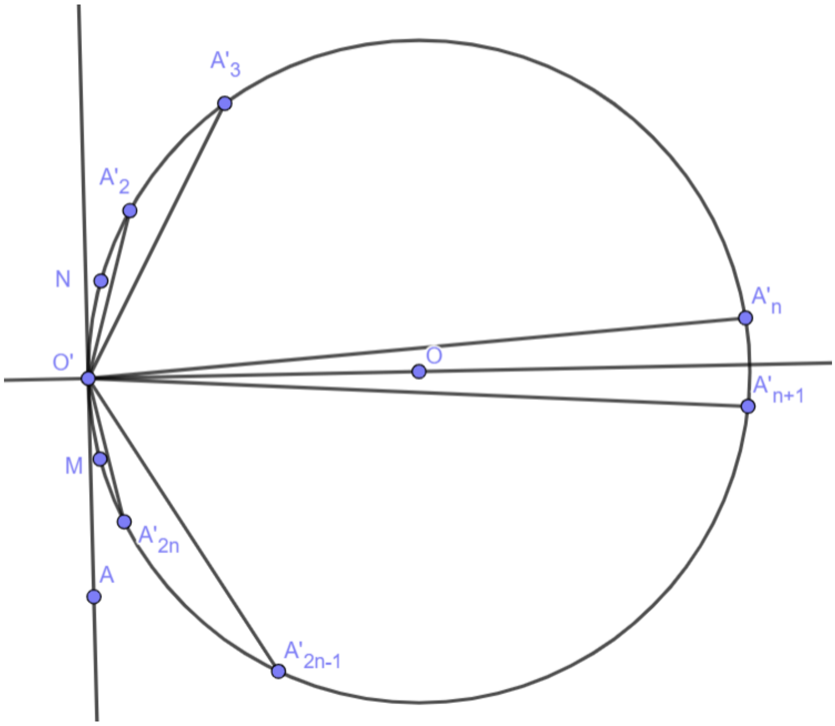
[證明]

設圖二十五圓半徑為R，且設

$A_{2n-1}A_{2n} = \theta$(若$\theta = \frac{\pi}{2n-1}$，結論顯然成立。不失一般性，設 $0 < \theta < \frac{\pi}{2n-1}$)。

仿此節前述的做法，作出與圖二十五中$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$等長的線段於圖十九的極座標中，其中$\overline{O'A'_k} = \overline{A_{k-1}A_k}(k = 2,3, \dots, 2n)$，$\angle A'_l O' A'_{l-1} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(l = 3,4, \dots, 2n)$且使$\angle A'_{2n}O'A = \frac{\theta}{2}$，如圖二十六。

則$S_{O'A'_aA'_{a-1}} = S_{A_{a-1}A_{a-2}A_a}(a = 3,4, \dots, 2n)$，$S_{(O'MA'_{2n})} = S_{(A_{2n-1}CA_{2n})}$，$S_{(O'NA'_2)} = S_{(A_1BA_2)}$。



圖二十六

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$$

$$=S_{(O'NA'_2)}+S_{O'A'_4A'_3}+\cdots+S_{O'A'_{2n}A'_{2n-1}}$$

$$=R^2\left(\frac{\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n-1}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2n-3)\pi}{2n-1}+\theta\right)\right)$$

$$+R^2\left(\frac{\pi}{2n-1}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2n-5)\pi}{2n-1}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2n-7)\pi}{2n-1}+\theta\right)\right)$$

$$+\cdots+R^2\left(\frac{\pi}{2n-1}+\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{(2n-3)\pi}{2n-1}+\theta\right)-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{(2n-1)\pi}{2n-1}+\theta\right)\right)$$

$$=R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sin(\frac{(2n-1-4j)\pi}{2n-1}+\theta)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sin(\frac{(2\,n+1-4j)\pi}{2n-1}+\theta))$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(-2n+2)\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-2\pi}{2n-1}}\cdot\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{-2n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{-2\pi}{2n-1}}\cdot\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right))$$

$$=R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)}{\sin\frac{-2\pi}{2n-1}}\left(\sin\frac{(-2n+2)\pi}{2n-1}-\sin\frac{-2n\pi}{2n-1}\right))$$

$$=R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)}{-2\sin\frac{\pi}{2n-1}\cos\frac{\pi}{2n-1}}(2\cos(-\pi)\sin\frac{\pi}{2n-1}))$$

$$=R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)}{2\cos\frac{\pi}{2n-1}})$$

所以

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$$

的值可以表達為$R^2(f(n)-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin(g(n)+\theta)}{2\cos h(n)})$的形式，其中$f(n),g(n),h(n)$為關於$n$的函數。

■

將以上結果寫成定理 6:

定理 6 一圓O(半徑為R)上有$2n(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n-1},A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\ldots,\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ldots,\ Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖二十五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n-1}\ (k=1,2,\ldots,2n-2)$且$\overset{\frown}{A_{2n-1}A_{2n}}=\theta$。則

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$$

的值為$R^2(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\theta}{2}+\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)}{2\cos\frac{\pi}{2n-1}})$。

而本小節討論的圓上有六個點及八個點的面積關係，即為此定理$n=3$及

$n=4$的特殊情形。特別注意當$\theta=\frac{\pi}{2n-1}$時，

$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$

$$=R^2\left(\frac{n\pi}{2n-1}-\frac{\frac{\pi}{2n-1}}{2}+\frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\frac{\pi}{2n-1}\right)}{2\cos\frac{\pi}{2n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}R^2\pi$$

，即

$$S_{(A_1BA_2)}+S_{A_3A_2A_4}+\cdots+S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}=S_{A_2A_1A_3}+S_{A_4A_3A_5}+\cdots+S_{(A_{2n-1}CA_{2n})}$$。

五、圓上m個點所形成 Z 字形路徑之長度k次方關係——針對m之奇偶

在前面我們探討了圓上有奇數個點以及偶數個點時，Z 字型路徑的一次方及二次方長度關係。然而，長度關係相等的漂亮結果只有在兩種情況下會發生:

1. 圓上有奇數個點且為二次方的長度關係
2. 圓上有偶數個點且為一次方的長度關係

現在，我們更好奇的是這樣的相等關係在更高次方時會不會發生，以及何時發生?由於高次方動手計算找規律不易，因此我用電腦軟體 Geogebra 來幫助計算半徑為 1 的圓的情況。

(一)圓上有奇數個點的長度k次方關係

首先探討的是圓上有奇數個點的情形。在圓上有奇數個點時，在奇數次方的情況下，長度的相等關係較不容易成立。但是在偶數次方時似乎存在長度的相等關係。然而，當超越某偶數次方時，便開始出現不相等關係。這個觀察讓我想找出圓上點個數以及長度偶數次方關係開始不相等的最小偶數次方。如下

表:

圓上點數	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
最小偶數次方	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

觀察到當圓上點個數增加時，使得長度關係開始不相等的最小偶數次方也跟著增加。而且在上面的十四個例子中是有規律的增加，當圓上有$2n+1$個點時，最小偶數次方為$2n$，其中$n=2,3,\ldots,15$。探討大於二次方的情形時，若用初始問題的餘弦定理討論，不易直接計算長度在高次方下的值。所以改用本章第二節的討論方式，將圖形變形並放在極座標上討論。在本章第二節的第二小節中，圓上有九個點情況下的$\overline{A_1A_2}$可以表為$2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{8})$。如果要計算$\overline{A_1A_2}^2$，就是計算

$$(2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{8}\right))^2=4R^2\cdot\sin^2(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi}{8})=2R^2-2R^2\cos(\theta+\frac{7\pi}{4})$$

。也就是說原來用的餘弦定理討論方式，只是此方法的一個特例。在上述計算$\overline{A_1A_2}^2$時也給我一個啟發，那就是在計算長度大於二次方的值時，我們可以使用$\sin\theta$的偶數k次方公式(即引理 3)。

現在利用本章第三節的第二小節的討論方式搭配$\sin\theta$的偶數k次方公式，來驗證圓上有九個點時，四次方的長度關係是否如電腦計算為相等關係。

$$\overline{A_1A_2}^4+\overline{A_3A_4}^4+\overline{A_5A_6}^4+\overline{A_7A_8}^4$$

$$=\sum_{j=1}^{4}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{9\pi-2j\pi}{8}))^4$$

(由引理 3　$\sin\theta$的偶數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{4}(2R)^4\cdot\frac{(-1)^2}{2^4}\cdot(2\cos\left(2\theta+\frac{9\pi-2j\pi}{2}\right)-2\binom{4}{1}\cos\left(\theta+\frac{9\pi-2j\pi}{4}\right)+\binom{4}{2})$$

(由引理 1 cos連加公式，可得下式)

$$= R^4\left(\frac{2\sin(-2\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \cos(2\theta + 2\pi) - \binom{4}{1}\frac{2\sin(-\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos(\theta + \pi) + 4 \cdot \binom{4}{2}\right)$$

$$= 24R^4$$

同理

$$\overline{A_2A_3}^4 + \overline{A_4A_5}^4 + \overline{A_6A_7}^4 + \overline{A_8A_9}^4$$

$$= \sum_{j=1}^{4}\left(2R\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{8\pi - 2j\pi}{8}\right)\right)^4$$

$$= R^4\left(\frac{2\sin(-2\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \cos\left(2\theta + \frac{3\pi}{2}\right) - \binom{4}{1}\frac{2\sin(-\pi)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \cos\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) + 4 \cdot \binom{4}{2}\right)$$

$$= 24R^4$$

所以圓上有九個點時，四次方的長度關係是相等關係。這也讓我知道可以利用此方法討論圓上有$2n+1$個點時的偶數次方長度關係。綜上討論，對於圓上有$2n+1$個點提出以下猜想:

猜想 7 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \ldots, Z(A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n} - A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \frac{\pi}{2n}$ $(i = 1,2,\ldots,2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{\pi}{n})$。則

$$\overline{A_1A_2}^k + \overline{A_3A_4}^k + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k = \overline{A_2A_3}^k + \overline{A_4A_5}^k + \cdots + \overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

，其中k為正偶數且$k \leq (2n-2)$。

[證明]

如討論猜想 3 時一樣，將圖形做變形並放到極座標上。利用引理 1 cos的

連加公式及引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式，我們有

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n+1)\pi-2j\pi}{2n}))^k$$

(由引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\cdot(2\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$+2\binom{k}{2}\cos\left(\frac{(k-4)\theta}{2}+\frac{(k-4)(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)-\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}R^k(\frac{2\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{k\pi}{2n}\right)}\cos\frac{k(\theta+\pi)}{2}$$

$$-\binom{k}{1}\frac{2\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2n}\right)}\cos\frac{(k-2)(\theta+\pi)}{2}$$

$$+\binom{k}{2}\frac{2\sin\left(-\frac{(k-4)\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-4)\pi}{2n}\right)}\cos\frac{(k-4)(\theta+\pi)}{2}-\cdots+n\cdot(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

同理，

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{2n\pi-2j\pi}{2n}))^k$$

(由引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\cdot(2\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$+2\binom{k}{2}\cos\left(\frac{(k-4)\theta}{2}+\frac{(k-4)(2n-2j)\pi}{2n}\right)-\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}R^k(\frac{2\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{k\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$-\binom{k}{1}\frac{2\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$+\binom{k}{2}\frac{2\sin\left(-\frac{(k-4)\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-4)\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{(k-4)\theta}{2}+\frac{(k-4)(n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$-\cdots+n\cdot(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

因為k, $(k-2)$, ...為偶數，所以$\sin\left(-\frac{k\pi}{2}\right), \sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2}\right)$, ...的值為零。所以當$k\le(2n-2)$時

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

。然而由上討論知，當$k=2n$時，$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$中的

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\cos(n\theta+(2n+1-2j)\pi)$$

和$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$中的

$$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\cos(n\theta+(2n-2j)\pi)$$

的值分別為$n\cos(n\theta+\pi)$和$n\cos n\theta$。對於任何的$\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{\pi}{n})$，這兩個值差一個負號。而其餘皆相等，因此此時

$$\overline{A_1A_2}^{2n}+\overline{A_3A_4}^{2n}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^{2n}\neq\overline{A_2A_3}^{2n}+\overline{A_4A_5}^{2n}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^{2n}$$

■

因此有以下定理:

定理 7 一圓O上有$2n+1(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n},A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\ldots,\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ldots,\ Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}=\frac{\pi}{2n}\ (i=1,2,\ldots,2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1}=\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{\pi}{n})$。則

$$\overline{A_1A_2}^{k}+\overline{A_3A_4}^{k}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^{k}=\overline{A_2A_3}^{k}+\overline{A_4A_5}^{k}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^{k}$$

，其中k為正偶數且$k\leq(2n-2)$。$k=2n$時，上式不成立。

所以定理 1 為定理 7 的一個特例。

現在也想知道如果以上討論的圓上有奇數個點而且偶數次方k超過$(2n-2)$時，是否會存在長度的相等關係以及何時存在?在定理的討論中，次方$k=2n$時在$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$以及$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)$不相等，而且只差一個負號。如果$2n<k\leq(4n-2)$，則在計算$\overline{A_1A_2}^{k}+\overline{A_3A_4}^{k}+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^{k}$過程中的$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)(m=(2n+2),\ (2n+4),\ldots,k)$之值皆為零。同理，在計算$\overline{A_2A_3}^{k}+\overline{A_4A_5}^{k}+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^{k}$過程中的

$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{m\theta}{2}+\frac{m(2n-2j)\pi}{2n}\right)(m=(2n+2),\ (2n+4),\ldots,k)$之值皆為零。因此若$2n<k\leq(4n-2)$，則在計算過程中，只有在$k=2n$時

$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$以及$\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)$不相等。我們可以利用這樣的想法發展圓上有奇數個點而且偶數次方k超過$(2n-2)$時相等關係成立的

條件。為了方便討論，我們將利用定義 3 中的a_m，b_m，以及引理 5(a_m及b_m的性質)。

首先觀察到:

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n+1)\pi-2j\pi}{2n}))^k$$

(由引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\cdot(2\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)+\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k(2\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n+1-2j)\pi}{2n}\right)+\cdots)$$

$$+(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k\cdot(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot\binom{k}{\frac{k}{2}}\cdot n$$

(由定義 3，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k\left(2a_k-2\binom{k}{1}a_{k-2}+\cdots\right)+nR^k\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}R^k\sum_{u=0}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^u\cdot 2\binom{k}{u}a_{k-2u}+nR^k\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

以及

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n}))^k$$

(由引理 3 $\sin\theta$的偶數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\cdot(2\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n}\right)+\cdots+(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}})$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k(2\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n}\right)$$

$$-2\binom{k}{1}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n}\right)+\cdots)$$

$$+(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k\cdot(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot\binom{k}{\frac{k}{2}}\cdot n$$

(由定義 3，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}\cdot R^k\left(2b_k-2\binom{k}{1}b_{k-2}+\cdots\right)+nR^k\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

$$=(-1)^{\frac{k}{2}}R^k\sum_{u=0}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^u\cdot 2\binom{k}{u}b_{k-2u}+nR^k\binom{k}{\frac{k}{2}}$$

如果$k=2sn$且s是一個正偶數，則

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

$$=(-1)^{\frac{2sn}{2}}R^{2sn}\sum_{u=0}^{sn-1}(-1)^u\cdot 2\binom{2sn}{u}a_{2sn-2u}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5(i)，可得下式)

$$=R^{2sn}\sum_{u=0}^{s-1}(-1)^{un}\cdot 2\binom{2sn}{un}a_{2sn-2un}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

$$= R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}a_{2(2v-1)n}$$

$$+R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}a_{4wn}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

以及

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

$$=(-1)^{\frac{2sn}{2}}R^{2sn}\sum_{u=0}^{sn-1}(-1)^u\cdot 2\binom{2sn}{u}b_{2sn-2u}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5(i)，可得下式)

$$= R^{2sn}\sum_{u=0}^{s-1}(-1)^{un}\cdot 2\binom{2sn}{un}b_{2sn-2un}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

$$= R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}b_{2(2v-1)n}$$

$$+R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}b_{4wn}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5(ii), (iii)，可得下式)

$$= R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}(-a_{2(2v-1)n})$$

$$+R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}a_{4wn}+R^{2sn}\cdot n\cdot\binom{2sn}{sn}$$

所以當圓上有$2n+1$個點且$k=2sn$，s是一個正偶數，則

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

的充要條件為

$$\sum_{v=1}^{\frac{s}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}a_{2(2v-1)n}=0$$

，即

$$\sum_{v=1}^{\frac{k}{4n}}\binom{k}{\frac{k}{2}-(2v-1)n}\cos(2v-1)n\theta=0$$

。

如果$k=2sn$且s是一個正奇數，則

$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$

$$=(-1)^{\frac{2sn}{2}}R^{2sn}\sum_{u=0}^{sn-1}(-1)^u\cdot 2\binom{2sn}{u}a_{2sn-2u}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5(i)，可得下式)

$$=(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{u=0}^{s-1}(-1)^{un}\cdot 2\binom{2sn}{un}a_{2sn-2un}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

$$=(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s+1}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}a_{2(2v-1)n}$$

$$+(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}a_{4wn}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

以及

$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$

$$=(-1)^{\frac{2sn}{2}}R^{2sn}\sum_{u=0}^{sn-1}(-1)^u\cdot 2\binom{2sn}{u}b_{2sn-2u}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5(i)，可得下式)

$$=(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{u=0}^{s-1}(-1)^{un}\cdot 2\binom{2sn}{un}b_{2sn-2un}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

$$=(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s+1}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}b_{2(2v-1)n}$$

$$+(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}b_{4wn}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

(由引理5$(ii),(iii)$，可得下式)

$$=(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{v=1}^{\frac{s+1}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}(-a_{2(2v-1)n})$$

$$+(-1)^{sn}R^{2sn}\sum_{w=1}^{\frac{s-1}{2}}(-1)^{sn-2wn}\cdot 2\binom{2sn}{sn-2wn}a_{4wn}+nR^{2sn}\binom{2sn}{sn}$$

所以當圓上有$2n+1$個點且$k=2sn$，s是一個正奇數，則

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

的充要條件為

$$\sum_{v=1}^{\frac{s+1}{2}}(-1)^{sn-(2v-1)n}\cdot 2\binom{2sn}{sn-(2v-1)n}a_{2(2v-1)n}=0$$

，即

$$\sum_{v=1}^{\frac{k}{4n}+\frac{1}{2}}\binom{k}{\frac{k}{2}-(2v-1)n}\cos(2v-1)n\theta=0$$

。

(二)圓上有偶數個點的長度$\boldsymbol{k}$次方關係

在上一小節中透過電腦輔助計算，我們察覺到當圓上有$2n+1$個點且正偶數k小餘等餘$2n-2$時，長度的k次方會有相等關係。並且在該小節論證了此一觀察。本小節將探討圓上有$2n$個點的時候，長度的k次方關係在何種情況下會成立。在提出猜測前，用電腦輔助計算圓上有偶數個點的長度k次方關係的幾個例子。觀察到當偶數次方時相等關係較不容易成立，而當奇數次方時相等關係成立，直到某一特定次方時開始有不相等關係出現。底下列出觀察到的圓上點個數以及長度奇數次方關係開始不相等的最小奇數次方:

圓上點數	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
最小奇數次方	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29

觀察上表發現當圓上有$2n$個點時，長度奇數次方關係開始不相等的最小奇數次方為$2n-1$，現在利用本章第二節的第三小節的討論方式搭配$\sin\theta$的奇數k次方公式，驗證當圓上有八個點時，長度的五次方關係是否像電腦計算的結果為相等關係。

$$\overline{A_1A_2}^5+\overline{A_3A_4}^5+\overline{A_5A_6}^5+\overline{A_7A_8}^5$$

$$=\sum_{j=1}^{4}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi-2j\pi}{7}))^5$$

(由引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{4}(2R)^5\cdot\frac{(-1)^4}{2^4}(\sin\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{40\pi-10j\pi}{7}\right)-5\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{24\pi-6j\pi}{7}\right)$$

$$+10\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{8\pi-2j\pi}{7}))$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=2R^5(\frac{\sin\frac{-20\pi}{7}}{\sin\frac{-5\pi}{7}}\sin\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{15\pi}{7}\right)-\frac{5\sin\frac{-12\pi}{7}}{\sin\frac{-3\pi}{7}}\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{7}\right)$$

$$+\frac{10\sin\frac{-4\pi}{7}}{\sin\frac{-\pi}{7}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{7}\right))$$

同理，

$$\overline{A_2A_3}^5+\overline{A_4A_5}^5+\overline{A_6A_7}^5$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi-2j\pi}{7}))^5$$

$$=\sum_{j=1}^{3}(2R)^5\cdot\frac{(-1)^2}{2^4}(\sin\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{35\pi-10j\pi}{7}\right)-5\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{21\pi-6j\pi}{7}\right)$$

$$+10\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{7\pi-2j\pi}{7}))$$

$$=2R^5(\frac{\sin\frac{-15\pi}{7}}{\sin\frac{-5\pi}{7}}\sin\left(\frac{5\theta}{2}+\frac{15\pi}{7}\right)-\frac{5\sin\frac{-9\pi}{7}}{\sin\frac{-3\pi}{7}}\sin\left(\frac{3\theta}{2}+\frac{9\pi}{7}\right)$$

$$+\frac{10\sin\frac{-3\pi}{7}}{\sin\frac{-\pi}{7}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{7}\right))$$

所以圓上有八個點的五次方長度關係為相等關係。現在由以上的方法討論圓上有$2n$個點的奇數次方關係。綜上討論，提出以下猜想:

猜想 8 一圓O上有$2n(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \dots,\ Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}=\frac{\pi}{2n-1}\ (i=1,2,\dots,2n-2)$且$\overset{\frown}{A_{2n-1}A_{2n}}=\theta(\theta\in\mathbb{R}, 0<\theta<\frac{2\pi}{2n-1})$。則

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

，其中k為正奇數且$k\leq(2n-3)$。

[證明]

如討論猜想 4 時一樣，把圖形變形並且放到極座標上。利用引理 2 $\sin\theta$連加公式以及引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，我們有

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n-1}))^k$$

(由引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot(\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$-\binom{k}{1}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n-1}\right))$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k(\frac{\sin\left(-\frac{kn\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{k\pi}{2n-1}\right)}\sin(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(n-1)\pi}{2n-1})$$

$$-\binom{k}{1}\frac{\sin\left(-\frac{(k-2)n\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2n-1}\right)}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(n-1)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\frac{\sin\left(-\frac{n\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2n-1}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right))$$

同理，

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1-2j)\pi}{2n-1}))^k$$

(由引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot(\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$-\binom{k}{1}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right))$$

(由引理 2 sin連加公式，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k(\frac{\sin\left(-\frac{k(n-1)\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{k\pi}{2n-1}\right)}\sin(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(n-1)\pi}{2n-1})$$

$$-\binom{k}{1}\frac{\sin\left(-\frac{(k-2)(n-1)\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{(k-2)\pi}{2n-1}\right)}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(n-1)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\frac{\sin\left(-\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2n-1}\right)}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(n-1)\pi}{2n-1}\right))$$

因為$\sin\left(-\frac{kn\pi}{2n-1}\right)=\sin\left(-\frac{k(n-1)\pi}{2n-1}\right),\left(-\frac{(k-2)n\pi}{2n-1}\right)=\sin\left(-\frac{(k-2)(n-1)\pi}{2n-1}\right),\ldots$。所以對所有正奇數$k\leq(2n-3)$，有

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

。但是當$k=2n-1$時，$\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)=n\sin\frac{2n-1}{2}\theta$且

$\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)=-(n-1)\sin\frac{2n-1}{2}\theta$。所以當$k=2n-1$時，對於任意的$n\geq 2$和$0<\theta<\frac{2\pi}{2n-1}$

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

不成立。

■

因此有以下定理:

定理 8 一圓O上有$2n(n\geq 2,n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\ldots,A_{2n-1},A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\ldots,\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4),Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\ldots,\ Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}=\frac{\pi}{2n-1}$ $(k=1,2,\ldots,2n-2)$且$A_{2n-1}A_{2n}=\theta(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{2\pi}{2n-1})$。則

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k=\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

，其中k為正奇數且$k\leq(2n-3)$。$k=2n-1$時，上式不成立。

所以定理 4 為定理 8 的一個特例。

在定理 8 的論證中，觀察到當奇數$k \leq (2n-3)$時，$\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)=\sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$，而當$k=2n-1$時，此相等關係則不一定存在。因此研究奇數$k$對於$\sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$及$\sum_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$關係的影響將有助於研究圓上有奇數個點之長度$k$次方$(k>(2n-1))$的相等關係。

現在利用符號c_m，d_m來討論當圓上有偶數個點的奇數k次方關係。首先，以c_m，d_m來表示長度k次方和:

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n-1}))^k$$

(由引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot(\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$-\binom{k}{1}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n-1}\right))$$

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k(\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$-\binom{k}{1}\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$+\cdots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-2j)\pi}{2n-1}\right))$$

(由定義 4，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k\left(c_k-\binom{k}{1}c_{k-2}+\cdots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}c_1\right)$$

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k\sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^u\binom{k}{u}c_{k-2u}$$

以及

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\left(2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)\right)^k$$

(由引理 4 $\sin\theta$的奇數k次方公式，可得下式)

$$=\sum_{j=1}^{n-1}(2R)^k\cdot\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{2^{k-1}}\cdot\left(\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)\right.$$

$$-\binom{k}{1}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)+\cdots$$

$$\left.+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)\right)$$

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{k(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)\right.$$

$$-\binom{k}{1}\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{(k-2)\theta}{2}+\frac{(k-2)(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}\sum_{j=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1-2j)\pi}{2n-1}\right)\right)$$

(由定義 4，可得下式)

$$=(-1)^{\frac{k-1}{2}}2R^k\left(d_k-\binom{k}{1}d_{k-2}+\cdots+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{k}{\frac{k-1}{2}}d_1\right)$$

$$= (-1)^{\frac{k-1}{2}} 2R^k \sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^u \binom{k}{u} d_{k-2u}$$

由定理 8 知道，當圓上有$2n$個點時長度的$(2n-1)$次方相等關係不一定成立。所以假設$k=(2s+1)(2n-1)$，s為自然數。因此，奇數k次方相等關係的充要條件為

$$\sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^u \binom{k}{u} c_{k-2u} = \sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^u \binom{k}{u} d_{k-2u} \dots\dots (\mathrm{I})$$

由引理 6(c_m及d_m的性質)知，兩級數$\sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^u \binom{k}{u} c_{k-2u}$以及$\sum_{u=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^u \binom{k}{u} d_{k-2u}$的第$(k-2u)$項，只有在$(k-2u)$為$(2n-1)$的奇數倍時，$c_{k-2u}$及$d_{k-2u}$才不一樣。因此方程式(I)等價於下列方程式(II)。

$$\sum_{v=0}^{s} (-1)^{v(2n-1)} \binom{k}{v(2n-1)} c_{k-2v(2n-1)}$$

$$= \sum_{v=0}^{s} (-1)^{v(2n-1)} \binom{k}{v(2n-1)} d_{k-2v(2n-1)} \dots\dots (\mathrm{II})$$

化簡(II):

$$\sum_{v=0}^{s} (-1)^{v(2n-1)} \binom{k}{v(2n-1)} (c_{k-2v(2n-1)} - d_{k-2v(2n-1)}) = 0$$

(由引理 6(ii)，可得下式)

$$\sum_{v=0}^{s} (-1)^{v(2n-1)} \binom{k}{v(2n-1)} \left((2n+1)\sin\frac{\big(k-2v(2n-1)\big)\theta}{2}\right) = 0$$

所以

$$\sum_{v=0}^{s} (-1)^{v(2n-1)} \binom{k}{v(2n-1)} \sin\frac{\big(k-2v(2n-1)\big)\theta}{2} = 0$$

上是即為當圓上有偶數個點($2n$個點)的奇數k次方關係有相等關係的充要條件。($k=(2s+1)(2n-1)$)

肆、 研究結果

在「三、研究過程與方法」的討論中，得出了圓上有$2n+1$個點和$2n$個點關於Z字形路徑的面積與長度關係。整理如下:

定理 1 一圓O上有$2n+1(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\dots,A_{2n},A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots,Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n}$ $(k=1,2,\dots,2n-1)$。則

$$\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2=\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n}A_{2n+1}}^2$$

，且等式兩端之值為$2nR^2$。

定理 2 一圓O上有$2n(n\geq 2, n\in\mathbb{N})$個點$A_1,A_2,A_3,\dots,A_{2n-1},A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2},\overline{A_2A_3},\dots,\overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5),\dots,Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}=\frac{\pi}{2n-1}$ $(k=1,2,\dots,2n-2)$且$\overset{\frown}{A_1A_2}=\theta\left(\theta\in\mathbb{R},0<\theta<\frac{2\pi}{2n-1}\right)$。則

$$\left(\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_3A_4}^2+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^2\right)-\left(\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_4A_5}^2+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^2\right)$$

的值為$2R^2+4R^2\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n-1}}{\sin\frac{2\pi}{2n-1}}\cdot\cos\left(\theta+\frac{2(n-1)\pi}{2n-1}\right)$ 。

定理 3 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \ldots, Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n}$ $(k = 1,2,\ldots,2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{\pi}{n})$。則

$$(\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}) - (\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n}A_{2n+1}})$$

的值為$2R \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right)}{\cos\frac{\pi}{4n}}$。

定理 4 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \ldots, Z(A_{2n-3}-A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(k = 1,2,\ldots,2n-2)$且$A_{2n-1}A_{2n} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。則

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = \overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}$$

且等號兩邊的值為$2R \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2n-1}}{\sin\frac{\pi}{2n-1}} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2n-1})$。

定理 5 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1-A_2-A_3-A_4), Z(A_2-A_3-A_4-A_5), \ldots, Z(A_{2n-2}-A_{2n-1}-A_{2n}-A_{2n+1})$，如圖二十二。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n}$ $(k = 1,2,\ldots,2n-1)$。則

$$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + \cdots + S_{(A_{2n}CA_{2n+1})} = S_{A_2A_1A_3} + S_{A_4A_3A_5} + \cdots + S_{A_{2n}A_{2n-1}A_{2n+1}}$$

。

定理 6 一圓O(半徑為R)上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \ldots, Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖二十五。其中$\angle A_kA_{k+1}A_{k+2} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(k = 1,2, \ldots, 2n-2)$且$A_{2n-1}A_{2n} = \theta$。則

$$S_{(A_1BA_2)} + S_{A_3A_2A_4} + \cdots + S_{A_{2n-1}A_{2n-2}A_{2n}}$$

的值為$R^2(\frac{n\pi}{2n-1} - \frac{\theta}{2} + \frac{\sin\left(\frac{-\pi}{2n-1}+\theta\right)}{2\cos\frac{\pi}{2n-1}})$。

定理 7 一圓O上有$2n+1(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n}, A_{2n+1}$，連成$2n$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n}A_{2n+1}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \ldots, Z(A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n} - A_{2n+1})$，如圖五。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \frac{\pi}{2n}$ $(i = 1,2, \ldots, 2n-1)$且$A_{2n}A_{2n+1} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{\pi}{n})$。則

$$\overline{A_1A_2}^k + \overline{A_3A_4}^k + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k = \overline{A_2A_3}^k + \overline{A_4A_5}^k + \cdots + \overline{A_{2n}A_{2n+1}}^k$$

，其中k為正偶數且$k \leq (2n-2)$。$k = 2n$時，上式不成立。

定理 8 一圓O上有$2n(n \geq 2, n \in \mathbb{N})$個點$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n}$，連成$2n-1$個線段$\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{2n-1}A_{2n}}$，形成一系列的 Z 字形路徑$Z(A_1 - A_2 - A_3 - A_4), Z(A_2 - A_3 - A_4 - A_5), \ldots, Z(A_{2n-3} - A_{2n-2} - A_{2n-1} - A_{2n})$，如圖八。其中$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \frac{\pi}{2n-1}$ $(i = 1,2, \ldots, 2n-2)$且$A_{2n-1}A_{2n} = \theta(\theta \in \mathbb{R}, 0 < \theta < \frac{2\pi}{2n-1})$。則

$$\overline{A_1A_2}^k + \overline{A_3A_4}^k + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k = \overline{A_2A_3}^k + \overline{A_4A_5}^k + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

，其中k為正奇數且$k \leq (2n-3)$。$k = 2n-1$時，上式不成立。

伍、 結論與討論

一、結論

在研究過程中，主要是利用三角級數求和公式，輔以圖形變形和極座標。從初始問題圓上七個點的情形，看見圓上關於Z字形路徑的面積與二次方長度有漂亮的相等關係，進而將此關係推廣到圓上有$2n+1$個點的情形(定理 1 及定理 5)。然而，到了圓上有$2n$個點時，無論是面積或是二次方長度，此漂亮的相等關係便不存在(定理 2 及定理 6)。但是發現圓上有$2n$個點時，一次方長度有相等關係(定理 4)。最後討論長度的k次方關係。在圓上有$2n+1$個點時，長度的k次方有相等關係，其中$k \leq (2n-2)$且k為正偶數。但是當$k=2n$時，此相等關係不一定成立。而當$k \geq 2n$且k為偶數，討論k次方有相等關係的充要條件。在圓上有$2n$個點時，長度的k次方有相等關係，其中$k \leq (2n-3)$且k為正奇數。但是當$k=2n-1$時，此相等關係不一定成立。當$k \geq 3(2n-1)$且k為奇數，求出長度k次方有相等關係的充要條件。在討論長度k次方的長度相等關係後，得出定理 7 及定理 8，且注意到定理 1 為定理 7 之特例，定理 4 為定理 8 之特例。

二、討論

目前的Z字形路徑只局限於特定角度，且長度只討論特定次方，甚至只在圓上討論。然而此問題應有更多的發展可能，因此有以下未來將繼續研究的目標:

1. 在圓上給定一定數量的點，探討不同角度所形成之 Z 字形路徑長度以及 Z 字形路徑所分割的面積關係。
2. Z 字形路徑之弦長度非整數次方和之等量關係。

陸、參考文獻

[1]James Stewart,Daniel Clegg,Saleem Watson(2020).*Calculus:Early Transcendentals*(ninth edition).Ingram International Inc.

[2]常庚哲(2001)。**神奇的複數—如何利用複數解中學數學難題**。九章出版社。

[3]姚任之、郭忠勝(1996)。**微積分(上)**。三民書局股份有限公司。

[4]姚任之、郭忠勝(1997)。**微積分(下)**。三民書局股份有限公司。

[5]Liong-shin Hahn. (2011). Honsberger Revisited: *Mathematical Gems Polished*. National Taiwan University Press.

附錄

在此研究報告「圓上m個點所形成 Z 字形路徑之長度k次方關係——針對m之奇偶」中提到能利用電腦檢驗圓上 Z 字形路徑之長度k次方何時有相等關係。此附錄將闡述如何利用 Geogebra(版本:6.0.755.0)檢驗，以圓上有偶數$(2n)$個點為例。

第一部分:在$x-y$平面上建構出所需的幾何物件

- **輸入「O=Intersect(x 軸,y 軸)」以及「c: Circle(O,1)」**

  可以得到以原點為中心的單位圓。

- **輸入「P=Point(c)」以及「A=Point(c)」**

  在圓上製造兩點P, A。$\overline{PA}$可以做為 Z 字形路徑的起始線段。

- **輸入「n」**

  因為圓上有$2n$個點，所以輸入「n」，得到數值滑桿n來控制單位圓上點的個數。可以在「n」設定中的「滑桿」設定數值n的最大、最小值以及增加量。

- **輸入「S1=Sequence(Rotate(P,- k ((2π)/(2 n-1)),O),k,1,n-1)」**

  當圓上有$2n$個點時，除了一系列 Z 字形路徑的頭尾兩線段頂點以外，其餘相鄰兩點所形成之劣弧對的圓心角為$\frac{2\pi}{2n-1}$。輸入點序列 S1，可得以P為起始點，在圓周逆時針方向上相鄰兩點所形成之劣弧對的圓心角為$\frac{2\pi}{2n-1}$的n個點。

- **輸入「S2=Sequence(Rotate(A, k ((2π)/(2 n-1)),O),k,1,n-1)」**

  輸入點序列 S2，得到以A為起始點，在圓周順時針方向上相鄰兩點圓心角

為$\frac{2\pi}{2n-1}$的n個點。

- 輸入「**S3=Sequence(Segment(Element(S2,k),Element(S1,k+1)),k,1,n-2)**」、

  「**S4=Sequence(Segment(Element(S2,k),Element(S1,k)),k,1,n-1)**」、

  「**f=Segment(P,A)**」以及「**g=Segment(Element(S1,1),A)**」。

  將圓上的$2n$個點連成 Z 字形路徑。

第二部分:分別計算兩弦線段的長度k次方和以檢驗k次方和之相等關係

- 輸入「$\boldsymbol{k}$」

  k為弦線段的次方數。在輸入區輸入「k」以製造數值滑桿，可以在「k」設定中的「滑桿」設定數值k的最大、最小值以及增加量。

- 輸入「**a=f^(k)+Sum(S4^(k))**」

  計算

$$\overline{A_1A_2}^k+\overline{A_3A_4}^k+\cdots+\overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k$$

，此值為 a。

- 輸入「**b=g^(k)+Sum(S3^(k))**」

  計算

$$\overline{A_2A_3}^k+\overline{A_4A_5}^k+\cdots+\overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

，此值為 b。

調整P,A使得$PA<\frac{2\pi}{2n-1}$。比較 a, b 之值即可觀察出當k為奇數且

$k \leq (2n-3)$時，有

$$\overline{A_1A_2}^k + \overline{A_3A_4}^k + \cdots + \overline{A_{2n-1}A_{2n}}^k = \overline{A_2A_3}^k + \overline{A_4A_5}^k + \cdots + \overline{A_{2n-2}A_{2n-1}}^k$$

【評語】010002

本作品考慮給定圓上以 z 字形路徑切出的線段長的和以及圍成的面積關係，利用組合與積分將問題轉為代數與三角問題，得到關於高次方等式和的簡潔結果。作品的呈現和證明都非常清晰有條理，是一個不錯的科展作品。後續可以考慮是否在哪些更高的次方有機會成立交錯和，是否有其他的情形可以有類似的性質，以及利用其他的工具(如複數等)加以處理，使得作品更加豐富。