

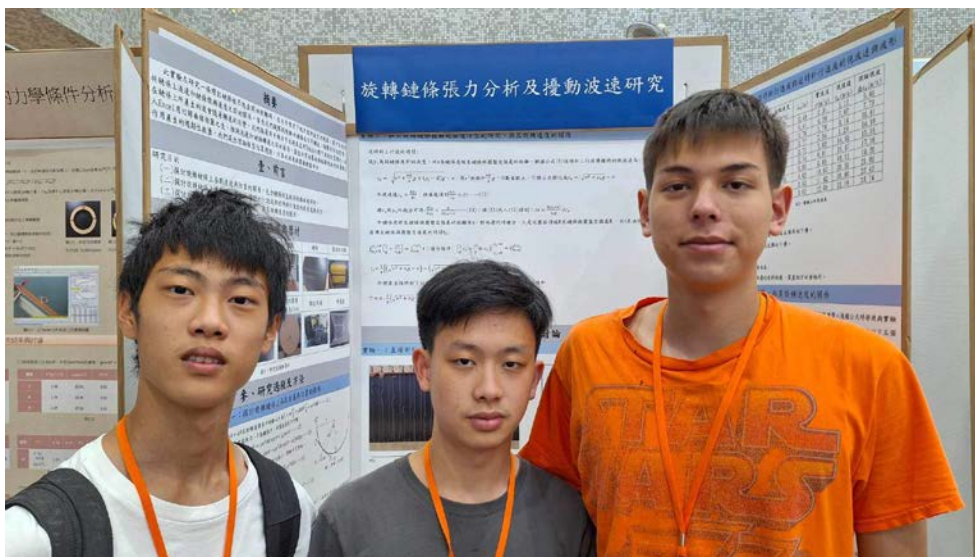
2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	160030
參展科別	物理與天文學
作品名稱	旋轉鏈條張力分析及擾動波速研究
得獎獎項	三等獎

就讀學校	國立臺灣師範大學附屬高級中學
指導教師	高銘宏
作者姓名	胡哲瀚 高恩賢 林榆浩

關鍵詞	<u>旋轉鏈條、鏈條上的擾動波、Walking Chain</u>
-----	-----------------------------------

作者簡介



我們是胡哲瀚、高恩賢、林榆浩，目前就讀師大附中數理資優班三年級，我們對物理有濃厚的興趣，並著手研究轉動鏈條的有趣現象。過程中我們面臨過各種難題，包括器具的準備，調控，到雷射切割機的操作。讓我們不僅在研究中增進學科研究的能力，更學會解決問題與學習新事物的能力，相信這些研究帶給我們不少成長與收穫。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：北區

科別：物理與天文學科

作品名稱：旋轉鏈條張力分析及擾動波速研究

關鍵詞：旋轉鏈條、鏈條上的擾動波、Walking Chain

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

摘要

此實驗在研究一條環狀鏈條被吊起並開始旋轉時，在不同轉速下敲擊後所產生擾動波的現象。其中主要分析鏈條上波速和鏈條旋轉速度之間的關係。首先我們利用雷射切割機自製轉盤，並觀察到旋轉鏈條在不同轉速、敲擊不同位置時，在鏈條上所產生的波。我們接著用手機拍下此現象並用 Tracker 標記波的位置變化，放入 Excel 用回歸分析作圖之後，推測波速和鏈條轉速之間的關係。我們接著研究金屬鏈條碰觸地面受到摩擦力作用產生的週期性振盪，我們提出理論模型並估算週期，計算的結果與實驗數據吻合。最後研究旋轉鏈條被挑出圓盤後在地面移動的情形，分析移動距離、移動時間與轉速之間的關係。

Abstract

This experiment investigates the phenomenon of perturbation waves generated when a circular chain is suspended and begins to rotate, specifically when it is struck while rotating at different speeds. The main focus is on analyzing the relationship between the speed in which the wave travels along the chain and the chain's rotational speed. First, we used a laser cutter to create a custom turntable and observed the waves produced on the rotating chain at different speeds and strike points. Following that, we recorded the phenomenon using a mobile phone, marked the wave position changes with Tracker software, and plotted the data in Excel for regression analysis to infer the relationship between wave speed and rotational speed. We then studied the periodic oscillation caused by the frictional force when the metal chain touches the ground, proposed a theoretical model to estimate the period, and found that the calculated results matched the experimental data. Finally, we examined the movement of the rotating chain after it was nudged off the turntable and moved across the ground, analyzing the relationship between the distance traveled, travel time, and rotational speed.

壹、研究動機

金屬鏈條有許多有趣的物理現象，最著名的現象為珠鏈噴泉；此外利用馬達與轉盤帶動環狀的金屬鏈條旋轉，也會產生許多不同的現象，例如將穩定旋轉的金屬鏈條從轉盤中挑起，鏈條與地面碰撞後可以行走一段距離，網路上的影片稱為 Walking Chain。

除了利用馬達與轉盤帶動金屬鏈條，也有研究利用馬達與轉盤帶動繩子，發現繩子可以懸浮在空中，此一現象稱為弦射器(String Shooter)。我們將繩子改為鏈條，討論鏈條在旋轉過程中的各種現象，並且利用相關理論分析其物理原理。

貳、研究目的及研究問題

- (一)探討旋轉鏈條上各點波速與位置的關係，包含鏈條的直線部份與曲線部份。
- (二)探討旋轉鏈條上擾動時，產生的順時針行進波與逆時針行進波的視波速與波形。
- (三)探討旋轉鏈條接觸地面後浮空的時間，與其旋轉速度的關係。
- (四)探討旋轉鏈條被挑出圓盤後，在地面運動的情形。

文獻探討

垂直掛起的金屬鏈條有許多特別的物理現象，在 2018 年的論文<A walking roller chain>(Grgur Pallo, Luka Bakrač, Aleksandar Opančar, 2018) 中，討論了鏈條在地面上行走的現象：論文中先將鏈條垂直掛起並利用馬達與轉盤讓鏈條旋轉，再將鏈條挑起離開轉盤，發現鏈條與地面的碰撞會讓鏈條行走一段距離。論文中建立了二維模型並利用數值計算模擬，再與實驗結果進行比較。

另一個類似的物理現象稱為弦射器(String Shooter)，弦射器是利用兩個旋轉的轉盤將環形的繩子射出，發現繩子維持固定的形狀並且懸浮在空中。在 2023 年的論文<Physics of the String Shooter>(Karl Mamola, 2023)中分析了弦射器上作用力，包含重力、空氣阻力以及弦射器與繩子摩擦力，利用移動平衡與轉動平衡進行計算，比較有趣的發現是重力的力矩與空氣阻力的力矩等大反向，這是繩子可以懸浮在空中的主要原因。

有關於弦射器的另一篇論文是 2019 年的<Propelled Strings: Rising from Friction>(Nicolas Taberlet, Jérémy Ferrand, Nicolas Plihon, 2019)，這篇論文比較廣泛的討論利用馬達與轉盤旋轉環形繩子的各種現象，包括在旋轉速度較低時繩子的形狀、旋轉速度較高時繩子懸浮到接近水平的高度、敲擊繩子在繩上順時針傳遞與逆時針傳遞的擾動波，並且利用理論分析與數值模擬進行研究，再與實驗數據進行比較。

在有關於弦射器的兩篇論文中，由於他們所使用的繩子線密度較低，故容易產生懸浮的現象；我們將繩子改成線密度較高的金屬鏈條，仍使用馬達與轉盤帶動金屬鏈條旋轉，預定討論在重力影響較大的情況下，金屬鏈條是否仍有類似於弦射器的現象，以及是否出現獨特的現象。

參、研究設計研究設計

一、研究設備與器材

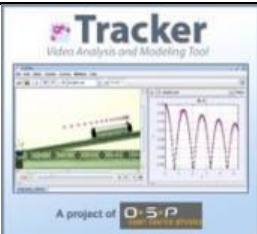
		
Excel	RDworks	Rhino
		
Tracker	尺(100cm)	手機(攝影用)
		
手機架	鏈條	雷射切割機
		
雷射的圓盤 (直徑為 15cm)	調速馬達	馬達盒

表 1、實驗器材(註:自行拍攝與程式截圖)

二、實驗裝置架設圖



圖 1-1 和 1-2、實驗裝置架設圖，側視圖與正視圖(註:自行拍攝)

三、實驗一：探討旋轉鏈條上各點波速與位置的關係

(一)實驗一的第一部份：馬達變速器刻度與金屬鏈條轉速的關係

- 1、實驗設計：變速器上由 LOW 到 HIGH 將刻度標為 0 到 10 共 11 種刻度，並測量各刻度下的金屬鏈條的轉速，後續實驗中的轉速以此為標準，如圖 2 所示。



圖 2、變速器的 11 種刻度(自行拍攝)

2、實驗步驟：

- (1) 將馬達架設到高處，並且將圓盤放上馬達上，標示圓盤上的一條半徑。
- (2) 架設攝影器材，確定能錄到圓盤。
- (3) 錄製圓盤旋轉的影片。
- (4) 以逐幀撥放器計算圓盤的角速度。
- (5) 調整不同刻度，重複步驟(1)到步驟(4)；整理不同刻度與圓盤轉速的關係。

(二)實驗一的第二部份：直線部份波速與位置的關係

1、實驗理論：

在金屬鏈條左方產生擾動，測量逆時針行進波的速度變化，經由波速求出上下兩點的繩張力差，我們推測此段繩張力差即為此段金屬鏈條的重量，比較兩者的差異。

考慮繩上波速為 c 、線密度為 μ 、某一位置的繩張力為 T ，三者之間的關係可以表示如下：

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \dots \dots \dots (1)$$

當敲擊鏈條時所產生的波在某點 n 時，其波速為 c_n 。但因波的傳播方向與鏈條旋轉方向相反，所以觀察到的視波速為 $c_{vn} = c_n - v$ ，其中 v 為金屬鏈條移動速度。在金屬鏈條直線部份取兩點 P_1 與 P_2 ，如圖 3 所示，並列出兩點的視波速 c_{v1} 和 c_{v2} ，則可得：

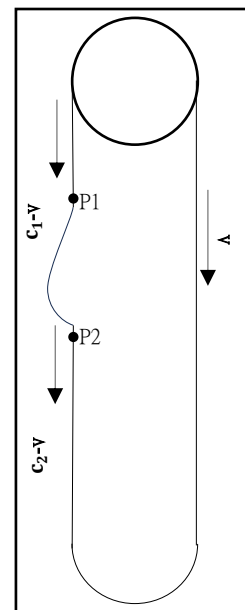


圖 3、擾動波示意圖(註:自行繪製)

$$c_{v1} = c_1 - v \cdots \cdots (2)$$

$$c_{v2} = c_2 - v \cdots \cdots (3)$$

由上述公式和波速公式(1)，可得：

$$T_1 = \mu(c_{v1} + v)^2 \cdots \cdots (4)$$

$$T_2 = \mu(c_{v2} + v)^2 \cdots \cdots (5)$$

結合公式(4)與公式(5)，可得

$$T_1 - T_2 = \mu[(c_{v1} + v)^2 - (c_{v2} + v)^2] \cdots \cdots (6)$$

其中 $T_1 - T_2 = \mu L_a g + f_d \cdots \cdots (7)$ ，其中而 L_d 為 P_1 與 P_2 之間的距離， f_d 為空氣阻力，考慮金屬鏈條的重力影響較大，此處忽略空氣阻力的影響。

2、實驗步驟

- (1) 將馬達架設到高處，鏈條掛上滑輪，其中鏈條不可觸地。
- (2) 架設攝影器材，確定鏡頭能錄到完整的鏈條。
- (3) 開啟馬達並調至最低轉速。
- (4) 在鏈條面對鏡頭的左上方由內往外產生擾動波，並錄製下來。
- (5) 將影片放入 Tracker，分析擾動波在各點的波速，如圖 4 所示。
- (6) 將波的 y 方向速度 v_y 和時間 t 放入 Excel 並算出各個位置的 $(v_y - v)$ 得到各點實波速(c_n)。
- (7) 算出 T_1 與 T_2 ，並和兩點的重量差進行比較。
- (8) 調整不同馬達轉速刻度，重複步驟(4)到步驟(7)。

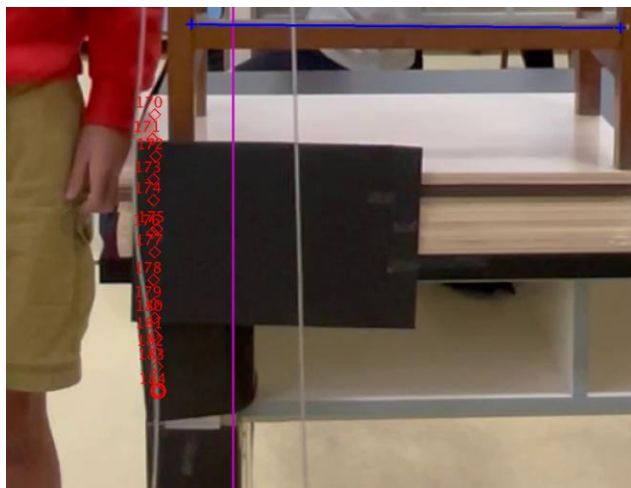


圖 4、實驗一分析過程(註:自行拍

(三)實驗一的第三部份：曲線部份波速與位置的關係

1、實驗理論：

接著探討底端半圓形的繩張力，其中有重力 mg 、離心力 F_c 、空氣阻力 f_d 、穩定旋轉時向上繩張力 T 、穩定旋轉時向下繩張力 $T + dT$ ，如圖 5 所示。

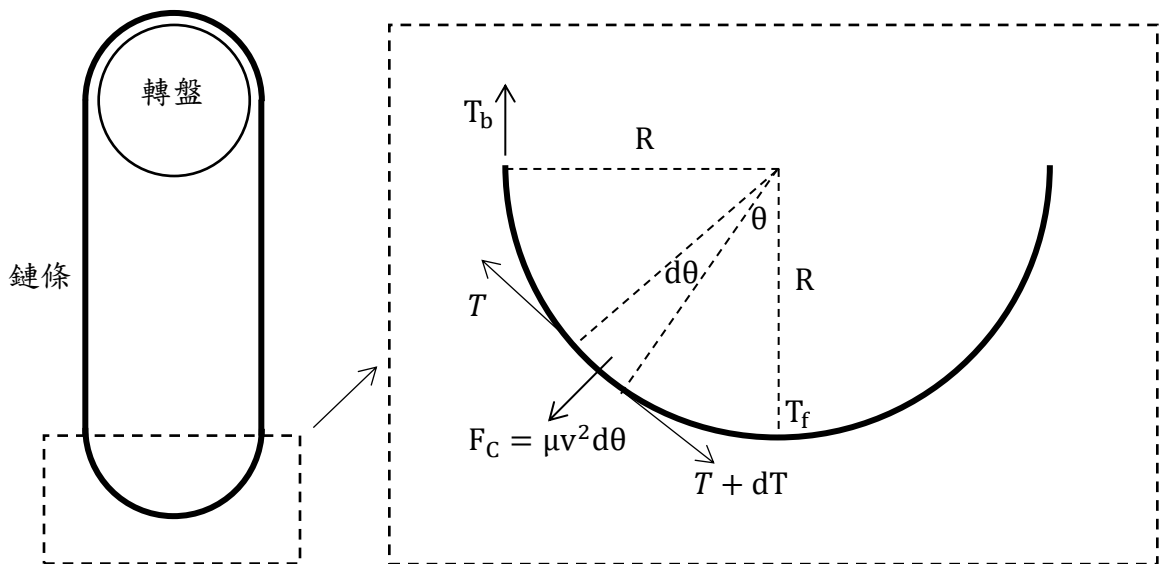


圖 5、金屬鏈條曲線部份受力示意圖(註:自行繪製)

考慮圓弧半徑為 R 、 θ 為某段繩子與鉛垂線的夾角，考慮在 θ 與 $\theta + d\theta$ 在旋轉座標系中的離心力為 $F_c = m \frac{v^2}{R} = \mu R d\theta \frac{v^2}{R} = \mu v^2 d\theta \dots \dots (8)$

因為這幾個力會達成靜力平衡，故可列出下列公式： $(f_d$ 為空氣阻力)

$$x \text{ 方向} : dT \cos \theta = \mu v^2 d\theta \sin \theta + f_d \cos \theta \dots \dots (9)$$

$$y \text{ 方向} : dT \sin \theta = f_d \sin \theta - \mu v^2 d\theta \cos \theta - \mu (R d\theta) g \dots \dots (10)$$

其中空氣阻力的影響與重力相比極小，實驗中可忽略。半圓頂端總繩張力 T_b 為

$$T_b = \mu \cdot \frac{\pi R}{4} \cdot g + |\sum \mu v^2 d\theta| \dots \dots (11)$$

$$\sum \mu v^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu v^2 \cos \theta d\theta = \mu v^2 (\sin \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mu v^2 \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right] = \mu v^2 \dots \dots (12)$$

將公式(12)帶入公式(11)可得

$$T_b = \mu \cdot \frac{\pi R}{4} \cdot g + \mu v^2 \dots \dots (13)$$

同樣的方法可以求出半圓形底端繩張力 $T_f = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mu v^2 \sin \theta d\theta \right| = \mu v^2$ 。直線部分的繩張力 $T_n = T_b + \mu \cdot L_n \cdot g \dots \dots (14)$ ，其中 L_n 為半圓頂端和待測點間的鏈條長度。

2、實驗步驟

- (1) 將馬達架設到高處，鏈條掛上圓盤，其中鏈條不可觸地。
- (2) 架設攝影器材，確定鏡頭能錄到完整的鏈條。
- (3) 開啟馬達並調至最低轉速。
- (4) 在鏈條面對鏡頭的左上方由內往外產生擾動波，並錄製下來。
- (5) 將影片放入 Tracker，分析擾動波在各點的波速。
- (6) 將波的y方向速度 v_y 和時間 t 放入 Excel 並算出各個位置的 $(v_y - v)$ 得到各點實波速 (c_n) 。
- (7) 算出半圓弧頂端的繩張力 T_b ，並和理論值 $\mu \cdot \frac{\pi R}{4} \cdot g + \mu v^2$ 比較。
- (8) 調整不同馬達轉速刻度，重複步驟(4)到步驟(7)。

四、實驗二：旋轉鏈條上擾動時，產生的順時針行進波與逆時針行進波的視波速與波形

(一)實驗理論

敲擊金屬鏈條右側後，會產生順時針與逆時針的行進波。順時針行進波會經過鏈條底部，繞到左側後向上傳遞，在接觸到圓盤後視為固定端反射，為逆時針行進波傳遞至鏈條底部消失。右側的逆時針行進波傳到鏈條頂部接觸到圓盤後，反射變為順時針行進波，軌跡與原先順時針行進波相同。以下令順時針視波速為 c_c 、逆時針視波速為 c_a 、距鏈條底部高度為 y 、鏈條底部逆時針視波速 c_{fc} 、鏈條底部逆時針視波速 c_{fa} 、鏈條底部繩張力 T_f 。

1、順時針行進波的視波速分析

$$c_c = c + v = \sqrt{\frac{\mu v^2 + \frac{\pi R}{4} \mu g + (y-R) \mu g}{\mu}} + v = \sqrt{v^2 + \frac{\pi R}{4} g + (y-R)g} + v \cdots \cdots (15)$$

2、逆時針行進波的視波速分析

$$c_a = c - v = \sqrt{\frac{\mu v^2 + \frac{\pi R}{4} \mu g + (y-R) \mu g}{\mu}} - v = \sqrt{v^2 + \frac{\pi R}{4} g + (y-R)g} - v \cdots \cdots (16)$$

3、鏈條底部波速

$$c_{fc} = \sqrt{\frac{T_f}{\mu}} = c_f + v = \sqrt{\frac{\mu v^2}{\mu}} + v = 2v \cdots \cdots (17)$$

$$c_{fa} = \sqrt{\frac{T_f}{\mu}} = c_f - v = \sqrt{\frac{\mu v^2}{\mu}} - v = 0 \cdots \cdots (18)$$

此時視波速為 0，因此觀測到的波應在逆時針經過鏈條底部時停止。

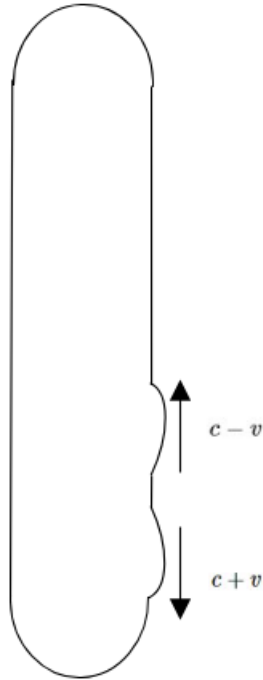


圖 6-1、實驗二示意
圖一(註:自行繪製)

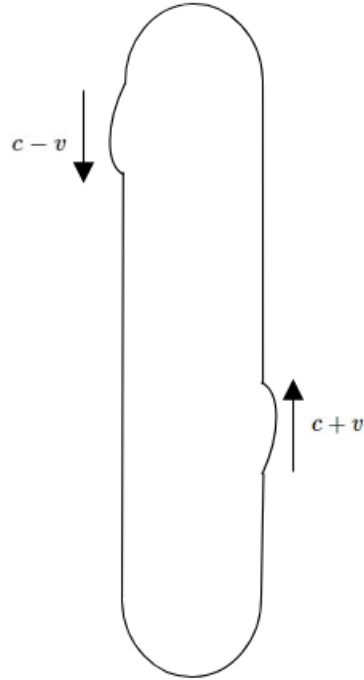


圖 6-2、實驗二示意
圖二(註:自行繪製)

(二)實驗設計

馬達置於離地 170cm 處使珠鏈不會碰到地板，分別記錄鏈條不轉動和高轉速檔次時敲擊鏈條右側後波的軌跡。

(三)實驗步驟

- 1、馬達裝上直徑 15cm 圓盤，然後將鏈條掛上圓盤。
- 2、將馬達置於離地 170cm 處。
- 3、手機慢速錄影敲擊鏈條右側後，產生順時針行進波與逆時針行進波。
- 4、逐幀觀察順時針行進波與逆時針行進波的走向， $c + v$ 為順時針行進波的視波速， $c - v$ 為逆時針行進波的視波速。

5、已知 $T_y = \mu v^2 + \frac{\pi R}{4} \mu g + (y - R) \mu g$ ，求出不同位置的繩張力。

6、將 $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 代入 $c + v$ ， $c - v$ 驗證視波速理論是否正確，得出波在敲擊後的行進軌跡的結論。

7、觀察波停止的位置。

五、實驗三：探討旋轉鏈條接觸地面後浮空的時間，與其旋轉速度的關係。

(一)實驗理論

將馬達放置在特定高度時，會使金屬鏈條接觸到地板，鏈條受到地板摩擦力作用下會離開地面，經過擺動之後再重新接觸地面，此一現象具有週期性。實驗中調整了不同的轉速觀察此週期性擺動，發現擺動的振幅相近，但是擺動週期隨而轉速不同而有變化；如圖 7 所示。

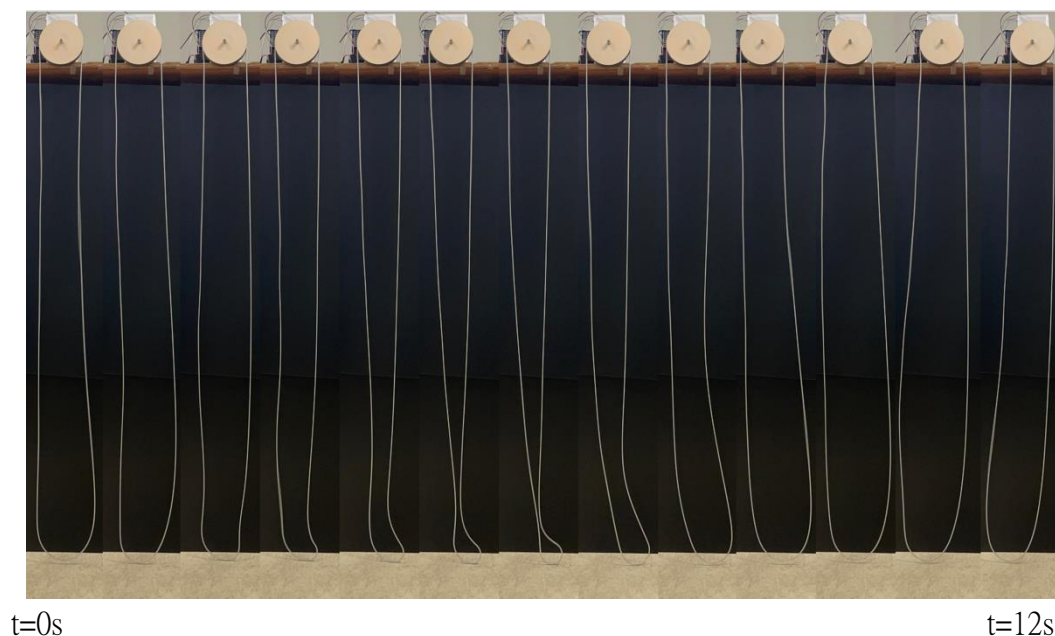


圖 7、實驗三現象照片(註:自行拍攝)

定義一個週期為連續兩次接觸地面的時間差，而離開地面的時間分為四個部份：逆時針上行波、順時針下行波、順時針上行波、逆時針下行波，最後會再與地面接觸。實驗中已求出各點的視波速，因此可利用積分算出時間。

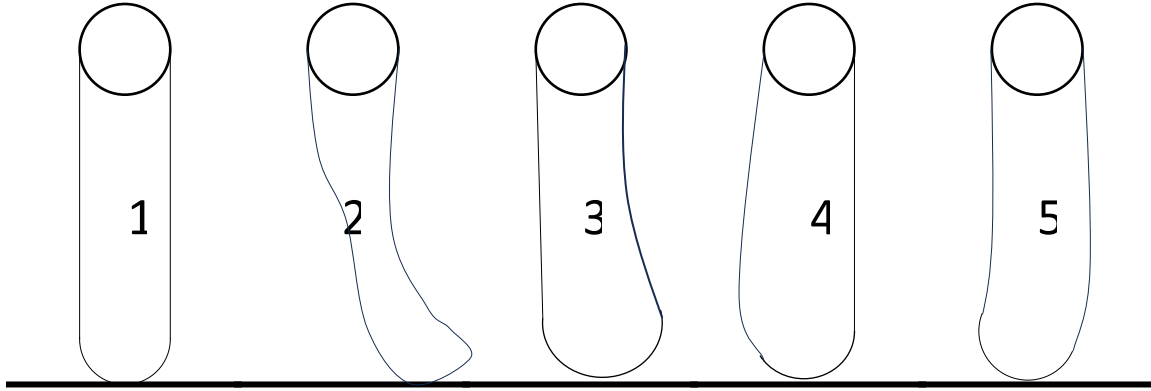


圖 8、實驗三現象示意圖(註:自行繪製)

1、公式的推導與相關假設

由於鏈條曲線部分較難處理，因此我們將鏈條形狀視為兩段很長的直線而底端則是以一小段鏈條連接。其形狀如圖 9 所示。又因為 v^2 的量值極大， $\frac{\pi R}{4}g$ 與 Rg 的差異相較起來較小，兩者可以視為相同。根據以上所述，我們將公式(15)及公式(16)進行簡化分別得到式(19)及式(20)

$$c_c = c + v = \sqrt{v^2 + yg} + v \cdots \cdots (19)$$

$$c_a = c - v = \sqrt{v^2 + yg} - v \cdots \cdots (20)$$



圖 9、鏈條假設情況示意圖(註:自行繪製)

2、逆時針上行波的時間 t_1

由於波是由下往上傳，我們先假設 y_1 為距鏈條底部的高度，因此金屬鏈條底部的 y_1 為0且向上 y_1 為正，並且我們令 x 為鏈條底端至鏈條與圓盤交接處的距離，因為是逆行波，根據公式(20)再結合上述條件求出逆時針上行波傳播時各點的視波速 c_v 為：

$$c_v = \sqrt{v^2 + y_1 g} - v$$

而我們所見的視波速 $c_v = \frac{dy_1}{dt}$ ，移項過後可得到 $\frac{dy_1}{c_v} = dt \cdots \cdots (21)$

將 c_v 對 y_1 作微分可得：

$$\frac{dc_v}{dy_1} = \frac{d(\sqrt{v^2 + y_1 g})}{d(v^2 + y_1 g)} \cdot \frac{d(v^2 + y_1 g)}{dy_1} = \frac{g}{2(\sqrt{v^2 + y_1 g})} = \frac{g}{2(c_v + v)} \cdots \cdots (22)$$

上式中因 v 為定值，所以不用考慮微分時的影響。

$$\text{將(22)代入(21)，可得 } dt = \frac{dy_1}{c_v} = \frac{2(c_v+v)}{c_v g} dc_v$$

對兩邊同時積分， y_1 是從圓弧頂端R(從實驗中觀察發現波由此處向上傳)至鏈條與圓盤交接處x，而t則是由0積分到波傳至鏈條與圓盤交接處的時間 t_1 ：

$$\int_{t=0}^{t=t_1} dt = t_1 = \int_{y_1=R}^{y_1=x} \left(\frac{2}{g} + \frac{2v}{c_v g} \right) dc_v$$

$$\text{積分後得 } t_1 = \left(\frac{2}{g} c_v + \frac{2v}{g} \ln c_v \right) \Big|_{y_1=R}^{y_1=x}$$

$$t_1 = \frac{2}{g} \left[\left(\sqrt{v^2 + xg} - v \right) - \left(\sqrt{v^2 + Rg} - v \right) \right] + \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + xg} - v \right)}{\left(\sqrt{v^2 + Rg} - v \right)}$$

化簡後得：

$$t_1 = \frac{2}{g} \left[\sqrt{v^2 + xg} - \sqrt{v^2 + Rg} \right] + \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + xg} - v \right)}{\left(\sqrt{v^2 + Rg} - v \right)} \dots\dots\dots (23)$$

3、順時針下行波的時間 t_2

由於波經過反射，波由上往下傳，我們先假設 y_2 為距鏈條與圓盤交接處的距離，因此鏈條與圓盤交接處的 y_2 為0且向下 y_2 為正，並且我們令x為鏈條底端至鏈條與圓盤交接處的距離，因為是順行波，根據公式(19)再結合上述條件求出順時針下行波傳播時各點的視波速。

$$c_v = \sqrt{v^2 + (x - y_2)g} + v$$

$$\text{而我們所見的視波速 } c_v = \frac{dy_2}{dt}, \text{ 移項過後可得到 } \frac{dy_2}{c_v} = dt \dots\dots\dots (24)$$

將 c_v 對 y_2 作微分可得：

$$\frac{dc_v}{dy_2} = \frac{d(\sqrt{v^2 + (x - y_2)g})}{d(v^2 + (x - y_2)g)} \cdot \frac{d(v^2 + (x - y_2)g)}{dy_2} = \frac{-g}{2(\sqrt{v^2 + (x - y_2)g})} = \frac{-g}{2(c_v - v)} \dots\dots\dots (25)$$

上式中因 v 為定值，所以不用考慮微分時的影響。

$$\text{將(25)代入(24)得 } dt = \frac{dy_2}{c_v} = \frac{2(c_v - v)}{-c_v g} dc_v$$

對兩邊同時積分， y_2 是從鏈條與圓盤交接處0至鏈條底部x，而t則是由0積分到波傳至鏈條底部的時間 t_2 ：

$$\int_{t=0}^{t=t_2} dt = t_2 = \int_{y_2=x}^{y_2=0} \left(\frac{2}{-g} + \frac{2v}{c_v g} \right) dc_v$$

積分後得:

$$t_2 = \left(\frac{2}{-g} c_v + \frac{2v}{g} \ln c_v \right) \Big|_{y_2=0}^{y_2=x}$$

$$t_2 = \frac{2}{-g} \left[\left(\sqrt{v^2 + (x-x)g} + v \right) - \left(\sqrt{v^2 + (x-0)g} + v \right) \right] + \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + (x-x)g} + v \right)}{\left(\sqrt{v^2 + (x-0)g} + v \right)}$$

化簡後得：

$$t_2 = \frac{2}{-g} \left[v - \sqrt{v^2 + xg} \right] + \frac{2v}{g} \ln \frac{(2v)}{(\sqrt{v^2 + xg} + v)} \dots\dots\dots (26)$$

4、順時針上行波的時間 t_3

由於波是由下往上傳，我們先假設 y_3 為距鏈條底部的高度，因此金屬鏈條底部的 y_3 為0且向上 y_3 為正，並且我們令 x 為鏈條底端至鏈條與圓盤交接處的距離，因為是順行波，根據公式(19)再結合上述條件求出順時針上行波傳播時各點的視波速為：

$$c_v = \sqrt{v^2 + y_3 g} + v$$

$$\text{而我們所見的視波速 } c_v = \frac{dy_3}{dt}, \text{ 移項過後可得到 } \frac{dy_3}{c_v} = dt \dots\dots\dots (27)$$

將 c_v 對 y_3 作微分可得:

$$\frac{dc_v}{dy_3} = \frac{d(\sqrt{v^2 + y_3 g})}{d(v^2 + y_3 g)} \cdot \frac{d(v^2 + y_3 g)}{dy_3} = \frac{g}{2(\sqrt{v^2 + y_3 g})} = \frac{g}{2(c_v - v)} \dots\dots\dots (28)$$

上式中因 v 為定值，所以不用考慮微分時的影響。

$$\text{將(28)代入(27)得: } dt = \frac{dy_3}{c_v} = \frac{2(c_v - v)}{c_v g} dc_v$$

對兩邊同時積分， y_3 是從鏈條底部至鏈條與圓盤交接處，而 t 則是由0積分到波傳至鏈條與圓盤交接處的時間 t_3 ：

$$\int_{t=0}^{t=t_3} dt = t_3 = \int_{y_3=0}^{y_3=x} \left(\frac{2}{g} - \frac{2v}{c_v g} \right) dc_v$$

積分後得:

$$t_3 = \left(\frac{2}{g} c_v - \frac{2v}{g} \ln c_v \right) \Big|_{y_3=0}^{y_3=x}$$

$$t_3 = \frac{2}{g} \left[\left(\sqrt{v^2 + xg + v} \right) - \left(\sqrt{v^2 + 0g + v} \right) \right] - \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + xg + v} \right)}{\left(\sqrt{v^2 + 0g + v} \right)}$$

化簡後得:

$$t_3 = \frac{2}{g} \left[\sqrt{v^2 + xg - v} \right] - \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + xg + v} \right)}{(2v)} \dots\dots (29)$$

5、逆時針下行波的時間 t_4

由於波是由上往下傳，我們先假設 y_4 為距鏈條與圓盤交接處的距離，因此鏈條與圓盤交接處的 y_4 為0且向下 y_4 為正，並且我們令 x 為鏈條底端至鏈條與圓盤交接處的距離，因為是逆行波，根據公式(20)再結合上述條件求出逆時針下行波傳播時各點的視波速為：

$$c_v = \sqrt{v^2 + (x - y_4)g} - v$$

而我們所見的視波速 $c_v = \frac{dy_4}{dt}$ ，移項過後可得到 $\frac{dy_4}{c_v} = dt \dots\dots (30)$

將 c_v 對 y 作微分可得:

$$\frac{dc_v}{dy_4} = \frac{d(\sqrt{v^2 + (x - y_4)g})}{d(v^2 + (x - y_4)g)} \cdot \frac{d(v^2 + (x - y_4)g)}{dy_4} = \frac{g}{2(\sqrt{v^2 + (x - y_4)g})} = \frac{-g}{2(c_v + v)} \dots\dots (31)$$

上式中因 v 為定值，所以不用考慮微分時的影響。

$$\text{將(31)代入(30)得 } dt = \frac{dy_4}{c_v} = \frac{2(c_v + v)}{-c_v g} dc_v$$

對兩邊同時積分， y_4 是從鏈條與圓盤交接處0至鏈條圓弧的頂端 $x - R$ (由實驗觀察所得)，而 t 則是由0積分到波傳至鏈條與圓盤交接處的時間 t_4 ：

$$\int_{t=0}^{t=t_4} dt = t_4 = \int_{y_4=0}^{y_4=x-R} \left(\frac{2}{-g} + \frac{2v}{-c_v g} \right) dc_v$$

積分後得:

$$t_4 = \left(\frac{2}{-g} c_v - \frac{2v}{g} \ln c_v \right) \Big|_{y_4=0}^{y_4=x-R}$$

$$t_4 = \frac{2}{-g} \left[\left(\sqrt{v^2 + (x - x + R)g - v} \right) - \left(\sqrt{v^2 + (x - 0)g - v} \right) \right] - \frac{2v}{g} \ln \frac{\left(\sqrt{v^2 + (x - x + R)g - v} \right)}{\left(\sqrt{v^2 + (x - 0)g - v} \right)}$$

化簡後得:

$$t_4 = \frac{2}{-g} \left[\sqrt{v^2 + Rg} - \sqrt{v^2 + xg} \right] - \frac{2v}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{v^2 + Rg} - v}{\sqrt{v^2 + xg} - v} \right) \dots\dots (32)$$

考慮到 $\sqrt{v^2 + Rg}$ 中 $v^2 \gg Rg$ ，故可以近似為 v ，但是在算式 $\frac{2v}{g} \ln \left(\frac{\sqrt{v^2 + xg} - v}{\sqrt{v^2 + Rg} - v} \right)$ 中就不可以如此近似。將 t_1 至 t_4 進行如此操作並且相加，可以得到時間的總和。

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \approx 4 \cdot \frac{2}{g} (\sqrt{v^2 + xg} - v) + 2 \cdot \frac{2v}{g} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{v^2 + xg} + v} \cdot \frac{\sqrt{v^2 + xg} - v}{\sqrt{v^2 + Rg} - v} \right) \dots\dots (33)$$

(二)實驗設計：馬達置於離地 168cm 處，分別記錄鏈條不轉動和轉速檔次 1-10 時，鏈條摩擦地面所產生的現象。接著，把鏈條碰到地板而受摩擦力影響開始擺動的運動過程拍攝成影片放入 tracker 分析，由於馬達放太低會使鏈條彈出圓盤軌道，所以馬達置於離地 168cm 處。

(三)實驗步驟

- 1、馬達裝上直徑 15cm 圓盤，然後將鏈條掛上圓盤。
- 2、將馬達置於離地 168cm 處。
- 3、觀察鏈條擺動情形的週期性變化。
- 4、用手機錄下此現象。
- 5、用 Tracker 記錄下鏈條底部的位置，並計算其週期。
- 6、分析鏈條作週期性運動的原因，並推導出週期與轉速之間的關係。

六、實驗四:分析旋轉鏈條被挑出圓盤後的移動情形

(一)實驗分析:根據圖 10 所示，鏈條在被挑起後的移動形狀很不規則，因此我們嘗試分析移動距離和移動時間。

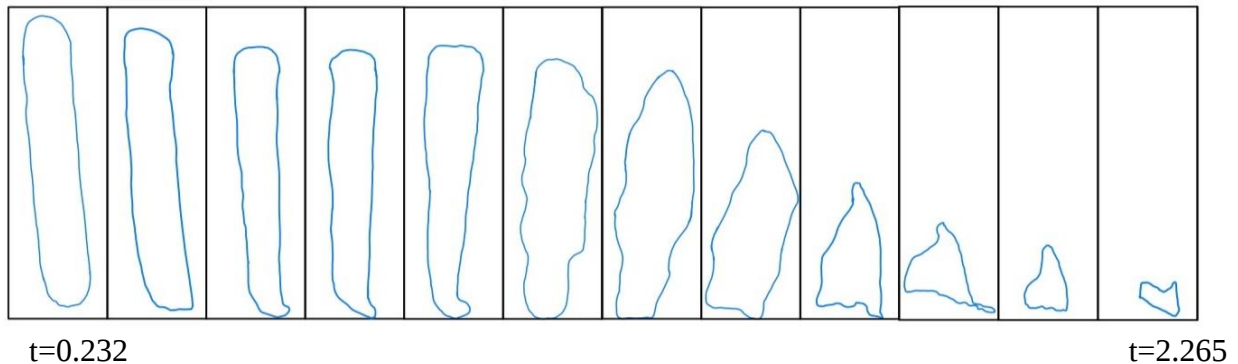


圖 10、實驗四示意圖
(註:自行繪製)

(二)實驗四的第一部分:分析旋轉鏈條被挑出原盤後移動距離與轉速的關係

1、實驗設計：將馬達置於 168cm 處，且因為使用直徑 15cm 的圓盤現象不明顯，所以使用直徑為 20cm 的圓盤並在馬達旋轉時將金屬鏈條從圓盤中挑出，並量測鏈條的移動距離並分析移動距離與轉速的關係。

2、實驗步驟

- (1)馬達裝上直徑 20cm 圓盤，然後將鏈條掛上圓盤。
- (2)將馬達至於離地 168cm 處。
- (3)調整馬達轉速從 1 至 10 並依序進行步驟(4)與步驟(5)。
- (4)將鏈條從圓盤中挑起。
- (5)待鏈條靜止後，量測鏈條的移動距離。
- (6)將得到的數據匯入 excel 進行分析。
- (7)繪製移動距離與轉速之間的散布圖和兩者之間取 log 之後的散布圖，並嘗試用線性分析觀察兩者之間的關係。
- (8)將圓盤換成直徑為 30cm 的圓盤並重複步驟(2)至步驟(7)

(三)實驗四的第二部分:分析旋轉鏈條被挑出圓盤後移動的時間與轉速的關係

1、實驗設計：除了鏈條的移動距離之外，鏈條移動的時間也可以進行分析。因此可以利用與第一部分相同的儀器架設方法，並量測鏈條轉動的速度與其被挑出後移動與時間的關係。

2、實驗步驟

- (1)馬達裝上直徑 20cm 圓盤，然後將鏈條掛上圓盤。
- (2)將馬達至於離地 168cm 處。
- (3)調整馬達轉速從 1 至 10 並依序進行步驟 4 到步驟 6。
- (4)將鏈條從圓盤中挑起。
- (5)將鏈條整個移動過程錄製下來。
- (6)將錄製的影片匯入 tracker 並依此測量從鏈條被挑出至靜止所花的時間。
- (7)將得到的數據匯入 excel 進行分析。

(8)繪製移動時間與轉速之間的散布圖和兩者之間取 log 之後的散布圖，並嘗試用線性分析觀察兩者之間的關係。

肆、研究結果

一、實驗一：探討旋轉鏈條上各點波速與位置的關係，包含鏈條的直線部份與曲線部份。

(一)第一部份：馬達變速器刻度與金屬鏈條轉速的關係

刻度(階)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
圓盤角速度(rad/s)	0	33.93	51.31	71.84	96.66	104.72	119.38	133.52	147.86	157.08	167.55
鏈條速度 v (m/s)	0	2.375	3.592	5.029	6.766	7.330	8.357	9.346	10.351	10.996	11.729

(二)第二部份：直線部份波速與位置的關係

刻度	轉速 v (m/s)	P_1 (m)	c_{v1} (m/s)	P_2 (m)	c_{v2} (m/s)	L_d (m)	實際 $T_1 - T_2$ (N)	理論 $T_1 - T_2$ (N)
1	2.38	1.03	1.63	0.09	0.33	0.93	0.37	0.38
2	3.59	1.02	1.21	0.20	0.25	0.81	0.35	0.33
3	5.03	1.21	1.09	0.33	0.33	0.89	0.37	0.37
4	6.77	1.18	0.88	0.30	0.31	0.88	0.35	0.36
5	7.33	0.99	0.80	0.30	0.38	0.69	0.28	0.28
6	8.36	1.19	0.79	0.40	0.39	0.79	0.30	0.32
7	9.35	0.95	0.71	0.25	0.34	0.69	0.31	0.29
8	10.35	1.18	0.78	0.31	0.37	0.86	0.37	0.36
9	11.00	1.12	0.77	0.24	0.40	0.89	0.35	0.37
10	11.73	0.88	0.57	0.28	0.31	0.60	0.26	0.25

(二)第三部份：曲線部份波速與位置的關係

1、第一組：轉速 $v = 2.375\text{m/s}$

L_n (m)	視波速 c_v (m/s)	實波速 c (m/s)	實際 T_b (N)	預測 T_b (N)
0.94	1.63	4.00	0.28	0.24
0.37	1.08	3.46	0.35	0.24
0.13	0.61	2.98	0.32	0.24
0.02	0.33	2.71	0.30	0.24

2、第二組：轉速 $v = 3.592m/s$

$L_n(m)$	視波速 $c_v(m/s)$	實波速 $c(m/s)$	實際 $T_b(N)$	預測 $T_b(N)$
1.10	1.47	5.06	0.62	0.54
0.83	1.07	4.66	0.57	0.54
0.22	0.38	3.97	0.57	0.54
0.13	0.33	3.93	0.60	0.54

3、第三組：轉速 $v = 5.029m/s$

$L_n(m)$	視波速 $c_v(m/s)$	實波速 $c(m/s)$	實際 $T_b(N)$	預測 $T_b(N)$
0.92	0.78	5.81	1.04	1.06
0.77	0.91	5.94	1.17	1.06
0.30	0.42	5.45	1.12	1.19
0.27	0.40	5.43	1.13	1.06

4、第四組：轉速 $v = 6.766m/s$

$L_n(m)$	視波速 $c_v(m/s)$	實波速 $c(m/s)$	實際 $T_b(N)$	預測 $T_b(N)$
0.97	0.79	7.56	2.00	1.93
0.94	0.84	7.61	2.05	1.93
0.43	0.44	7.20	2.00	1.93
0.41	0.43	7.19	2.01	1.93

5、第五組：轉速 $v = 7.330m/s$

$L_n(m)$	視波速 $c_v(m/s)$	實波速 $c(m/s)$	實際 $T_b(N)$	預測 $T_b(N)$
1.05	0.96	8.29	2.45	2.26
0.92	0.80	8.13	2.40	2.26
0.39	0.51	7.84	2.42	2.26
0.31	0.39	7.72	2.38	2.26

6、第六組：轉速 $v = 8.357m/s$

$L_n(m)$	視波速 $c_v(m/s)$	實波速 $c(m/s)$	實際 $T_b(N)$	預測 $T_b(N)$
0.96	0.85	9.21	3.16	2.94
1.03	0.80	9.15	3.10	2.94
0.44	0.53	8.88	3.14	2.94
0.33	0.39	8.75	3.08	2.94

7、第七組：轉速 $v = 9.346\text{m/s}$

$L_n(\text{m})$	視波速 $c_v(\text{m/s})$	實波速 $c(\text{m/s})$	實際 $T_b(\text{N})$	預測 $T_b(\text{N})$
1.03	0.79	10.14	3.90	3.67
0.97	0.77	10.12	3.92	3.67
0.40	0.46	9.80	3.87	3.67
0.26	0.38	9.73	3.87	3.67

8、第八組：轉速 $v = 10.351\text{m/s}$

$L_n(\text{m})$	視波速 $c_v(\text{m/s})$	實波速 $c(\text{m/s})$	實際 $T_b(\text{N})$	預測 $T_b(\text{N})$
1.06	0.80	11.15	4.79	4.50
0.94	0.64	10.99	4.69	4.50
0.39	0.47	10.82	4.76	4.50
0.31	0.39	10.74	4.72	4.50

9、第九組：轉速 $v = 10.996\text{m/s}$

$L_n(\text{m})$	視波速 $c_v(\text{m/s})$	實波速 $c(\text{m/s})$	實際 $T_b(\text{N})$	預測 $T_b(\text{N})$
1.00	0.81	11.80	5.44	5.08
0.99	0.84	11.84	5.48	5.08
0.39	0.33	11.32	5.22	5.08
0.31	0.44	11.44	5.37	5.08

10、第十組：轉速 $v = 11.729\text{m/s}$

$L_n(\text{m})$	視波速 $c_v(\text{m/s})$	實波速 $c(\text{m/s})$	實際 $T_b(\text{N})$	預測 $T_b(\text{N})$
1.06	0.80	12.53	6.16	5.78
0.98	0.70	12.43	6.09	5.78
0.29	0.37	12.10	6.03	5.78
0.18	0.33	12.06	6.03	5.78

(註:數據皆為自行實驗取得)

二、實驗二：探討旋轉鏈條上擾動時，產生的順時針行進波與逆時針行進波的視波速與波形。

(一)各轉速波速理論和實際值比較

刻度	轉速 v (m/s)	L_n (m)	實波速 c (m/s)	視波速 c_v (m/s)	理論視波速 c_v (m/s)
1	2.38	0.49	3.31	5.12	5.69
2	3.59	0.41	4.20	7.97	7.79
3	5.03	0.78	5.78	9.14	10.81
4	6.77	0.77	7.34	1.20	14.10
5	7.33	0.71	7.82	14.95	15.15
6	8.36	0.74	8.81	15.47	17.16
7	9.35	0.93	9.85	19.11	19.20
8	10.35	0.63	10.67	20.50	21.02
9	11.00	0.93	11.42	20.86	22.42
10	11.73	0.63	12.01	21.18	23.74

(註:數據皆為自行實驗取得)

(二) 敲擊

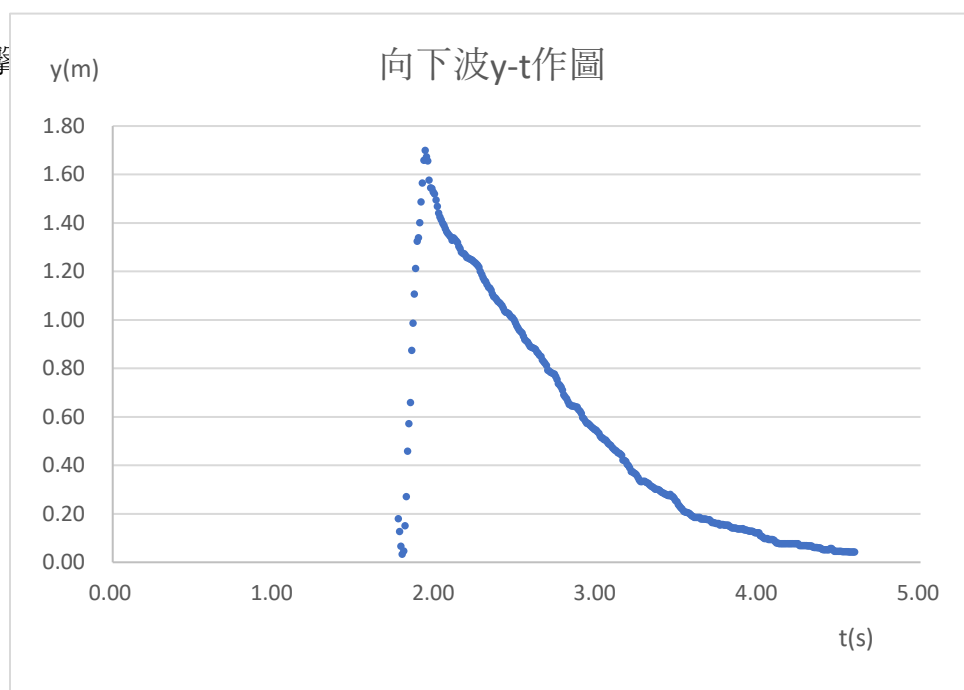


圖 11 向下波距鏈條底部高度(註:自行繪製)

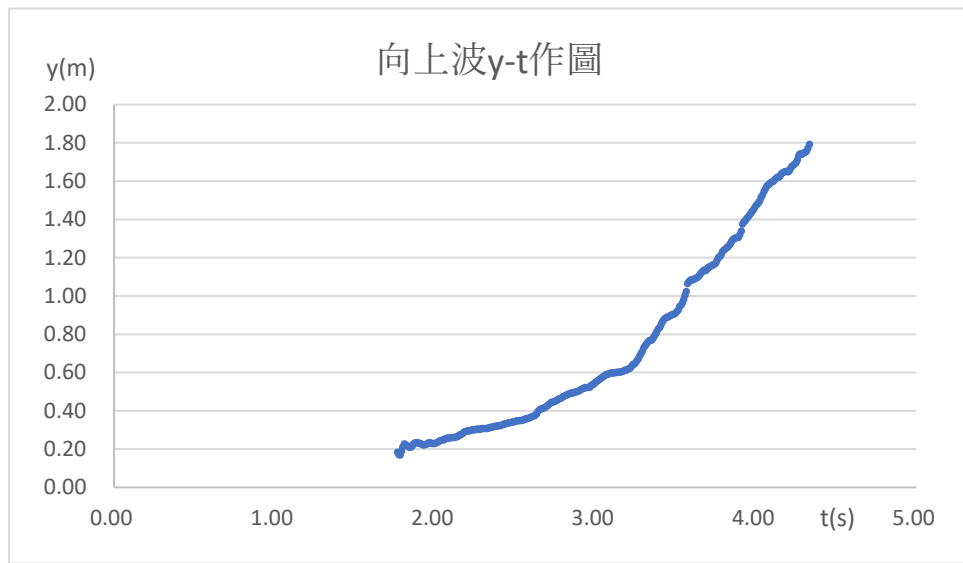


圖 12 向上波距鏈條底部高度(自行繪製)

(三)鏈條底部視波速

(1)睡時針

理論視波速	實驗視波速	相對誤差
10.06m/s	9.2m/s	8.54%

(註:數據皆為自行實驗取得)

(2)逆時針

此時視波速極慢，難以用 tracker 分析，但能實際觀察到波傳遞到鏈條底部後停止。

三、實驗三：分析鏈條受摩擦力產生的週期性運動與馬達轉速關係

1、觀察鏈條底部的水平位置

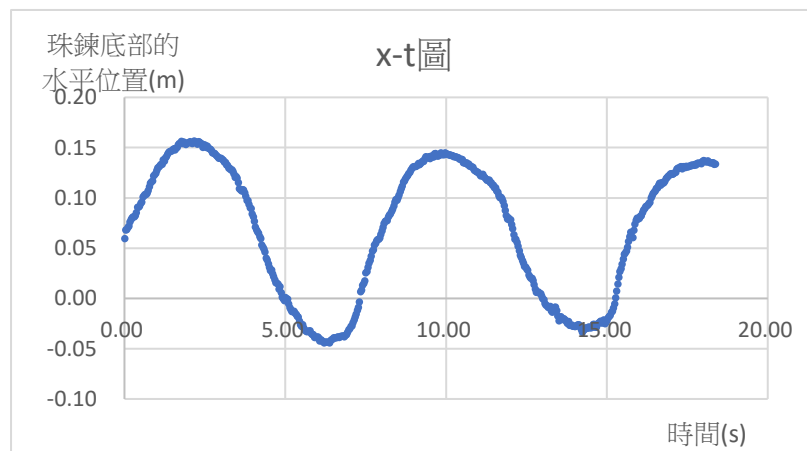


圖 13、鏈條底部的水平位置對時間的關係圖，此圖為 $v=5.03\text{m/s}$ 時的狀況(註:自行繪製)

2、記錄鍊條的週期

刻度	$v(\text{m/s})$	$T(\text{s})$
1	2.38	3.43
2	3.59	3.78
3	5.03	7.92
4	6.77	10.03
5	7.33	10.57
6	8.38	13.13

(註:數據皆為自行實驗取得)

3、帶入公式(32)得到理論離地時間，在與實驗得出的實踐離地時間進行比較(公式中的 x 值以1.68m代入， R 則是以0.07m 代入)

刻度	轉速 $v(\text{m/s})$	實際離地時間(s)	理論離地時間(s)	誤差(%)
3	5.03	6.30	7.30	13.69
4	6.77	8.42	9.43	10.77
5	7.33	9.90	10.14	2.37
6	8.36	11.57	11.44	1.12

(註:數據皆為自行實驗取得)

四、實驗四: 探討旋轉鏈條被挑出圓盤後，在地面運動的情形。

(一)實驗四的第一部分:鏈條被挑起後的移動距離與轉速之間的分析。

1、圓盤為 20cm 的移動距離與鏈條轉動速度的表格與散布圖(數據皆為自行實驗取得)

刻度	轉速 v (m/s)	移動距離(m)
1	3.223	0.158
2	4.875	0.241
3	6.825	0.3894
4	9.182	0.493
5	9.948	0.7168
6	11.341	0.98425
7	12.684	0.9134
8	14.047	1.188
9	14.923	1.332
10	15.917	1.493

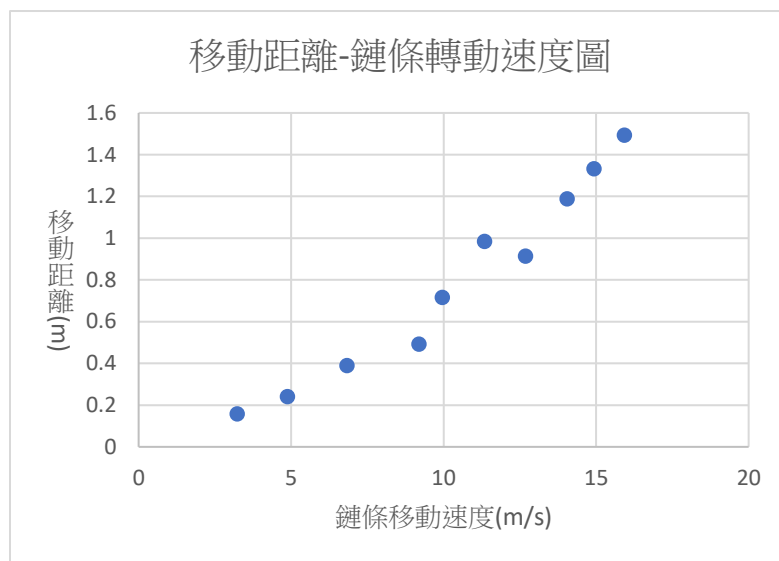


圖 14、鏈條移動距離與鏈條轉動速度散布圖(註:自行繪製)

2、圓盤為 20cm 的移動距離與鏈條轉動速度兩者取 log 後的表格與散布圖(數據皆為自行實驗取得)

刻度	$\log(v)$	$\log(m)$
1	0.508	-0.801
2	0.688	-0.618
3	0.834	-0.410
4	0.963	-0.307
5	0.998	-0.145
6	1.055	-0.00689
7	1.103	-0.0393
8	1.148	0.0748
9	1.174	0.125
10	1.202	0.174

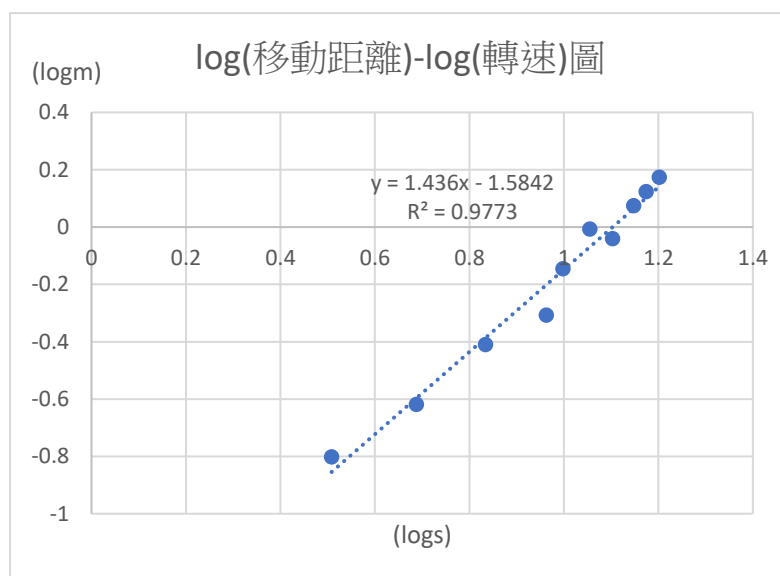


圖 15、鏈條移動距離與鏈條轉動速度兩者取 log 之後的作圖(註:自行繪製)

3、圓盤為 30cm 的移動距離與鏈條轉動速度的表格與散布圖

刻度	log(m/s)	log(s)
1	4.92	0.187
2	7.44	0.283
3	10.4417	0.475
4	14.015	1.135
5	15.184	1.407

(註:數據皆為自行實驗取得)

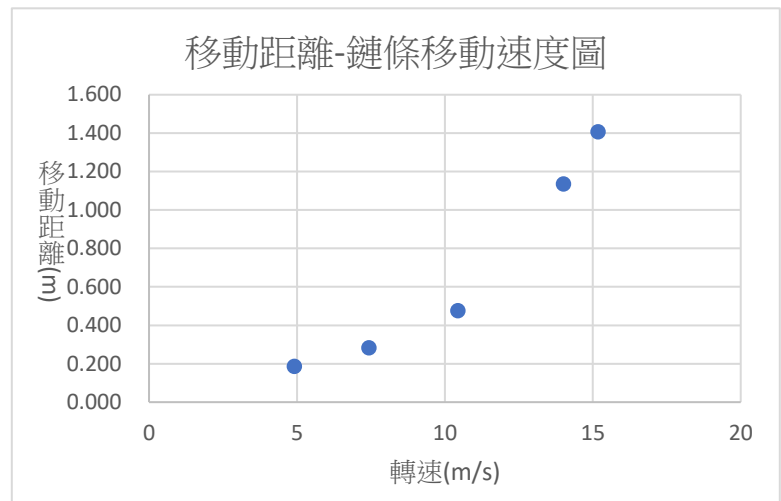


圖 16、鏈條移動距離與鏈條轉動速度散布圖
(註:自行繪製)

4、圓盤為30cm的移動距離與鏈條轉動速度兩者取log後的表格與散布圖

刻度	log(m/s)	log(s)
1	0.692	-0.729
2	0.872	-0.549
3	1.019	-0.323
4	1.147	0.055
5	1.181	0.148

(註:數據皆為自行實驗取得)

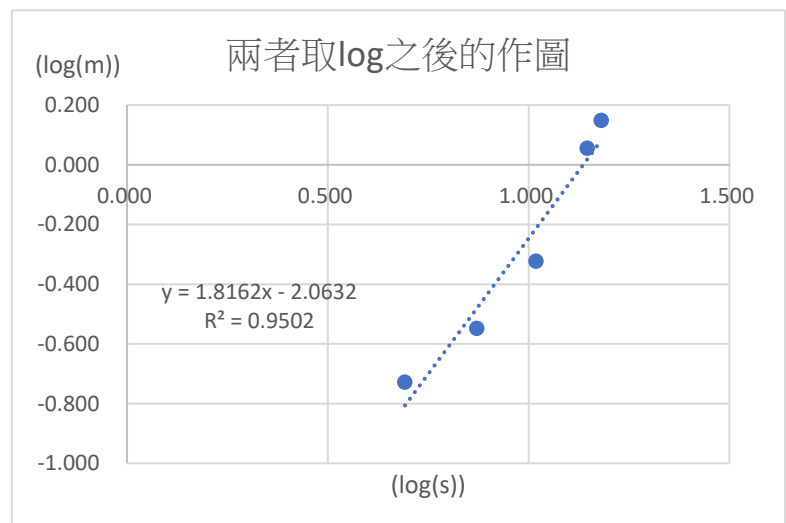


圖 17、鏈條移動距離與鏈條轉動速度
兩者取 log 之後的作圖(註:自行繪製)

5、圓盤為 20cm 的移動時間與鏈條轉動速度的表格與散布圖(數據皆為自行實驗取得)

刻度	轉速 v (m/s)	移動時間
1	3.223	1.071
2	4.875	1.444
3	6.825	1.789
4	9.182	1.889
5	9.948	2.067
6	11.341	2.117
7	12.684	2.333
8	14.047	2.211
9	14.923	2.544
10	15.917	2.411

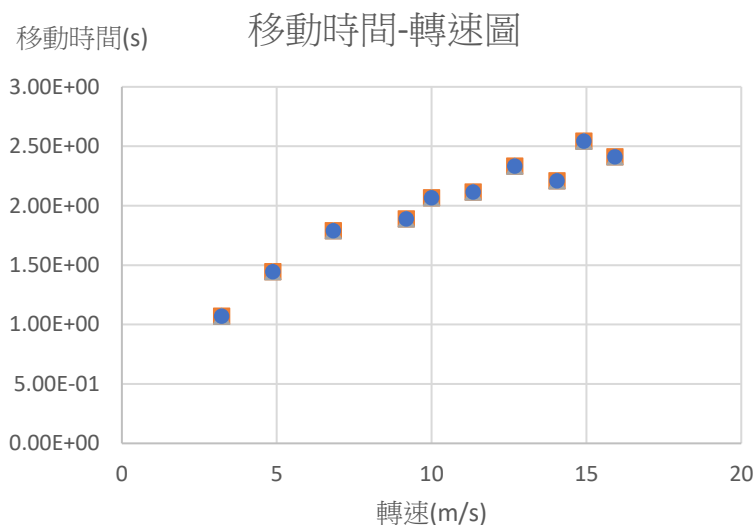


圖 18、鏈條移動時間與鏈條轉動速度散布圖(註:自行繪製)

6、圓盤為20cm的移動距離與鏈條轉動速度兩者取log後的表格與散布圖(數據皆為自行實驗取得)

刻度	$\log(m/s)$	$\log(s)$
1	0.508	0.029
2	0.688	0.160
3	0.834	0.253
4	0.963	0.276
5	0.998	0.315
6	1.055	0.326
7	1.103	0.368
8	1.148	0.345
9	1.174	0.406
10	1.202	0.382

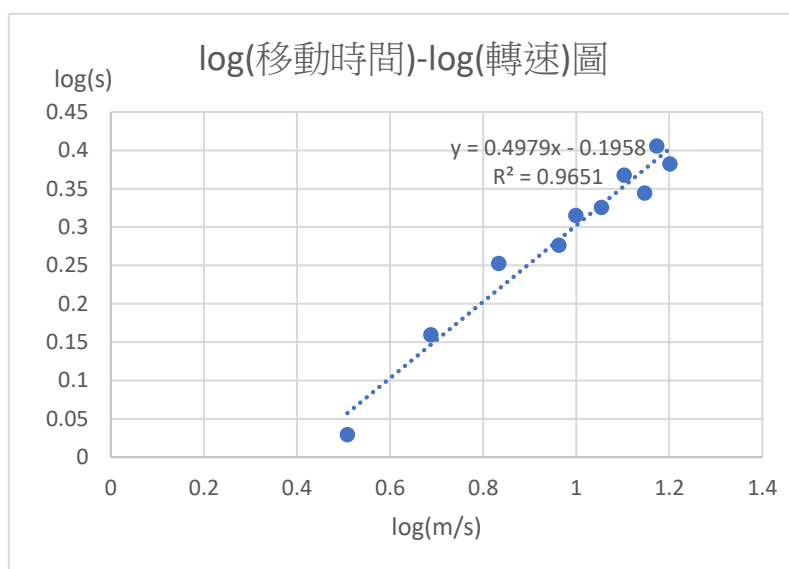
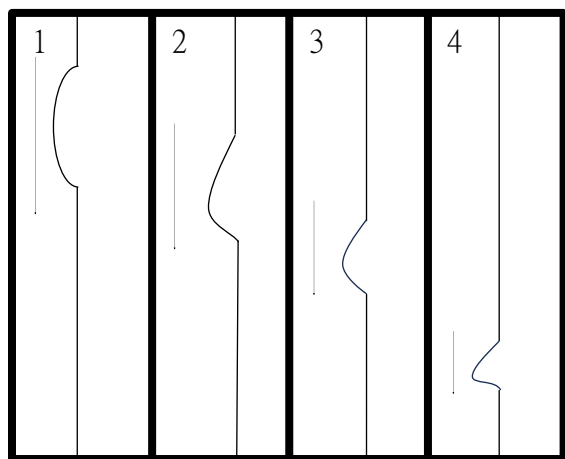


圖 19、鏈條移動時間與鏈條轉動速度兩者取 $\log$ 之後的作圖(註:自行繪製)

伍、討論

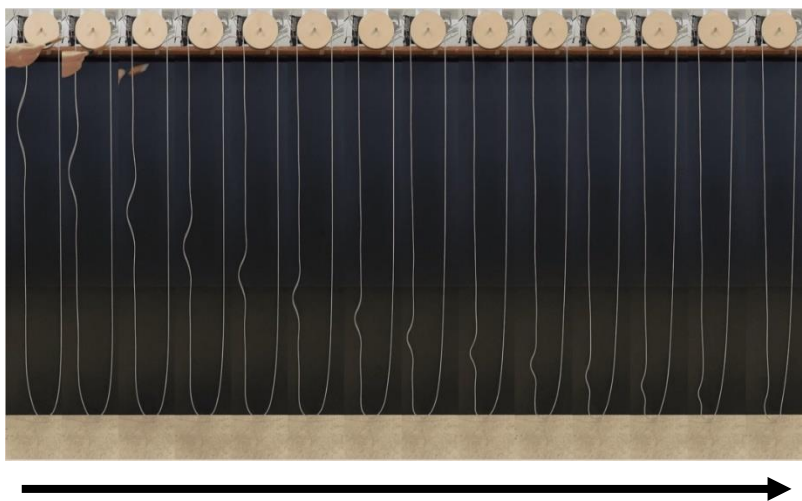
一、實驗一：探討旋轉鏈條上各點波速與位置的關係

- (一)馬達變速器刻度與金屬鏈條轉速的關係：金屬鏈條轉速隨著變速器刻度調大而增加。
- (二)直線部份波速與位置的關係：透過實驗求得直線部份兩點間的繩張力差，與理論值相符。
- (三)曲線部份波速與位置的關係：透過實驗求得曲線部份頂端的繩張力，與理論值相符。
- (四)將實驗中得到的實驗波速差 $c_{r1} - c_{r2}$ 和理論波速差 $c_{e1} - c_{e2}$ 之間差異不大。除此之外，實驗數據算出來的 T_b 和理論值差異也很小，證實了之前提出的公式(6)和公式(13)，並肯定了之前提起的理論。
- (五)影片中錄到的波長會越來越短：因為波的前端永位於下方，波前速度根據公式(1)會因繩張力較小而比波尾慢，如此前進會讓波尾不斷追上波前，造成波長不斷縮短，如圖 20-1 與圖 20-2。



(六)波會在鏈條底端消失

圖 20-1、實驗一現象
示意圖(註:自行繪製)



t=0s

圖 20-2、實驗一現象照
片(註:自行繪製)

t=1.4s

當波到達最底端時，理論上依式(1)波速應為 $\sqrt{\frac{T_l}{\mu}} = \sqrt{\frac{uv^2}{u}} = v$ ，但因波的移動方向與鏈條傳遞方向相反，所以我們觀察到的視波速為 $v - v = 0$ 。故鏈條到底端會消失。

(七)鏈條旋轉速度越快，波的傳遞速度越慢

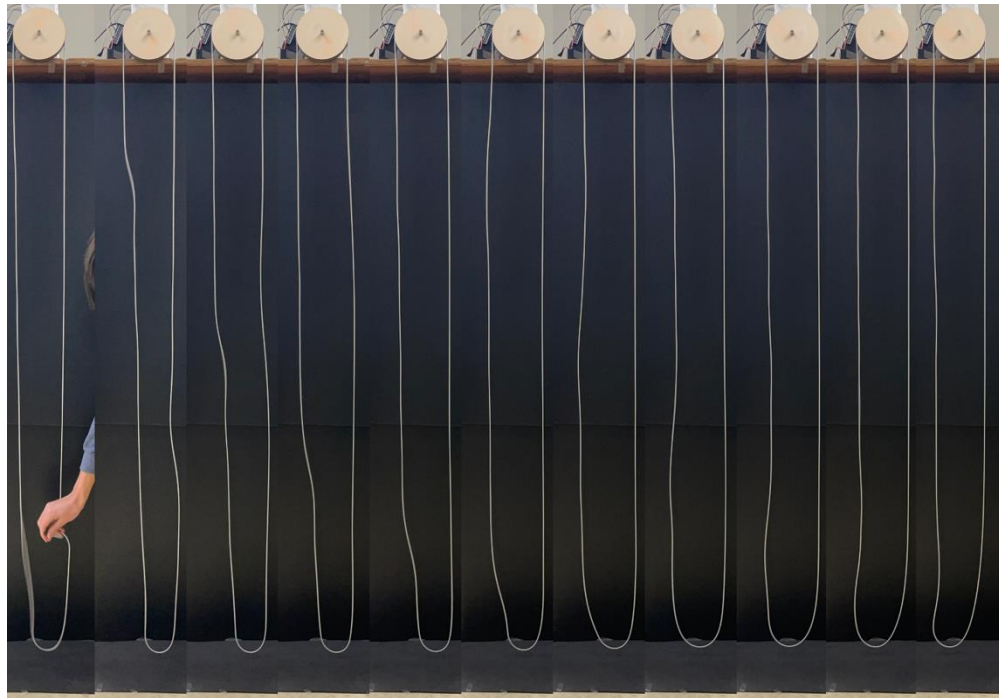
從上述的公式(13)和(14)可知各點繩張力 $T_n = T_b + L_n \mu g = \frac{\pi R}{4} \mu g + \mu v^2 + L_n \mu g$ 。

當 v 越來越大時， T_n 中 $\frac{\pi R}{4} \mu g + L_n \mu g$ 占的比例會越來越小，使各點實際波速 c_n 更接近 v 。而我們觀察到的視波速 $c_n - v$ 則會越來越小，故影片中錄到的波之波速會隨著旋轉鏈條轉速增加而減少。

(八)大部分數據中的繩張力比預測值稍高，猜測原因忽略了空氣阻力。

二、實驗二：旋轉鏈條上擾動時，產生的順時針行進波與逆時針行進波的視波速與波形

(一)錄影速度相對較慢



t=0s

圖 21、實驗二現象照片(註:自行繪製)

t=9.2s

敲擊的瞬間實際情況應如圖 21 所示，但因為在高轉速下順時針走的波太快了，肉眼和相機都難以捕捉畫面，所以會看到左邊有一個波向下傳，右邊有一的波向上傳，如圖 21 所示。

1、向下波：敲擊後發現左邊各有一個波向下傳，在慢轉速下可以觀察到這個波是在敲擊的瞬間，在右側從鏈條底部繞到左側鏈條頂部反彈所得，向下傳遞到底部便停止，符合 $c_{fa} = c_f - v = 0$ 和 $c_{fc} = c_f + v = 2v$ 的理論。

2、向上波：由於鏈條上方的繩張力較大，導致波在接近圓盤的地方會走得比較快，所以波的波長會變得很長，在右上方反彈後和原先向下波一樣瞬間繞到左上方，直到鏈條中斷才會變得比較明顯。

(二)因為入射波反射的現象，我們比較反射波的振動方向，可以得知鏈條上方為固定端，反射波的振動方向與入射波相反。波由下方傳遞時，鏈條凸出方向相同。

三、實驗三：探討旋轉鏈條接觸地面後浮空的時間，與其旋轉速度的關係。

(一)在觀察後，發現其擺盪的週期類似於複擺，但代入複擺的公式後發現不符合。其中不同的原因可能是其轉動慣量與複擺不相同。除此之外，複擺也可以視為一種在繩子上的駐波，但在前幾次的實驗當中，我們發現視波速在不同的鏈條轉動速度下會有所不同。因此我們嘗試以波的角度來觀察。歸納如下：

1、摩擦地板時因為鏈條成順時針旋轉，會受到一個向右方的摩擦力，而與之相似的現象就是在底部對鏈條向右邊敲。

2、鏈條受力而產生擾動，會分別向右方及左方各傳送一個波。在圖片當中可以觀察到右方的波的前端位在圓弧與直線的交界處，而左方的波則是在稍微高一點的地方，我們猜測是因為左方的鏈條會因為圓弧的離心力使得鏈條無法向右方凹，而因此向上移。在此狀況下，波會維持在同一個地方，而鏈條會因為一直受到摩擦力而一直向右方移動。

3、當鏈條離開地面，波會開始移動，正如同之前的實驗所述，左方的波會迅速的向上傳再反彈，反彈後波會向左方凸，又因為右方的波會如同實驗二右側的向上波，因為繩張力的差異而使波長變長，進而導致鏈條的形狀會呈現比較寬的形狀。此時鏈條會受到重力的作用因而向左方擺動。

4、當右方的波傳到右方頂端會反彈，又因為波速為 $c + v$ 因而迅速的傳到鏈條左方的頂端。而當左方的波傳至底端時，視波速會接近於 0，此波再經過能量消耗後會逐漸消失。

5、右方的波傳到左方頂端之後向下反射，當傳到底部時，會使鏈條底部內縮，進而使鏈條重新碰到地板。

(二)鏈條的波形探討

1、左方的波先是向右方凸，經過上方故動端反射後會使波向左方凸。

2、右方的波先是向右方凸，經過反射後向左凸。經過下方時，左方的鏈條也會隨著一起振盪，因此波形相似。再經過左方頂部的反彈之後，波會向右方凸，因此傳到底部時會使圓弧寬度縮短進而使鏈條垂直長度變長，讓鏈條碰到地板。

(三)公式及實驗的探討:

在上述的推導之後，我們推出波所花的傳播時間的關係式為:

$$4 \cdot \frac{2}{g} (\sqrt{v^2 + xg} - v) + 2 \cdot \frac{2v}{g} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{v^2 + xg} + v} \cdot \frac{\sqrt{v^2 + xg} - v}{\sqrt{v^2 + Rg} - v} \right)$$

以一個週期中鏈條懸在空中的時間與鏈條轉速取 log 作圖，圖中會看到斜率非常接近 1 且相關性極高，進而判斷 T 與 V 是接近正比的關係。因此我們將導出的公式畫出來，觀察其形狀可以發現除了前段一小部份之外，後方基本上是呈現斜直線的狀態，而我們所帶入的 V 值界在 5~10 之間，因此會認定為這有正比關係。另外，我們比對兩張圖的斜率可以發現有顯著的差異，我們猜測是因為磨地板的時間與轉速的關係圖也是斜直線，將兩張圖的時間加起來時，斜率會因此而增大。

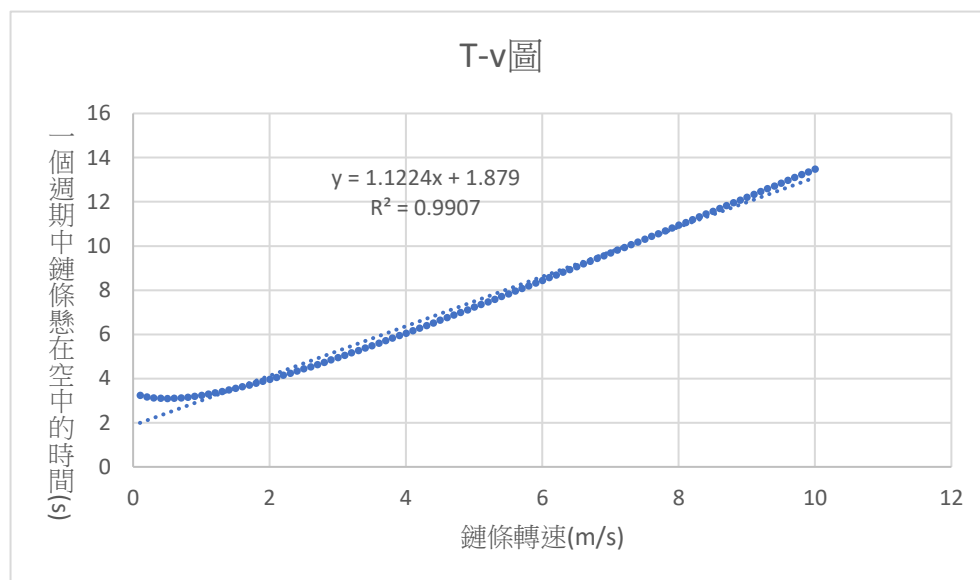


圖 22、將公式的圖，速度每個點相距 0.1m/s，從 0.1m/s 到 10m/s(註:自行繪

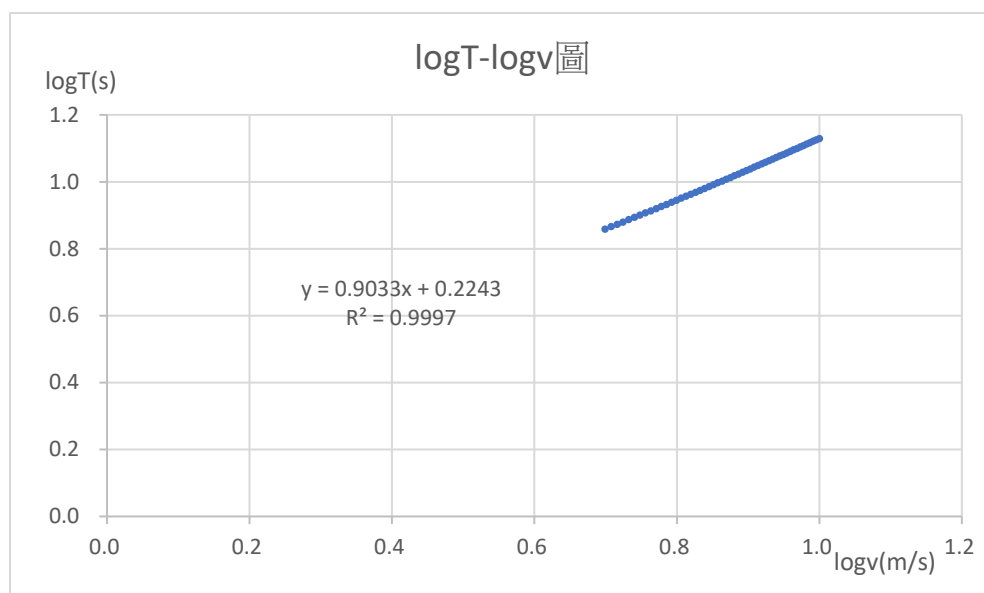


圖 23、將圖 22 的資料取 log 之後作圖，呈現斜直線(註:自行繪製)

(四)誤差的探討：由於轉速不同，曲線部分受到的離心力不同，也就導致鏈條底部與地面的距離會因此而不一樣，所以波由左上方傳至左下方時，鏈條接觸地面時，波傳傳到的地點可能會與圓弧半徑的影響會有些許差異。

四、實驗四: 探討旋轉鏈條被挑出圓盤後，在地面運動的情形。

(一)對鏈條被挑起後移動的距離及移動時間的探討:

在上方的研究結果中，可以看到當使用直徑為 20cm 的圓盤時，可看到 $\log(\text{移動距離})$ 對 $\log(\text{轉速})$ 圖的回歸直線斜率為 1.436。而 $\log(\text{移動時間})$ 對 $\log(\text{轉速})$ 圖的回歸直線斜率為 0.4979，非常接近 0.5。而根據以上兩種的分析方式可以知道轉速與移動距離和移動時間有某種次方的關係。

(二)論文中對此實驗的研究:

在<A walking roller chain>(Grgur Palle、Luka Bakrač、Aleksanda Opančar，2018)的論文中，他們的實驗也有做關於移動距離與鏈條移動速度的探討也有將兩者繪製成散布圖，我們將他們的數據同樣取 log 之後繪製散布圖，發現兩者也會成斜直線。其中他們的數據也有顯示移動距離與鏈條的移動速度也有次方的關係。但是他們在取回歸之後所得到的斜率會因為鏈條上顆粒數不同而有所不一樣。如此一來，我們可以知道鏈條的移動距離與轉速的關係會隨著鏈條本身的初始條件不同而有所不一樣。

(三)圓盤直徑不同所造成的影響:

根據論文中的數據可以知道鏈條的初始條件會影響鏈條的移動距離，因此我們改變圓盤的大小再重複實驗四第一部分的實驗，發現取 $\log$ 之後的回歸斜率與先前的實驗結果不同。但我們並沒有進行第二部分的實驗，在未來可以進一步做更深入的研究。除此之外，以兩者之間有次方關係來看，可以嘗試用因次分析此現象。

陸、結論

- 一、我們透過分析旋轉鏈條上波速的變化，算出直線與曲線部份的繩張力，接著與理論數值相比，驗證我們所提出的理論正確。
- 二、討論敲擊鐵鏈右側後產生的兩個波的行徑軌跡，並利用 Tracker 分析波經過鐵鏈底部時的視速度，測出波順時針經過鐵鏈底部時視波速為 $2v$ ，逆時針經過鐵鏈底部時視波速為 0，與用繩張力推導出的理論視波速吻合。
- 三、我們透過觀察鏈條摩擦地面時的擺動方式，觀察出鏈條的浮空時間會與波在鏈條上傳播的時間有關。之後將波的傳播路徑記錄下來，並且使用前兩個實驗所得的波速公式推導出轉速與鏈條的浮空時間為 $4 \cdot \frac{2}{g} (\sqrt{v^2 + xg} - v) + 2 \cdot \frac{2v}{g} \ln \left(\frac{2v}{\sqrt{v^2 + xg} + v} \cdot \frac{\sqrt{v^2 + xg} - v}{\sqrt{v^2 + Rg} - v} \right)$ 。最後再用實驗值與公式所得的值進行比較，發現兩者的值相近。
- 四、我們透過分析鏈條被挑出圓盤後的移動距離以及移動時間，發現移動距離、移動時間兩者皆與轉動速度皆有次方的關係。接著再透過改變圓盤直徑的大小，發現移動距離與轉速的關係是會改變的，而在未來，可以藉由改變更多不同的圓盤直徑大小來做更進一步的研究。

柒、參考文獻資料及其他

- 1、Grgur Palle、Luka Bakrač、Aleksandar Opančar(2018)A walking roller chain。 *Emergent Scientist*。 2，6。
- 2、Karl Mamola(2023)Physics of the String Shooter。 *The Physics Teacher*。 61。
- 3、Nicolas Taberlet、Jérémy Ferrand、Nicolas Plihon(2019) Propelled Strings: Rising from Friction。 *Physical Review Letters*。 123。

【評語】160030

本研究探討環狀鏈條被吊起並開始旋轉時，在不同轉速下敲擊後所產生擾動波的現象，尤其是分析鏈條上波速和鏈條旋轉速度之間的關係。作者利用雷射切割機自製轉盤，並觀察旋轉鏈條在不同轉速、敲擊不同位置時，在鏈條上所產生的波，並用手機拍下此現象。藉由波的位置變化，以回歸分析來推測波速和鏈條轉速之間的關係。作者研究面向相當豐富，且提出理論模型與實驗數據擬合，是相當紮實的作品。