

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	160020
參展科別	物理與天文學
作品名稱	旋轉的力量－離心力抽水機與其變因對抽水效率的影響
得獎獎項	二等獎 美國國際科技展覽會 ISEF

就讀學校	高雄市立高雄高級中學
指導教師	盧政良 高執貴
作者姓名	羅大釗

關鍵詞	<u>抽水機、流況邊界條件、流體模擬</u>
-----	------------------------

作者簡介



我是高雄中學的羅大釗，高中時開始接觸物理研究，並在過程中學習到理論建模、實驗操作和數據統整的技巧。

本次在老師的推薦下，我將分享這份有關離心力抽水機的研究報告。從設計抽水裝置到將實驗數據與理論比較，每個環節都充滿挑戰，但也讓我深刻體會到科學研究的樂趣與成就感。很高興能參加這次科展，與各位分享我的研究！

2025 年臺灣國際科學展覽會

科 別：物理與天文科

組別：

作品名稱：旋轉的力量－離心力抽水機與其變因對抽水效率的影響

關 鍵 詞：抽水機、流況邊界條件、流體模擬

編 號：

目錄

Abstract.....	1
壹、 實驗動機.....	1
貳、 實驗目的.....	2
參、 研究設備及器材.....	2
肆、 初步觀察現象.....	3
伍、 研究過程及方法.....	5
一、 研究架構.....	5
二、 理論與公式討論: 流量 Q	6
三、 理論與公式討論: 出口流速 v	9
四、 實驗方法與相關變因.....	11
陸、 實驗結果與誤差分析.....	12
(一)、 馬達角速度.....	12
(二)、 浸泡深度.....	14
(三)、 水管長度.....	15
(四)、 水管傾角.....	17
(五)、 水管半徑.....	18
(六)、 水管形狀.....	19
七、 討論與延伸.....	21
延伸討論（一）：漩渦的形成.....	21
延伸討論（二）：各項壓力的相對大小.....	21
延伸討論（三）：流況的相圖.....	22
延伸討論（四）：透過 Flow 3D 模擬，進而驗證實驗和理論情形.....	23
延伸討論（五）：最佳抽水效率.....	235
捌、 結論與展望.....	26
九、 參考資料.....	27

Abstract

This research focuses on the theoretical model and experimental design of a Centrifugal water pump. We focused on the pump's Flow rate and exit velocity, which can be used to vary the amount of water over time and its pumped location. In the observation, we discovered different regimes of flow and provide with qualitative explanation of the boundary conditions. In our theoretical model, we first considered the basic centrifugal force and gravity. These two forces describe the basic motion of water. However it couldn't be used to predict flow rate, then we used the Bernoulli's equation to calculate pressure difference and sufficiently considered friction drag during turbulence while considering straw's roughness, we also observed excellent predictive power with experimental data. Then I used $F=ma$ to calculate the sum of forces acting on water, with centrifugal force, gravity and friction drag, we can finally get the expression for exit velocity. We varied 6 different parameters of pump by 3D printing, which were experimentally verified to compare with the theory, also analysis the possible deviations. Therefore, we were able to design a fully controllable and optimized centrifugal pump.

摘要

此研究是關於一個離心力抽水機的理论建模和實驗設計，我探討了此抽水機流量與出口流速、分別影響了時間內抽出水量或抽水落地的位置。在初步的實驗觀察中、我發現抽水時的不同流況以及其影響，並且用定性解釋去描述它的邊界條件。在我流量的理論建模中，我考慮了基本的離心力與重力、雖然這兩種力描述了水的運動、但無法用來預測流量。我再加入伯努力方程式來計算壓差、並充分的考慮摩擦阻力在紊流情況和水管材質。之後我利用 $F=ma$ 推導水受合力的情況、考慮離心力、重力與摩擦阻力能到出口流速的預測。最後將理論裡實驗比較、結果非常相似。我利用 3D 列印改變 6 種抽水機的變因，將每項的結果與理論比較、並分析其誤差的原因。最後利用先前的結論能夠的設計一個可客製化與最佳化的離心力抽水機。

壹、實驗動機

我從平常在運動時在操場看到灑水器得到靈感，其旋轉時噴灑水珠淋到目標的草地。這樣的裝置讓我想到兩種「輸出」的變因：包括水的流量、影響了草地得到的水量；水的出口流速、經計算斜拋後可以改變水的落點、進而精準澆灌或抽到理想的位置。

離心力抽水機是工程上常見的一種機器，其運作原理是在一根轉軸上接上水管，旋轉產生的離心力分力，會將浸泡在水面下的水管會把水管裡的水往上抽，這個現象包含了要對水進行受力分析，還要考慮其流體的特性，不同變因下的抽水機也觀察到不同流況，我將每種流況的邊界條件與力分析進行了完整的理論架構。

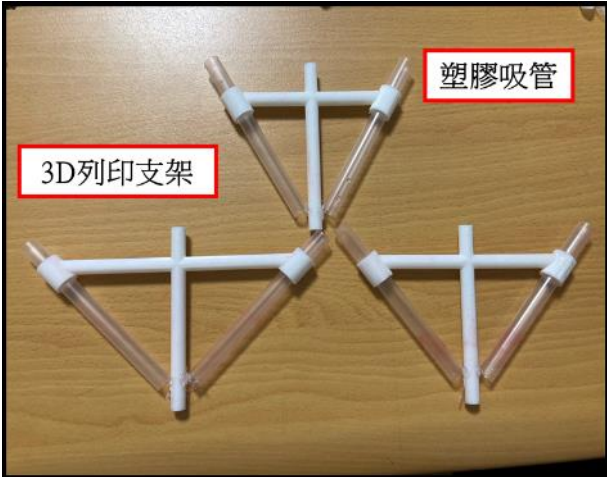
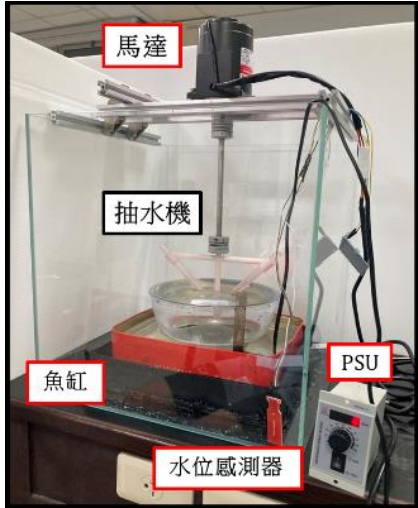
我藉由 3D 列印抽水機來更改抽水機本身的相關變因、就能影響抽水機的量或速度，因此我測試了 6 種離心力抽水機的變因對於流量和出口流速的影響，並在我理論建模中考慮了離心力、重力、壓差和摩擦力，目標在預測不同變因或流況下抽水機的流量與出口流速

貳、實驗目的

1. 研究離心力抽水機的變因對**流量**和**出口流速**的影響
2. 實驗時觀察到不同**流況**，探討流況間的變界條件。
3. 將不同流況分開進行理論建模、並解釋其原理上的不同，以及如何影響結果。
4. 詳細的分析抽水時的**受力**，考慮離心力、重力、靜壓和**液體的特性**
5. 利用**3D 列印**打造抽水機，更改**6 種相關變因** (角速度、深度、長度、傾角、直徑和形狀)。
6. 將實驗和理論比較，分析誤差，並得到最佳抽水效率。

參、研究設備及器材

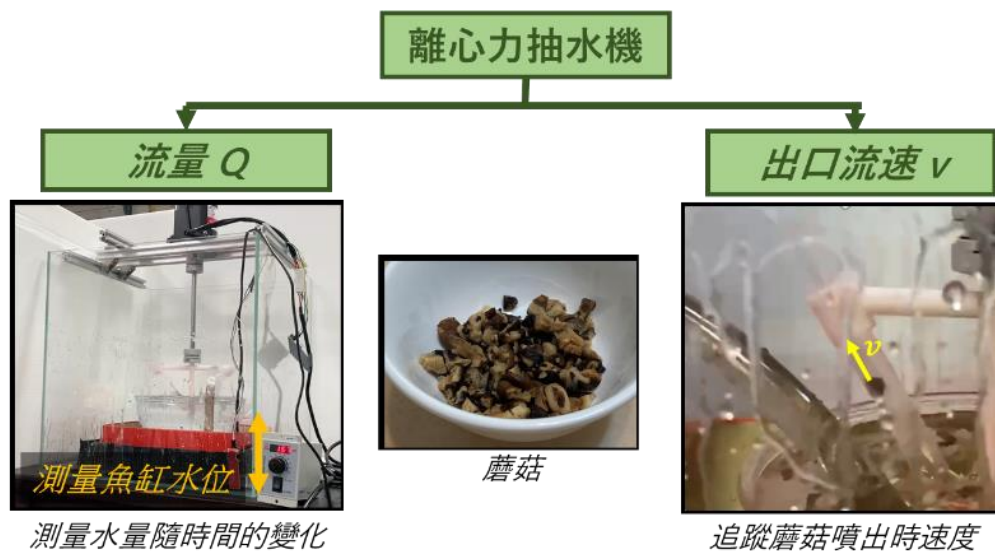
1. 器材：馬達，軸承，3D 列印的抽水機，魚缸，水位感測計，蘑菇，補水馬達
2. 儀器：筆電(含 Flow 3D、Visual Studio Code、Tracker、TinkerCad 等軟體)、攝影器材。

抽水機結構	器材裝置圖
 3D 列印支架 塑膠吸管	 馬達 抽水機 魚缸 PSU 水位感測器
3D 列印支架、塑膠吸管、軸承	整體裝置示意圖

圖(一) 抽水機結構與全部器材裝置示意圖 (圖片為第一作者拍攝)

關於**流量**：用 Arduino 水位感測器測量水位隨時間的累積

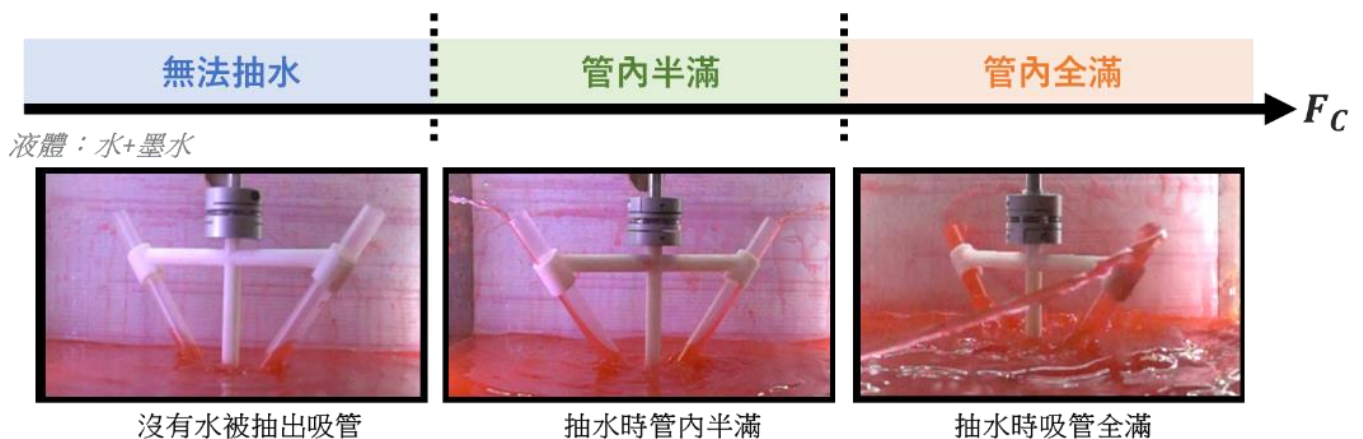
關於**流速**：用切碎的**蘑菇**當粒子，在抽水時**追蹤其軌跡**(其密度相近水、不影響結果)



圖(二)測量方法 (圖片為第一作者拍攝)

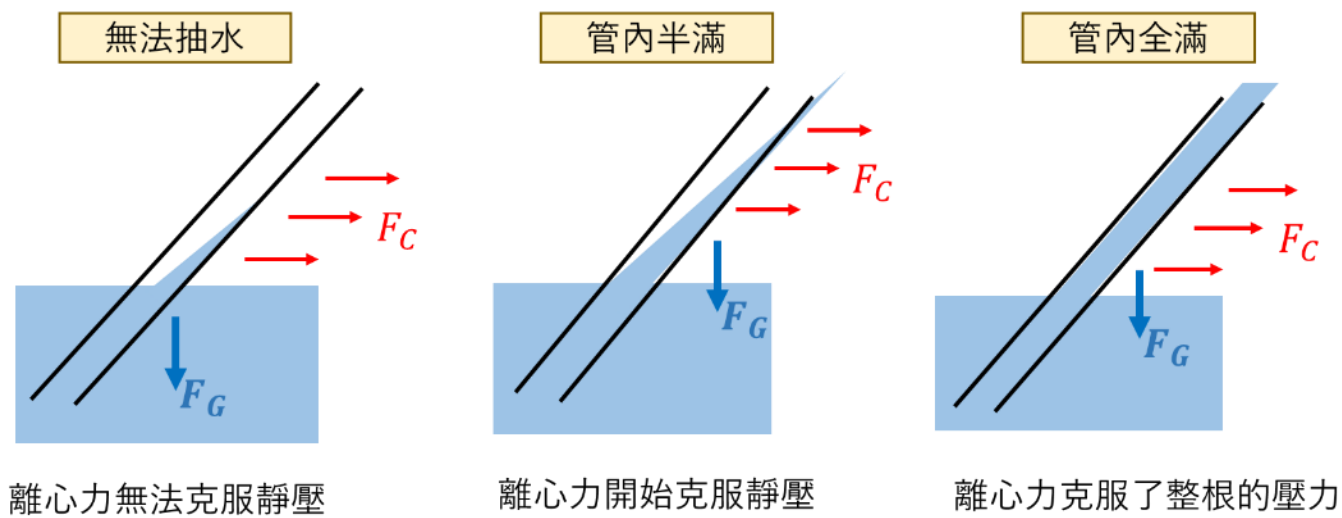
肆、初步觀察現象

在初步的實驗中、在不同離心力下的水流流況不同，其流況像底下這樣：



圖(三) 各種流況展示 (圖片為第一作者拍攝)

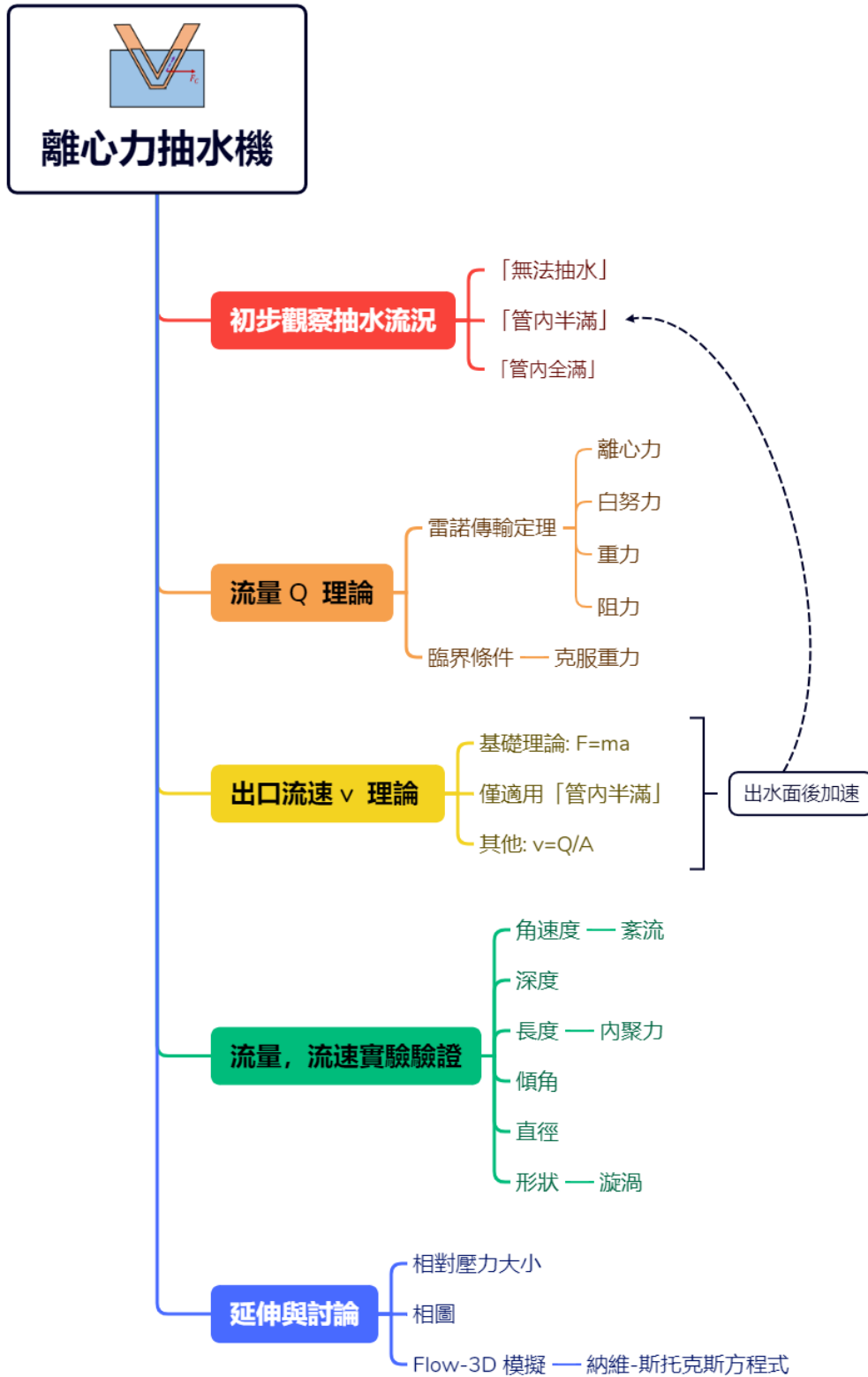
- 狀況一 無法抽水:** 此時的離心力分力不足以克服水下靜壓、導致水無法被抽出。(也有可能水「爬」至管子的一半)
- 狀況二 管內半滿:** 當離心力提升至勉強能克服靜壓、水會沿著管壁流出來。
- 狀況三 管內全滿:** 最後，離心力可以克服整個管子充滿水的重量後，整根都會被水填滿



圖(四) 圖像化表示各流況 (圖片為第一作者製作)

伍、研究過程及方法

一、研究架構



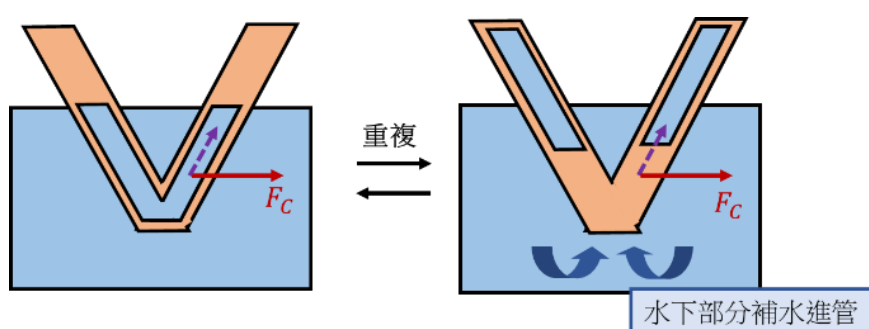
圖(五) 離心力抽水機之研究架構 (圖片為第一作者製作)

二、理論與公式討論: 流量 Q

(一) 定性解釋

在吸管參考系中、當抽水機開始旋轉時，會發生以下步驟：

1. 旋轉產生離心力、其分力把水往上推、上推時需克服重力和阻力。
2. 當原本的水在上方、浸泡在水裡的水管會從旁邊補水、重新填滿水管。
3. 達平衡後一直 步驟一抽水、步驟二補水

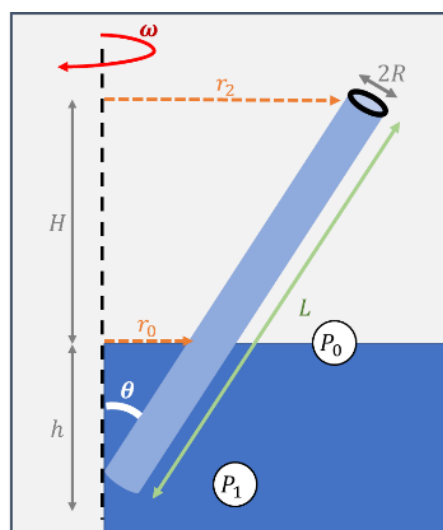


圖(六) 抽水的定性原理 (圖片為第一作者製作)

(二) 描述整個系統

以下是符號代表的意義：

表(一) 符號表 (圖表為第一作者製作)



h 浸泡深度	P_0 水面壓力
H 水上抽水機的高度	P_1 水管底部壓力
r_2 上方(最大)半徑	L 長度
r_0 水面時的半徑	θ 傾斜角度
R 水管半徑	x 半徑(變數、積分計算)
Q 流量	v 流速
f 摩擦因子	D_s 管內深度
r_1 管底(最小)半徑	

圖(七) 各項變因代表符號 (圖片為第一作者製作)

首先、我們先定義**流量**：

$$Q = \frac{dV}{dt} = Av$$

將此系統用**雷諾傳輸定理** (Reynold transport theorem) 來描述：

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} u dV + \int_{CS} ue\vec{v}d\vec{A}$$

我們能確定吸管是一個**控制體積** (control volume)，且 $u_0 = u_1$ ，可以化簡成 壓力和 = 0 的形式：

$$\sum F = \rho Q(u_0 - u_1)$$

$$\sum F = 0$$

$$\sum P = 0$$

(三) 分別討論所有壓力(總和=0)，

壓力 1: 離心力

離心力計算： $F_c = mr\omega^2$

我們需要積分水面上水體受到的總離心力，範圍是 r_0 到 r_1 ：

$$= \int_{\frac{r_1}{\sin\theta}}^{\frac{r_0}{\sin\theta}} (mx\omega^2 \sin^2 \theta) dx / \pi R^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (r_0^2 - r_1^2)$$

壓力 2: 重力

這裡指的重力是水面上水的重量、因此僅有「**管內全滿**」會有這項壓力。

將這項重力進行積分：

$$= \int_{\frac{r_0}{\sin\theta}}^{\frac{r_2}{\sin\theta}} (-mg\cos\theta) dx / \pi R^2 = -\rho gH$$

壓力 3: 動壓與靜壓(白努力公式)

我們利用白努力方程式求得 P_0, P_1 之間的壓力差、包括了動壓與靜壓，動壓可用來計算流量：

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho gh = P_0 + \frac{1}{2}\rho u_0^2 + \rho g$$
$$\Rightarrow P_0 - P_1 = -\rho \frac{Q^2}{2\pi^2 R^4} - \rho gh$$

壓力 4: 阻力

最後、我們需要考慮流體的特性、藉由達西－威斯巴哈方程式、

其摩擦因子的公式也同時考慮了雷諾數與管壁材質、利用數值迭代可求其值：

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \times \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

將摩擦因子代回吸管長度，得到摩擦力：

$$F_D = -\rho f \frac{L}{2R} \frac{v^2}{2} \Rightarrow -\frac{\rho f L Q^2}{4R^3 \pi^2}$$

再把四項壓力合併、得到最後流量的表達式：

$$\left(\frac{1}{2}\rho\omega^2(r_0^2 - r_1^2)\right) + \left(-\frac{\rho Q^2}{2\pi^2 R^2} - \rho gh\right) + (-\rho gH) + \left(-\frac{\rho f L Q^2}{4\pi^2 R^3}\right) = 0$$
$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\omega^2(r_0^2 - r_1^2) - g(\frac{L}{\cos\theta})}{\frac{1}{2\pi^2 R^2} + \frac{fL}{4\pi^2 R^3}}}$$

另外，我們新增一個管流的入口壓力流失項 α ：

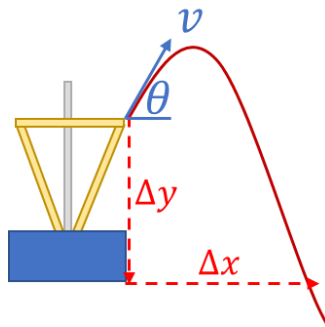
$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\omega^2(r_0^2 - r_1^2) - g(\frac{L}{\cos\theta})}{\left(\frac{1}{2\pi^2 R^2} + \frac{fL}{4\pi^2 R^3}\right)\alpha}}$$

在紊流情況下、入口會有更多的壓力流失 (α 增加，流量下降)，其值是從文獻中取得。

三、理論與公式討論: 出口流速 v

(一) 定性解釋

抽水過程原理與流量相同，當水被抽出來時、流速會影響水流斜拋後的軌跡，進而影響其落點。



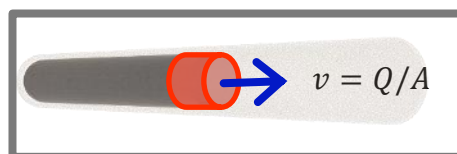
圖(八) 出口流速與角度影響其距離 (圖片為第一作者製作)

根據流量定義，我們可以推導得：

$$Q = \frac{dV}{dt} = Av$$

$$v = Q/A$$

因此，在正常情況下，其流速可由前面計算的流量 Q 除上截面積 A 。



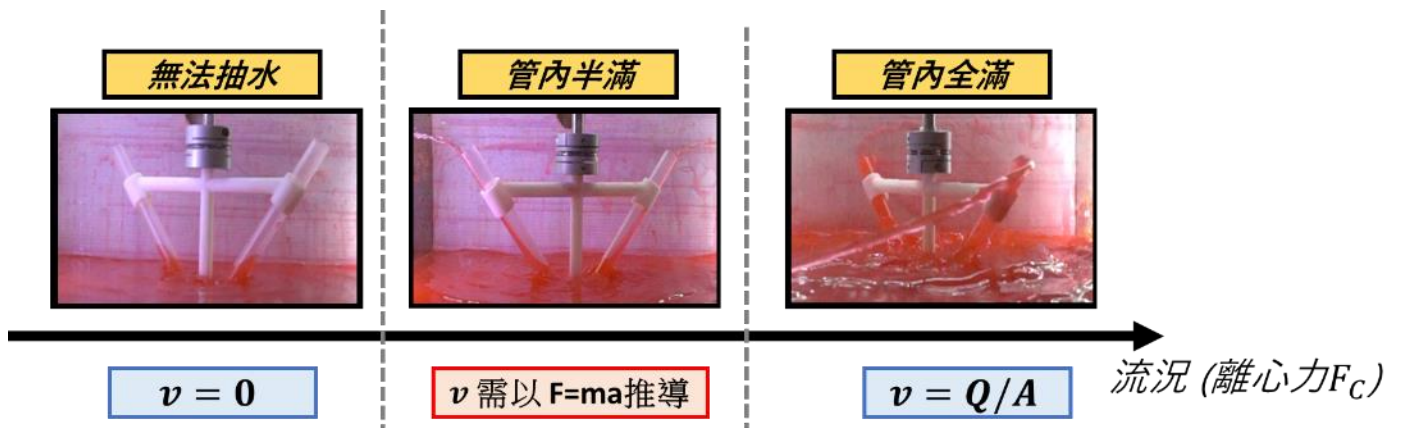
圖(九) 正常情況下， $v=Q/A$ 的展示 (圖片為第一作者製作)

可是在**特定情況下**、我們觀察到「**管內半滿**」的流況、那此時 **A 就不是定值**了。此時就需要討論出水面後的受力情況，利用 $F=ma$ 可以推出。

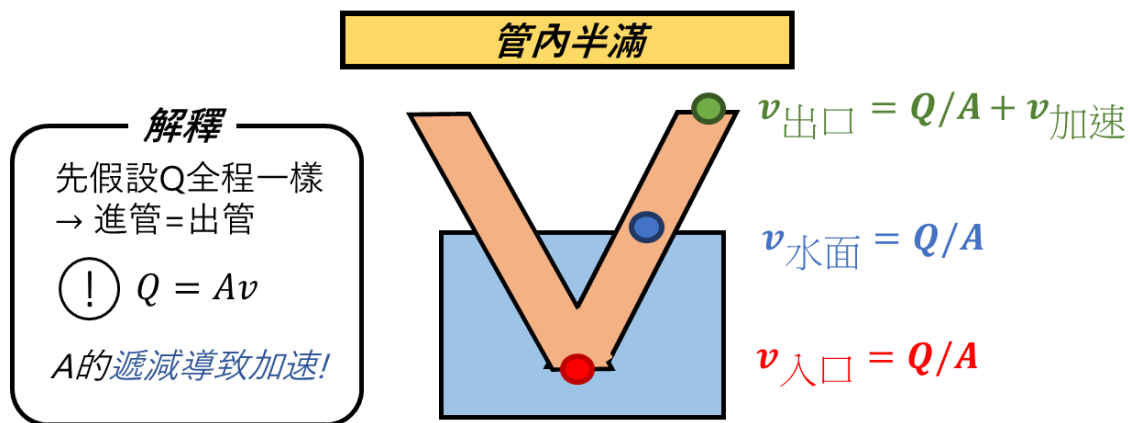


圖(十) 顯示了遞減的水截面積 (圖片為第一作者拍攝)

以下是統整過後的圖表，可以總結一下結論：



圖(十一) 可以看出「管內半滿」是唯一區要特別討論的 (圖片為第一作者拍攝)



圖(十二) 解釋加速的原理 (圖片為第一作者製作)

(二) 理論計算

由前面的解釋可得知、僅「管內半滿」的水面上的水會加速。

我們將考慮離心力、重力和阻力的合力積分，並用 $F=ma$ 計算，範圍是水面上 r_0 到 r_2 ：

$$\sum F = -mg\cos\theta - \frac{fL}{D_s} * \frac{\rho v^2 A_s}{2} + m\omega^2 x \sin^2\theta = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dx}{dt}$$

利用鏈鎖率、化簡積分

$$\Rightarrow \int_0^v v dv = \int_{\frac{r_0}{\sin\theta}}^{\frac{r_2}{\sin\theta}} -g\cos\theta + \omega^2 \sin^2\theta x dx - \frac{f}{D_s} \frac{v^2}{2}$$

最後得到出口流速的表達式、前面的 Q/A 平方是**原有的流速**；後面項是**水面上獲得的加速度**：

$$v = \sqrt{\frac{Q^2}{A^2} + \frac{\omega^2(r_2^2 - r_0^2) - 2gH}{1 + f/D_s}}$$

其中 D_s 是吸管內的深度、我們藉此可更加準確的預測**有效**摩擦力面積：

$$D_s = R \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right)$$

四、實驗方法與相關變因

實驗前置作業

1. 流量 Q : 需要將 Arduino 水位感測器放進魚缸裡、並開啟測量
2. 流速 v : 將切碎的蘑菇放入「抽水碗」裡，到時候就會沿著水流並追蹤其軌跡了
3. 將「補水馬達」開啟，以確保實驗過程中**水位維持固定** (原理是抽水碗中的水位永遠是滿的)

實驗操作

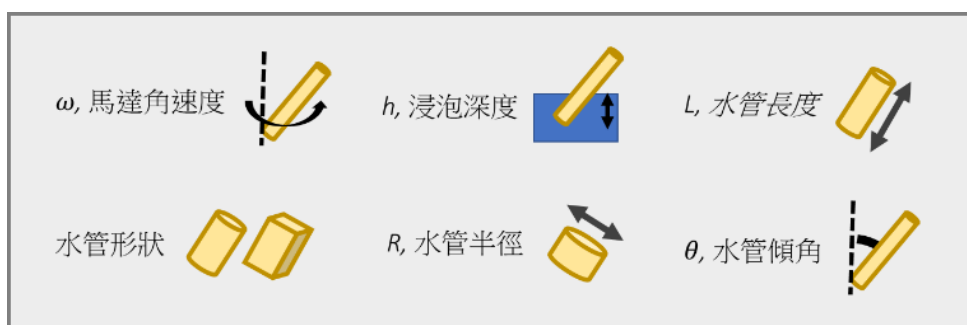
1. 開啟馬達的電源供應器、調到適當的速度 (轉速由慢動作 tracking 得知)

統計數據

1. 以程式讀取水位感測器的數據
2. 以 Tracker 追蹤噴出的蘑菇碎

相關變因

相關變因包含：馬達角速度、浸泡深度、水管長度、水管傾斜角度、水管形狀和水管直徑

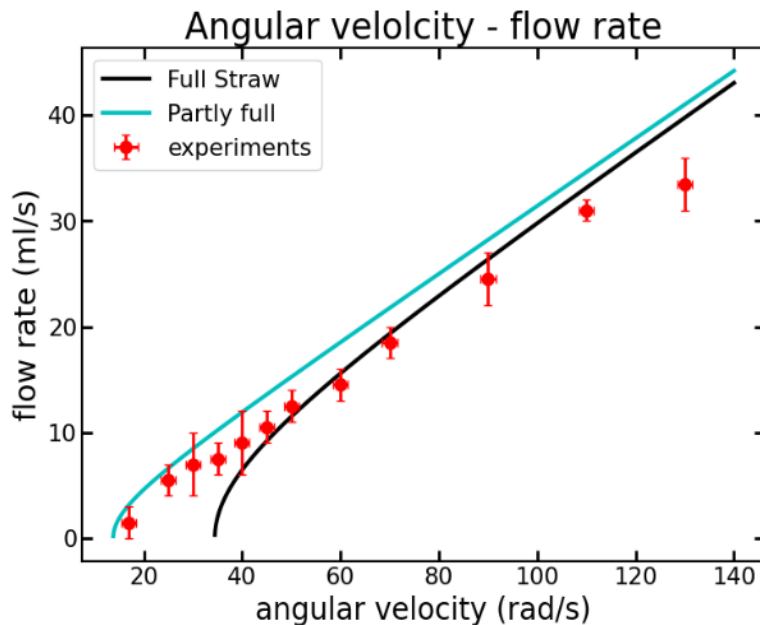


圖(十三) 圖像化的 6 種變因 (圖片為第一作者製作)

陸、實驗結果與誤差分析

(一)、馬達角速度

(一) 流量 Q

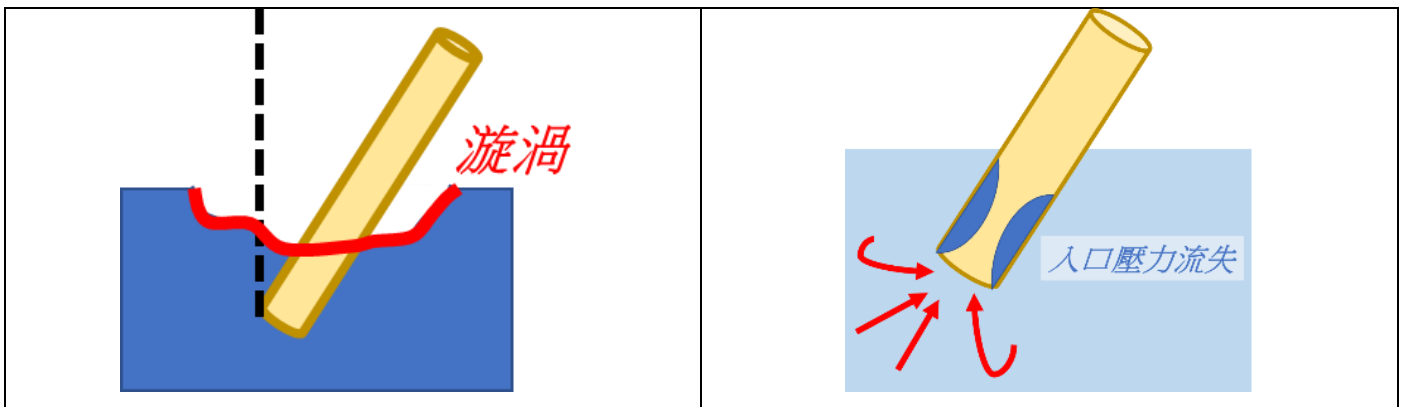


表(二) 流量對角速度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

從畫出的理論線中，我們能得到這些資訊：「**管內半滿**」的**抽水臨界值**比「**管內全滿**」還低、這個結果是相當物理的，因為「**管內全滿**」時的水重量較重，也代表其需克服更多的**重量**。

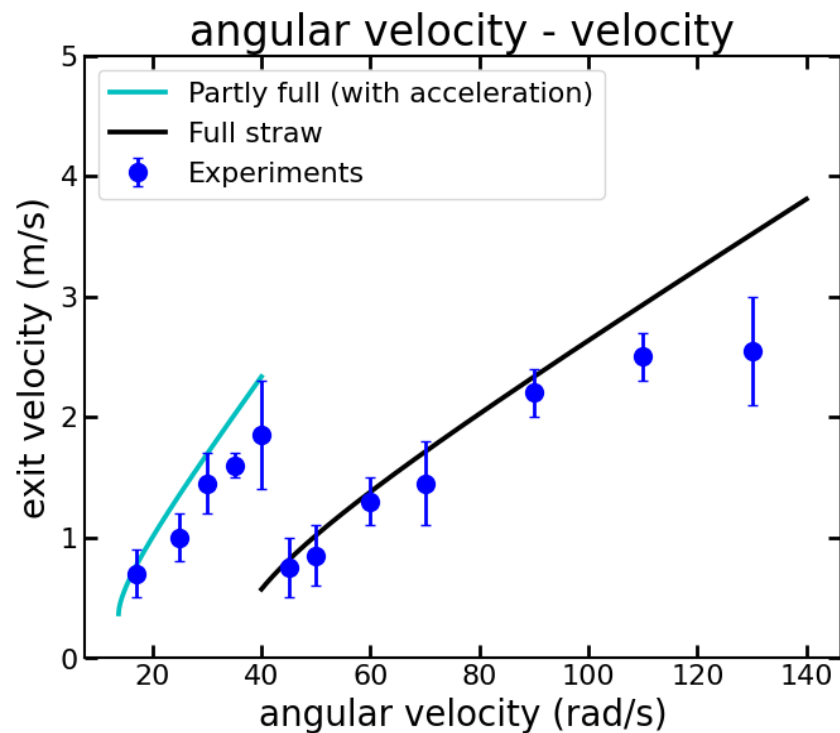
實驗上、當馬達角速度較大時，其產生的**離心力**也較大，解釋了上升的趨勢。

理論與實驗比較中，我們的理論能做到很好的預測，誤差只出現在高角速度，這是因為**漩渦**的形成與入口**壓力流失**。



圖(十四) 漩渦和入口壓力流失示意圖 (圖片為第一作者製作)

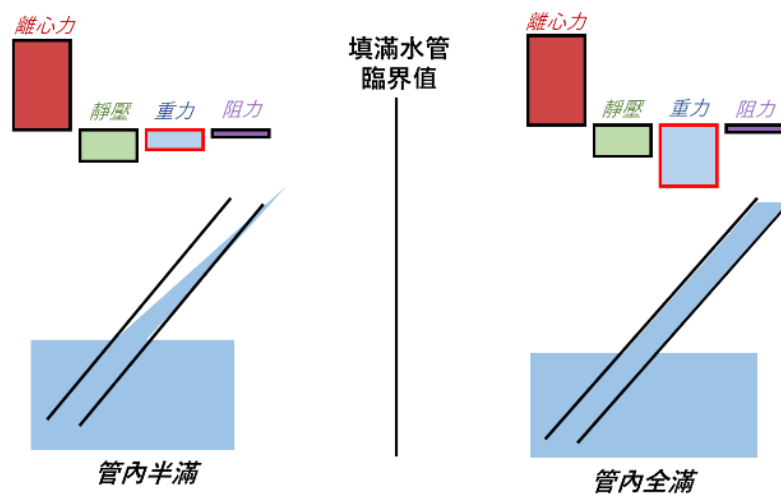
(二) 出口流速 v



表(三) 出口流速對角速度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

我們可以從理論線中發現「管內半滿」與「管內全滿」兩段理論線對不起來、這是我們特別的發現：這是因為當達到「管內全滿」的臨界值時、水突然填滿了管內導致其重量突增，對於流速有負面的影響。

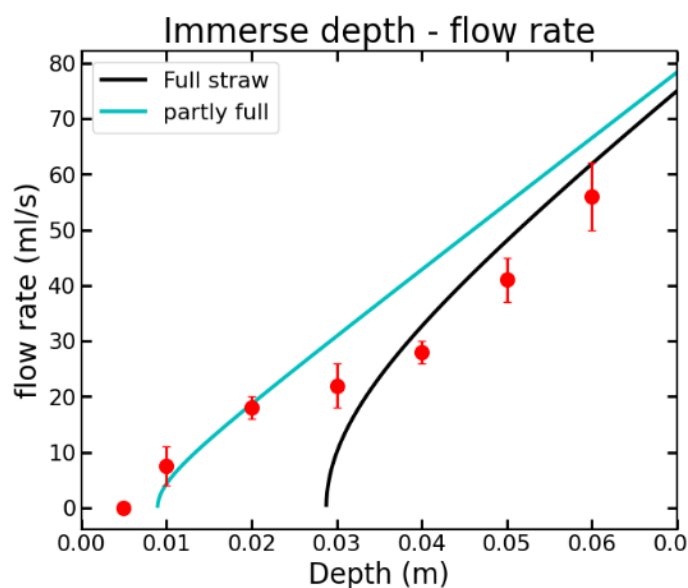
實驗上、當馬達角速度較大時，其產生的離心力也較大，解釋了兩段上升的趨勢。在管內全滿的情況下，出口流速與流量成正比，這也解釋了高角速度的誤差與流量同理。



圖(十五) 臨界處下降的流速示義圖 (圖片為第一作者製作)

(二)、浸泡深度

(一) 流量 Q

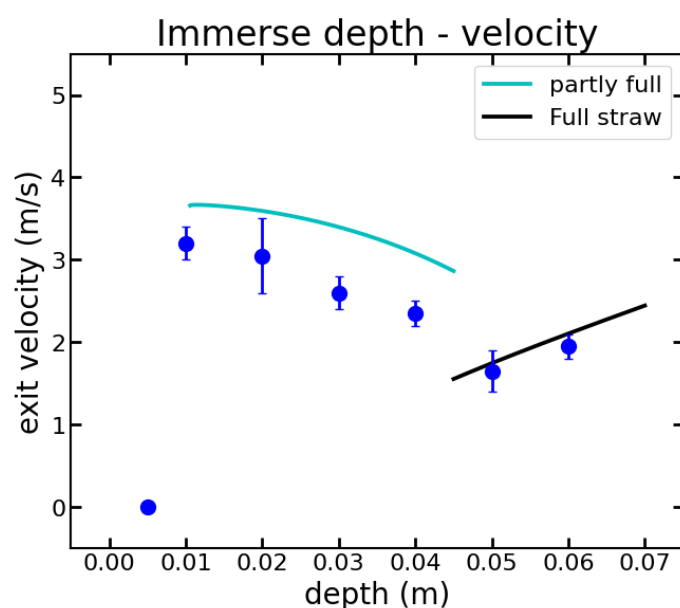


表(四) 流量對深度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

可以發現、理論可以很好的預測抽水的臨界值，當太淺時是無法抽水的。

從實驗結果得到，浸泡愈深的流量愈大。這是因為浸泡深的情況下、離心力的積分範圍會變大。總離心力的上升會讓流量增加。

(二) 出口流速 v



表(五) 出口流速對深度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

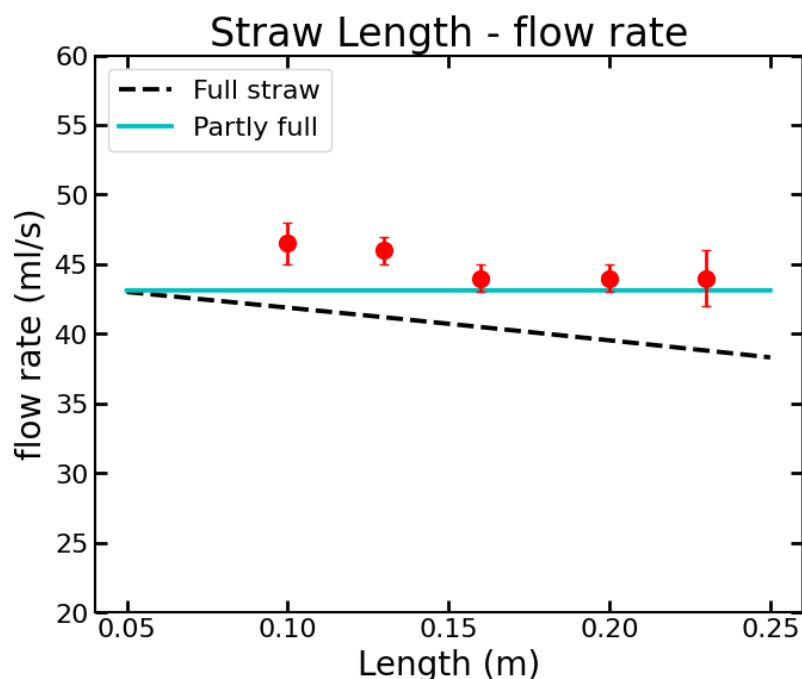
與流量相似，抽水臨界值可以被預測。

兩種流況有著截然不同的趨勢：「管內半滿」會稍微下降、這是因為當水管更浸入水裡時、水面上可供加速的範圍更小，讓 $v_{加速}$ 這項下降；

關於「管內全滿」，其出口流速為 $v=Q/A$ ，因此流速會與流量一起增加。

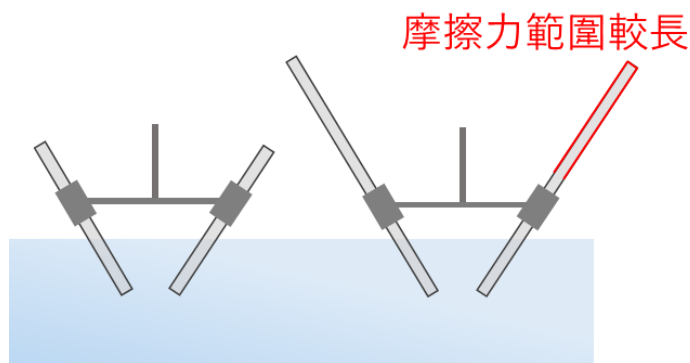
(三)、水管長度

(一) 流量 Q



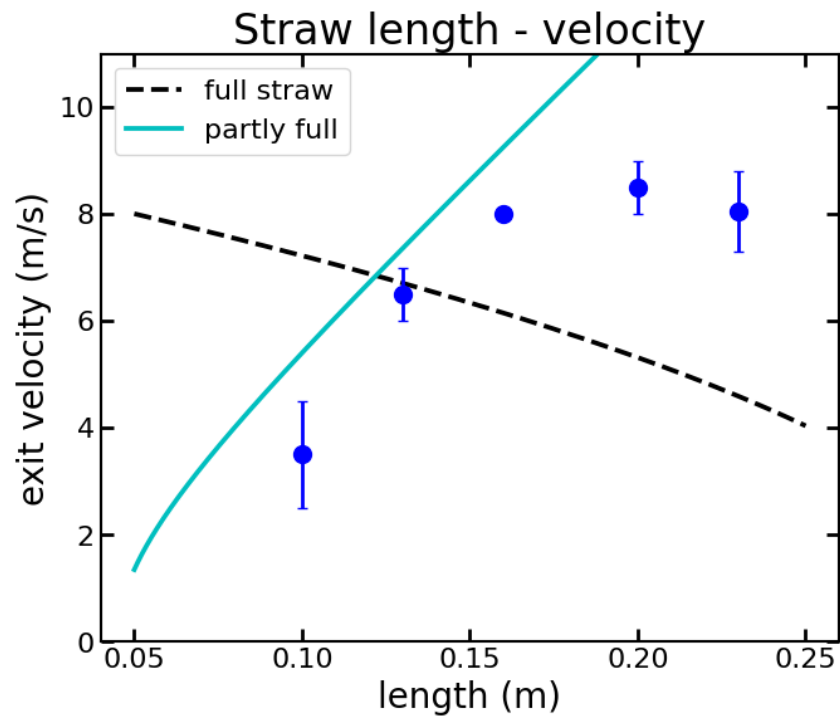
表(六) 流量對長度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

從結果得知，水管長度對流量的影響不大，稍微的下降趨勢可以解釋成長度長的摩擦力較大。



圖(十六) 摩擦力範圍表示圖 (圖片為第一作者製作)

(二) 出口流速 v



表(七) 出口流速對長度實驗結果 (圖表為第一作者製作)

水管長度增加時、其出水面後的加速範圍增加，獲得更多的 $v_{\text{加速}}$ 。

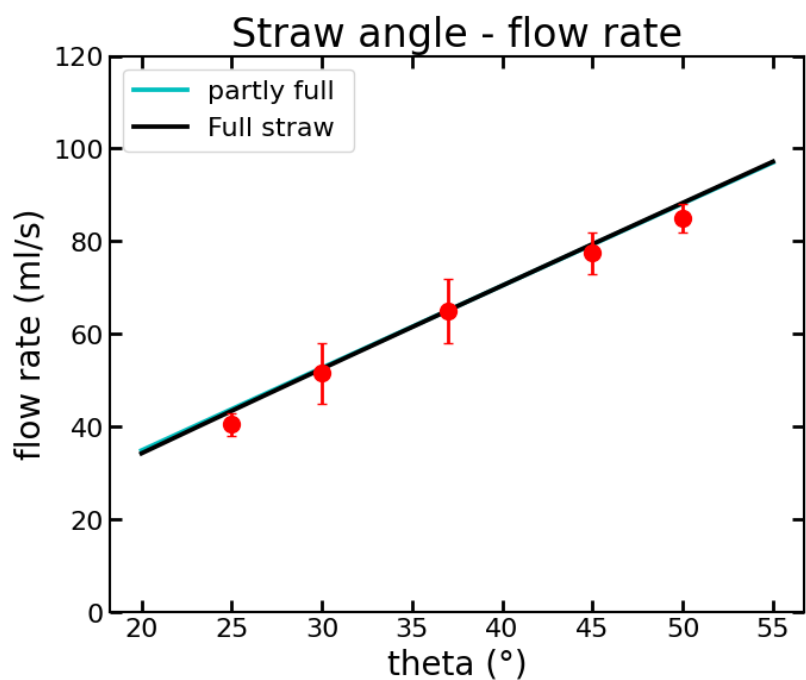
後面的誤差可以被水的內聚力解釋：水的內聚力會防止水被拉伸太多，導致截面積停止減少，結果就是截面積不變、出口流速也不改變。



圖(十七) 水因為內聚力而停止減少截面積 (圖片為第一作者拍攝)

(四)、水管傾角

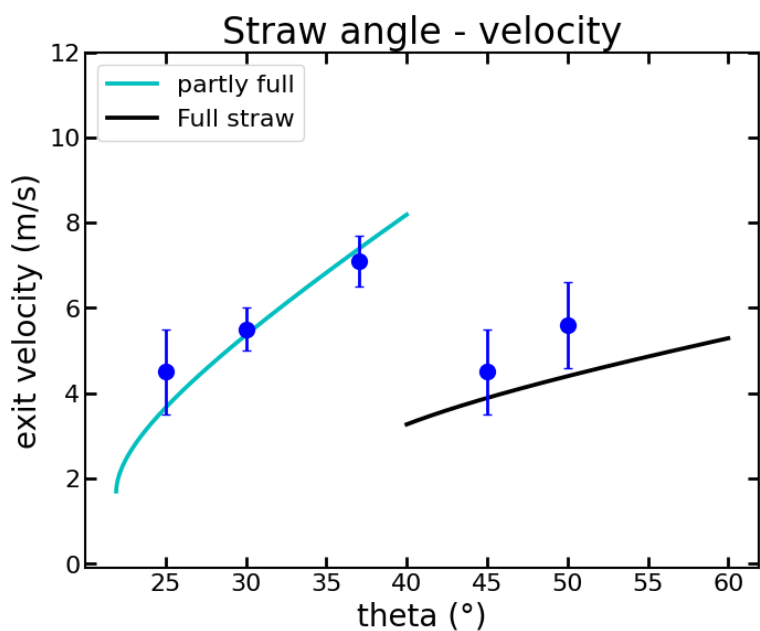
(一) 流量 Q



表(八) 流量對傾角實驗結果 (圖表為第一作者製作)

當水管的傾角上升、其獲得更多的離心力(與轉軸的距離增加)；同時須克服的重力也減少，因為傾角上升會讓其垂直高度漸少。

(二) 出口流速 v

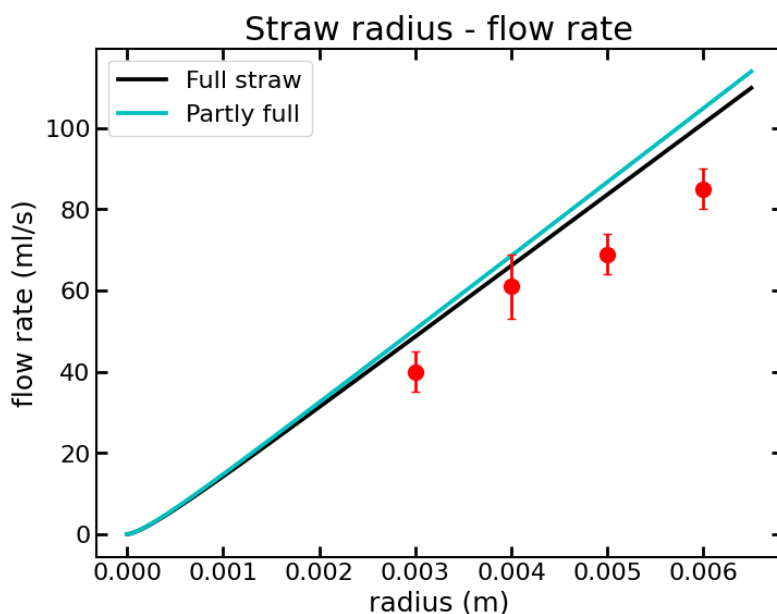


表(九) 流量對傾角實驗結果 (圖表為第一作者製作)

與流量同理，離心力上升與重力減少會讓出口流速上升。

(五)、水管半徑

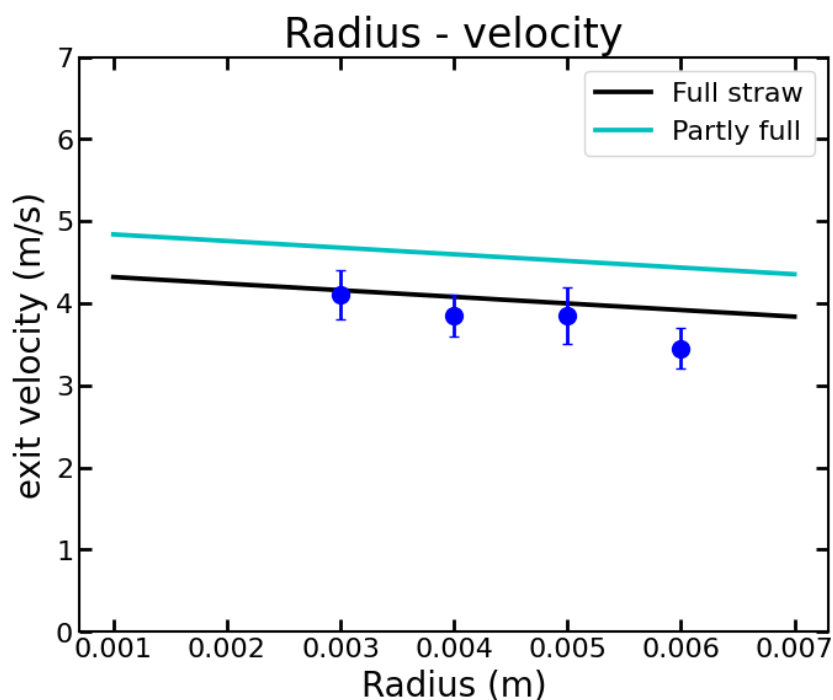
(一) 流量 Q



表(十) 流量對水管半徑實驗結果 (圖表為第一作者製作)

我們可以用 $Q=Av$ 來理解這結果；水管的半徑並不會大幅影響**流速** (因為半徑已經被除到壓力裡)、那增大半徑可以使水以一樣的流速流入，但擁有更大的流入空間，解釋了增加的流量。

(二) 出口流速 v

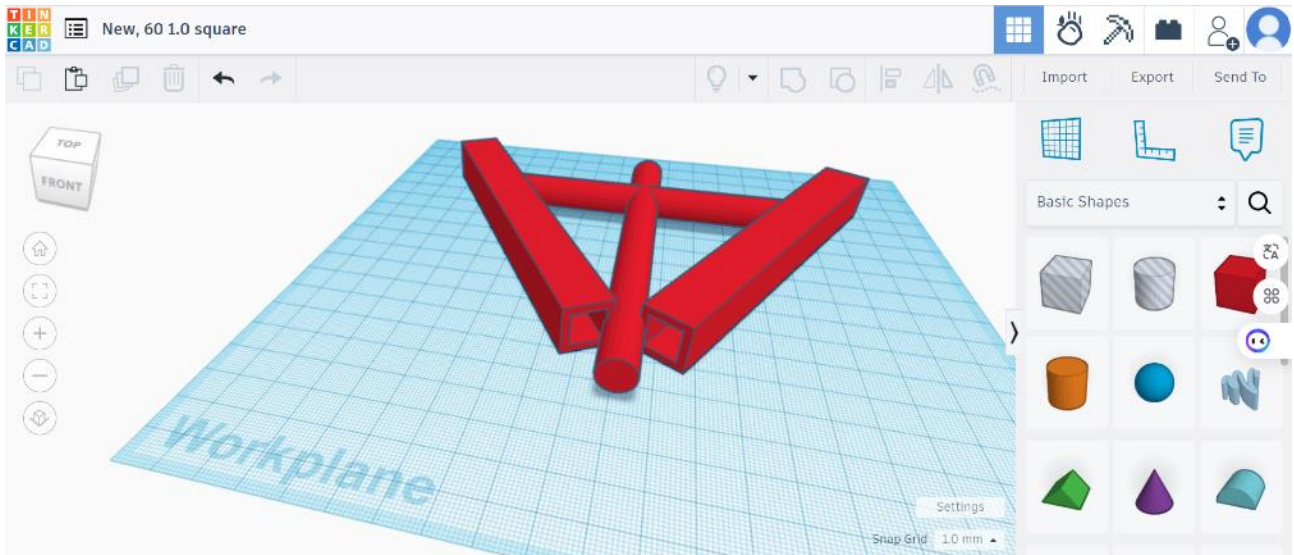


表(十一) 出口流速對傾角實驗結果 (圖表為第一作者製作)

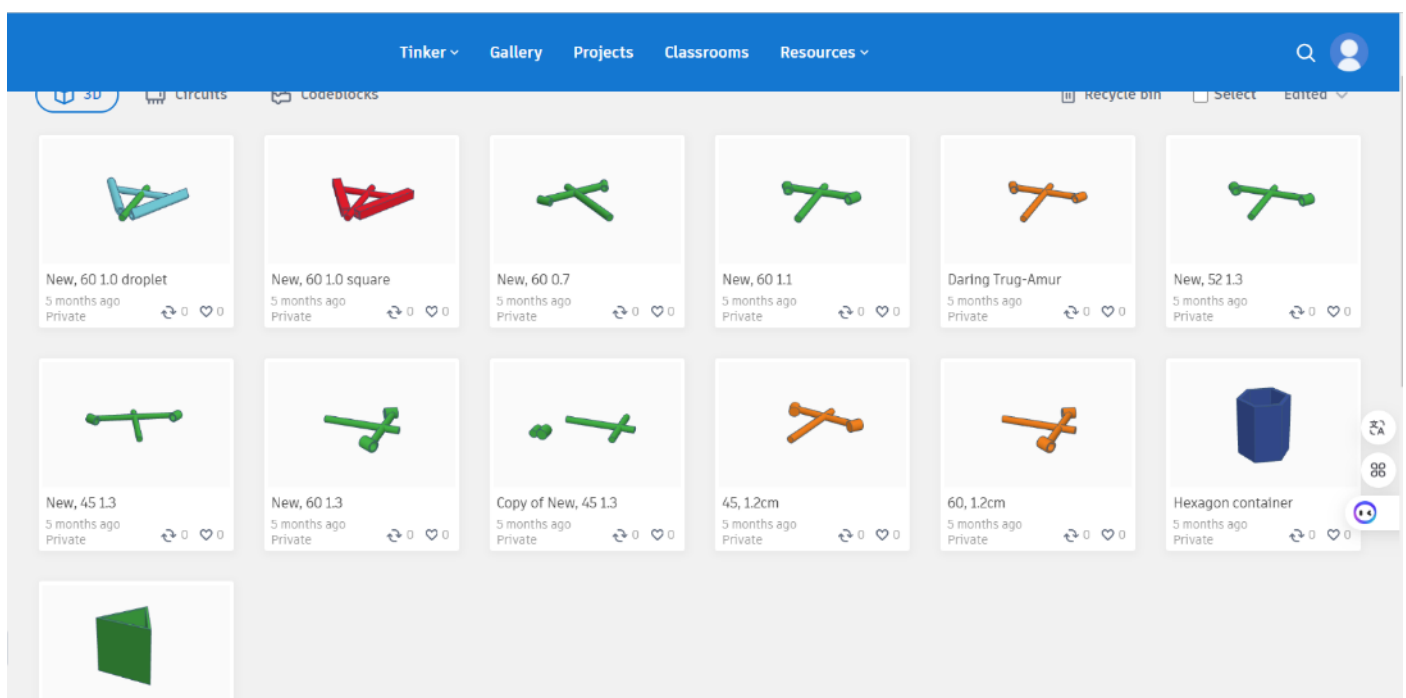
半徑不大幅影響出口流速，稍微下降的結果是因為較粗的水管與水有更多摩擦力接觸面積。

(六)、水管形狀

我想測試**固定面積**下，改變水管的形狀對結果的影響，因此我利用 TinkerCad 製作 3D 列印的建模，最後設計了圓形、方形與水滴形

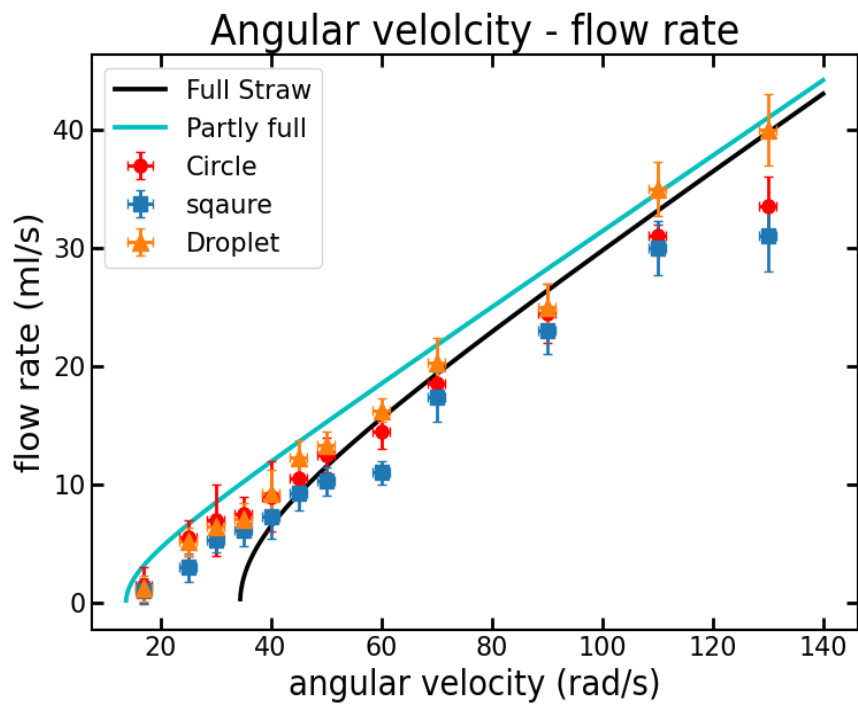


圖(十八) TinkerCad 內部建模的介面 (圖片為第一作者製作)



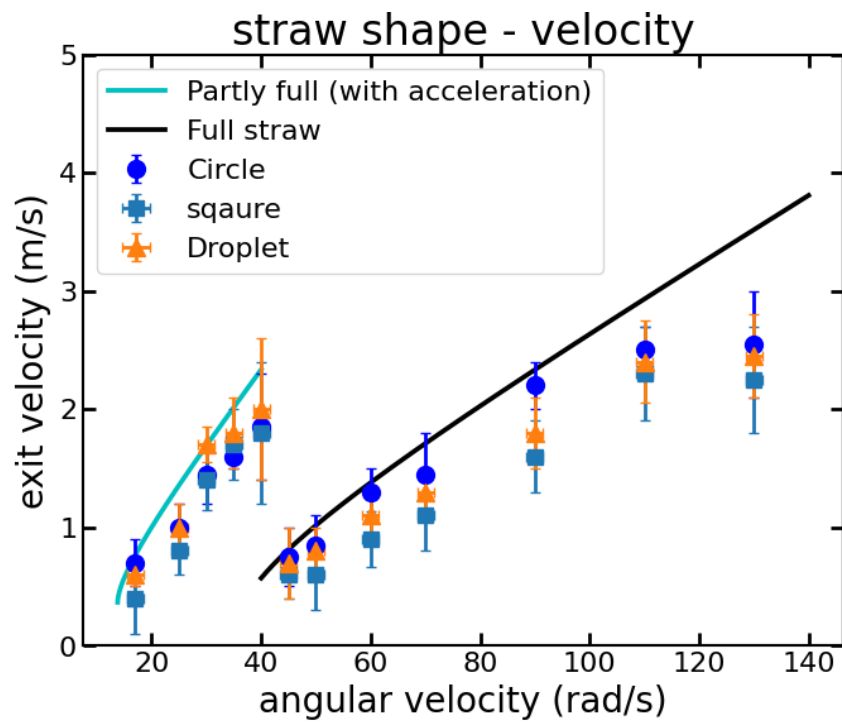
圖(十九) 在 TinkerCad 中設計的大量抽水機 (圖片為第一作者製作)

(一) 流量 Q



表(十二) 流量對水管形狀實驗結果 (圖表為第一作者製作)

(二) 出口流速 v



表(十三) 出口流速對水管形狀實驗結果 (圖表為第一作者製作)

從結果可以看出、改變形狀影響不大，但發現了有趣的**漩渦**，放在延伸與討論再做說明。

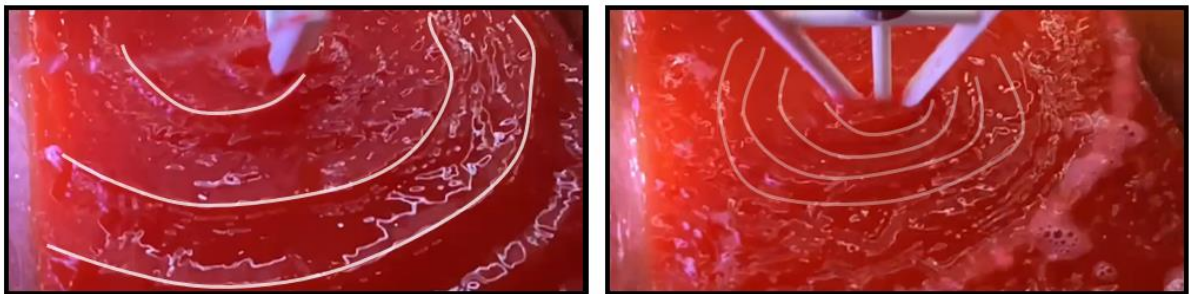
柒、討論與延伸

延伸討論（一）：漩渦的形成

在旋轉的抽水機運作時，其水管會與水產生阻力；當累積一段時間後、會有波浪產生，且因為是360度環繞著抽水機、我把它稱作「漩渦」。

漩渦會因為變因的不同而產生不同「強度」，可以理解成各波浪的大小、以下是我的發現：

- (1) 愈大的水阻、漩渦**強度愈大** (角速度、深度和直徑↑ 可以提升水阻)
- (2) 不同的**水管形狀**(圓形、方形和水滴型)、水滴型產生了非常小的碎波、這是因為其流體力學的形狀導致它可以**破浪**、才產生了小波；反之方形的波浪非常大、因為它完全是一個平面，水阻非常強。

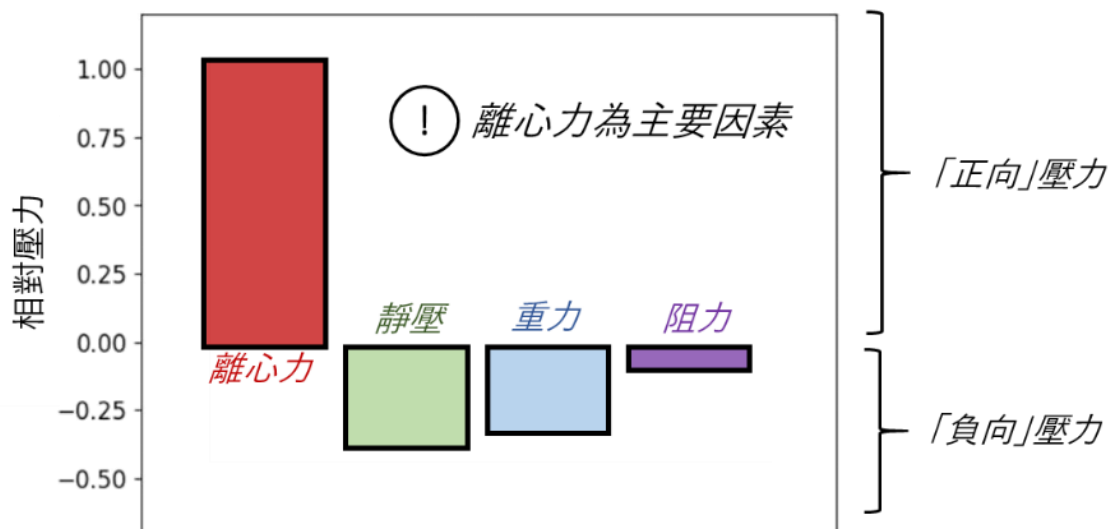


圖(二十) 方形水管的大漩渦(左)和水滴型的小碎波(右) (圖片為第一作者拍攝)

延伸討論（二）：各項壓力的相對大小

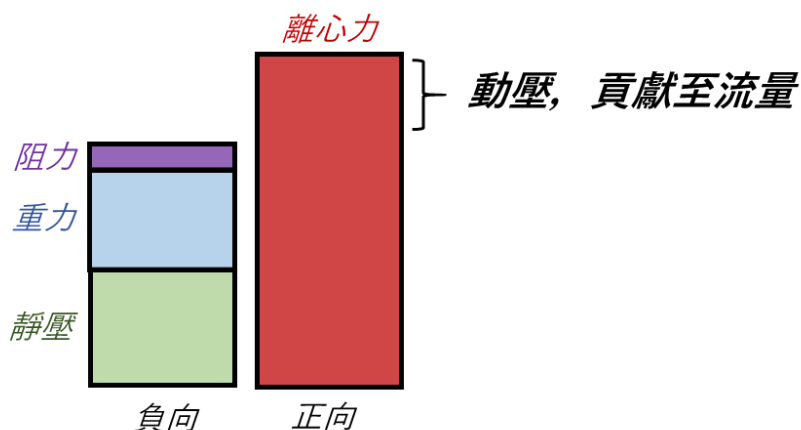
在這個圖表裡畫出各分項的相對大小 ($\omega = 100\text{rad/s}, L = 15\text{cm}, \theta = 60^\circ, h = 3\text{cm}, R = 0.5\text{cm}$)

可以得知**離心力**是**最大**的分力、且是唯一一個**正**的壓力，其他三項都是**負**的



表(十四) 各項分壓力的相對大小 (圖表為第一作者製作)

如果把 離心力 - (靜壓+重力+阻力)，我們可以計算出「動壓 Dynamic pressure」，動壓是貢獻流量的來源。把上方的長條圖整理一下、可以得到更清楚的表達：



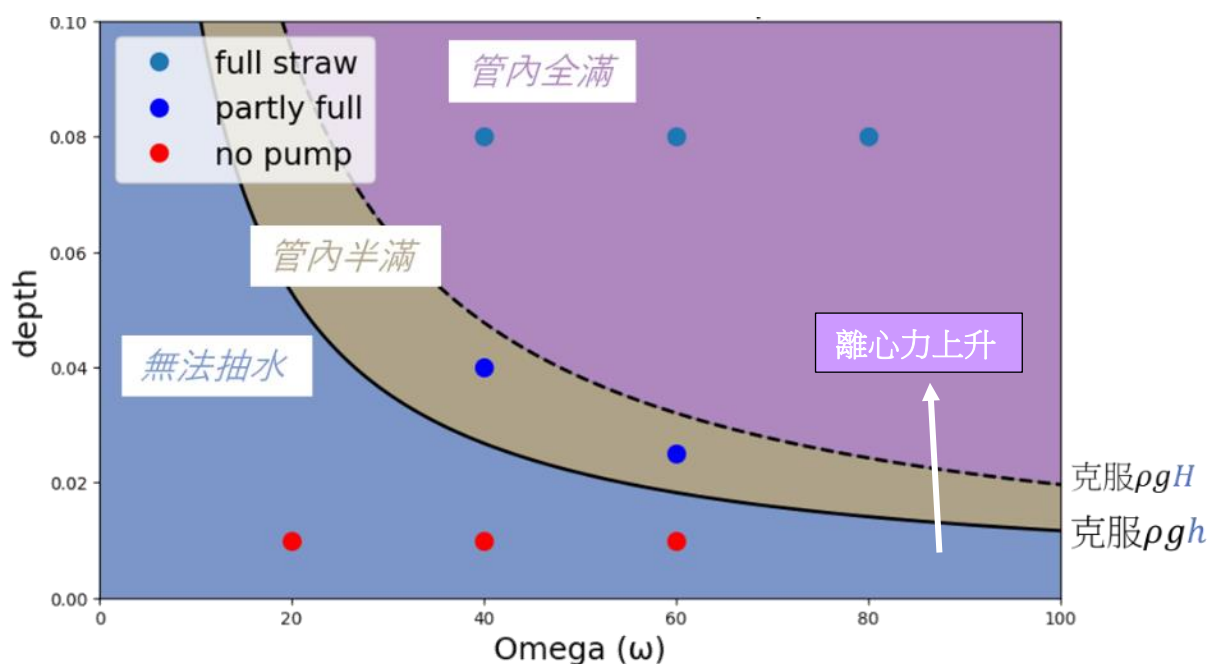
圖(二十一) 視覺表示動壓 (圖表為第一作者製作)

延伸討論（三）：流況的相圖

我們的重大發現之一、也是關於不同流況，我的理論可以預測各流況的臨界值，因此我拿角速度對深度的圖舉例：

可以看到，當 (深度或角速度上升時) 離心力上升，流況會更接近「管內全滿」，這是因為離心力上升導致流量上升，當大量的水想通過小直徑的水管，會自然的填滿水管。反之離心力過小時，不足以克服靜壓導致沒有水被抽出。

此圖上的線是根據理論，關於克服 靜壓或重力；我同時實驗過八個點並合乎相圖



圖(二十二) 流況在不同角速度與深度的項圖 (圖表為第一作者製作)

延伸討論（四）：透過 Flow 3D 模擬，進而驗證實驗和理論情形

Flow 3D 是流體力學常見的模擬軟體、其運算的根據是納維-斯托克斯方程式去計算流體力學，納維-斯托克斯方程式是描述黏滯流體物質的三維運動的方程，這些方程非常近似現實中的情況，因此是個非常適合用作模擬現實情形的方程式。

可以發現、納維-斯托克斯方程式是根據牛頓第二定理推導而程、並修改後應用在流體特性上。

連續性方程

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$
$$\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

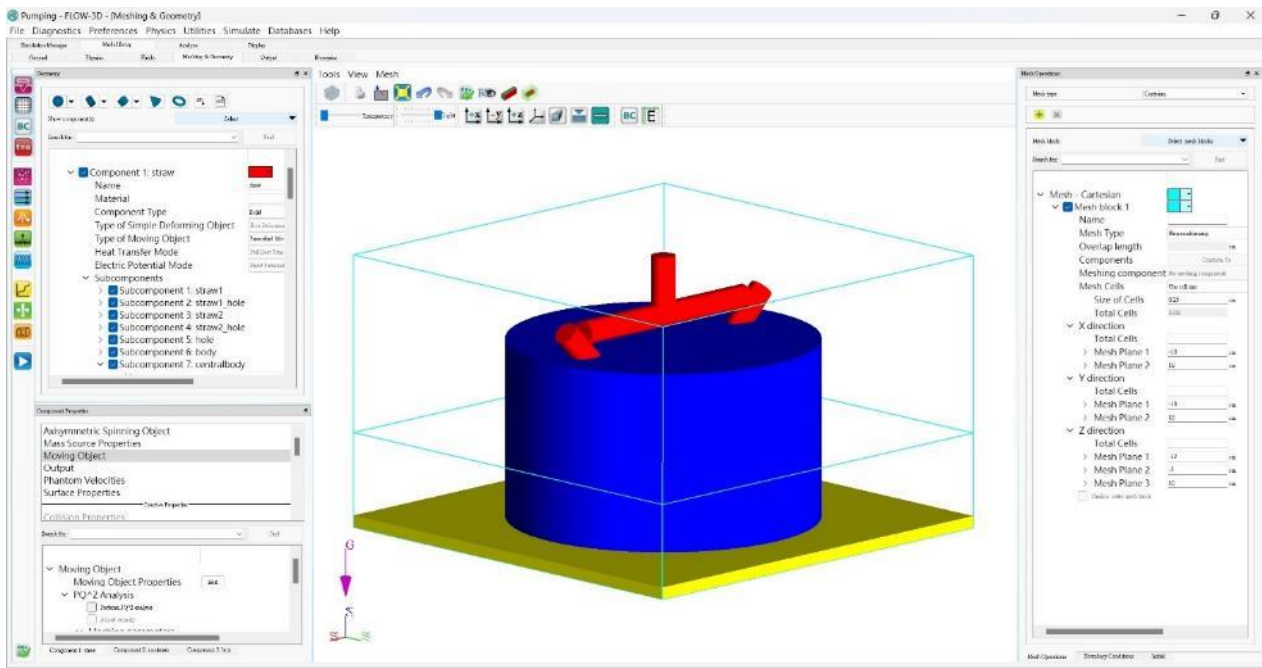
質量
密度

加速度
速度對時間

外力合
包含壓力梯度、重力、黏滯

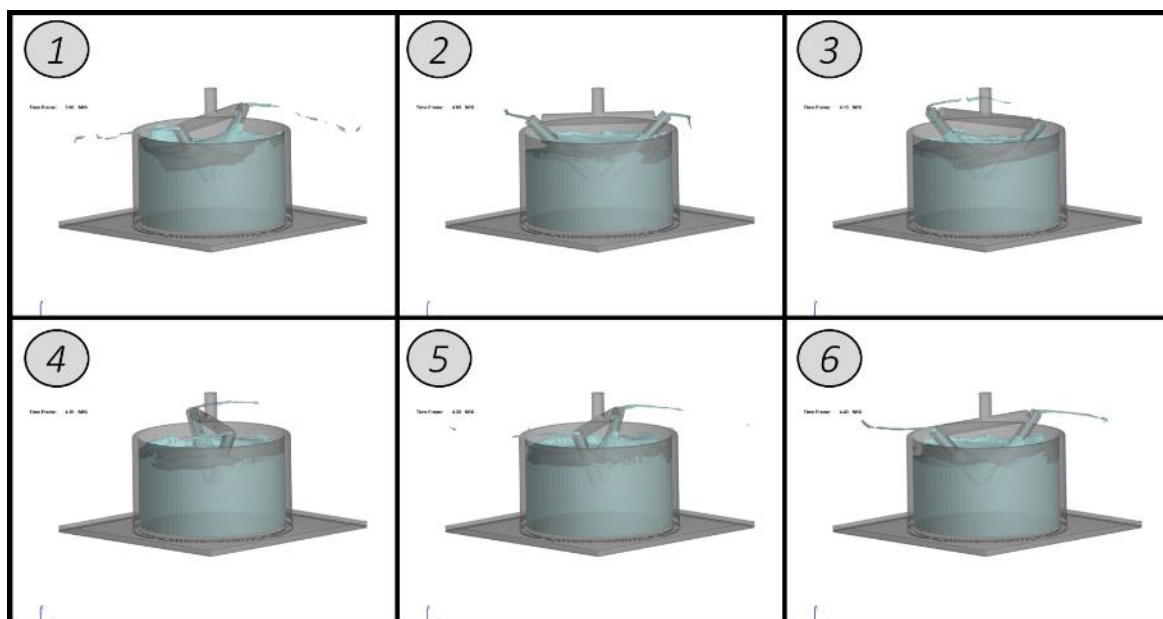
圖(二十三) 將納維-斯托克斯方程式表示成牛頓第二定理 (圖片為第一作者製作)

以下是 Flow-3D 裡的建模，我先創立了基本的物件，包含水桶和水管



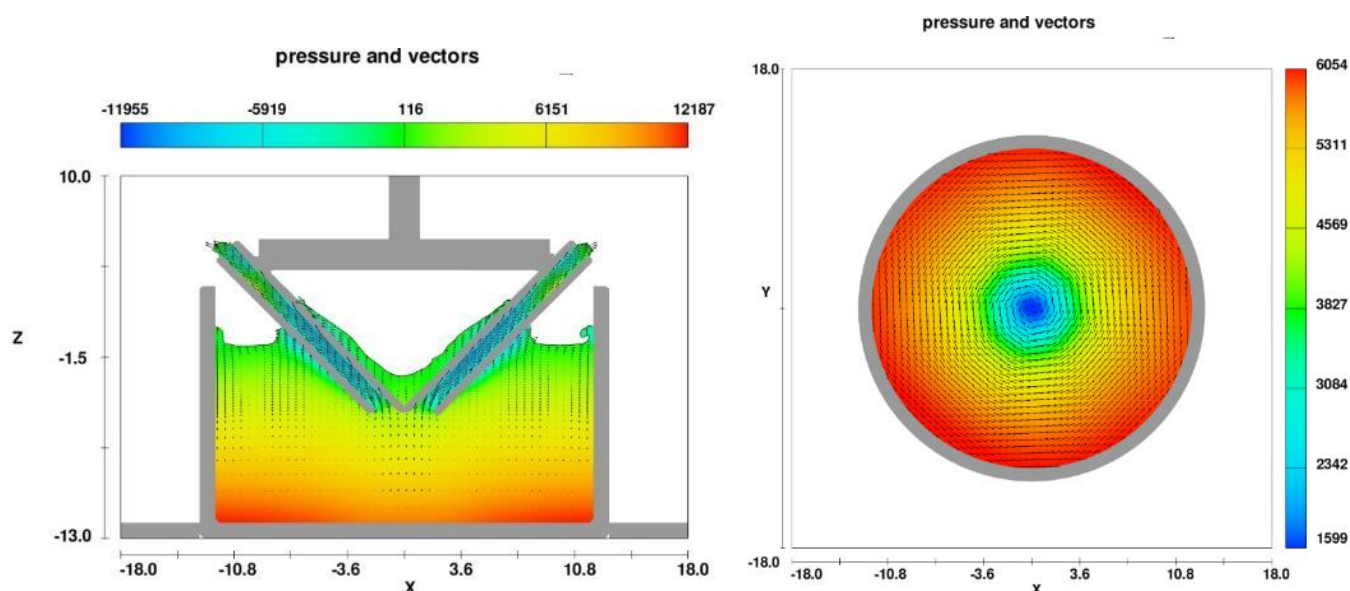
圖(二十四) Flow-3D 內部的建模 (圖片為第一作者製作)

開始模擬後，我先定性的觀察其抽水的情形，與我實驗時的狀況非常相似。



圖(二十五) 模擬中隨時間的抽水 (圖片為第一作者製作)

在確認我的模擬建模能表達現實世界後，我研究了水的流向圖，其漩渦的形式與我先前的猜測一樣。並且畫出了抽水時的壓力分佈，這是只有模擬才能得知的。



圖(二十六) 抽水時側邊的壓力場；圖(二十七) 漩渦的流向與壓力圖 (兩圖均為第一作者製作)

我們從左圖可以看到水剛進水管時、壓力較小，這就是先前討論的入口壓力流失。

從右圖可看到整個流場是圍繞著中間旋轉的，正是討論過的漩渦，另外中間的壓力較小。

延伸討論（五）：最佳抽水效率

抽水機最重要的是**抽水效率**，是以能量轉換率的想法推導出來的；我想從所有的實驗中整理出最佳的抽水機病試圖計算其效率。

我在流體力學的教科書中找到對抽水機效率的定義：

抽水效率定義

$$\eta = \frac{W_{pump}}{W_{in}} = \frac{Q * \rho \Delta h_{pump}}{V * I} \quad \begin{matrix} \text{(流量 * 揚程)} \\ \text{(馬達消耗)} \end{matrix}$$

$$\Delta h = \left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + gh \right) - \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{v_{exit}^2}{2} + g(H + h) \right)$$

圖(二十八) 抽水效率定義與公式 (圖片為第一作者製作)

我的馬達是被 PSU 所控制、因此我暫時無法得知「馬達消耗」的值。

但是我可以利用實驗結果來最佳化 **流量 * 揚程**：

角速度 ω	100 rad/s
長度 L	15 cm
深度 h	5 cm
傾角 θ	45°
半徑 R	0.5cm
形狀	水滴形

表(十五) 各項變因的最佳化 (圖表為第一作者製作)

如果之後的研究能再將馬達消耗測量出來、我們就能更進一步得知此抽水機的轉換率。了解抽水機的抽水效率可以更進一步預測能量轉換率，用於更實際的應用上。

捌、結論與展望

1. 研究**離心力抽水機**在不同變因下影響**流量**與**出口流速**，為此我打造了許多 3D 列印出來的抽水機、連接一個馬達使其旋轉抽水。
2. 在初步實驗中發現的諸多**流況**、是我理論中重點討論的**邊界條件**。發現了流況是被離心力所影響的，臨界值為能否克服水的重量。離心力由小到大的流況分別為「無法抽水」「管內半滿」「管內全滿」。比較特別的是「管內半滿」、其出口流速需要特別計算、因為其截面積不固定的特性。
3. 關於流量的理論，其原理是離心力分力將水推至水管上方。我使用了**雷諾傳輸定理**來對水管建模，簡化成壓力和的形式並考慮：離心力、重力、靜壓與阻力，得到的答案即是**動壓**，這也是影響流量的根本壓力。流速我利用 $F=ma$ 推導水的**受力**，考慮離心力、重力與阻力，能推得「管內半滿」的出水面後加速
4. 我實驗了 **6 種變因**分別對流量與出口流速的結果。能增加流量的主要變因是：角速度、浸泡深度、水管半徑和傾角，其根本的原因是**離心力的積分較大**。影響流速的主要變因包含：角速度、浸泡深度、傾角與長度，是因為流速除了 Q/A ，還有要考慮「管內半滿」出水面獲得的加速度，因此出水面後的受力是其關鍵。
5. 在延伸討論中首先提到了**漩渦**的產生，因此將水管設計成流線狀能減少阻力並減少負面影響的漩渦；接下來討論了各項**壓力的相對大小**，從計算結果得知離心力通常占比最大，且是唯一的正向壓力、把離心力與其他三個壓力相減得到的即是動壓。第三個討論**流況相圖**，流況是我的重大發現之一、影響流況的是離心力，將相圖的兩軸都改成影響離心力的變因，就確認流況是被離心力影響。最後我利用 **Flow-3D 模擬**整個系統，根據**納維-斯托克斯方程式**便能很好的考慮流體的特性，模擬包括了抽水時的外觀，與實際情況極度相似；也可以藉由模擬得到測量不出的**壓力場**，也能得到例如入口流失等價值性的結論。
6. 此研究能延伸的**實際應用**相當多，像是前面舉例的**灑水器**、參考我的研究可以自由控制其灑水量與落地距離；**噴泉**也可以用上此設計，因為其旋轉噴出等距的水流，也具有相當的觀賞性；而我的研究與理論，便能很好的預測噴泉的最終結果。最重要的，這台抽水機的**最佳抽水效率**，我能從所有的實驗結果中整理出最佳變因、並計算其 流量*揚程，這有助於工業上抽水需求並考量其馬達的消耗。

九、參考資料

[1] drew L. Gerhart, John I. Hochstein, Philip M. Gerhart. Fundamentals of Fluid Mechanic, 8th Edition. Wiley (2018)

[2] Chow, V.T. Open Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York (1959)

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Darcy_friction_factor_formulae

[4] <https://slideplayer.com/slide/16496646/>

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Moody_chart

[6] https://www.engineersedge.com/fluid_flow/pipe-roughness.htm

[7] <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/inlet-loss>

註: 報告內的圖片與圖表均為第一作者親自製作。

【評語】160020

本研究是關於一個離心力抽水機的理论建模和實驗設計，作者利用 3D 列印改變 6 種抽水機的變因，如流量與出口流速等等，探討各項變因如何影響了抽出水量或抽水落地的位置。作者考慮了基本的離心力與重力再加入白努力方程式來計算壓差，並充分的考慮摩擦阻力，預測出口流速。本作品相當紮實，結構嚴謹、條理清楚，理論與實驗吻合度很高，是相當優秀的作品。