

2025年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號	160007
參展科別	物理與天文學
作品名稱	低速狀態下磁性齒輪傳動特性的實驗與理論探討

就讀學校	高雄市立高雄高級中學
指導教師	盧政良 張峻輔
作者姓名	陳柏諭 韓世奇

關鍵詞	<u>磁偶極、轉動慣量、磁性齒輪</u>
-----	----------------------

作者簡介



大家好，我們是陳柏諭和韓世奇，來自高雄中學二年級。很榮幸能參加台灣國際科學展覽會，並向大家介紹我們這次的研究。在這次的研究過程中，我們攜手合作，結合對科學的熱情，克服了各種挑戰。我們期待藉由這次展示，與大家分享我們的發現，也希望從中學習更多寶貴的經驗。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：物理與天文學科

作品名稱：低速狀態下磁性齒輪傳動特性的實驗與理論探討

關鍵詞：磁偶極、轉動慣量、磁性齒輪

編號：

摘要

本研究探討利用指尖陀螺作為磁性齒輪，觀察並分析其磁性齒輪效應。本研究測量了磁性齒輪間的轉動慣量、影響範圍及力矩，除此之外，本研究發現，自由運轉狀態下的齒輪，具有三個運動階段，高速狀態，介於高速至低速難以預測的階段，以及低速的穩定運動狀態。

此外，為提升磁場計算的精確度，我們發現磁偶極近似方法無法有效描述系統中的磁場分佈，因此使用積分計算來求得更精確的磁場數據，並與實驗數據進行比對，結果吻合良好。

Abstract

This study investigates the use of a fidget spinner as a magnetic gear to observe and analyze its magnetic gear effects. The study measures the rotational inertia, range of influence, and torque between magnetic gears. Additionally, it finds that gears in free rotation exhibit three distinct movement phases: a high-speed phase, an unpredictable phase between high and low speeds, and a stable motion phase at low speeds.

Furthermore, to improve the accuracy of magnetic field calculations, we found that the magnetic dipole approximation method does not effectively describe the magnetic field distribution within the system. Therefore, we used integral calculations to obtain more precise magnetic field data, which were then compared with experimental data and showed good agreement.

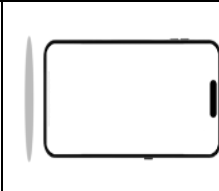
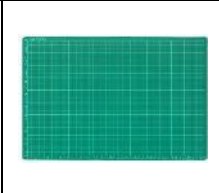
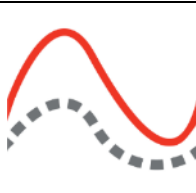
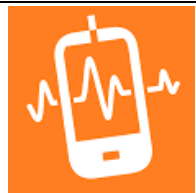
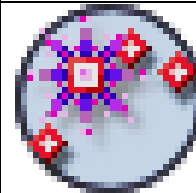
壹、研究動機

磁性齒輪的獨特特性激發了我們對磁場理論應用的濃厚興趣。不同於傳統機械齒輪的接觸式傳動，磁性齒輪透過磁場間的作用力實現非接觸傳動，具有減少機械磨損的潛力。加之先前對指尖陀螺和磁鐵的接觸經驗，讓我們萌生了結合這兩種元件打造磁性齒輪的想法，以進一步探討其中的物理現象與行為，並期望揭示磁場排列及齒輪傳動過程中的有趣機制。

貳、研究目的

- (一) 探討不同磁性齒輪排列方式對傳動穩定性的影響，特別是在低轉速情境下的表現。
- (二) 測量磁性齒輪的轉動慣量、磁化強度等常數，以獲得計算基礎。
- (三) 計算並驗證磁場分佈，通過積分求解獲得更精確的磁場模型，並與實驗數據進行比對。
- (四) 量測磁性齒輪間的最大傳動力矩，並分析其與齒輪距離的關係。

參、研究設備及實驗裝置圖

				
指尖陀螺	智慧型手機	力感測器	游標卡尺	馬達
				
轉動慣量實驗 儀器	綠色墊板	磁鐵		
				
vernier graphical analysis	Excel	phyphox	tracker	desmos

研究設備及軟體

肆、研究過程或方法

一、旋轉現象觀察

（一）磁鐵的排列方法

欲在接下來的實驗當中得知使用何種齒輪排列方式較適合傳動，我們設計了以下實驗：

- 1.拿兩個相鄰並以相斥排列的齒輪進行轉動（相斥排列為磁鐵外部磁及以 N、S 相對）
- 2.拿兩個相鄰並以相吸排列的齒輪進行轉動（相吸排列為磁鐵外部均為 N 或 S 極磁鐵）

最終我們發現了相斥排列的齒輪可持續旋轉，然而相吸排列的齒輪僅可進行一次旋轉即完畢。



（圖一）相吸排列裝置圖（作者拍攝）

（二）運轉齒輪之速度觀察

在實驗過程中，我們發現，如果將一顆齒輪以很高的初速度旋轉，兩顆齒輪之間並不會如期產生齒輪傳遞的現象，而在低速時才會出現齒輪的特性，近一步的觀察後發現，其在兩齒輪之速度差距到達一定程度後才會出現此現象



（圖二）穩定加速裝置（作者拍攝）

而為了確定是角加速度差還是角速度差導致其產生失步現象，我們將一齒輪先加速至一定值，隨後用另一個齒輪去靠近，以看是否為速度差產生之失步主因。



(圖三) 相吸排列裝置圖

(三) 自由運動之齒輪 (作者拍攝)

1. 極大速度差運動狀態

在實驗中，逐漸加大初始主動輪之角速度，發現其在一速度差之上會無法有規律之轉動，為了進一步找出其在更高轉速差異下是否仍會產生無規律之運動，嘗試以極大力推動主動輪，進而對現象進一步之觀察。

二、磁場計算

(一) 磁偶極磁場

為能夠找出更加簡潔之磁場近似形式，我們採用了磁偶極來做為磁場近似，並以此與實驗值比較，以確認在此構型中使用此近似之可行度。

磁偶極之磁向量勢可備表達為

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^2}$$

故磁偶極之磁場可表達為

$$B = \nabla \times A$$

可以得到

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta})$$

(式一) (David J. Griffiths。2010)

(二) 扇形磁鐵積分磁場

$$(\vec{B}_s)_r = \frac{M\mu_0}{4\pi} \sum_{j=1}^2 -1^{(j+1)} \times \left[\int_{r_s(1)}^{r_s(2)} \int_{\theta_s(1)}^{\theta_s(2)} \frac{r' \sin(\theta - \theta')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\theta'=\theta_s(j)} dr' dz' + \int_{r_s(1)}^{r_s(2)} \int_{\theta_s(1)}^{\theta_s(2)} \frac{(z - z') \cos(\theta - \theta')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{z'=z_s(j)} r' d\theta' dr' \right]$$

(式二) (陳柏先。2010)

其中 $(\vec{B}_s)_r$ 是 $\vec{e}_r$ 磁場， M 為磁化強度(magnetization)， μ_0 是真空磁導率

(Vacuum permeability)， $r_s(1)$ 為扇形磁鐵內側至中心之距離， $r_s(2)$ 為外側

至中心之距離； $\theta_s(1)$ 、 $\theta_s(2)$ 為磁鐵兩側分別之柱座標之 θ ； $Z_s(1)$ 為磁

鐵最下端之柱座標， $Z_s(2)$ 為磁鐵最上端之柱座標，而本公式採用柱座

標，使用 (r, θ, z) 為座標基底。

由於積分式之複雜，再研究時，我們給定了一些先決條件以進行運算，

以水平放置之齒輪底部為 z 座標為0，齒輪中心為座標原點，而指向另

一個齒輪中心方向為 $\vec{r}$ （圖四），進而，測得以下資料，

$$r_s(2) = 0.05$$

$$r_s(1) = 0.04$$

$$Z_s(2) = 0.01$$

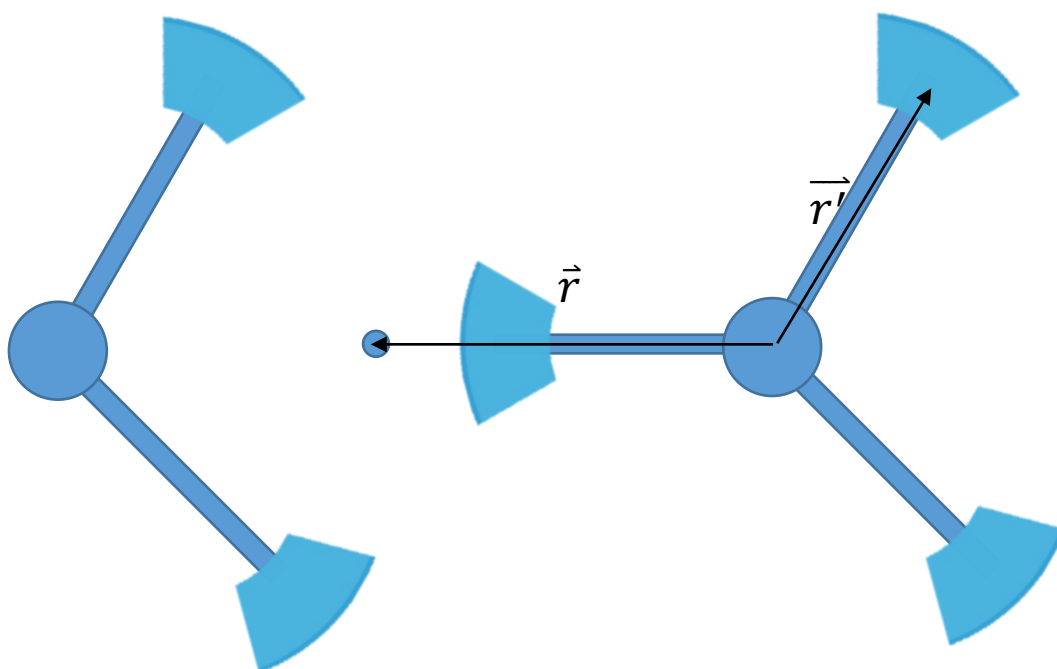
$$Z_s(1) = 0$$

將其帶入（式二）並且利用 worfram alpha 軟體進行積分，得到下列方

程式。（式三）

$$\frac{M\mu_0}{4\pi} \frac{0.0009(2z - z(1) - z(2))(\sin(k - \theta(a)) - \sin(k - \theta(b)))}{2(x^2 + (x')^2 - 2x(x')\cos(\theta))^{\frac{3}{2}}}$$

其中之 x 為至原點之距離， θ 為至 $\vec{r}$ 之夾角。



（圖四）徑向距離示意圖
（作者繪製）

三、常數測定

（一）轉動慣量

1.實驗計算與構思

由轉動慣量儀器，可根據簡單之力學推斷出以下方程式

$$\vec{R} \times \vec{F} = \vec{\tau} = I\vec{\alpha} \quad (\text{式四})$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} \quad (\text{式五})$$

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad (\text{式六})$$

$$S = \frac{1}{2}at^2 \quad (\text{式七})$$

其中， $\vec{R}$ 為轉盤下方轉軸半徑， $\vec{F}$ 為施加在轉盤上的力， $\vec{\tau}$ 為作用於轉盤上之力矩， $\vec{\alpha}$ 為轉盤角加速度， I 即為要測定之轉動慣量， S 為懸吊之砝碼下落距離， t 為砝碼下落時間， m 為砝碼質量， $\vec{g}$ 為重力加速度。

且由上述（式四）至（式七）可得到

$$I = mg \frac{R^2 t^2}{2S} \quad (\text{式八})$$

在實驗中，可以測得砝碼質量 m 、重力加速度 $\vec{g}$ 、轉盤下方轉軸半徑 $\vec{R}$ 、懸吊之砝碼下落距離 S 即可測得轉動慣量。

因此計算為包含全部轉盤及物體之質量，故須先測得空盤之轉動慣量，在測得含物體之轉動慣量，相減得其結果。

2.實驗步驟

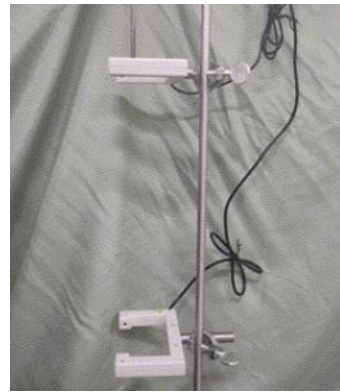
(1)空盤轉動慣量

- 1.架設裝置
- 2.將砝碼用細繩綁住，並綁於轉盤上
- 3.釋放砝碼並測量通過光電閘之時間
- 4.重複步驟 1 至 4，測得其平均值

5.帶入數據，經由（式七）計算轉動慣量



（圖五）轉動慣量（儀器）轉盤裝置圖
（作者拍攝）



（圖六）轉動慣量測定實驗
（儀器）光電閘裝置圖
（作者拍攝）

(2)含齒輪之轉動慣量

1.架設裝置

3.將砝碼用細繩綁住，並綁於轉盤上

4.釋放砝碼並測量通過光電閘之時間

5.重複步驟 3，測得其平均值

6.帶入數據，經由（式八）計算含齒輪之轉動慣量



（圖六）細繩捆於空轉盤
（作者拍攝）



（圖七）細繩綁於法碼
（作者拍攝）

(二) 磁化強度

1. 實驗計算與構思

由文獻探討，我們得到了此關於柱狀磁鐵於徑向方向上之磁場公式，

$$\vec{B}(x) = \frac{1}{2} M_x \mu_0 \left(\frac{\frac{1}{2}L-x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L-x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{1}{2}L+x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L+x\right)^2 + R^2}} \right) \vec{e}_x \quad (\text{式九})$$

而將其方程式變換後，即可得到

$$\frac{1}{M_x} = \frac{1}{\vec{B}(x)} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\frac{1}{2}L-x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L-x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{1}{2}L+x}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}L+x\right)^2 + R^2}} \right) \right) \vec{e}_x \quad (\text{式十})$$

其中 μ_0 是真空磁導率， L 為此柱狀磁鐵高度， x 為距柱狀磁鐵中心之距離， R 為柱狀磁鐵半徑， $\vec{B}(x)$ 為在柱狀磁鐵徑向方向上，該點的磁場強度。

以上之真空磁導率 μ_0 可由文獻之探討獲得、柱狀磁鐵高度 L 距柱狀磁鐵中心之距離 x 可用架設實驗時固定，柱狀磁鐵半徑 R 可用游標卡尺測得、柱狀磁鐵徑向方向上之磁場強度 $\vec{B}(x)$ 可以採用 phyphox 軟體測定。

2. 實驗步驟

(1) 磁鐵半徑測量

1. 取一磁鐵，放入游標卡尺中
2. 夾緊後判讀刻度

(2) 磁化強度測量

1. 先固定手機之位置
2. 取磁鐵於 3 公分處，使用軟體 phyphox 測定其磁場強度
3. 重複步驟 2

4.將所得數據匯出，使用式（十）得到其磁化強度之值

四、磁場測量

1.實驗計算與構思

由於磁偶極之磁場為近似之解，故我們想以磁場之測量，以確定可否用前述提及之磁場公式進行計算，以確定磁偶極計算磁場之合理性，以驗證是否需要更精確之解。

2.實驗步驟

(1)固定手機之位置

(2)取柱狀磁鐵於 6 公分處，使用軟體 phyphox 測定其磁場強度

(3)匯出數據

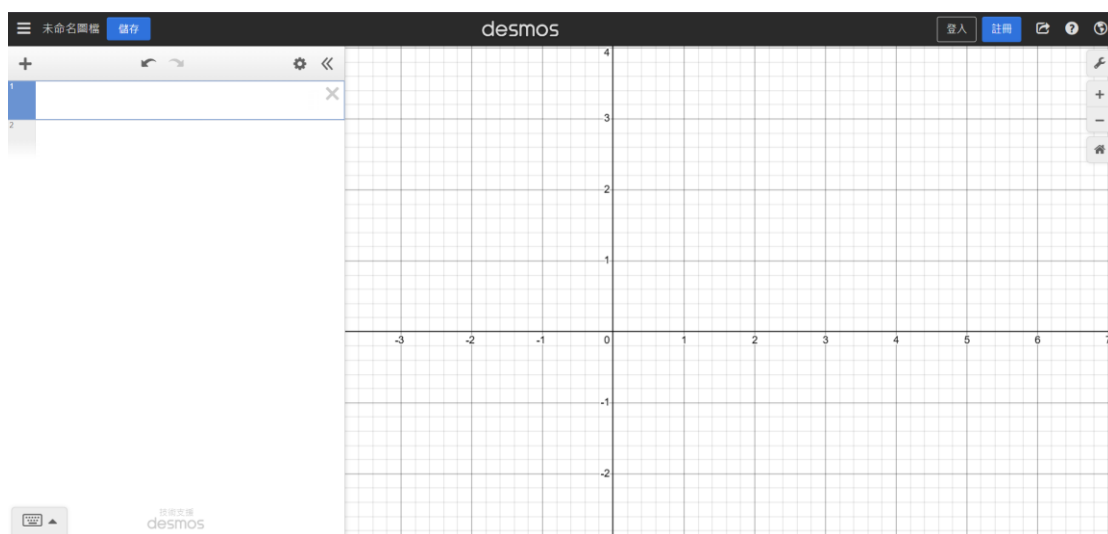
(4)增加柱狀磁鐵至手機距離 1 公分，重複步驟(2)，直到距離為 8 公分

3.磁場精確度比較

將前述之兩磁場公式，利用 desmos 軟體得到其數據線，再與所得之數據比照，可得到其準確性之結果，經過比對之後，發現仍然需要更精確之結果，故接下來之計算皆由積分精確解計算。

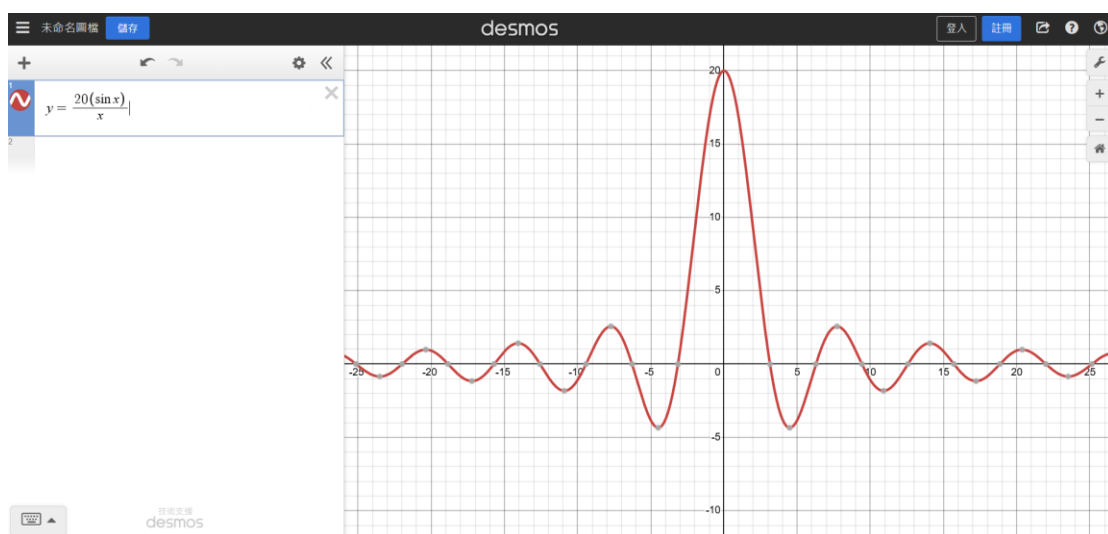
4.desmos 使用方法

(1)輸入方程式繪圖



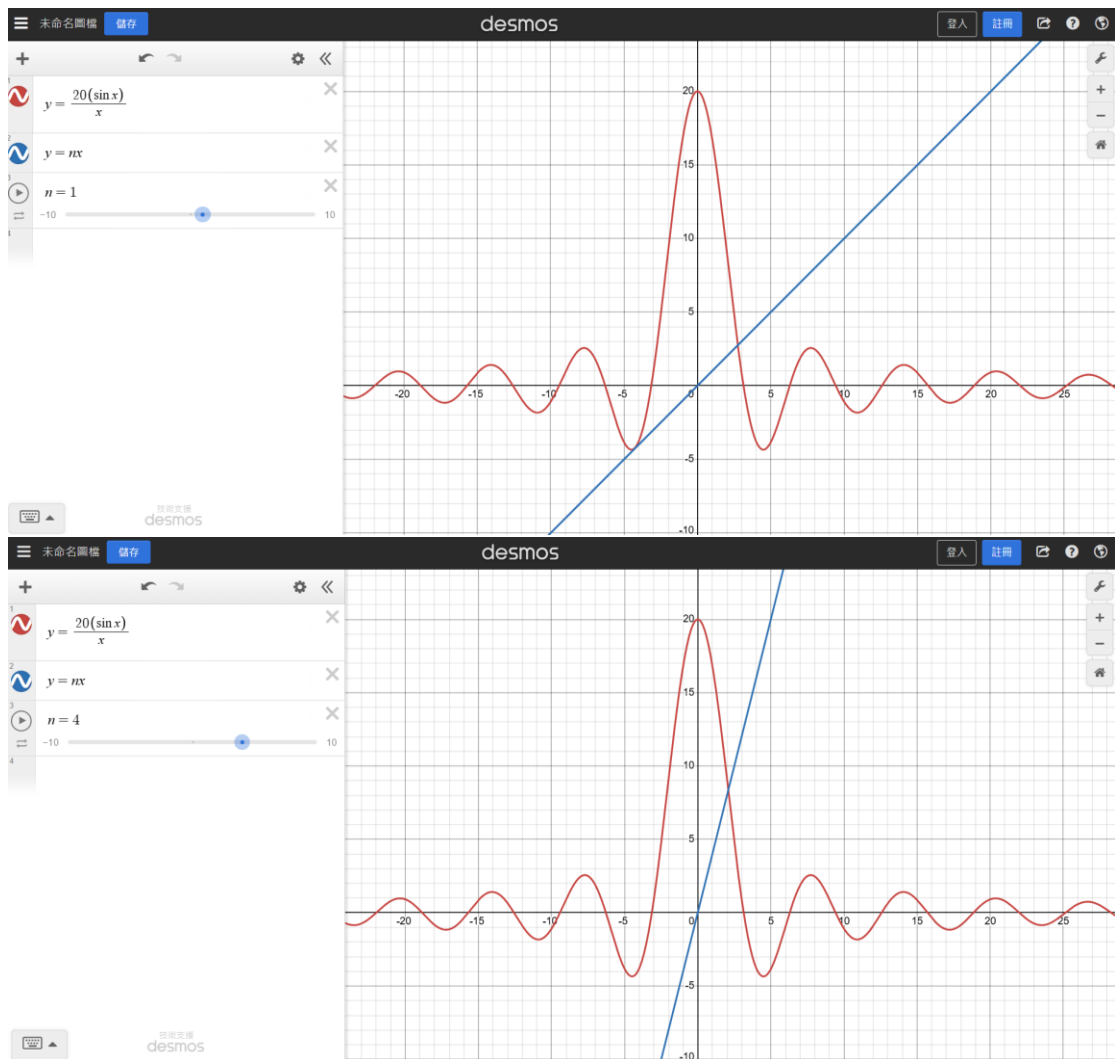
(圖八)desmos 主介面(作者擷取)

在左上角處輸入自己所需要之方程式，即可在右側見到圖形



(圖九) desmos 方程式示意圖 (作者擷取)

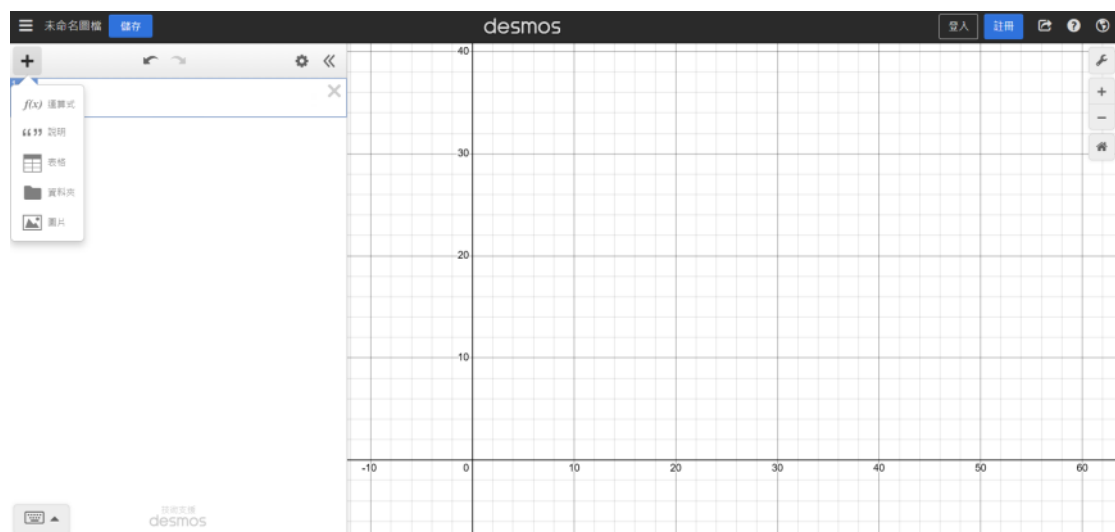
此外，還可在方程式中輸入一個代號，即可做為可更動型變數，舉以下例子：

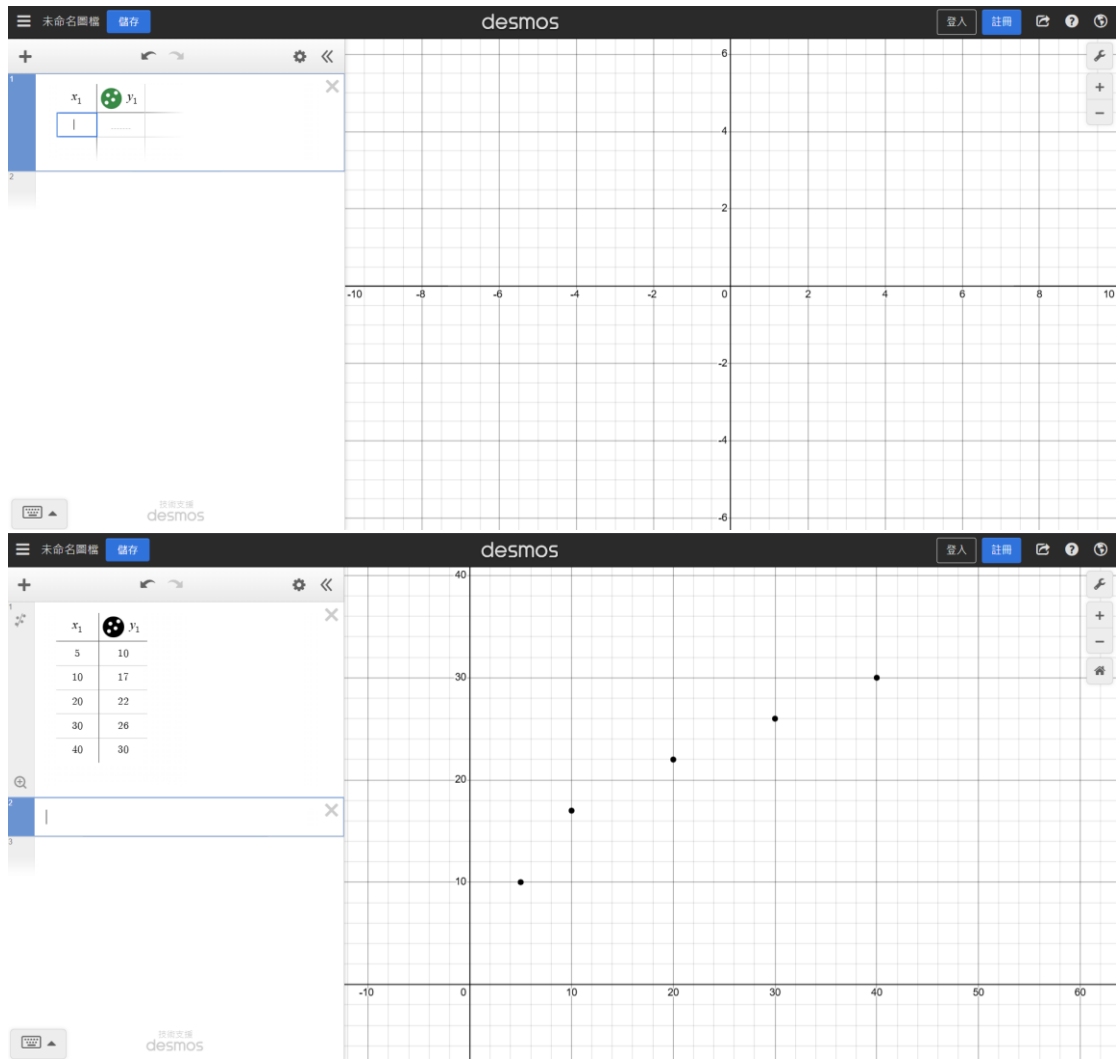


(圖十、十一) desmos 方程式變數調控示意圖 (作者擷取)

(2) 回歸曲線以及資料輸入

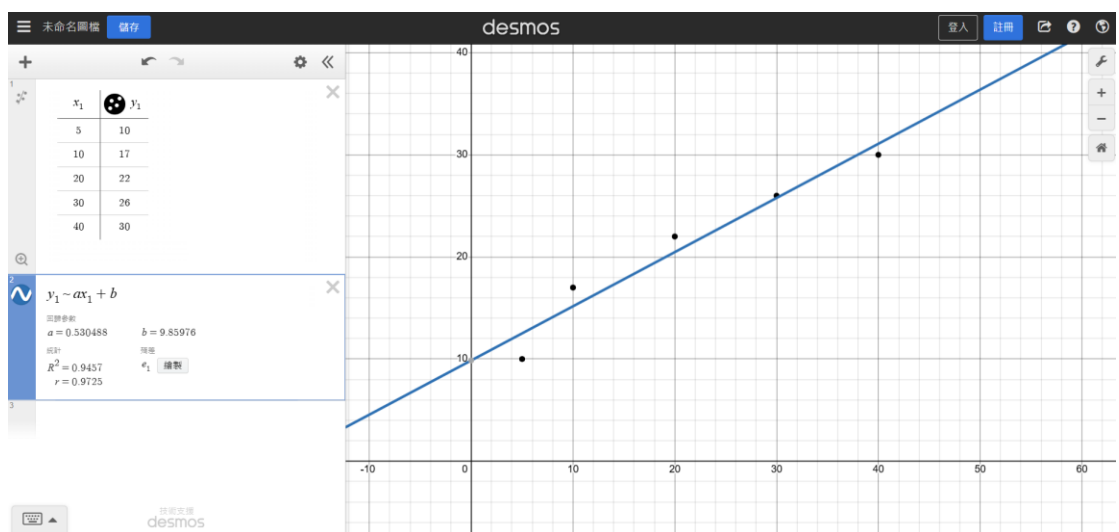
首先在左上方的加號看到表格，會出現以下畫面，並再依次輸入數據：





(圖十二、十三、十四) desmos 輸入表格過程 (作者擷取)

我們可以使用 ' $y_1=ax_1+b$ ' 來繪製回歸曲線(圖中還提供數據的相關係數 R)：



(圖十五) desmos 回歸曲線示意圖 (作者擷取)

五、力矩

1.實驗計算與構思

$$\vec{T} = \int [\vec{r} \times (\vec{J} \times \vec{B}_{ext})] dS' \quad (\text{式二})$$

其中 $\vec{T}$ 是力矩， $\vec{r}$ 是施力點至轉軸之距離， $\vec{J}$ 為等效面電流， $\vec{B}_{ext}$ 為造成有效力矩方向之磁場 $(\vec{B}_s)_r$

2.實驗步驟

- (1)取一力感測器並固定於桌面
- (2)將細繩固定於齒輪一端及力感測器，並讓其相互垂直
- (3)固定另一顆齒輪，將其之間端點之距離固定為 0.5 公分，轉動齒輪直到發生失步現象。
- (4)記錄其產生之最大力矩
- (5)加大兩齒輪之間之距離 0.5 公分，直至 3 公分



(圖十六) 力矩實驗裝置圖
(作者拍攝)

六、速度差異臨界值

1.實驗計算與構思

在前文（一、旋轉現象觀察），有提及在速度差異在一定之值時會無法產生齒輪的效應，因而欲找出其臨界條件。

2.實驗步驟

- (1)用力撥動其中一個齒輪
- (2)使其自然與另外一個齒輪擾動
- (3)使用 tracker 追蹤齒輪的角速度
- (4)觀察齒輪在發生傳動現象前的角速度並得到所求
- (5)增加齒輪數量並重複步驟(1)至(4)

伍、研究結果

一、轉動慣量

（一）空盤轉動慣量

	經光電閘之時間
第一次	2.459
第二次	2.325
第三次	2.212
第四次	2.445
第五次	2.295
第六次	2.371
第七次	2.351

（表一）空盤轉動慣量實驗值

(二) 含三齒輪之轉動慣量

	經光電閘之時間
第一次	2.458
第二次	2.357
第三次	2.344
第四次	2.422
第五次	2.430
第六次	2.491
第七次	2.417

(表二) 含三齒輪轉動慣量實驗值

由實驗裝置架設可知， $S=30\text{cm}$ ， $m=0.05\text{kg}$ ， $g=9.8(\text{m/s})$ ， $R=0.025\text{m}$ ，根據上述實

驗結果之資料，將其帶入（式八）， $I = mg \frac{R^2 t^2}{2S}$ ，可以得到，

$$I = 0.000053(\text{kg} * \text{m}^2)$$

二、磁化強度

根據架設之實驗裝置，我們得到 $R = 0.005(\text{m})$ 、 $X = 0.03(\text{m})$ ，而在經過游

標卡尺的測量後，得到 $L = 0.01(\text{m})$ 、 $B = 2500(\mu\text{T})$ 、在經由查表得到

$$\mu_0 = 1.27 \times 10^{-6}。$$

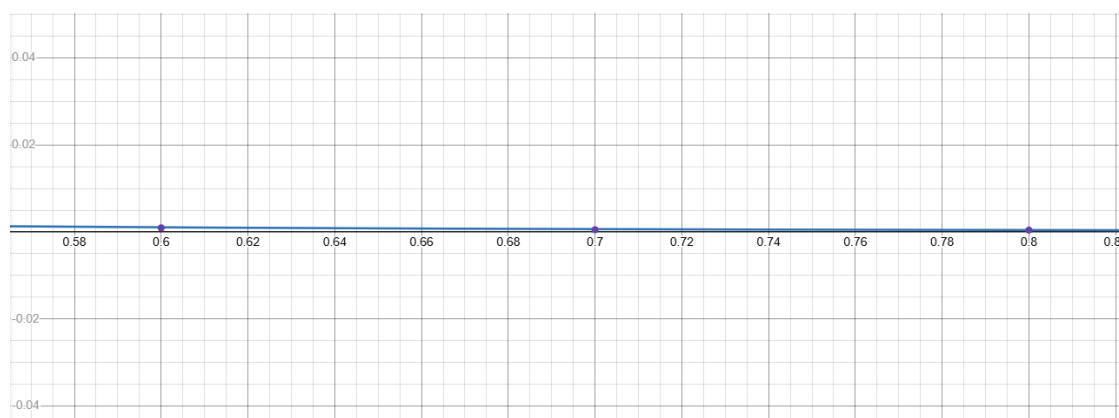
三、磁場理論比較

由（式一）繪製出圖中之紅色曲線，由（式三）繪製出圖中之藍色曲線，而

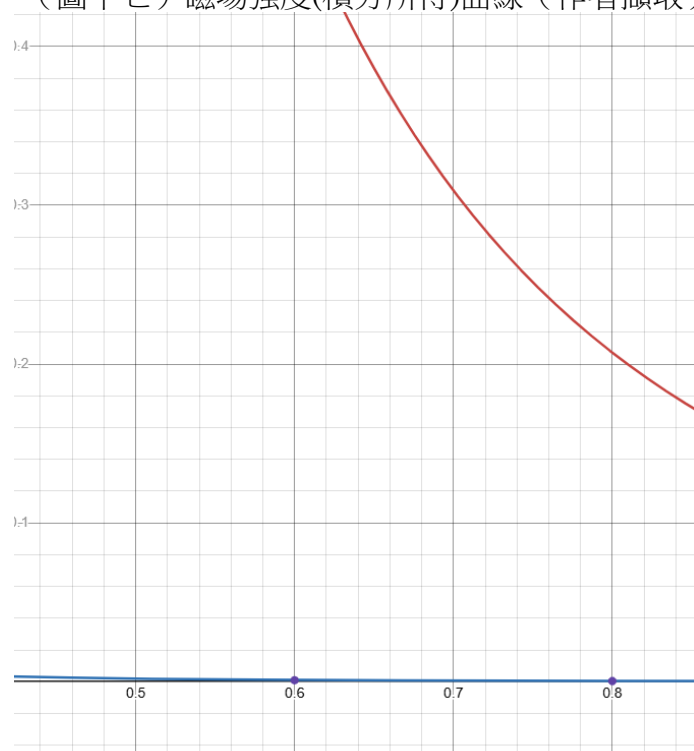
紫色之點即為其磁場強度實驗值，如下

磁鐵至手機距離	磁場強度
0.6(cm)	934(μ T)
0.7(cm)	517(μ T)
0.8(cm)	428(μ T)

(表三) 磁場強度實驗值



(圖十七) 磁場強度(積分所得)曲線 (作者擷取)

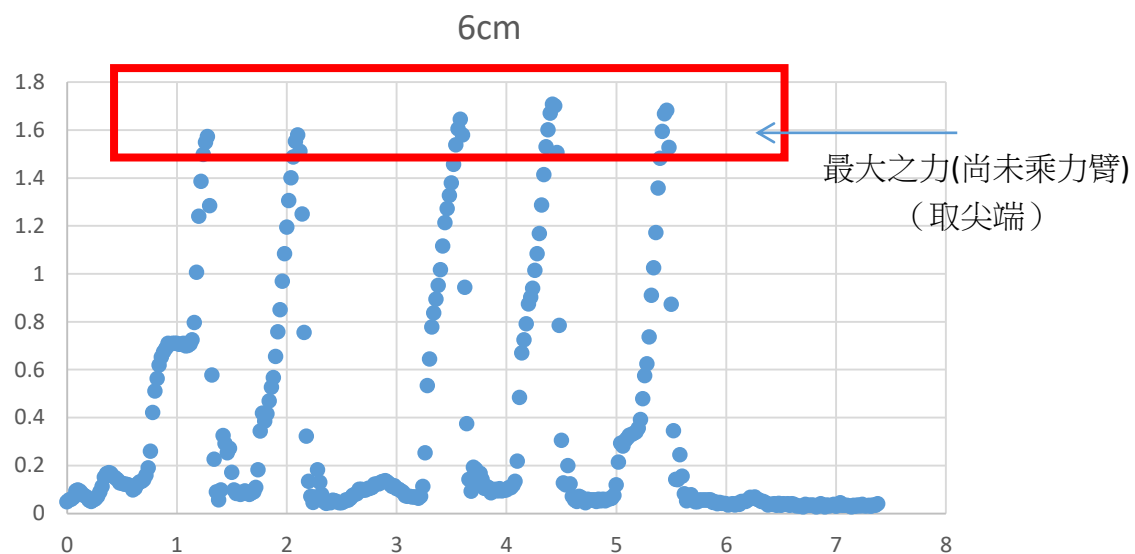


(圖十八) (式一) 曲線與 (式三) 曲線比較 (作者擷取)

四、力矩

由上述力矩之實驗設計，我們實驗以求得最大力矩，以驗證磁場（式二）、

力矩（式三）的準確性。而下圖，展示了測得最大力矩之數據取樣



（圖十九）：力矩實驗值（作者繪製）

我們做了更多的距離以驗證我們的理論值是否正確，下表是我們的實驗數據

圖表，圖表中距離為磁鐵端點至磁鐵中心之距離，再根據（圖）之理論預測

圖進行比較，可以得知，此理論在近距離之齒輪構型磁鐵排列情快下，磁場

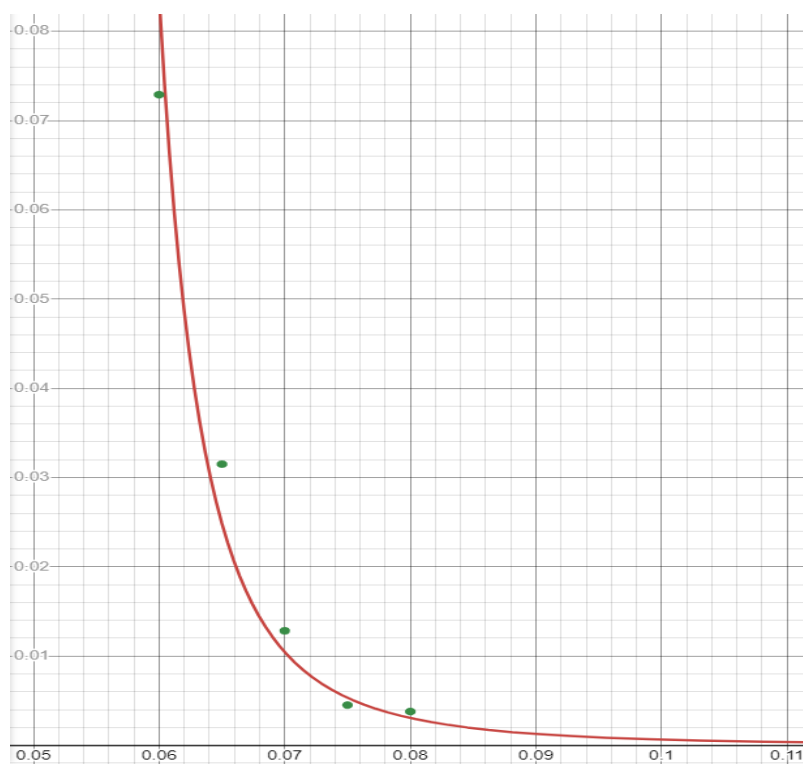
理論具有較高之準確度。



（圖二十）：力矩距離示意圖（作者拍攝）

距離	力	力矩
0.06(cm)	1.63(N)	0.073(N/m)
0.065(cm)	0.70(N)	0.032(N/m)
0.070(cm)	0.29(N)	0.013(N/m)
0.075(cm)	0.10(N)	0.00443(N/m)
0.080(cm)	0.08(N)	0.0038(N/m)

(表四) 力矩實驗值



(圖二十一): 力矩理論預測圖(作者擷取)

且在力矩之實驗中，我們發現其影響之範圍是-0.25 至 4.75 公分，更遠或更近皆無法產生良好齒輪轉動現象。

五、速度差值臨界條件

在實驗進行後，我們分別使用二、三、四、五顆齒輪排列，找出其之間能夠產生傳遞得最大速度差值，得到如下表

齒輪數	兩顆 (度/秒)	三顆 (度/秒)	四顆 (度/秒)
第一次	371	381	397
第二次	377	370	351
第三次	341	369	343
第四次	375	389	361
平均	366	357	363

(表五)：最大速度差值

特別的，具有五顆齒輪在自由運動時是無法成功旋轉，只會做一些微小晃動，這是因為，在齒輪間傳遞之能量因為在傳遞過程中的損耗而導致其五齒輪之系統無法具有足夠能量將其第五顆齒輪推動。

我們運用前（式三）所得到的磁場強度，以及磁力位能之

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

加上實驗測得知因摩擦力所需推動另一齒輪之角度，可得到欲推動另一顆齒輪所需克服之能量大小為 0.0023J，且由前所得之 $I = 0.000053(kg * m^2)$ 、第四顆齒輪旋轉時之角速度，可得到轉動動能約為 0.0011J，故無法轉動。

	第一次	第二次	第三次
恰推動之轉角(度)	14.7	15.6	14.5

(表六)：恰推動之轉角

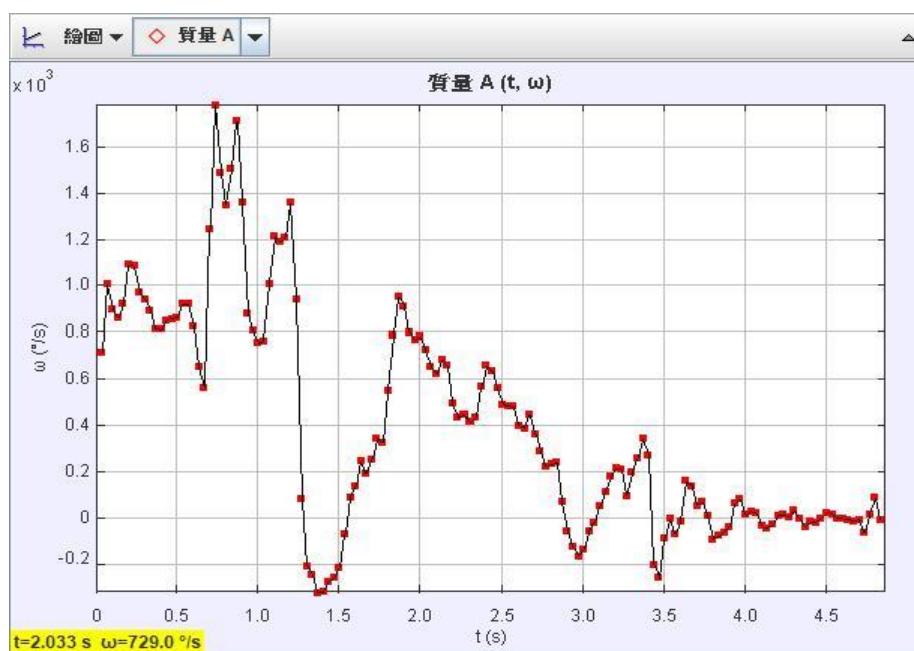
	第一次	第二次	第三次	平均
第四顆齒輪轉動最大角速度 (度/秒)	50.5	30.1	37.7	39.4

(表七)：轉動最大角速度

六、自由運動之齒輪

在此運動中，我們發現，其運動具有三個階段。分別為

- 1.單顆齒輪高角速度旋轉時，另一齒輪不轉動
- 2.介於低角速度與高角速度間，兩齒輪會產生難以預測之轉動情形
- 3.低速時，表現出齒輪之傳遞現象。



(圖二十二)：自由運動齒輪角速度對時間變化圖（作者擷取）

陸、討論

一、可能影響轉動慣量數值的因素

指尖陀螺的轉動慣量在此研究中是為最重要的物理量，因此其測量就尤為重要。在本次研究的實驗中使用到的兩種方式，其中儀器測輻較為精準，因為使用 mr^2 測量轉動慣量並不是一個非常適合的作法，基於其為剛體，因此更

適合使用儀器測量的方式，利用運動學和轉動慣量的公式測量出指尖陀螺的轉動慣量。

在本實驗中，繩子的摩擦力以及下墜時的空氣阻力均會造成通過時間的增加，進而是測量出來的轉動慣量高於實際值，亦或是可以理解成為‘有了阻力的影響，造成其更難轉動，即視為轉動慣量上升。

二、磁性齒輪的力矩和傳動特性

磁性齒輪在傳動過程中的力矩表現和傳遞效率是評估其性能的重要指標，齒輪間的磁場會對其產生一個力矩，我們的研究表明，磁齒輪之間的距離對力矩和傳遞效率有重要影響。適當的齒輪間距（即齒輪相切）可以確保和力矩的最大化。如果齒輪間距離太小，會因為距離過近，並導致最大力矩發生前發生相撞，此與我們的研究中之磁性齒輪不相符。相反，如果齒輪間距離增大，磁場的相互作用會減弱，從而影響傳動力矩。

柒、結論

一、磁鐵傳動以相斥排列的效果較佳，因為相吸排列下二者位能較低，因此比較難以轉動，是為穩定平衡；而相斥排列可以較低力矩來達到傳動的效果。

二、磁性齒輪之影響範圍為-0.25 至 4.75 公分，其最短距離由磁鐵長度決定，最長距離由磁鐵造成力矩（和磁鐵強度呈正相關）決定。

三、經由實驗，最大角速度差值為 369 度每秒（加速），且只與鄰近齒輪有關，間隔之齒輪，會因磁場太小而無顯著影響。

四、在自由轉動階段，磁性齒輪若接至 5 顆以上，會因為能量損耗導致其無法順利旋轉。

五、由前所得實驗結果，磁偶極在此不能用來近似磁場，只能使用更為精確的積分值來解

捌、參考資料及其他

- 一、Christoph Hoyer and Raimund Girwidz 2018 Eur. J. Phys. 39 065808
- 二、David J. Griffiths(2023). Introduction to Electrodynamics. Cambridge, England. Cambridge University Press
- 三、陳柏先(2010)。磁性正齒輪對之三維靜磁場解析。雲林科技大學機械工程系碩士班：碩士論文。
- 四、吳益彰，王智汶，陳柏先(2009)。非接觸式磁性齒輪機構之設計理論與創新開發研究研究成果報告（精簡版）。載於國立雲林科技大學機械工程系暨研究所：行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告。行政院國家科學委員會。
- 五、清大物理系(2014)。轉動慣量測量及角動量守恆實驗。取自國立清華大學，物理學系
- 六、李昆哲(2016)。創新磁性齒輪機構之設計與分析。雲林科技大學機械工程學系：碩士論文。

【評語】160007

1. 本作品探討兩組指尖陀螺轉動，藉由磁性齒輪間的轉動慣量及力矩計算磁場，得以觀測到高速狀態、難以預測的階段、低速穩定狀態等三個運動階段。
2. 內容聚焦在觀測結果，最後結論只繪出起始高速轉齒輪轉速改變，建議應就兩齒輪轉速變化做比較，或許就能釐清齒輪反轉之機制，建議可以再就如何以觀測結果以參數系統性歸類後，用物理表示式描述，以及依據該物理表示式是否得以就主控參數範圍再擴充，據以看是否得以用實驗觀測到新穎現象。