

2025年臺灣國際科學展覽會

優勝作品專輯

作品編號	100040
參展科別	工程學
作品名稱	數位物理實驗室：毫米波雷達系統之設計與應用
得獎獎項	四等獎

就讀學校	臺北市立成功高級中學
指導教師	林發暄 杜玲均
作者姓名	黃鈺翔

關鍵詞 毫米波雷達、微處理器、簡諧運動

作者簡介



大家好，我是成功高中的黃鈺翔。從國中開始，我便對電子工程和數據分析產生濃厚興趣，喜歡將課堂所學應用到實際專案中。從2023下半年到2024上半年的自然探究比賽是我這一次研究的起點，當時以一個酵母發酵量測系統，結合現成模組與自製程式完成比賽。儘管過程中遇到不少技術挑戰，但在成功完成後，我對研究的熱情更加深厚。

而到了2024下半年的國際科展，我從生物量測轉向物理實驗，設計了「數位物理實驗室」。這次的挑戰更大，從模組升級到自製 PCB，結合了硬體設計、軟體撰寫與數據分析。在趕進度的同時，還需要兼顧課業與考試，雖然壓力不小，但當看到實驗結果與理論數據吻合時，一切努力都變得值得。

特別感謝成功高中的杜玲均老師在報告撰寫上的悉心指導，以及多倫多大學林發暄教授在電子設計上的寶貴建議，幫助我克服了不少技術難題。這段經歷讓我更加堅定了在電子工程與數據分析領域深耕的決心。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：工程科

作品名稱：數位物理實驗室：毫米波雷達系統之設計與應用

關鍵詞：毫米波雷達、微處理器、簡諧運動

（最多三個）

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

摘要

本研究旨在設計基於毫米波雷達的數位物理實驗系統，用於精確量化彈簧簡諧運動。傳統物理實驗易受肉眼觀察與手動測量的誤差影響，本系統利用 24 GHz 毫米波雷達結合自製電路板，進行即時、無接觸的運動測量。透過設計電路板、撰寫韌體訊號轉換程式，並進行數位數據分析，成功開發了靈敏的毫米波雷達系統。我們利用彈簧簡諧運動實驗驗證了該系統，觀察不同質量砝碼對彈簧運動頻率的影響。實驗結果顯示，考慮彈簧質量後，測量數據與理論結果的均方根誤差從 0.62Hz 降低至 0.35Hz，顯示出系統的高度精確性及穩定性。本研究成功解決了傳統實驗中的量測誤差問題，以毫米波雷達技術實現了精確觀測。開源設計有助於推廣至學校的物理實驗室，為學生提供先進的實驗工具與數據分析經驗。這展示了毫米波雷達在物理實驗中的應用潛力，並為未來教學實驗提供了高效、低成本的解決方案。

Abstract

Our study aims to design and apply a digital physics experimental system based on millimeter-wave radar, specifically for the precise quantification of spring harmonic motion. Traditional physics experiments are often limited by errors from manual measurements and visual observation, but this system uses a 24 GHz millimeter-wave radar combined with a custom-designed circuit board for real-time, non-contact motion measurement. By designing the printed circuit board, writing firmware to convert analog signals into digital data, and using Python for data analysis, the system successfully measured the effects of different masses on the spring's oscillation frequency. The experimental results showed that after accounting for the spring's own mass, the root mean square error between the measured data and theoretical values decreased from 0.62Hz to 0.35Hz, demonstrating the system's high accuracy. Additionally, the stability of the radar module in non-contact measurements highlights its potential applications. This study successfully addressed measurement errors in traditional physics experiments, enabling precise observation of motion using millimeter-wave radar technology. Furthermore, the open-source design of this system will help promote its use in more school physics labs, providing students with advanced experimental tools and data analysis experience. The study showcases the potential of millimeter-wave radar technology in physics experiments and offers an efficient and low-cost solution for future teaching experiments.

壹、前言

一、緒論

物理學中的運動、力學以及能量轉換(Halliday et al., 1992)，從牛頓（Isaac Newton, 1642-1727）提出三大運動定律、虎克（Robert Hooke, 1635-1703）觀察彈簧伸長量與所掛物體質量之間的關係、以能量轉換描述簡諧運動，以及都卜勒（Christian Doppler, 1803-1853）觀察物體運動所引起的波形頻移現象，各種物理現象與相應的數學理論遍佈在我們的生活之中，奠定了現代科技的堅實基礎。在學校裡，我們除了在課堂上學習理論，實驗室中的物理實驗更讓學生以視覺、聽覺等感官去體驗書本中的各種物理現象，加深學習印象，並激發學生在生活中應用所學各種想像。

例如在探究與學習課程中，我們以肉眼和碼表來觀察單擺的簡諧運動週期，以此印證課本中提及的理論與公式，並提高了學習興趣。然而，在實驗過程中，我們發現這種方法雖然簡單易行，但容易受到人為觀測、反應延遲等因素影響，造成實驗誤差。因此，若能結合現代科技，利用各種感測元件，即時觀察並量化物體的運動、位移等現象，將有助於精準地進行物理實驗量測。同時，若能將電路設計以及程式碼以開源方式提供，亦能讓同學們學習如何以現代電子科技製作物理實驗的觀察儀器。基於以上動機，我們決定開始系統的開發與實驗研究。

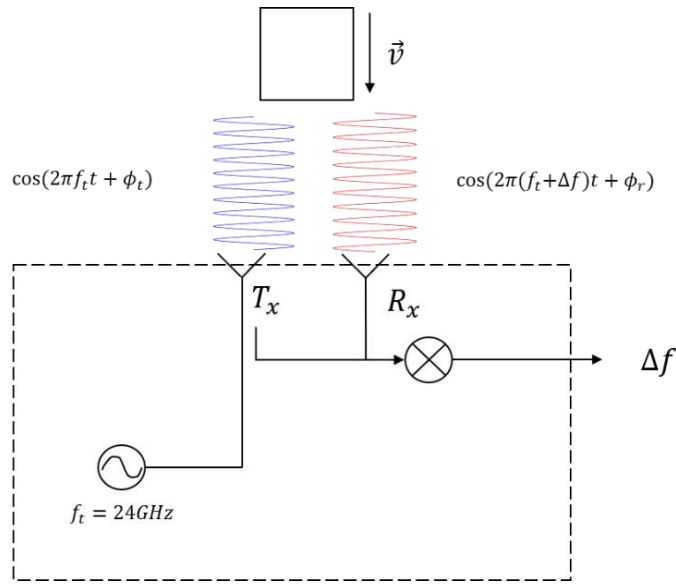
隨著現代科技的進步，雷達技術在航空、航海、氣象預報、自動駕駛等領域的應用日益廣泛。其中，毫米波雷達因其高頻率、高解析度等特性，被廣泛應用於自動駕駛、無人機導航、人體感測等方面(Molisch, 2018)。在交通運輸上，毫米波雷達能精確偵測車輛和行人的位置與速度(Zhang et al., 2017)，提高行車安全；在醫療領域，還能用來監測心跳和呼吸等生命體徵(Li et al., 2013)。因此，如果我們能設計一個基於毫米波雷達的量測記錄系統，應用在物理實驗中，即時且量化地觀察物體的運動現象，不僅可以提高實驗數據的精準度，還能讓學生透過即時數據記錄，學習後續的數據分析、誤差計算等，與理論相互印證的過程。

因此，本研究的目的為 (1)數位物理實驗室的開發：利用毫米波雷達原理結合電腦的數據分析，完成物理運動現象的量化觀察即記錄。本研究設計了一個用於偵測物體運動的毫米波雷達模組。利用毫米波天線模組，並搭配由濾波放大器、微處理器、類比數位轉換等原件結合而成的微型自製電路板以後續的數據處理程式來達成物體運動的分析。(2)物理實驗的實驗量測：在量測系統完成之後，本研究以彈簧的簡諧運動觀察為範例來驗證「數位物理實驗室」的可行性，並探討來彈簧質量對實驗造成的影響。(3)系統開源：將本研究的系統設計、電路圖、印刷電路板圖稿、程式碼等資料以開源專案方式供公眾使用，並期待接納公眾意見持續改進系統，以期提供具成本效益且精準的物理儀器，進入學校的實驗室中，利於學術研究以及科技的發展。

二、原理

(一)連續波雷達 Continuous Wave Radar (CW-Radar)

連續波雷達，是一種持續發射固定頻率連續波的雷達系統。由發射天線(transmitter, Tx)發射固定頻率為 f_t 的穩定訊號，並由接收天線(receiver, Rx)接收從目標反射回來 f_r ，透過觀測兩者間的頻率差 Δf ，可以利用都卜勒效應來推算目標物體的運動狀態變化(Doppler, 1842)。而利用連續波雷達觀測運動中物體的原理如圖(一)所示。



圖(一) 毫米波雷達示意圖(本圖片為第一作者親自製作)

其中雷達發射信號可表示為：

$$S_t(t) = A_t \cdot \cos(2\pi f_t t + \phi_t)$$

其中 A_t , f_t , ϕ_t 分別為發射(transmission)波之振幅、頻率、相位。在本研究所使用的雷達系統中， f_t 為 24 GHz，其對應的波長是 12.5 毫米，因此被稱為毫米波雷達 (millimeter-wave radar, mmWave Radar)。電波由 Tx 天線發射出去，在空氣中傳播到運動中的物體並反射回來，由 Rx 天線所接收。之間會因為都卜勒頻移而有產生頻率差 Δf ，因此 Rx 的接收信號可以表示為：

$$S_r(t) = A_r \cdot \cos(2\pi f_r t + \phi_r), \text{ 其中 } f_r = (f_t + \Delta f)$$

其中 A_r , ϕ_r 分別為接收波之振幅及相位。而在本研究所使用的雷達天線系統，利用乘法電路發射波與接收波進行混頻運算，數學式可表示為 $S_{mix} = S_r \cdot S_t$ ，根據積化和差公式

$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$ 可將其分解為：

$$S_{mix}(t) = \frac{A_t \cdot A_r}{2} [\cos(2\pi(f_r - f_t)t + (\phi_r - \phi_t)) + \cos(2\pi(f_r + f_t)t + (\phi_t + \phi_r))]$$

仔細觀察混頻器之輸出由兩個弦波所組成，而其頻率分別為 $f_r - f_t = \Delta f$ 以及 $f_r + f_t$ ，而混頻器內建以低通濾波器將 $f_r + f_t$ 之高頻信號過濾掉。因此天線模組的輸出信號可表示為：

$$S_{mix}(t) = \frac{A_t \cdot A_r}{2} \cos(2\pi \Delta f t + (\phi_r - \phi_t))$$

因此連續波雷達的接收波經過混頻濾波處理之後，輸出信號之頻率即為由都卜勒所造成的頻移 Δf ，也因此得以偵測運動中的物體。

(二)都卜勒頻移

都卜勒於 1842 年提出當波源與觀察者之間存在相對運動時，觀察者接收到的波頻率將與波源發出的頻率不同，這個現象被稱為都卜勒效應。當物體與波源發生相對運動時，每一次新的波峰都會相對於物體變得更接近或更遠。這導致波長發生改變，進而引起頻率的變化。由於波速 v 不變，當波長縮短時，頻率會升高；當波長變長時，頻率則會降低。這種新頻率與原頻率之間的差值 Δf 就是雷達系統中觀測到的頻率變化。以公式來表示新頻率 $f' = f \left(\frac{v+v_r}{v} \right)$ ，其中 f 為原頻率， v 為波速， v_r 為物體與雷達的相對速度。上述公式說明了當物體接近波源時，頻率 f' 會高於原頻率 f ；當物體遠離波源時，頻率 f' 會低於原頻率。因此利用連續波雷達觀測運動中的物體，混頻器之輸出信號頻率即為

$$\Delta f = f' - f = f \left(\frac{v_r}{v} \right)$$

當雷達發射的信號反射回來時，由於都卜勒效應，接收到的信號頻率會與發射頻率不同。

(三)彈簧簡諧運動

彈簧簡諧運動的基礎是源自於虎克在 1660 年提出的虎克定律(Hooke's Law) (Hooke, 1678)，定律表示，彈性物體所受到的彈力與其形變成正比，如下：

$$F = -kx$$

其中， F 是彈力， k 是彈簧常數， x 是彈簧的位移。而根據此基礎，可以進一步計算出簡諧運動的公式 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。根據牛頓第二定律 $F = ma$ ，可以寫出以下公式：

$$F = -kx = ma$$

而從 $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，可以進一步寫出描述簡諧運動的微分方程(Weaver et al., 1990):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

根據二階齊次微分方程的假設解，可以列出

$$x(t) = e^{rt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = r^2 e^{rt}$$

由於 $e^{rt} \neq 0$ ，所以得出 $r^2 + \frac{k}{m} = 0$ 並進一步算出：

$$r = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

從特徵根為 i ，可以找到通解為：

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

從上式可得 ω 為 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ ，並從 $f = \frac{\omega}{2\pi}$ 得出結果：

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(四)彈簧等效質量

若在理想狀態，也就是彈簧運動僅受到砝碼質量改變的影響，上述公式是足夠的。然而，在現實的物理世界中，彈簧的質量也是會影響到整體運動的頻率，故科學家提出等效質量(Marion & Thornton, 1988)的概念，透過觀察能量的變化來重新定義彈簧頻率的公式： $f =$

$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+\frac{m_0}{3}}}$ ，其中， m_0 為彈簧原始質量，證明如下：

假設彈簧距離固定端 x 處的 $v(x)$ 與末端速度 v_m 的關係為：

$$v(x) = \frac{x}{L} v_m$$

而透過計算彈簧上微小段的動能(dK)，可以進而算出整體的動能：

$$\begin{aligned} dm &= \frac{m_0}{L} dx \\ dK &= \frac{1}{2} dm \cdot v(x)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{L} dx \right) \left(\frac{x}{L} v_m \right)^2 \\ K &= \int_0^L dK = \frac{1}{2} \frac{m_0 v_m^2}{L^3} \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{6} m_0 v_m^2 \end{aligned}$$

解得整體動能為 $\frac{1}{6} m_0 v_m^2$ 後，可以進一步得出等效質量：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_{eff} v_m^2 \\ \frac{1}{2} v_m^2 &= \frac{1}{6} m_0 v_m^2 \\ \frac{1}{3} m_0 &= m_{eff} \end{aligned}$$

從上式可以得知，彈簧原質量對於整個系統有 $\frac{1}{3}$ 的貢獻，最後，在以總動能推出一開始球的式子：

$$\begin{aligned} m_{total} &= m + \frac{1}{3} m_0 \\ f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_{total}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{1}{3} m_0}} \end{aligned}$$

貳、研究方法及材料

一、研究材料及儀器設備

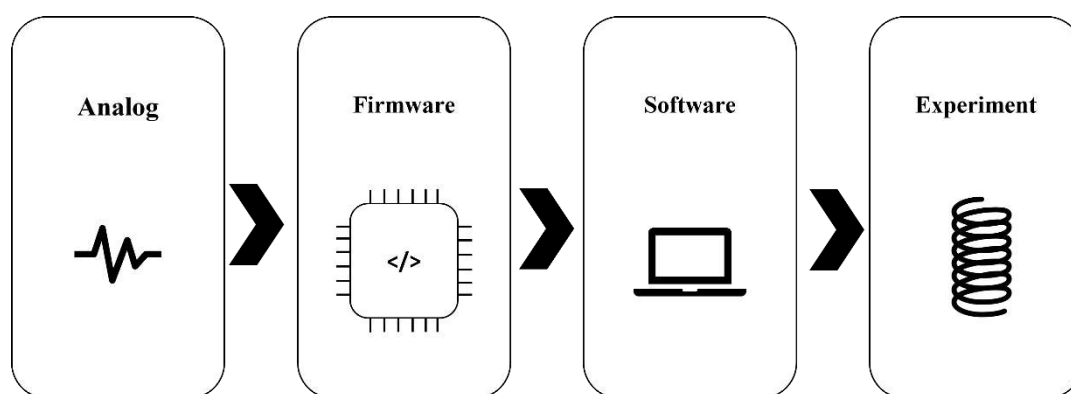
本研究所使用的器材及設備列於表(一)，分類為三個類別。(1)初期麵包板實驗：初期為了理解並學習毫米波天線以及電路運作原理，本研究利用示波器、電源供應器及信號擷取及輸出模組 (Analog Discovery, Digilent, United States)，來測試電路並設計濾波器。(2)數位物理實驗室：本研究利用 KiCad EDA 來完成電路的佈局並製作印刷電路板(print circuit board, PCB)。之後利用鉗槍、熱風槍等設備將 ESP32、天線模組、OP 放大器及電阻電容等元件鉗接至印刷電路板上。並利用筆記型連接 ESP32，搭配 C 語言撰寫韌體、Python 撰寫分析軟體來分析記錄取得之波形。(3)彈簧簡諧運動實驗：最後本研究以彈簧支架以及砝碼，搭配數位物理實驗室，來完成功能驗證。

表(一) 研究所使用儀器以及材料

名稱	簡介
初期麵包板實驗	
示波器 Siglent SDS1102CML+	顯示電訊號的波形
Analog Discovery	USB 介面之多功能的信號擷取及輸出模組
電源供應器	於研究前期提供麵包板電路之電源
數位物理實驗室	
筆記型電腦 ASUS ExpertBook B5602CVA	接收信號並儲存分析
KiCad EDA	用於電路設計及 PCB 布局之開源軟體
C 語言	用於 ESP32 韌體程式撰寫
Python 3.8.8	用於資料擷取、處理以及分析
微處理器 ESP32 dev-module	數位類比轉換並將數值以 USB 送至連接電腦
毫米波模組 Radar K-LC7	用來測量物體距離及速度的裝置。
運算放大器 OPA4340	用於信號放大與濾波
電源穩壓 IC AMS1117	用於將高電壓穩定地轉換至低電壓
電阻	用於 OP 放大器之周邊電路
電容	OP 放大器之周邊電路及穩定電壓的功能
彈簧簡諧運動實驗	
彈簧	測試簡諧運動
砝碼	改變質量的變因
彈簧支架	懸掛彈簧

二、數位物理實驗室

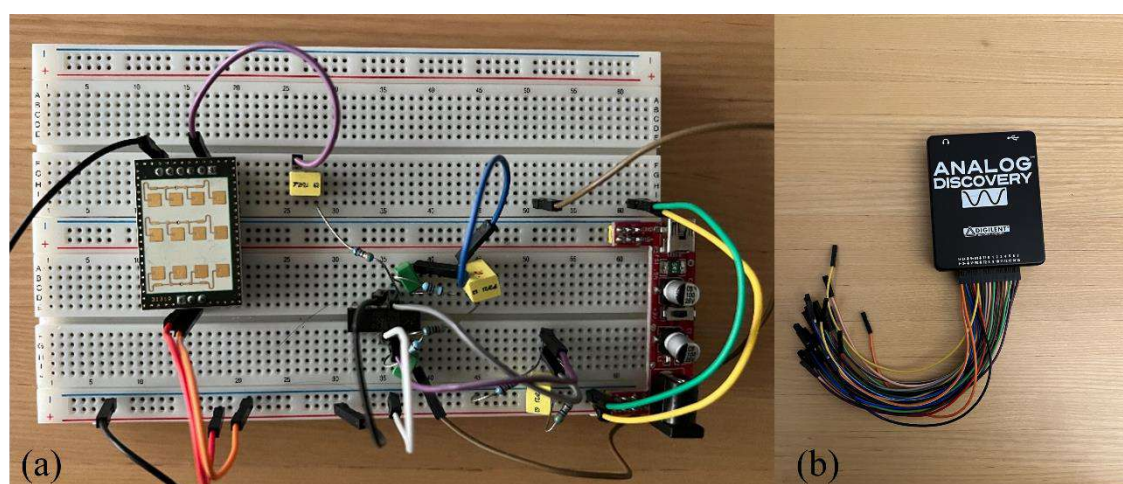
依據其原理與運作方式，本研究將整個數位物理實驗室分為四個主要區塊：類比電路、韌體、軟體與實驗。圖(二)展示了本研究系統軟硬體架構的示意圖。首先，在類比電路(Analog)部分，透過濾波與放大電路，處理雷達的輸出電壓，確保有意義的訊號能夠精確輸入到微處理器中。接著，透過微處理器內的類比數位轉換器(analog to digital converter, ADC)，將經過處理的類比訊號轉換為數位訊號。為了將這些數位訊號傳輸至電腦，本研究編寫了韌體(Firmware)即時將 ADC 的資料輸入至電腦中。在軟體部分，本研究以 Python 開發了一個程式(Software)來處理從 ESP32 微處理器傳輸過來的資料，藉以觀察物體移動的所產生的雷達訊號變化。當系統完成後，本研究利用了簡諧運動實驗(Experiment)，使用彈簧與單擺系統來驗證此系統在實際應用中的意義。接下來將分別細部描述這四個部份。



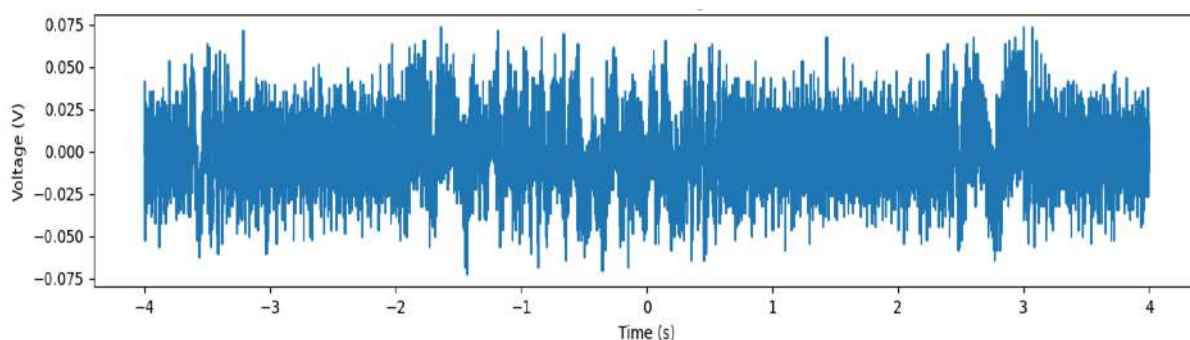
圖(二) 數位物理實驗室功能方塊圖 (本圖片為第一作者親自製作)

(一) Analog: 類比電路設計

本研究所使用的毫米波雷達模組 Radar K-LC7 (RFbeam, Switzerland) (RFbeam Microwave GmbH, n.d.) 運作在 24 GHz。裝置具備有發射及接收功能，且內建混頻器。而研究初期，本研究以麵包板測試電路運作，嘗試以電源供應器提供電源，並將其輸出連接至示波器或 Analog Discovery，並移動物體，嘗試觀察出反射波形。圖(三)顯示出麵包板電路範例以及 Analog Discovery 外觀。實際測試後發現雷達模組的輸出信號之峰值電壓僅約 50 ~75 mV。本研究利用了示波器的儲存功能，將波形存入 USB 碟後。輸入電腦以 Python 作圖，得到圖(四)的測試波形。

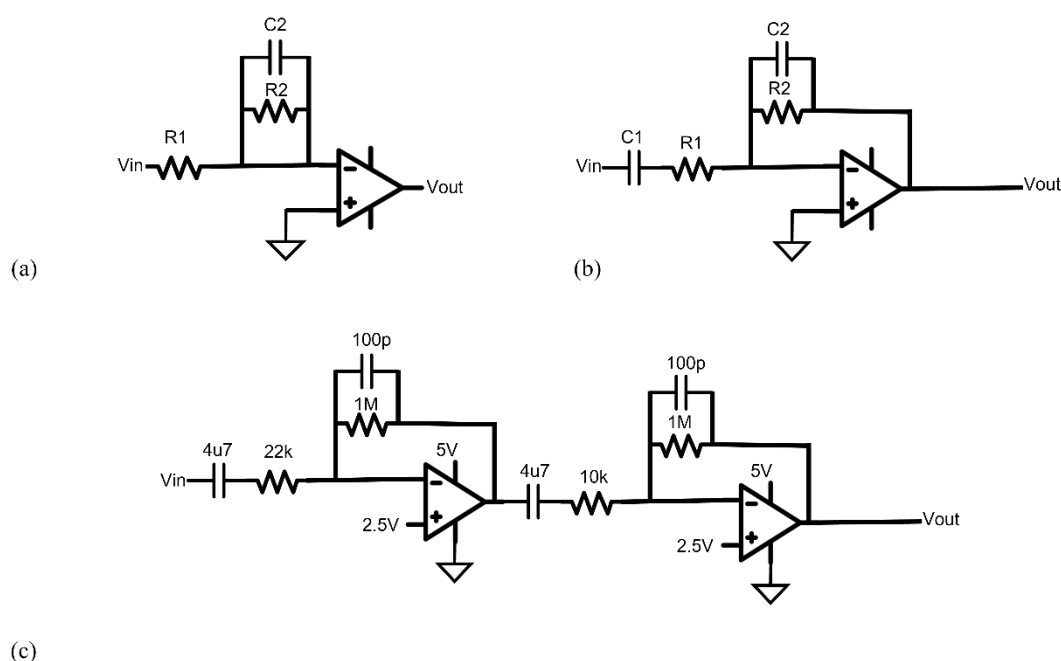


圖(三) (a)於麵包板測試雷達電路, (b)Analog Discovery 外觀 (本圖片為第一作者親自拍攝)

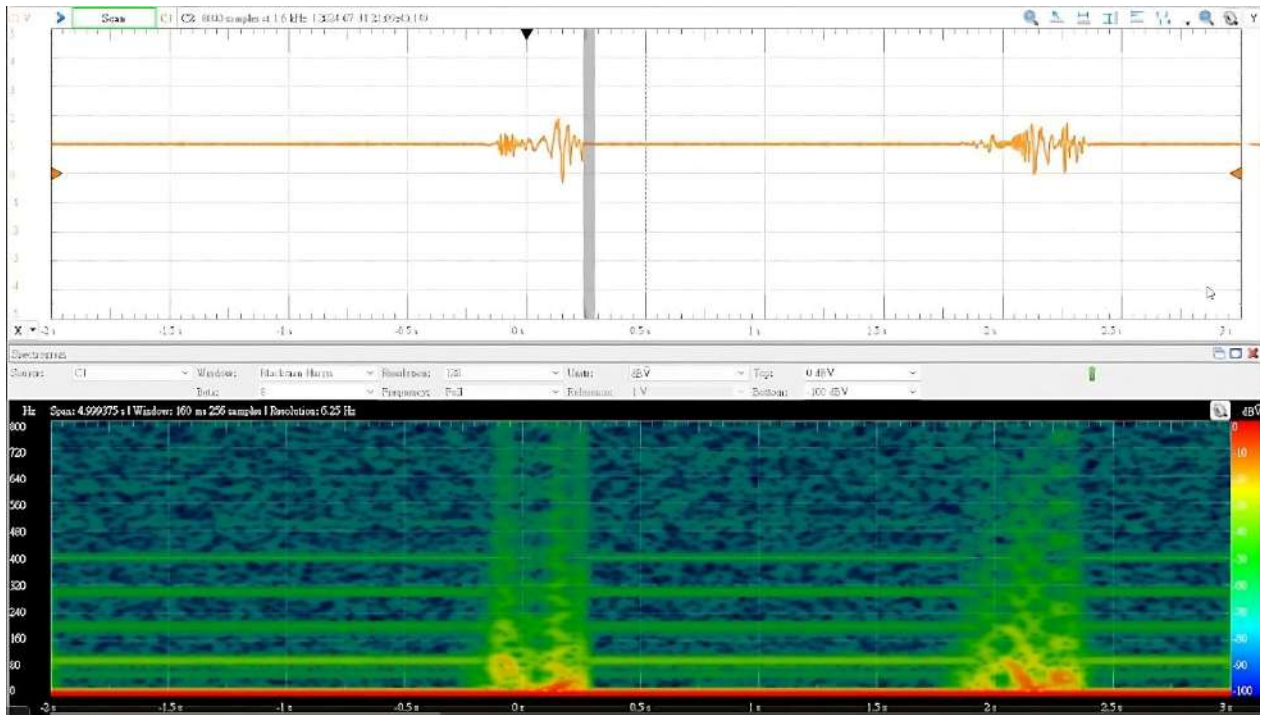


圖(四) 研究初期觀察雷達反射波形 (本圖片為第一作者親自製作)

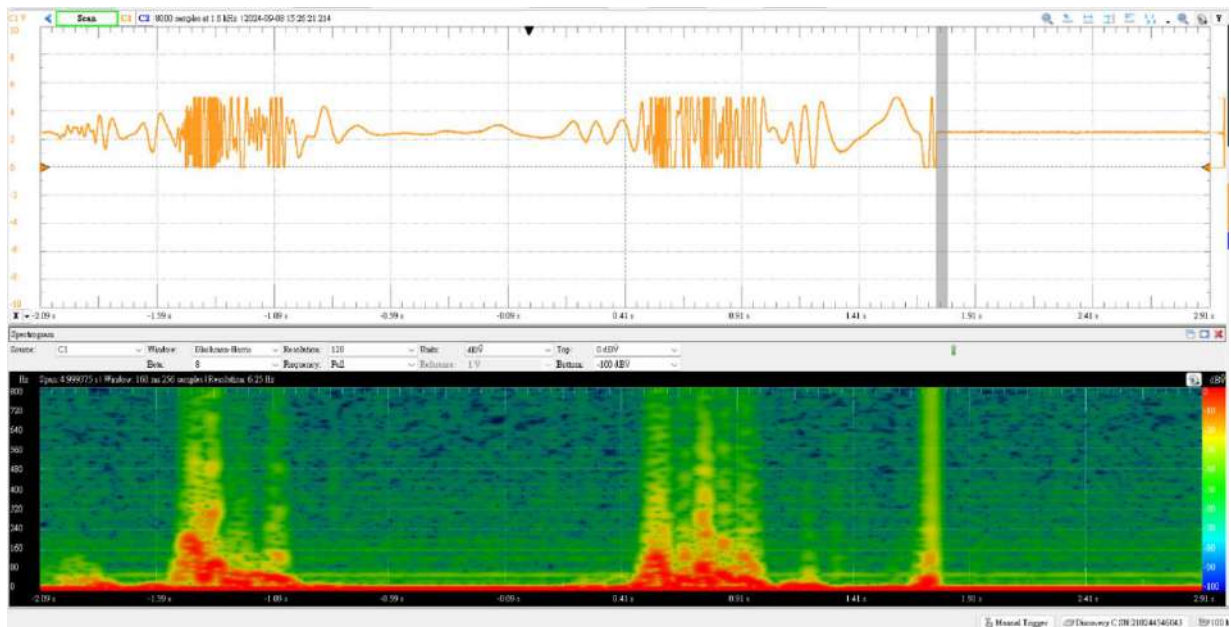
在查閱原廠文件後，K-LC7 模組並不具備有混頻器輸出後的信號放大及濾波功能。如此的低信號、高雜訊的輸出，使得原先預期能獲取的物體運動資訊，都埋藏雜訊之中。因此，我閱讀了相關文獻(Jaeger & Blalock, 2011)以及原廠的參考設計(RFbeam Microwave GmbH, 2022)後，嘗試了兩種濾波電路，分別是低通濾波器以及帶通濾波器，如圖五所示。圖五(a)的低通濾波器，能將高頻訊號濾除，其截止頻率為 $\frac{1}{2\pi R_2 C_2}$ 且放大倍率為 $\frac{-R_2}{R_1}$ 。本研究初步嘗試將截止頻率設定在約 100Hz，並利用 Analog Discovery，觀察輸出波形以及同步完成時頻分析(time-frequency analysis)。圖(六)顯示了 Analog Discovery 的操作介面，以及低通濾波器測試結果。經過濾波器後，大多數時候的電壓波動明顯減小，若在天線之前有物體移動、產生速度變化時，則反射波經過放大濾波後，有了明顯的震盪並在時序頻譜圖顯示清楚的頻譜能量帶。這個結果讓我們有了初步的信心，並繼續研讀資料，最後本研究採用了由原廠所建議的帶通濾波器如圖五(b)所示。其通過頻帶在 $\frac{1}{2\pi R_1 C_1}$ 到 $\frac{1}{2\pi R_2 C_2}$ 之間，且放大倍率為 $\frac{-R_2}{R_1}$ 。可以同時減小高頻及低頻雜訊的干擾。圖五(c)顯示出本研究的最終電路設計，串接了兩組帶通濾波器，如圖五(c)所示。本研究選用了 OPA4340 運算放大器，其得以操作在單電源供應電路，通過頻帶約為 4Hz 至 1kHz，放大倍率為 73dB。圖(七)則顯示該電路的測試結果，將物體在雷達觀測天線前方晃動，可以看到明顯隨時間變動的波形以及明顯的頻率能量帶。



圖(五) 濾波放大電路示意圖; (a)低通濾波器, (b)帶通濾波器, (c)最終使用電路設計
(本圖片為第一作者親自製作)



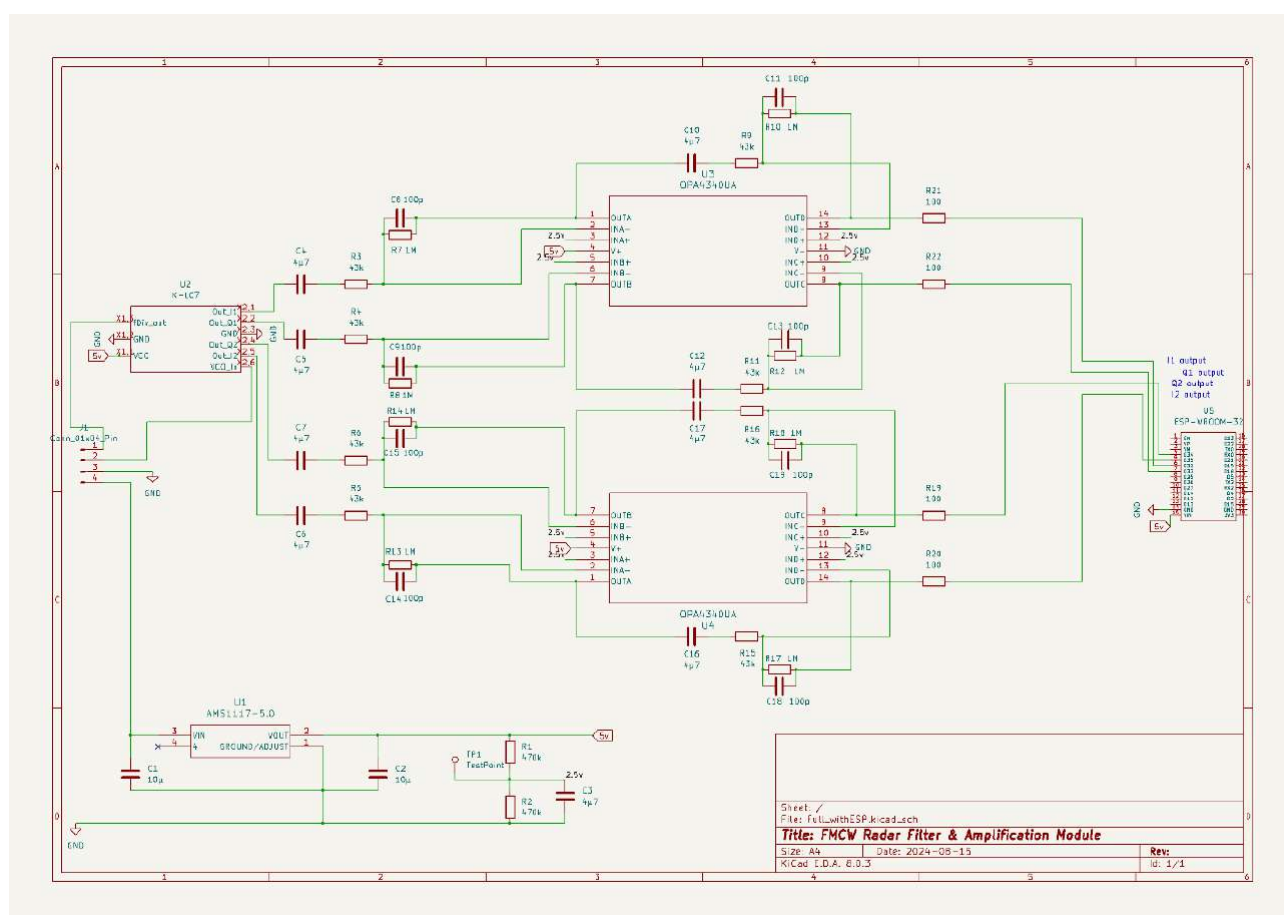
圖(六) 以 Analog Discovery 即時觀察信號。信號通過低通濾波器後，可以初步觀測物體位移。上圖為反射波隨時間的變化，而下圖則為信號頻率隨時間變化的關係。(本圖片為第一作者親自製作)



圖(七) 利用最終的電路設計得以明顯觀察反射波波形以其頻譜能量帶

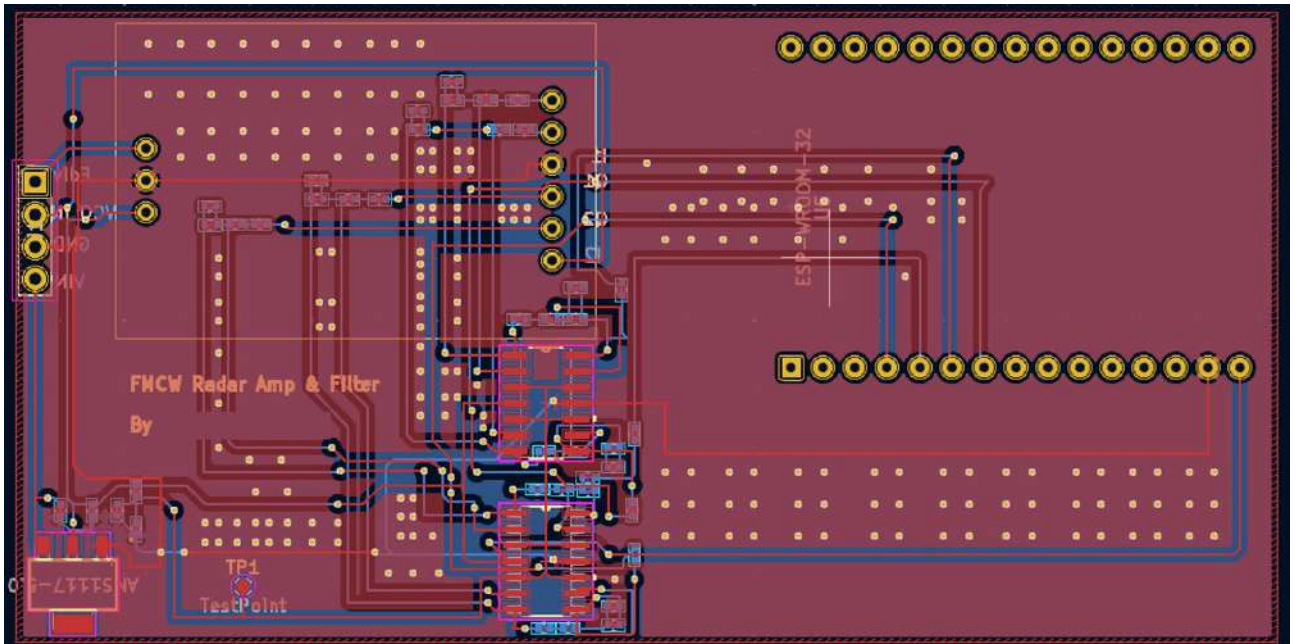
(本圖片為第一作者親自製作)

接著本研究利用 KiCADEDA 軟體來設計電路的原理圖及佈線圖，設計 PCB 的導線、鋪銅、IC 腳位、打孔以及印刷標示。KiCADEDA 是由歐洲核子研究組織(CERN)所支持的開源電子設計自動化軟體。經電路設計後可產生 PCB 製作所需要的 Gerber 檔以及電路生產銲接時所需要的元件物料清單(Bill of Materials, BOM)。為了讓電路板體積較小，本研究盡量使用表面黏貼元件(Surface mount device, SMD)。電容與電阻選用 0402 腳位，而 OPA4340 的腳位為 SOIC14。PCB 中同時容納 K-LC7 雷達模組、ESP32 微處理器、濾波放大電路。此外，也預留了穩壓電路，以因應 USB 供電不足的可能性。圖(八)、(九)、(十)分別為最終設計的原理圖、PCB 佈線圖及 3D 模擬圖，詳細圖稿請參考附錄 1.1 及 1.2。接著本研究輸出 PCB 之 Gerber 檔，委由 JLCPCB 公司生產。收到電路板後，我們利用銲槍、熱風槍、銲錫等工具材料，連接所有元件至 PCB，完成整個電路系統製作。



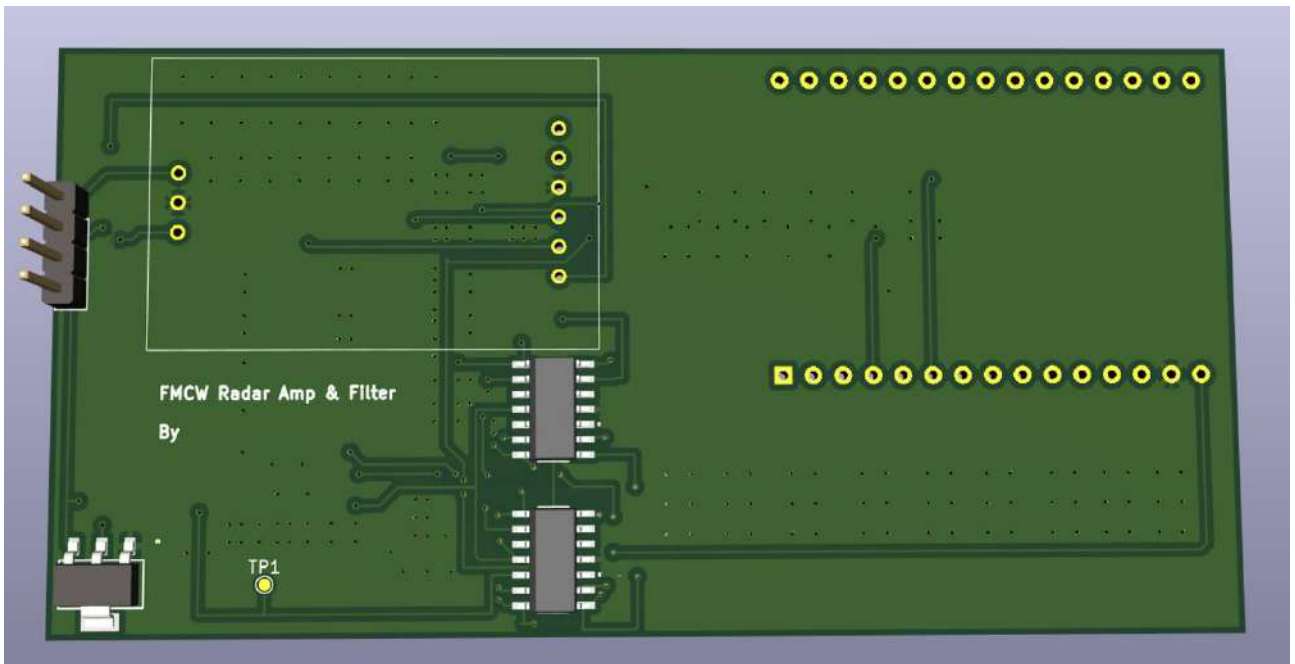
圖(八) 雷達模組原理圖

(本圖片為第一作者親自製作)



圖(九) 雷達模組 PCB 圖

(本圖片為第一作者親自製作)

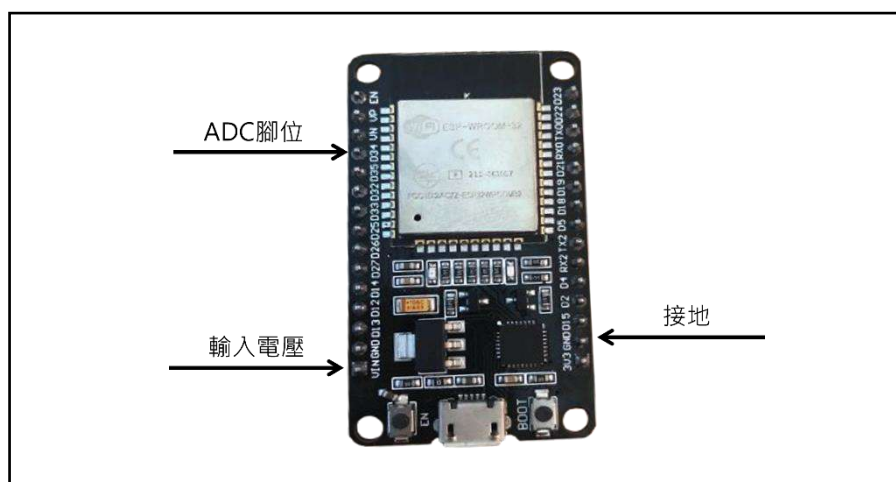


圖(十) 雷達模組 PCB 3D 視圖

(本圖片為第一作者親自製作)

(二) Firmware: 韌體程式設計

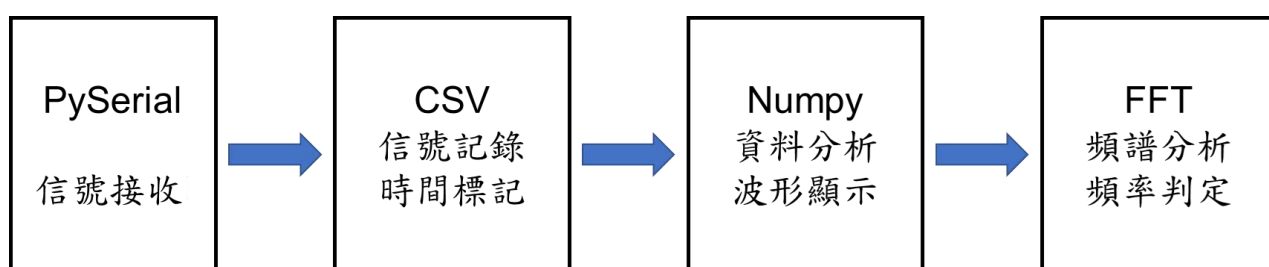
由於從雷達輸出的訊號是電壓變化，是屬於類比訊號，電腦無法直接進行運用，故需要有 ADC 先行將類比訊號轉換為數位訊號。這裡我使用到 ESP32 微處理器中的 ADC 來進行類比數位轉換。ADC 是一種將連續的類比訊號轉換為離散數位訊號的轉換器，該電路先將類比信號取樣，再根據取樣電壓的大小，ESP32 的腳位圖如圖(十一)。而 ESP32 微處理器內建多通道 ADC 功能其轉換解析度為 12 位元。根據 ESP32 文件，0 至 3.9V 的電壓透過 12 位元解析為 0 到 4095 的數位區間。剛開始本研究使用 `micros()` 函數來控制 ADC 的取樣率為 1000 Hz，然而根據後續的資料分析，發現這個方式並不精確(於後續章節呈現)，因此本研究設定 ESP32 以無延遲的方式連續轉換。本研究透過 C 語言的韌體程式，引用使用 "driver/adc.h", "esp_adc_cal.h" 來控制 ADC，並將轉換的數值以序列傳輸方式送出，以供後續數據分析使用。韌體程式以 Arduino IDE 編譯之後透過 USB 連接線上傳至 ESP32。上傳完成後，重置 ESP32 晶片。ESP32 將持續進行 ADC 轉換，並透過 USB 連接線以序列傳輸方式，傳送至筆記型電腦，利用後續軟體程式，達成雷達接收信號的記錄以及分析。



圖(十一) ESP32 常用接腳
(本圖片為第一作者親自製作)

(三) Software: 軟體設計與後端分析

透過 ADC 將類比訊號轉換為數位訊號並傳入電腦後，就開始進行後端的接收與分析程式的設計，程式流程如圖(十二)所示。本研究使用 Python 來設計接收軟體，使用 PySerial 函式庫透過 COM 埠接收來自 ESP32 的數據信號，並將對應資料的時間標記同步儲存至一個檔案(CSV 格式，comma separated file)。一開始本研究以 `micros()` 函數來計時並控制取樣頻率，然後當觀察所儲存下來的資料後發現，這種作法所獲取的數據時間間隔並不穩定。因此最終本研究使用無延遲的連續轉換來控制取樣，並利用後續的 Python 程式碼來校準取樣頻率，設定程式共擷取一分鐘。並明確儲存時間以及信號數據資料以對應後續的彈簧簡諧運動實驗。因此根據獲取的資料共 n 筆，根據數據記錄之第一個點與最後一個點的時間差 Δt 秒。程式則能進一步推算出實際取樣頻率為 $f_s = \frac{n}{\Delta t}$ 。利用儲存的資料，系統程式繼續利用 Numpy 函式庫的數位濾波以及快速傅立葉變換(Fast Fourier Transform, FFT) (Cooley & Tukey, 1965)來協助觀察後續簡諧運動應用所形成反射波週期往返的波形及主要頻率。傅利葉轉換由法國科學家傅利葉 (Joseph Fourier, 1768—1830) 所提出，原先用於熱力學傳導的分析。能將隨時間變化的訊號，表示為不同振幅、頻率、相位的弦波總和。利用這個的一種訊號處理技巧，能夠將時間域的訊號轉成頻率域的訊號，也因此能觀察出信號中的頻率成份。透過 FFT 計算後，程式以 0.5 到 5Hz 為區間尋找訊號中最大的頻率成份，用以觀察彈簧簡諧運動的振盪頻率。



圖(十二) Software 運作流程圖

(本圖片為第一作者親自製作)

(四) Experiments 彈簧簡諧運動實驗

本次專案的實驗從計算虎克常數 k 開始，本研究一共執行 $3 \times 10 = 30$ 次實驗，針對 10 種不同質量的砝碼 (0,20,40,60,80,100,120,140,160,180 g)，測量其對於彈簧伸長量的影響。通過記錄下每一筆數據，本研究進一步分析了質量變化量(Δm)與彈簧伸長量(Δx)之間的關係，透過這些數據，可以繪製出彈簧位移與作用力的關係圖($x - f$ 圖)，並且對關係圖做線性回歸分析，計算其斜率以得到 k 。

得到虎克常數後，接著執行彈簧簡諧運動實驗，實驗變因表如下表二，而實驗裝置如圖(十一)所示。我們一共對進行了 $5 \times 6 = 30$ 次實驗，測試了 6 種質量的砝碼 (20, 40, 60, 80, 100, 120 g)，每一種實驗進行 5 次以確保實驗的準確性與穩定性。執行實驗的過程如下：首先將連接砝碼的彈簧壓縮至其自然長度(無連接砝碼)處的標記點，隨後放手，使其自由振動，進行簡諧運動。完成實驗後，將得到的電壓-時間($V - t$)圖放入分析系統中進行分析，得到弦波與 FFT 後的頻率結果後，分析五次實驗結果的平均值、標準差、變異係數來評估測量的精準度。最後，為了驗證實驗的合理性，本研究透過簡諧運動公式解 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，來得出理論曲線，並透過計算均方根誤差(Root Mean Square Error, RMSE)來量化實驗數據與理論預期之間的偏差。

表(二) 簡諧運動變因表

控制變因	操縱變因	應變變因
彈簧	彈簧掛重	頻率
砝碼材質	-	-
雷達模組	-	-
記錄 MCU	-	-



圖(十三) 實驗裝置圖

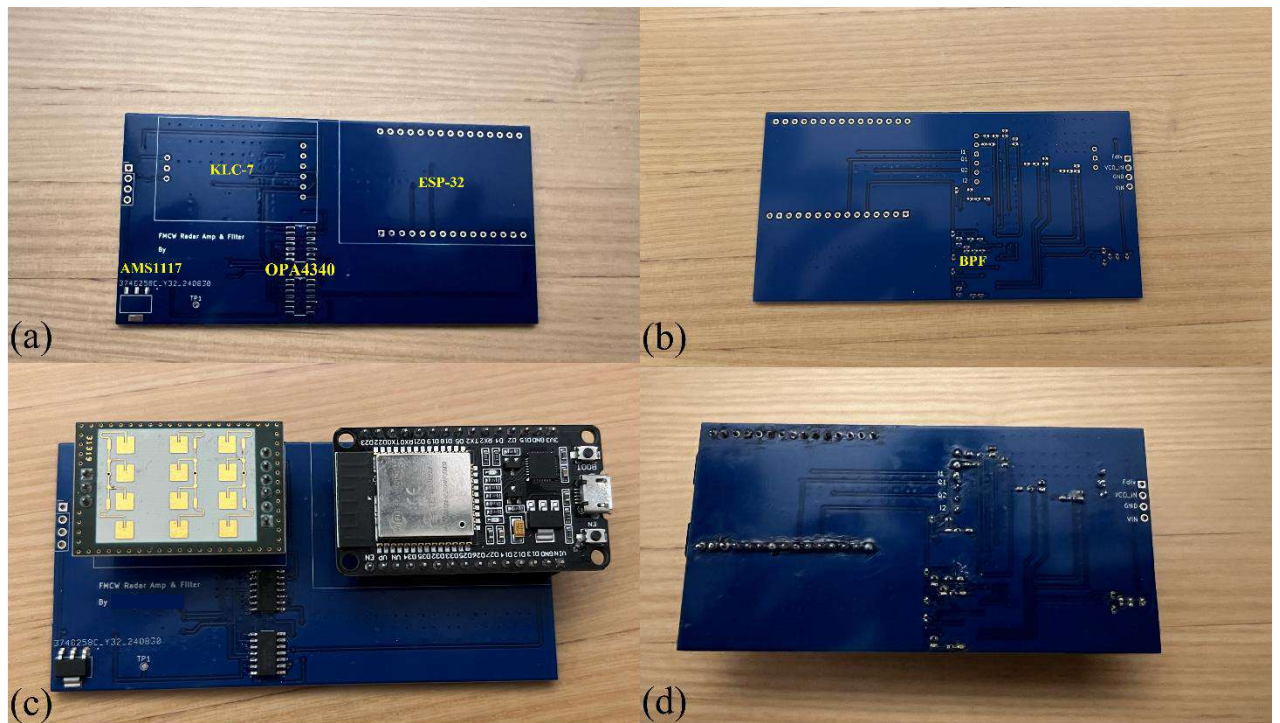
(本圖片為第一作者親自拍攝)

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一)實體雷達測量模組

本研究所生產出的 PCB 尺寸為 $100.0\text{ mm} \times 50.0\text{ mm}$ 。如圖(十二)所示。在設計過程中，本研究為了降低類比訊號與數位訊號之間的相互干擾，將左半區域專門設計為類比訊號處理區域，右半區域則負責數位訊號處理。在 PCB 的背面，雷達模組的輸出分別設計了帶通濾波器串接而成的濾波放大器。而這濾波放大電路均匯集於背面，負責信號濾波。為了降低信號線之間的干擾，我們在線路之間設置了多個接地穿孔，以提供有效接地，減少高頻信號對雷達性能的影響，從而增強信號完整性。而將元件銲接完成後，我們得到了如下圖(十三)的模組完成照。通過 Analog Discovery 的測試，TP 測試點的輸出電壓與設計預期一致。此外，在進行 ESP32 ADC 輸出檢測時，測得的波形與先前麵包板實驗的結果相符。基於此結果，我們認為該 PCB 成功地實現了其設計目標，並具備預期的功能與穩定性。



圖(十四) 雷達測量模組完成圖; (a)焊接前正面, (b)焊接前背面, (c)焊接後正面, (d)焊接後背面

(本圖片為第一作者親自製作)

(二)帶通濾波放大器之頻率響應

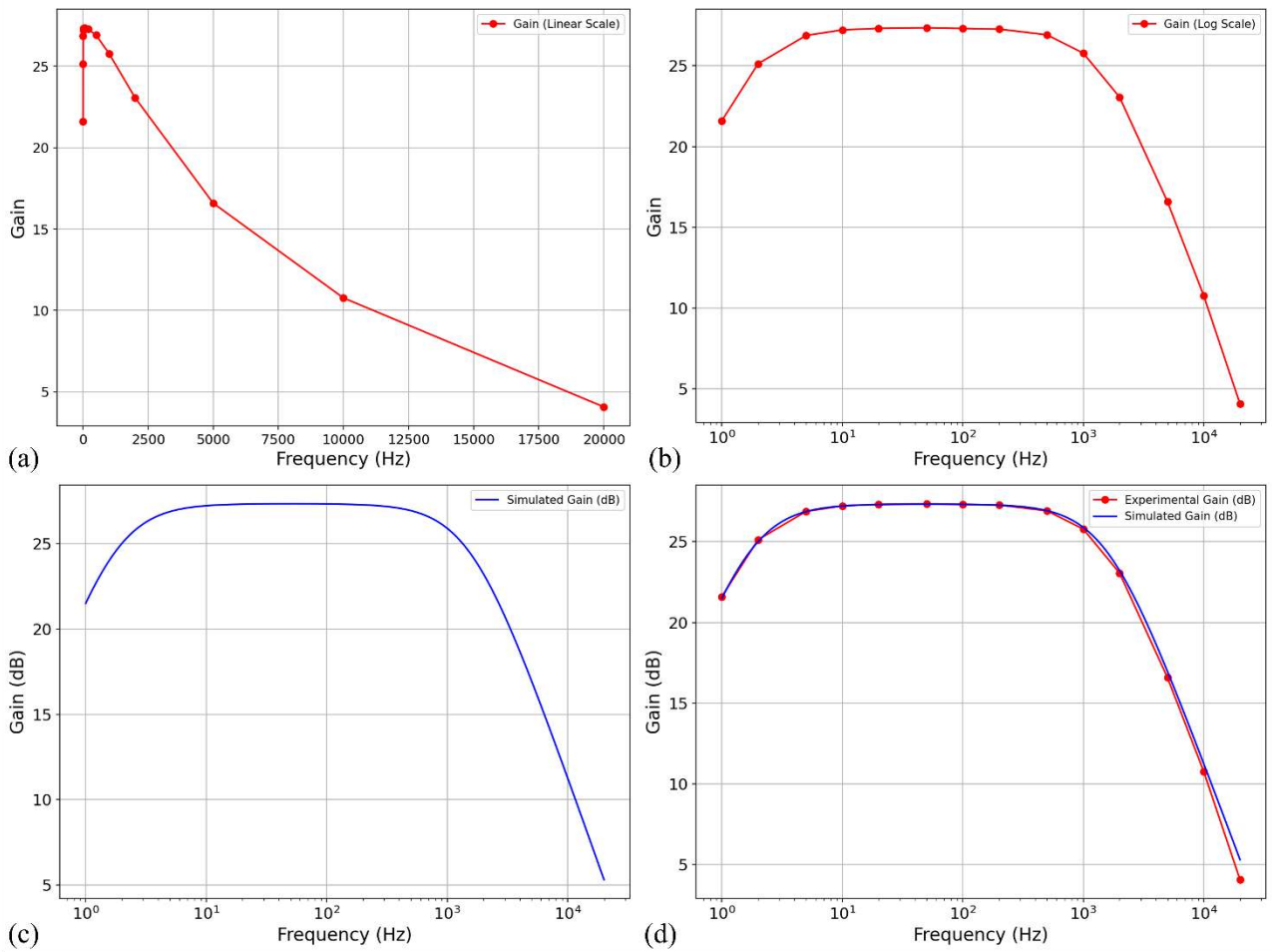
在類比電路設計測試階段，本研究利用麵包板連接了帶通濾波放大器。而為了確認其是否準確地運作，本研究使用了 Analog Discovery 這個儀器的波形產生器，輸出了弦波並同時觀察輸出弦波的振幅，並加以記錄。其中 V_{in} 及 V_{out} 分別為輸入及輸出信號之弦波振幅。本研究以依序調整輸出弦波之頻率為 $n, 2n, 5n$ 而 n 10 的整數指數，意即弦波頻率以 1, 2, 5, 10, 20, 50 Hz 之方式一路增加至 20000 Hz。記錄下輸出弦波振幅之後(實驗數據見附錄 2.1)，繪製出頻率響應圖並與公式解進行比較。本研究所使用的帶通濾波器，其理論頻率響應公式如下：

$$Av(f) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{j2\pi f R_1 C_1}\right)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + (j2\pi f R_2 C_2)}\right)$$

若僅考慮強度，將頻率響應取絕對值，可得到頻率強度響應如下：

$$|Av(f)| = \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f R_1 C_1}\right)^2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f R_2 C_2)^2}}\right)$$

其中該測試所使用的被動元件 $R_1=43k\Omega$, $C_1=2.2\mu F$, $R_2=1M\Omega$, $C_2=100pF$ 如圖十四所示。圖中增益(Gain)以 dB 表示，其數值為是 $20\log_{10}\left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right)$ 。而圖十五的(a)所顯示之頻率響應圖，其橫軸以線性座標表示。而(b)則以頻率響應圖慣用之對數橫軸座標顯示。從圖上可以觀察出帶通濾波放大器的特性，能過濾低頻及高頻，只有帶通頻帶維持信號方大。本研究根據公式，將以 Python 將頻率響應模擬出來，並進行疊圖。如(c)所示。頻率響應之模擬曲線及實驗曲線穩合，如(d)。實驗值與理論值之均方根誤差為 RMSE 為 0.169。結果顯示帶通濾波放大器之功能符合預期。

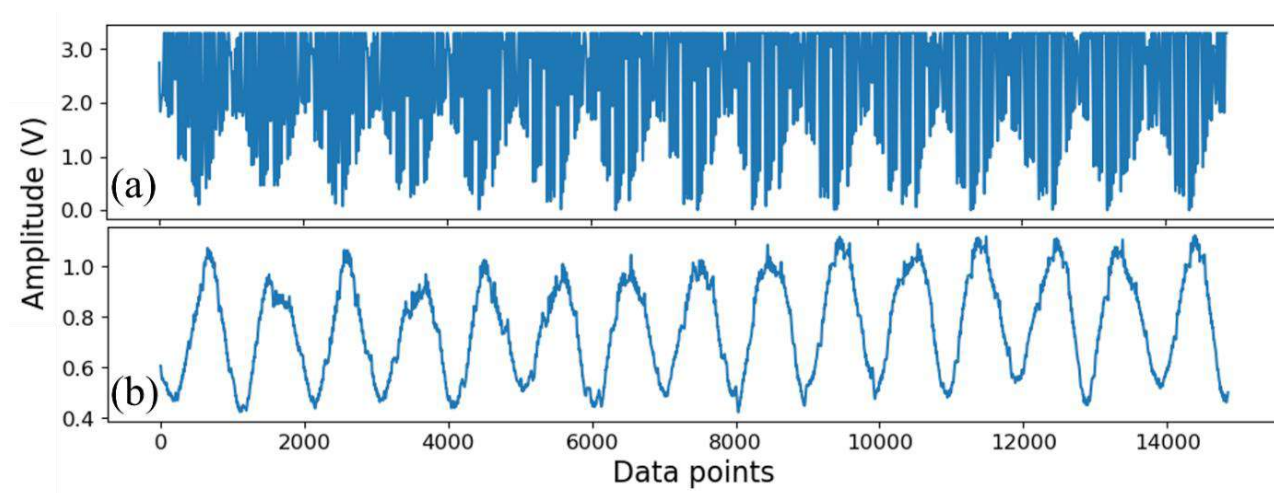


圖(十五) 頻率響應實驗; (a)線性實驗數據, (b)對數刻度實驗數據, (c)模擬數據, (d)疊圖結果

(本圖片為第一作者親自製作)

(三)數位信號處理與數據分析

在進行毫米波觀測實驗時，本研究對原始數據進行了初步處理，繪製出其散點圖（Amplitude vs. Data Points），如圖(十六)(a) 所示。為了更深入了解雷達的輸出訊號，我們採用了 Numpy 模組中的數位濾波函數將訊號進行了平滑化處理，使其更加易於觀察和分析，如圖(十六)(b) 所示。此步驟幫助我們清晰辨識出波形的大致走向，並初步確認了雷達測量的結果接近一個周期性的弦波，這與預期的信號特徵相符。



圖(十六) 訊號處理圖; (a)為 Raw data, (b)為濾波後的波形

(本圖片為第一作者親自製作)

接下來，本研究進行了頻率分析。透過 Numpy 的 FFT 模組對濾波後的訊號進行頻域轉換。

根據彈簧簡諧運動的理論公式 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ，本研究推算得出實驗中可觀測的最高頻率約為 5Hz。

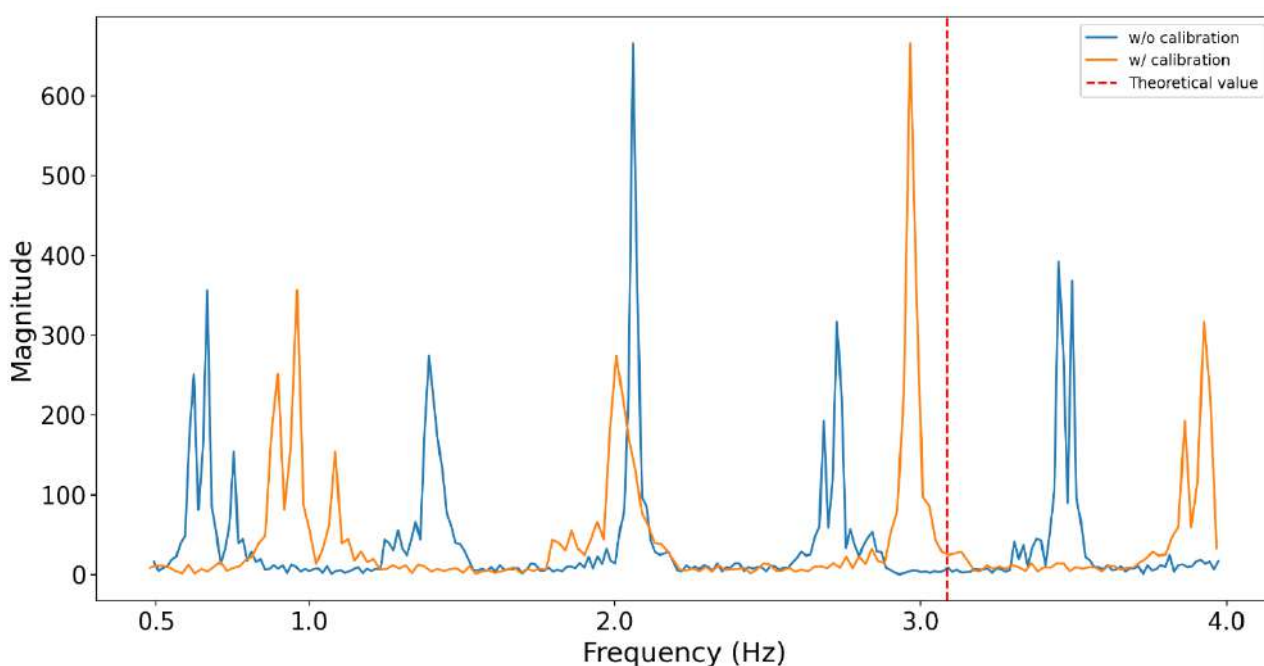
因此，後續分析的重點集中於 0.5~5Hz 範圍內，以排除低於 0Hz 的直流成分對結果的影響，

避免其過高的強度干擾精確性。圖(十七)顯示出頻譜分析圖的範例。頻譜中明顯的高強度頻

率，為波形主要的頻率成份。也是彈簧簡諧運動實驗中關鍵研究的對象。

(四)ESP32 之取樣頻率校準測試

數位物理實驗室透過 ESP32 微處理器來行 ADC 轉換以及數據傳輸。研究初期我們使用 ESP32 內建的函數 `micros()`，這個函數可用微秒等級的精度回傳 ESP32 重置後所經過的時間。利用這個函數，我們設計了理論上取樣頻率為 1000 Hz 的類比數位轉換。收集信號並儲存入 CSV 檔案。然而，根據這個方式來進行後續的彈簧簡諧運動實驗，以 60g 砝碼進行測試。結果如圖(十六)的橘色曲線所示。其中，黑色虛線表示以簡諧運動理論公式推算出來的彈簧振盪頻率。我們可以觀察到理論值(紅虛線)與實驗值(藍色曲線)差距約為 1 Hz。之後我們在 CSV 檔中以 Python 之 `time()` 函數增加記錄時間資料，並用以回推真實的取樣頻率。圖(十六)之橘色曲線顯示了取樣頻率校準之後的結果。利用校準資料調整傅利葉轉換後的頻率值，我們發現實驗值更能貼近理論結果。因此我們繼續使用此校準方法來完成後續所有的彈簧簡諧運動實驗。

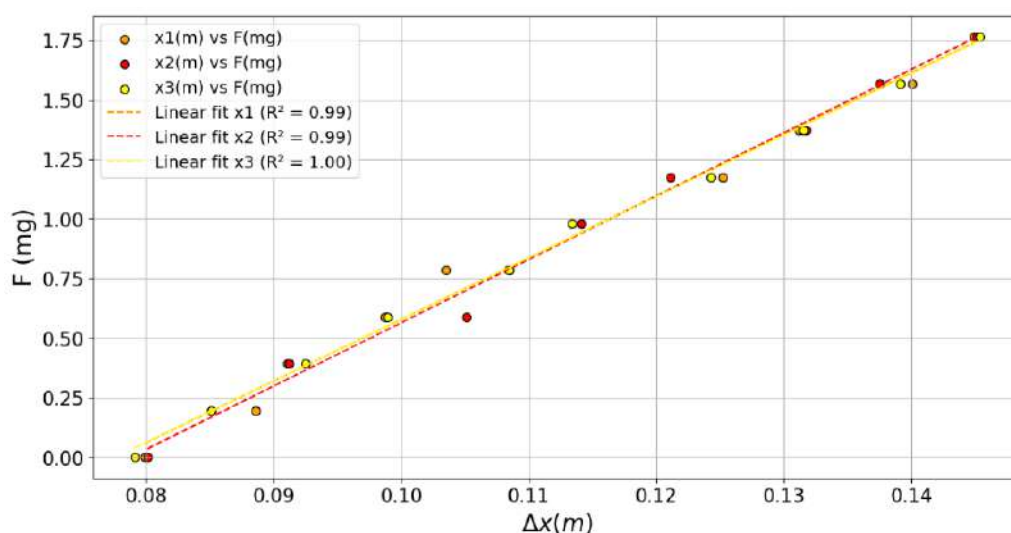


圖(十七) 取樣率校正與未校正之輸出頻譜圖

(本圖片為第一作者親自製作)

(五)虎克常數測定

本研究首先通過測量彈簧形變與砝碼質量之間的關係，來確定虎克常數，以準備進行後續的彈簧簡諧運動實驗。我們選取了 10 種不同質量的砝碼 (0g 到 180g，每次間隔 20g)，並針對每種質量進行三次重複實驗，以確保數據的準確性與重複性。實驗數據列於附錄 2.2。將數據點繪製成散點圖，如圖十八所示。可以觀察到圖中的數據點接近於一條直線，符合虎克定律描述。使用 Excel 進行線性回歸分析後，我們得到了三組回歸方程式，列於表四。所有回歸分析的決定係數 (R^2) 均達到或接近 0.99，顯示出良好的線性相關性。根據這些方程的斜率取平均值，計算得出虎克常數為 $k \approx 26.07 \text{ N/m}$ 。有了虎克常數的值後，接著再探討彈簧簡諧運動實驗。



圖(十八) 重力與位移之關係圖

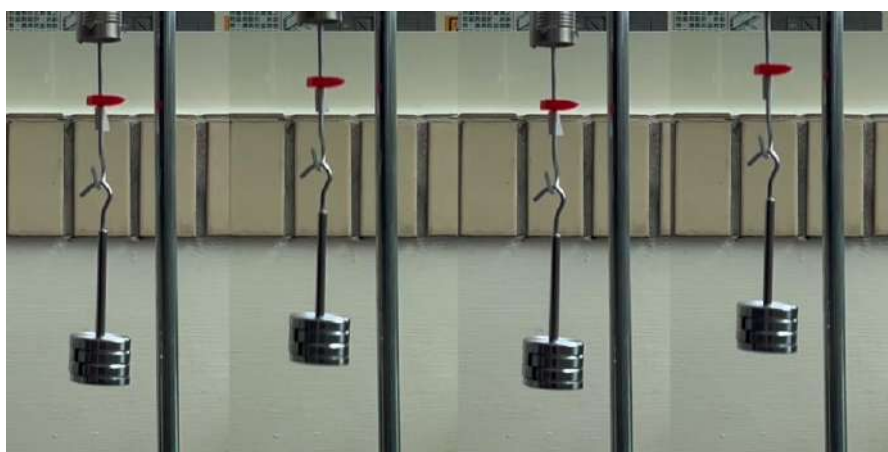
(本圖片為第一作者親自製作)

表(四) 迴歸直線公式

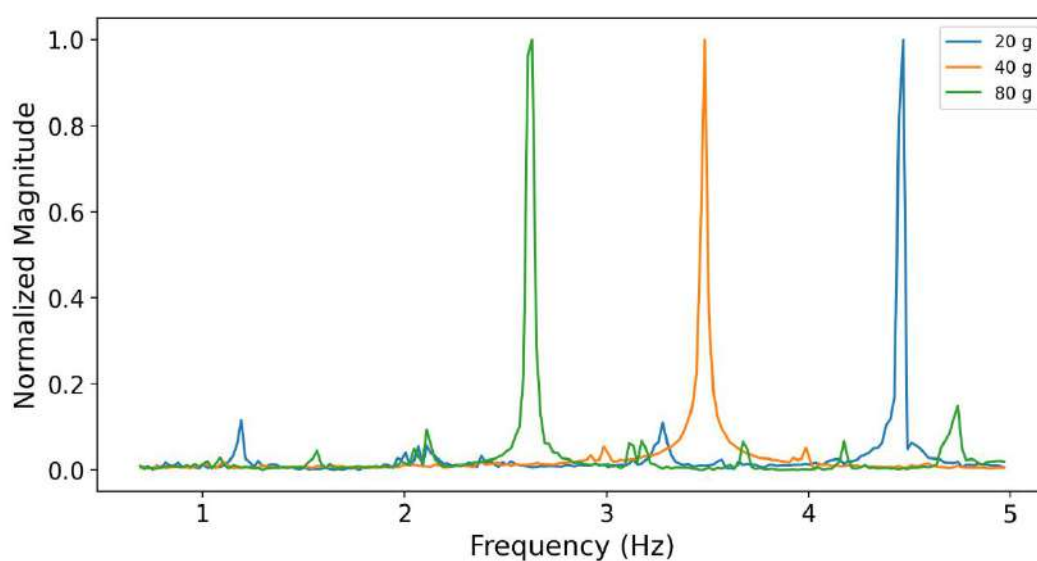
迴歸直線公式	R^2
$f(x) = 25.87x - 2.01$	0.99
$f(x) = 26.57x - 2.09$	0.99
$f(x) = 25.79x - 2.00$	1.00

(六)彈簧簡諧運動實驗

彈簧簡諧運動本研究最主要驗證的實驗，當有外力影響時，將會如圖十九一般，砝碼呈現動能與位能的往復轉換關係，而以固定的頻率上下擺動。這個實驗以砝碼質量為變因，透過雷達來進行彈簧簡諧運動頻率的測量(詳細實驗數據見附錄 2.3)。將雷達測得的頻率數據以 CSV 格式輸入至軟體後，進行快速傅立葉變換 (FFT) 處理，並產生相應的頻譜圖。如圖 (二十二) 顯示出頻譜圖的範例，分別由 20、40 和 80 克 三組不同質量的砝碼實驗所獲得。簡諧運動的振盪頻率，雖著砝碼重量從 20 克至 80 克，逐漸從高頻率(藍色曲線)下降至低頻率(綠色曲線)。從圖中可以明顯看出，質量間存在兩倍差異時，對應的頻率變化顯著增大。



圖(十九) 彈簧簡諧運動產生往復運動 (本圖片為第一作者親自製作)

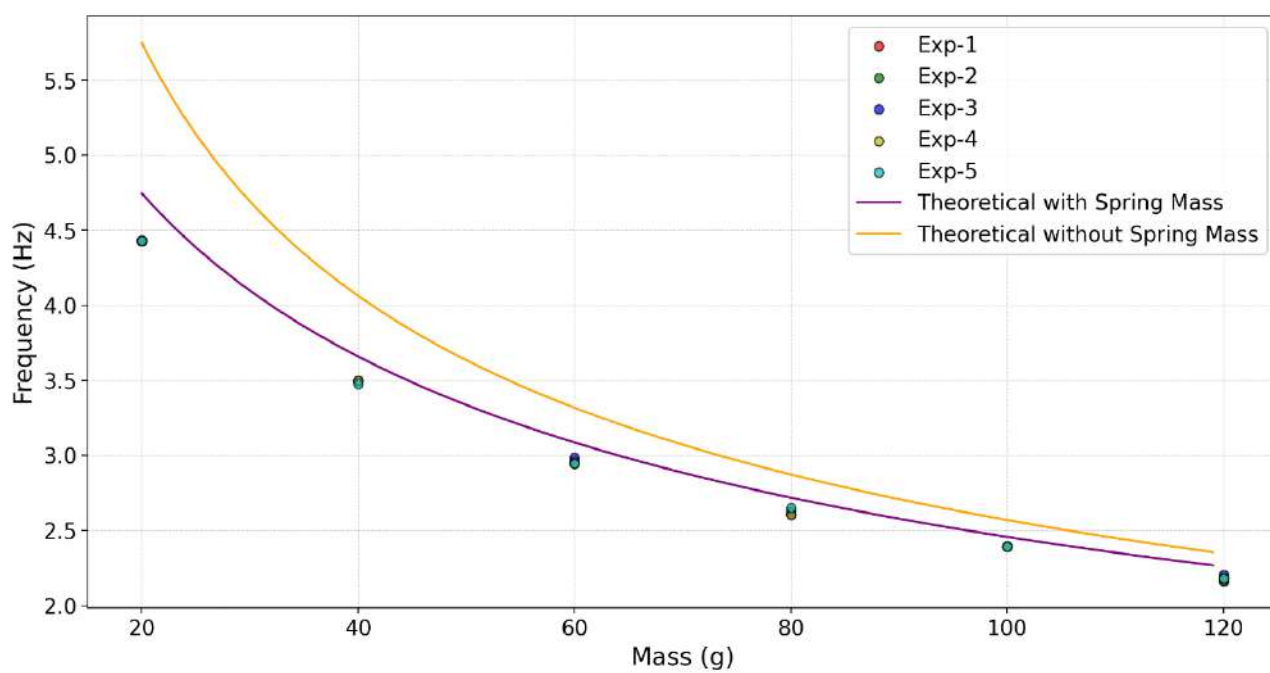


圖(二十) 簡諧運動頻率偵測範例 (本圖片為第一作者親自製作)

本研究以數位物理實驗室系統，重覆對 20 至 120 克之砝碼，各進行了五次振盪頻率觀測，以 FFT 計算獲得頻率後並加以記錄。並繪製於圖二十一裏。表五表列了五次實驗所獲得的平均頻率(AVG)、標準差(STD)以及變異係數(CV)。從表格中能夠看出每一次實驗的變異性小，且圖二十一也顯示五次數據幾乎重疊。可推論雷達量測的穩定程度高。接著，將數據點 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ 的公式解進行比對，透過 Python 的 Numpy 模組進行模擬，繪畫出實驗曲線(圖二十一，黃色曲線)。可以看出，數據點與曲線有一定的落差，計算出其平均 RMSE 約為 0.62Hz(詳細 RMSE 數據見附錄 2.4)，如此誤差表明模擬結果與實驗測量之間存在明顯差距。再深入研究後，才理解原簡諧運動的推導過程中，完全忽略了彈簧質量。由於彈簧拉伸過程中，每個區域的彈簧速度為一變動函數。因此僅能以微積分方式加以推算。根據第原理章節中的推算，彈簧簡諧運動中的彈簧等效質量為彈簧總質量的三分之一。在測量過彈簧本身的質量 $m_0 = 28g$ 後，可將其寫入公式： $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}}$ 再度使用 Numpy 模擬出曲線，並繪製出來，如圖二十一的紫色曲線。可以看到，在考慮彈簧質量會影響運動頻率後，數據點與曲線的差距明顯減少，而計算出的 RMSE 也從 0.62Hz 減少為 0.35Hz(詳細等效質量 RMSE 數據見附錄 2.5)，顯示出公式解與實驗數據的吻合程度有了改善。此結果不只得益於理論的修正，同時也顯現出了雷達測量模組在測量頻率變化下的精確度與準確度，能夠真實地反應物理世界的運動變化。

表(五) 雷達輸出頻率表

M (g)	AVG (Hz)	STD	CV
20	4.43	1.20×10^{-4}	0.00%
40	3.49	9.39×10^{-3}	0.27%
60	2.96	1.88×10^{-2}	0.64%
80	2.62	1.89×10^{-2}	0.72%
100	2.40	3.00×10^{-5}	0.00%
120	2.18	1.77×10^{-2}	0.81%



圖(二十一) 實驗數據點與一般公式解、等效質量公式解之散點圖

(本圖片為第一作者親自製作)

二、討論

(一)類比電路與 PCB 製作

本研究在設計電路板時使用了 KiCad 來進行 PCB 設計，並在設計過程中考慮了電路的穩定性、空間利用率以及製作成本。首先，為了確保電路的穩定性，本研究將數位處理電路與類比電路分開佈局，這樣可以有效減少兩者之間的干擾，提升訊號的完整性。同時，利用線與線之間的接地技術，進一步降低了相互干擾，確保系統的穩定運行。在空間利用方面，本研究選擇了 0402 封裝（1.0 mm × 0.5 mm）的電子元件，將整個模組的尺寸控制在 100.0 mm × 50.0 mm × 15.0 mm 內。這樣不僅節省了空間，還降低了製作成本。此外，本研究成功將 ESP-32 納入 PCB 佈局中，並根據 JLCPCB 的報價，每塊板的製作成本為 1.2 美元，最終訂購了 5 塊。儘管 0402 封裝元件因其小巧的尺寸具備優勢，但焊接難度相對較高。為了提高焊接效率，本研究將所有被動元件放置在 PCB 的背面，這樣可以使整體組裝過程更加順暢，減少焊接上的困難。

(二)類比數位轉換與韌體設計

在實驗中，我們將取樣頻率設置為 1000 Hz，理論上 ESP32 ADC 應該每隔 1000 微秒進行一次取樣。然而，實際的取樣時序出現了偏差，導致依據設定之取樣率計算出的頻率與實際運動頻率之間存在顯著誤差。經過進一步思考與查閱資料，參閱了 ESP-IDF 官方 GitHub 的 issue #10612 後，確認了 ESP32 的取樣率確實存在不精準的問題。我們推測可能的原因在於 ESP32 所內建的計時器依賴的是精度在 1% 至 5% 的 RC 振盪電路，而非更為精準且穩定的石英振盪電路（其精度約在 10 ppm 至 50 ppm 之間）。RC 振盪電路的頻率穩定性較差，容易受到溫度、電壓等外部條件的影響，這可能解釋了取樣時序不準確的現象。為了解決此問題，本研究在採用了取樣頻率校正的方法，動態計算每次實驗中 ADC 實際的取樣頻率，以達到更精確的結果。

(三) 數據分析軟體設計

本研究以 Python 程式來擷取由 ESP32 進行數位類比轉換後的數據資料，總共收取一分鐘的資料之後，使用 FFT 來計算頻譜。以取樣頻率為 1000 Hz 來計算，共收集 $1000 \times 60 = 60000$ 個數據點。經 FFT 計算之後，頻譜解析度約為 0.017 Hz ($1000/60000 = 0.016666$)。當砝碼運動在空氣中，空氣阻力低，因此簡諧運動可以持續數分鐘之久。若延長取樣時間，應可以再提升頻譜解析度。這部份則關係到系統的應用方向，本次實驗的彈簧振盪頻率差異最約為 0.2 Hz (100 及 120 g 砝碼的頻率差)，在這個情形下 0.017 Hz 的解析度已經足夠。

(四)彈簧簡諧運動實驗

經過了彈簧等效質量修正後，本系統量測的彈簧振盪頻率已相當接近理論值。這顯現了數位物理實驗室的應用潛力，尤其在測量 20g 砝碼運動時，雖然擺動振幅小且快(4.43 Hz)，本系統仍然能夠正確地記錄下數據，並且推算出與實際值相近的頻率。藉由數位技術的引入，本系統的頻率解析度理論值為 0.017 Hz，並這是原先在課堂中的以肉眼觀察、碼錶紀錄的探究實驗無法達到的精確度。然而，在執行垂直彈簧簡諧運動時，本研究有可以改善的部份。實驗中，施測者以手動方式讓砝碼由彈簧原始長度自由落下。然而以手動方式鬆開的同時，常使得彈簧出現無法避免的水平擺動。這個現象同時合併了彈簧簡諧運動以及單擺運動，帶入了誤差。因此，若實驗中彈簧呈現明顯單擺運動則重新進行實驗。這個橫向擺動在砝碼質量增加至 140 g 之後變得相當明顯無法進入垂直振盪的穩定狀態。因此彈簧簡諧運動的實驗最高質量停於 120 g。在所獲得的頻譜數據中，本研究也觀察到，除了強度最高的垂直方向的簡諧運動外，頻譜中還出現了強度較低的頻率成分。我們推測這些頻率很可能就來自水平單擺運動，未來可以改成以彈簧拉著滑車在斜面上的固定軌道運動來避免橫向擺動的可能性。

(五)與其他系統的比較

本次完成的作品與市面上現成的毫米波雷達模組相比，有一個獨特性。在於本系統能夠快速地輸出雷達原始數據 (取樣率達 1000 Hz)，讓使用者可以有更多彈性來開發後續的數據應用。而市面上常見的毫米波雷達，常用於人體、物體的偵測，針對的是時間尺度較大、運

動幅度較大的測量。這些雷達的輸出通常會經過內部運算處理，直接給出數據分析結果。這些系統通常取樣率較低(例如 30 Hz)並僅提供 0 與 1 的數據來表示是否偵測到物理，無法達到精確測量簡諧運動的需求。而與基於其他物理現象在量測物體運動的儀器還有包括透過攝影技術的 Tracker 軟體(Tracker, n.d.)和基於光學飛行時 (Time of Flight, ToF) 感測器 (STMicroelectronics, n.d.)。這些儀器各有其特點，Tracker 軟體操作簡單，透過常見的視訊鏡頭即能夠進行簡易的數據擷取與分析。ToF 感測器基於光速量測，適用於需要長距離且高精度的測量。在測量物體運動方面，Tracker、ToF 感測器和本研究的毫米波雷達都能達到良好的效果。然而，本研究的毫米波雷達具有「穿透性」這一獨特優勢。本研究曾嘗試以玻璃燒杯、燒杯加水、不鏽鋼碗、樂高塑膠板來觀察彈簧振盪波形。初步結果顯示 (詳見附錄 2.6) 本系統之毫米波雷達能有效穿透非金屬固體(如樂高塑膠板及玻璃)，準確量測受到光遮蔽的物體運動頻率。這使得毫米波雷達在特定應用場景，例如非接觸式心跳呼吸感測，以及探測光遮蔽物體下的生命體運動，具有明顯的優勢，與 Tracker 及 ToF 等技術形成差異。

(六)研究反思與未來展望

在本次的研究中，研究組員從原先對這個領域不太了解，到一步步地完成整個系統，這過程中收穫了很多實際的知識。透過跟著老師的指導、查閱文獻和課本，組員慢慢理解了相關的公式，並實際搭建了電路，測量了頻率響應。並在諮詢電子工程師後，自行學習使用 EDA 軟體將實驗板電路設計成 PCB 板。在電路板製作過程中，還需要利用從沒碰過的熱風槍、錫膏等工具材料，將每一個只有 1.0 毫米大小的表面黏貼元件，一個個仔細地焊接到 PCB 板上，直到模組最終完成。在過程中遇到了不少困難，比如說，雜訊過高或訊號強度過低，讓測量結果並不理想; ADC 取樣時，也發現了不夠精確的問題。但是在最後，本研究透過了帶通濾波器的設計、多次地測試來改善精度。這些過程讓我們獲益良多，也讓我們對實際操作中的各種細節有了更深的理解。當模組完成，實際進行彈簧簡諧運動時，又因為結果與理論值不一致的情形。促使著本研究更深入去探討彈簧簡諧運動的理論，藉由引入彈簧質量的參數，實驗值與理論值又更加貼近了。當成功測量出簡諧運動的頻率時，內心真的成就感那是不可言喻的。從開始到完成的這段旅程，雖然有很多次的嘗試和修正，但一步步走下

來，感覺不僅掌握了新的技能，也更加懂得如何面對技術上的挑戰。同時，本研究整個系統設計包含電路圖稿、軟硬體程式碼開源使用。若應用在中學的物理實驗課堂裏，「數位物理實驗室」的實作開發過程，同時實踐了電機工程、數學、物理及電腦科學的學習。更得以讓同學們體會，如同 1907 年的諾貝爾物理獎得主邁克生（Albert Michelson, 1852—1931）自製儀器量測光速，而獲得「自己的實驗儀器自己做」的樂趣及成就感。

而在未來展望，本研究計劃使用時序更加精準的微處理器，這將有效提升類比數位轉換過程中的取樣精度，減少時序偏差問題，進而提高數據的準確性與穩定性。在雷達技術上，我們希望可以延伸應用 FMCW (Griffiths & Baker, 2005) (頻率調變連續波)雷達，使其可以在測量運動頻率的同時又檢測物體的距離，使整個作品可以拓展到更多物理實驗的應用上。

肆、結論與應用

一、結論

本研究成功開發了一個基於毫米波雷達技術的數位物理實驗系統，並利用彈簧簡諧運動的測量來加以驗證。展示了該系統的精確性與穩定性。通過整合類比電路設計、數位訊號處理與數據分析技術，我們克服了早期高雜訊、低能量輸出以及取樣頻率不穩定等技術挑戰。最終實驗結果顯示，毫米波雷達能夠精確捕捉微小的運動變化，並與理論值一致，顯示出系統測量的精確度。同時，該系統的開源設計為中學教育提供了一個低成本且高效的物理實驗工具，能讓學生掌握數據分析和誤差計算的實驗技能，為研究及教育領域貢獻一份心力。

二、應用

本研究開發的毫米波雷達技術在科學教育與精密運動測量領域中具備應用潛力。首先，在中學及大學的物理實驗教學中，本系統可以作為一種數位物理實驗工具，替代傳統的手動測量方法。毫米波雷達系統能夠準確且非接觸地測量簡諧運動頻率，這不僅減少了人為誤差，還能讓學生更直觀地理解物理概念，並學習數據分析與誤差計算的實驗技能。透過開源的軟硬體設計，教師與學生可以對系統進行修改與延伸，發展出更多有趣的實驗應用，促進跨領域的學習和創新。在精密運動測量方面，本研究的毫米波雷達系統展現了其在非接觸式測量中的獨特優勢。通過實驗驗證，本系統能夠精確地捕捉微小物體的簡諧運動，尤其在測量小質量物體的運動頻率時，表現出準確性與穩定性。毫米波雷達在保持準確性的同時，對於遮蔽物體的運動測量也有明顯的優勢。綜上所述，本研究的毫米波雷達技術在物理教育與精密運動測量中展現了其獨特的應用價值。

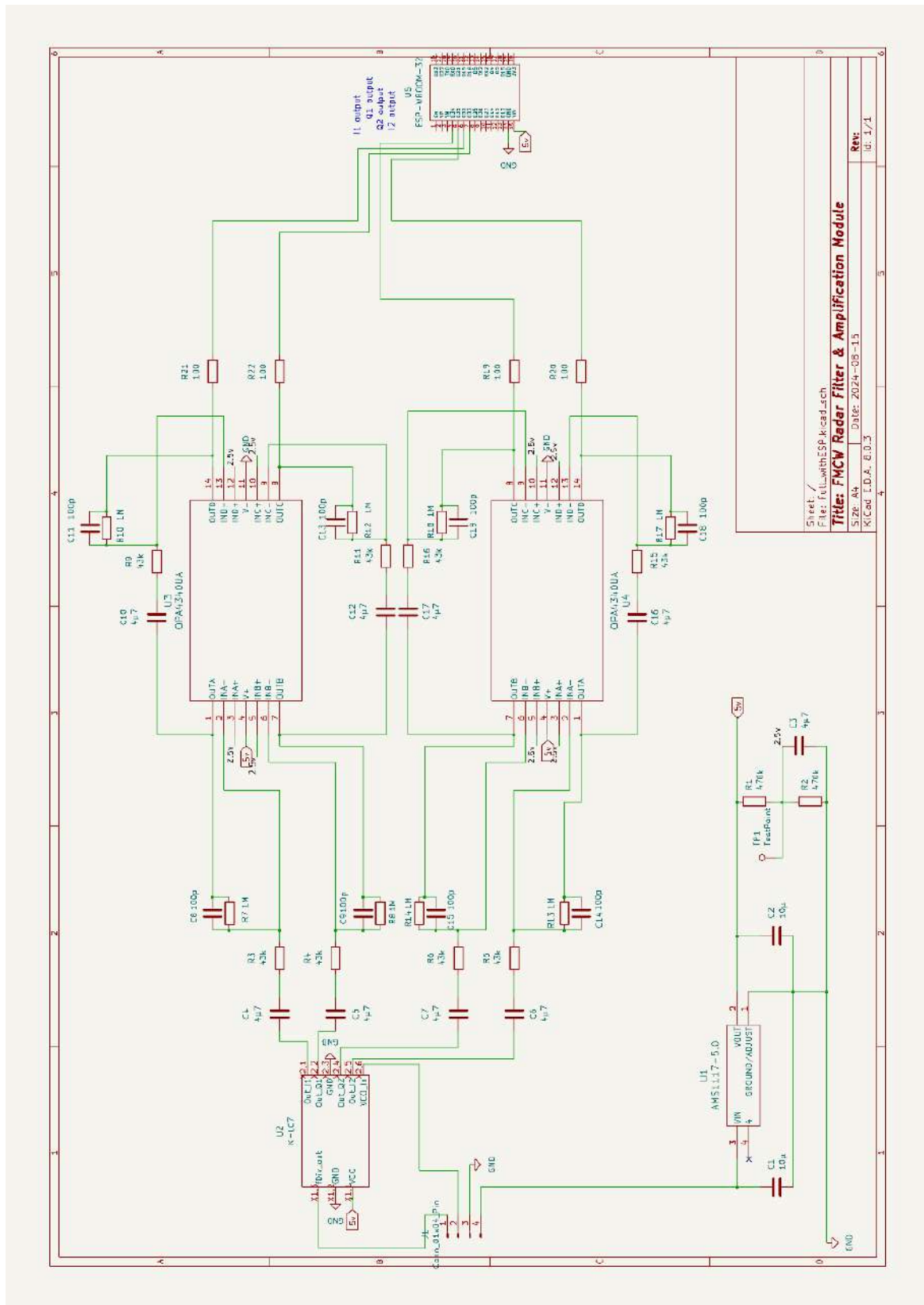
陸、参考文献

1. Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301.
2. Doppler, C. (1842). Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels.
3. Griffiths, H. D., & Baker, C. J. (2005). Overview of FMCW radar systems. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 20(9), 9–14.
4. Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (1992). *Physics* (4th ed., Vol. 1). Wiley.
5. Hooke, R. (1678). *De Potentia Restitutiva, or of Spring. Explaining the Power of Springing Bodies*. Printed for John Martyn Printer to the Royal Society, London.
6. Jaeger, R. C., & Blalock, T. N. (2011). *Microelectronics: Circuit Analysis and Design* (4th ed.). McGraw-Hill.
7. Li, C., Lubecke, V. M., Boric-Lubecke, O., & Lin, J. (2013). A review on recent advances in Doppler radar sensors for noncontact healthcare monitoring.
8. Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1988). *Classical Dynamics of Particles and Systems*.
9. Molisch, A. F. (2018). *Millimeter-Wave Communication* (IEEE Press Series on RF and Microwave Technology).
10. RFbeam Microwave GmbH. (2022). K-LC7 24 GHz Doppler Radar Module Datasheet.
11. RFbeam Microwave GmbH. Typical Doppler Signal Amplifier, Application Note AN-04.
12. STMicroelectronics. (n.d.). VL53L1X ToF Sensor Datasheet [Sensor].
13. Weaver, W., Timoshenko, S. P., & Young, D. H. (1990). *Vibration problems in engineering* (5th ed.). John Wiley & Sons.
14. Tracker. (n.d.). Tracker Video Analysis and Modeling Tool [Software]. Open Source Physics.
15. Zhang, Y., Yang, K., & Wu, J. (2017). Millimeter-wave radar technology for automotive applications: A review.

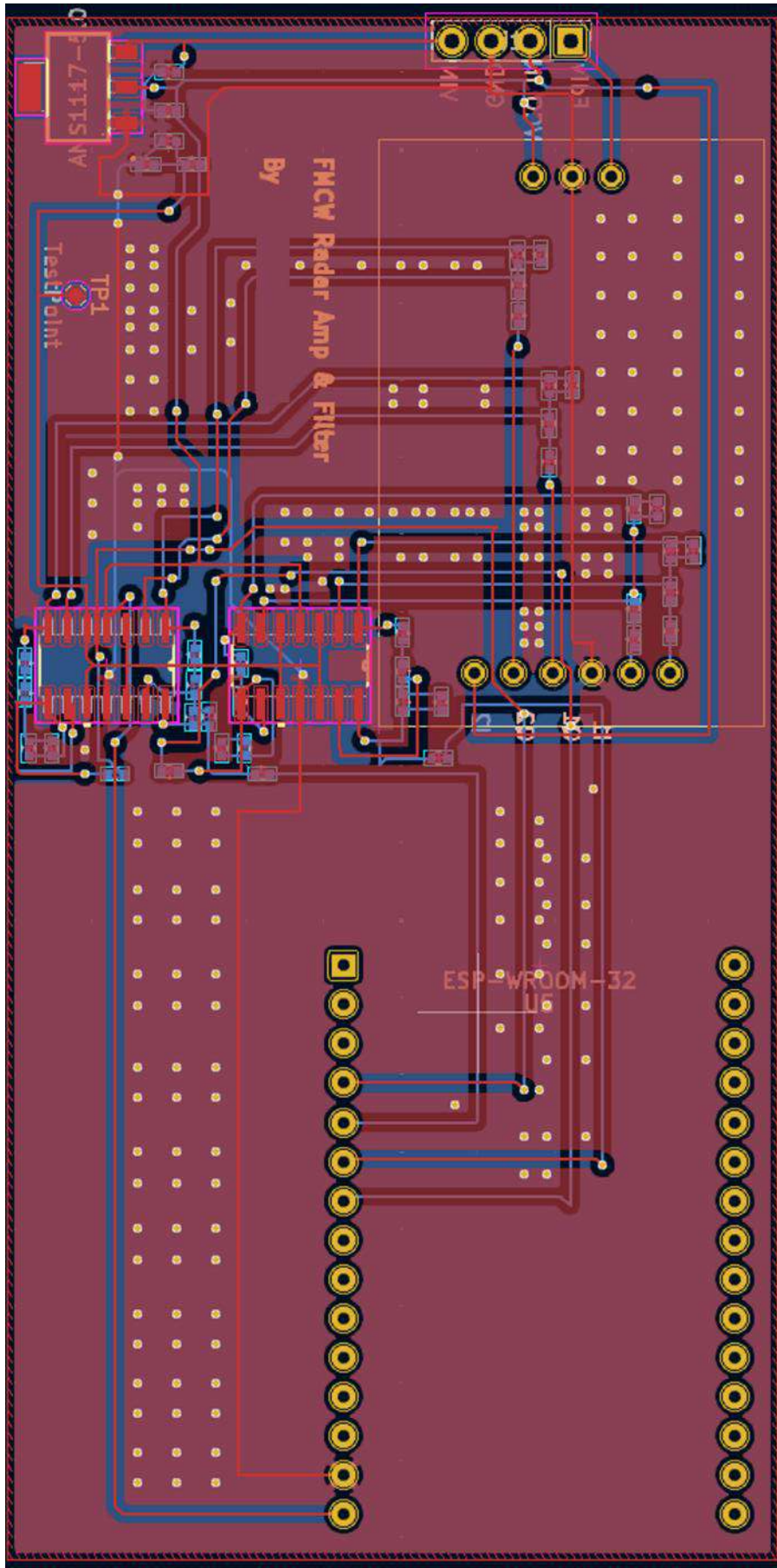
柒、附錄：

1、硬體模組原理圖與 PCB 圖

1.1 模組原理圖(Schematic) (本圖片為第一作者親自製作)



1.2 模組 PCB 圖 (本圖片為第一作者親自製作)



2、實驗數據

2.1 頻率響應實驗數據

f (Hz)	V_{in} (V)	V_{out} (V)	Gain (dB)
1	0.010	0.121	12.026
2	0.010	0.182	18.044
5	0.010	0.222	22.066
10	0.010	0.231	22.959
20	0.010	0.234	23.218
50	0.010	0.235	23.297
100	0.010	0.234	23.198
200	0.010	0.233	23.098
500	0.010	0.223	22.165
1000	0.010	0.196	19.454
2000	0.010	0.143	14.230
5000	0.010	0.068	6.753
10000	0.010	0.035	3.456
20000	0.010	0.016	1.599

2.2 虎克常數測定實驗數據

M(g)	x1(cm)	x2(cm)	x3(cm)	Average	STD	CV
0.0	7.99	8.02	7.91	7.97	0.06	0.71 %
20.0	8.86	8.51	8.51	8.623	0.20	2.34 %
40.0	9.11	9.12	9.25	9.16	0.08	0.85 %
60.0	9.87	10.51	9.89	10.09	0.36	3.61 %
80.0	10.35	10.85	10.84	10.68	0.29	2.68 %
100.0	11.41	11.41	11.34	11.39	0.04	0.36 %
120.0	12.52	12.11	12.43	12.35	0.22	1.74 %
140.0	13.12	13.17	13.15	13.15	0.03	0.19 %
160.0	14.01	13.75	13.91	13.89	0.13	0.94 %
180.0	14.49	14.51	14.54	14.51	0.03	0.17 %

2.3 實驗雷達頻率輸出

M (g)	Exp-1 (Hz)	Exp-2 (Hz)	Exp-3 (Hz)	Exp-4 (Hz)	Exp-5 (Hz)
20	4.429	4.429	4.429	4.429	4.429
40	3.497	3.496	3.497	3.497	3.476
60	2.967	2.946	2.988	2.946	2.946
80	2.607	2.628	2.607	2.607	2.649
100	2.395	2.395	2.395	2.395	2.395
120	2.162	2.162	2.204	2.183	2.183

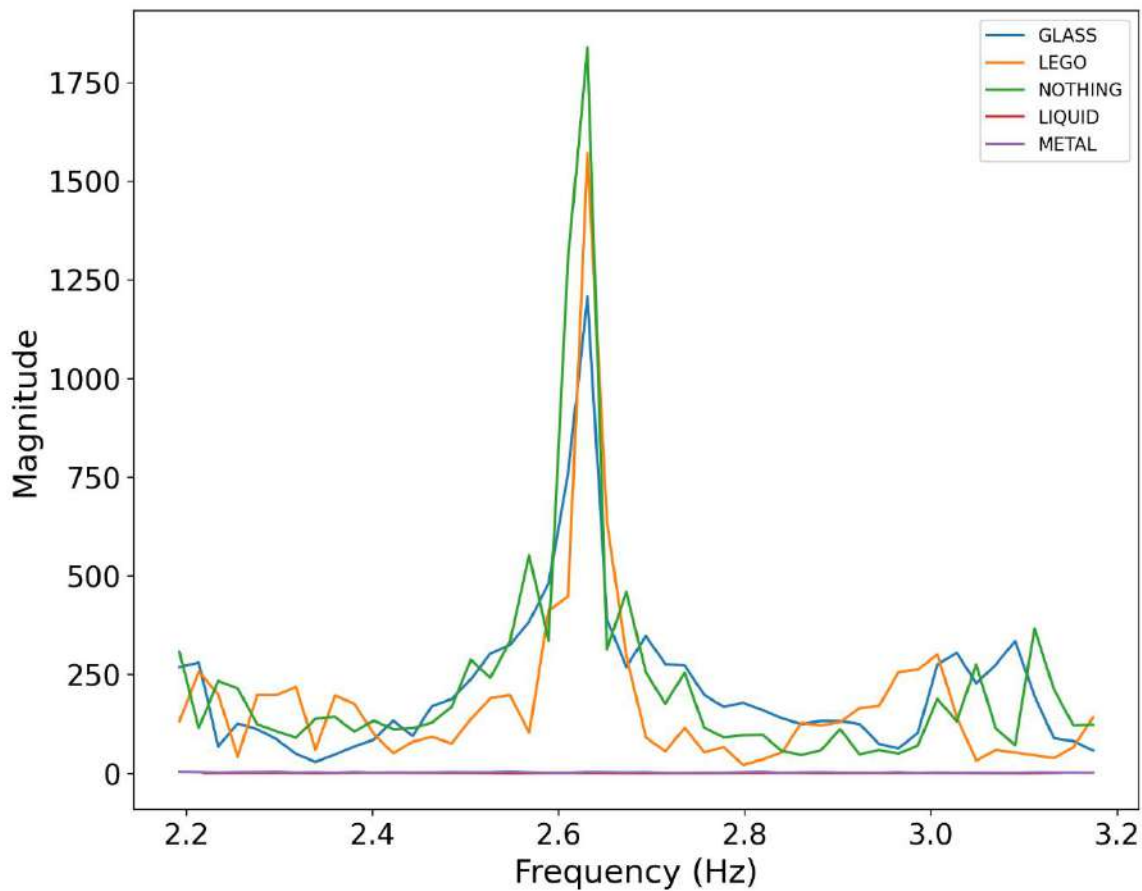
2.4 彈簧振盪頻率與理論值之誤差 (RMSE, 未考慮等效質量)

Experiment	RMSE
Exp-1	0.620
Exp-2	0.621
Exp-3	0.617
Exp-4	0.622
Exp-5	0.622

2.5 彈簧振盪頻率與理論值之誤差 (RMSE,考慮等效質量)

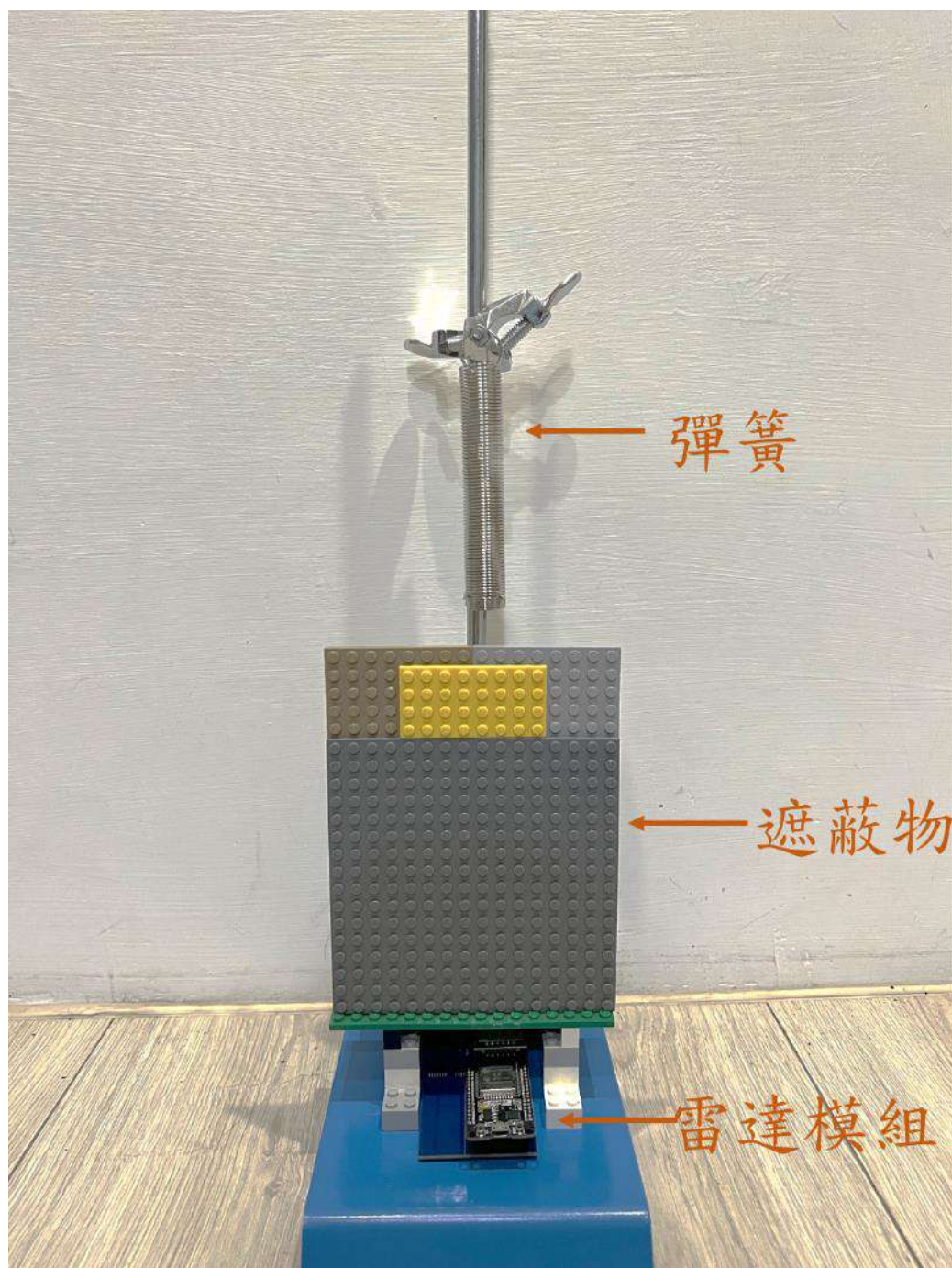
Experiment	RMSE
Exp-1	0.353
Exp-2	0.352
Exp-3	0.357
Exp-4	0.352
Exp-5	0.351

2.6 初步測試對於不同遮蔽物的簡諧運動頻譜圖 (本圖片為第一作者親自製作)



本圖顯示了不同材質環境，包含無遮蔽(NOTHING)、玻璃燒杯(GLASS)、燒杯加水(LIQUID)、不鏽鋼碗(METAL)、樂高塑膠板(LEGO)下的彈簧振盪頻譜強度對比。初步結果顯示毫米波雷達能有效穿透玻璃與塑膠片，所得到的頻率與無遮蔽情況相近。而經過了發射波及反射波兩次穿透，雷達波經過樂高塑膠片些微衰減，而經過玻璃燒杯則衰減更加明顯。到了水以及不鏽鋼則無法觀測到明顯頻譜能量。

2.7 遮蔽物實驗裝置圖 (本圖片為第一作者親自拍攝)



【評語】 100040

1. 此一作品以數位物理實驗觀點建構毫米波雷達之教學模組並導入簡諧運動之說明與觀察。實驗進行之步驟應更詳實描述，訊號量測之圖形應清楚標示座標。電路之設計製作包含天線之設計、帶通濾波器之需求與都卜勒頻率之偵測可加強說明。
2. 本計畫應用一個毫米波雷達的簡易量測系統，並用來量測彈簧的簡諧運動，建議加強創新性內容之說明。若以教學為目的, 建議可分由電機與機械原理加強論述並相互類比。