

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	100019
參展科別	工程學
作品名稱	麥克納姆輪車直線 360 度全向控制與角度誤差之探討

就讀學校	臺中市立臺中第一高級中學
指導教師	陳俊榮
作者姓名	劉維元

關鍵詞 麥克納姆輪、PWM 全向控制、軌跡誤差

作者簡介



我是劉維元，就讀臺中一中數理資優班。參展作品由探索與分析傳統麥克納姆輪的合力方向開始，透過數學推導，以WIFI控制及ESP32-S單晶片實現數學式中速度的變化，達全向移動的可能，並利用軌跡追蹤校正誤差，以精密操控車輪方向與角度。由摸索到逐漸清楚研究方向，深刻體驗研究的歷程，也培養解決問題與求證的態度，是寶貴的經驗。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區 別：

科 別：工 程 學 科

作 品 名 稱：麥克納姆輪車直線 360 度全向控制與角度誤差之探討

關 鍵 詞：麥克納姆輪、PWM 全向控制、軌跡誤差

編 號：

作品名稱：麥克納姆輪車直線 360 度全向控制與角度誤差之探討

摘要

近年來，作者觀察到餐飲業及飯店業引入自主移動機器人（AMR）提供服務，受到廣泛歡迎。不僅如此，隨著 AI 的風潮，愈來愈多產業引進機器人補足人力的空缺。就輪式機器人而言，麥克納姆輪具相對優異的機動性和運動靈活性，但傳統麥克納姆輪的行進模式只侷限 45 度倍數的方向。針對此限制，本研究分析傳統麥克納姆輪的合力方向，通過數學推導和實際控制方式的驗證，確認其 18 個方向移動的數學式，再利用 ESP32-S 單晶片的 WIFI 驅動控制系統，實現並驗證合力分析結果；接著，進一步建立麥克納姆輪的全向 360 度直線移動的數學式，並且用 PWM 脈波調變，實現全向控制。此外，分析地面材質對車子移動的影響，測試出麥克納姆輪適合的地面材質，針對誤差給出可能的校正方式以達更精密的控制。希望就本研究結果擴展未來的應用範圍及使用價值。

壹、研究動機

生活中，我注意到愈來愈多自主移動機器人（AMR）穿梭在餐廳，幫客人帶位、送餐；出現在飯店，幫客人遞送用品，不同於真人的新型態服務，帶來更多的新鮮感，同時也是不可擋的趨勢。隨著 AI 的風潮，愈來愈多產業引進機器人補足人力的空缺，此種能在地面上自主移動的機器人，特別是輪式機器人，比較起其他類型的機器人，由於能符合市場需求，成本較低，因而被業者廣泛接受。引進機器人的同時，業者必須降低機器人移動時的限制，優化服務品質。此外，用於改良目前全球發燒話題的電動車，而影響移動的關鍵是輪子。麥克納姆輪具有相對優異的機動性和運動靈活性，讓我想進一步探討它。

貳、研究目的

本研究的主要目的是探索麥克納姆輪的運動特性以擴充其應用潛力。在了解麥克納姆輪的特性後，進而分析四輪構成的小車之受力類型，利用向量矩陣分析麥克納姆輪的速度，找到最有效率的運行方式，有助於擴大麥克納姆輪的應用範圍。因此，本研究之目的如下：

- 一、分析麥克納姆輪四個輪子的等速運動數學式。
- 二、分析驗證現行麥克納姆輪四個輪子以等速時前進、後退、左移、右移、斜移（左前、右前、左後、右後）的合力分析與計算。
- 三、利用數學式進行麥克納姆輪的速度分析。
- 四、數學驗證麥克納姆輪不等速時前進、後退、左移、右移、斜移。
- 五、透過 WIFI 驅動控制系統，實現並驗證上述合力分析結果。
- 六、以 PWM 脈波調變，實現 360 度直線全向控制。
- 七、測試麥克納姆輪車在前後、左右、旋轉時產生的誤差。

參、研究設備及器材

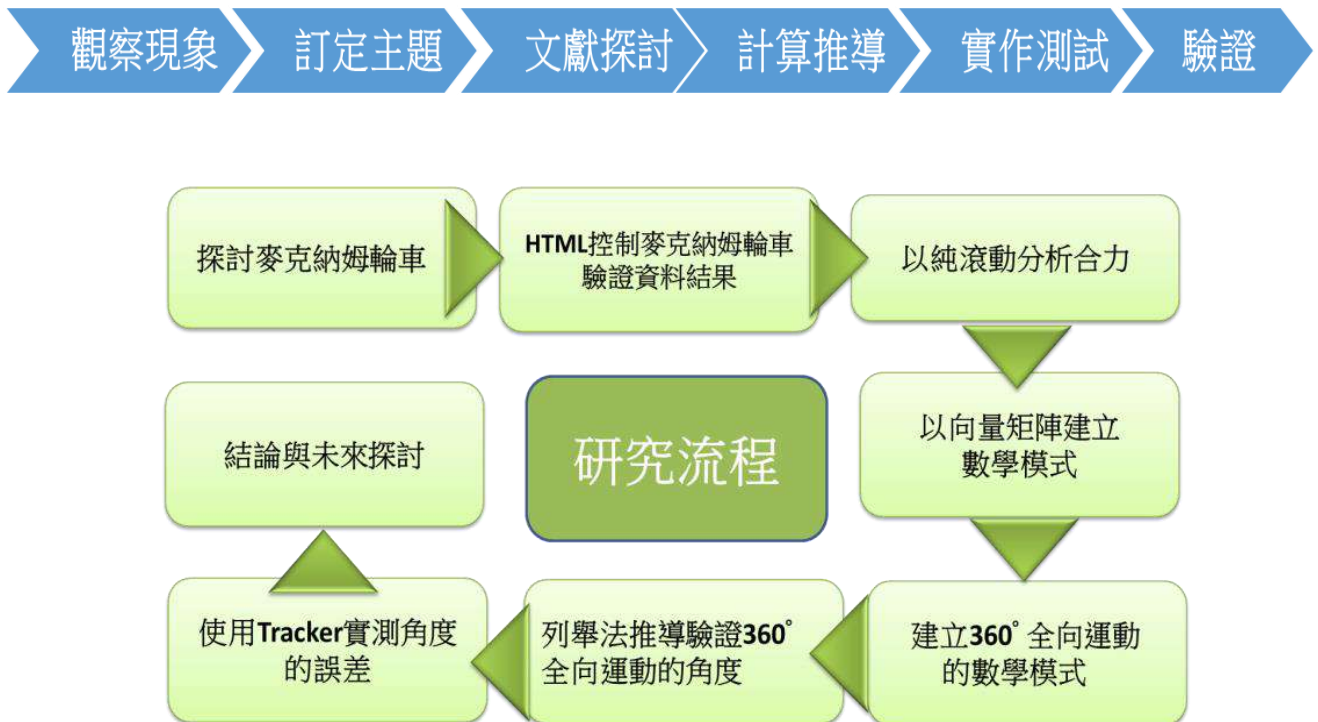
使用材料規格明細如表一：

表一： 材料表

編號	材料名稱	材 料 型 號	圖片	數量
01	麥克納姆輪	Mecanum Wheel 60mm		4
02	微控制器	ESP32-S		1
03	充電電池	NCR18650B		2
04	馬達驅動模組	L9110S		1
05	直流減速馬達	36mm DC Motor		4
06	車架板(透明)	壓克力板組件		1
07	手機	Android 系統		1

肆、研究過程或方法

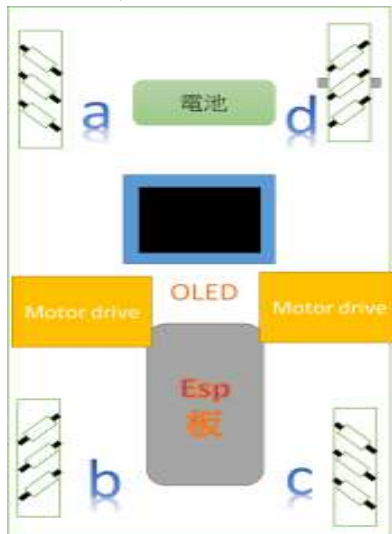
一、研究流程：



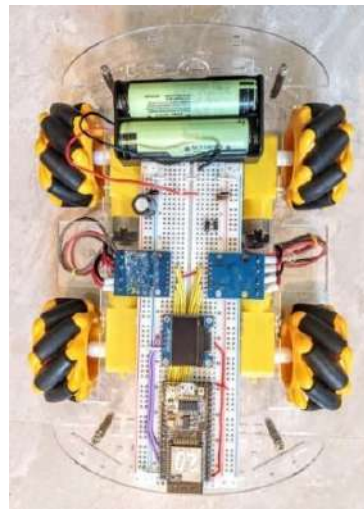
二、硬體系統配置

(一) 硬體配置圖如下所示：

圖一：車體配置（研究者繪製）

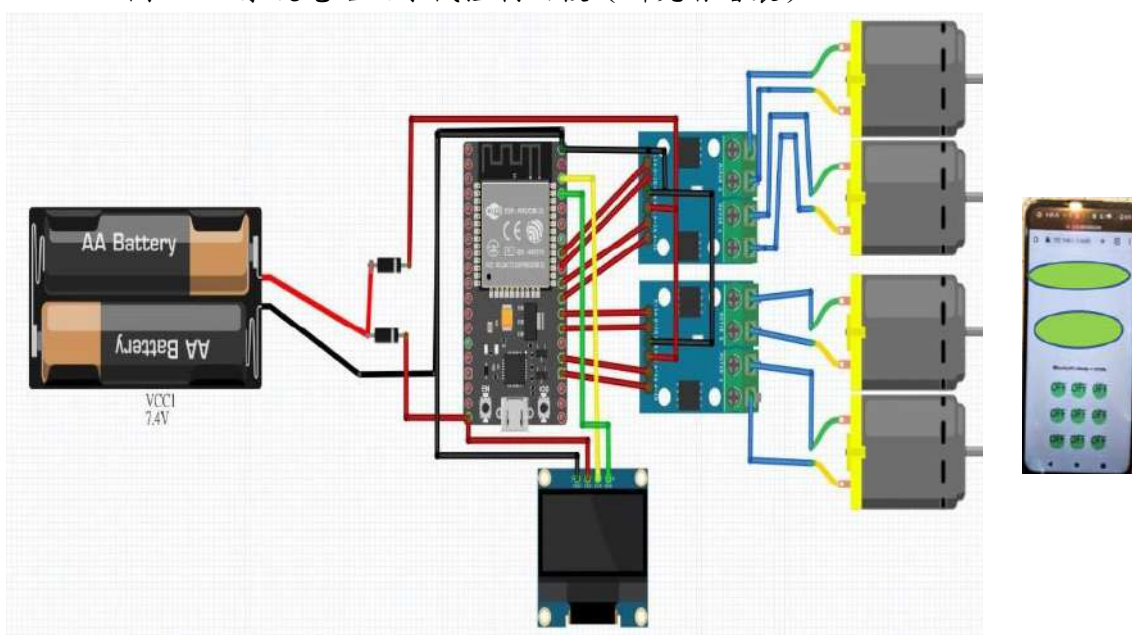


圖二：車體實體圖（研究者拍攝）



(二) 電路及面板：配置如下所示

圖三：系統電路及手機控制面板（研究者繪製）

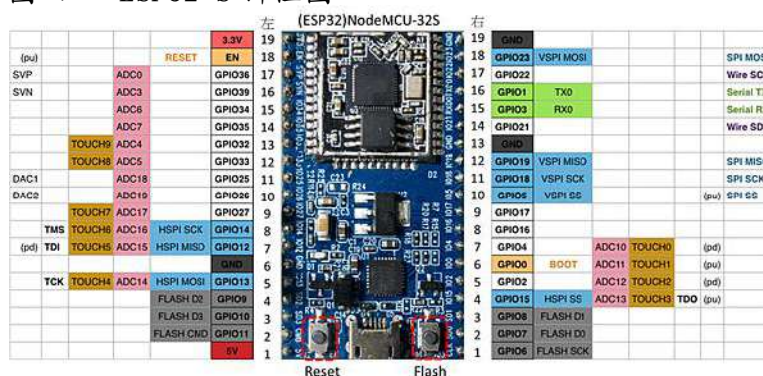


(三)、CPU 主控器(ESP32-S)

1. 外觀接腳：

有關 ESP32-S 腳位，尤濬哲（2021）強調並非每一個腳位皆可任意使用，而是各有其功能，其編號標示如下，並依本研究所需功能，進行腳位選用。

圖四：ESP32-S 腳位圖



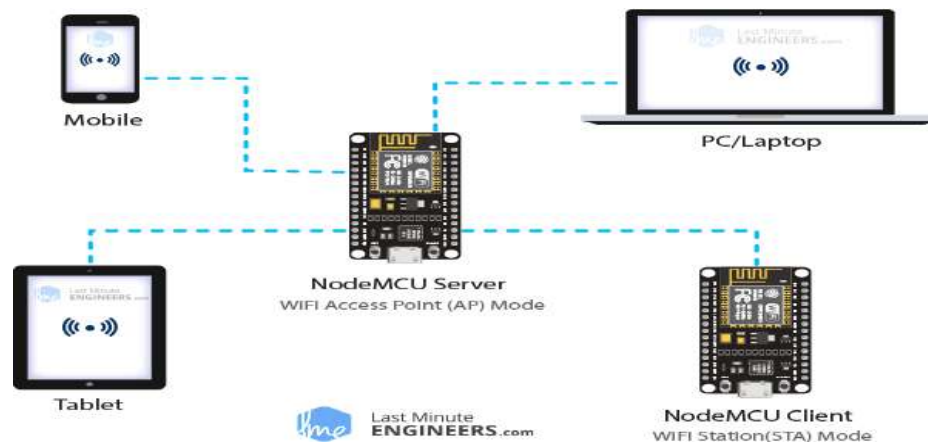
圖四資料來源：尤濬哲（2021）。IoT 物連網應用。勁園國際股份有限公司。

2. ESP32-S 的聯網方式

ESP32-S 連網的主要方式為 WIFI，不但低成本且省功率，可輕易達到對外的通訊和控制，具有相當彈性的連網模式更是一大特點。連網模式可分成 SAT、AP、SAT+AP 三種模式，而本研究的驗證採用了 Soft AP 模式連網，此種模式的優點是可以在沒有 WIFI 的環境下，由 ESP32-S 本身提供一個無線網路基地台，與其他的設備連網，但僅於有限距離內進行連網，無法因此連結全球網路，而以類似軟體程式的方式替

代硬體的無線網路基地台進行運作。(詹秉寰，2022)

圖五：Soft AP 模式



圖五資料來源：LastMinuteEngineer.com（無日期）。Create A Simple ESP8266 NodeMCU Web Server In Arduino IDE。

3. ESP32-S HTML 九宮格按鍵控制

此網頁程式是採 ESP32-S 的 AP 模式，透過 HTML 的格式傳送網頁給手機，由手機達到控制 ESP32-S 的方式。(詹秉寰，2022)。

圖六：ESP32-S HTML 九宮格按鍵控制（研究者拍攝）



4. HTML 簡介

網頁瀏覽器是目前 3C 設備中十分普及的軟體，使用瀏覽器做為 WIFI 遠端控制的介面可說是相當方便的方式。目前瀏覽器的頁面大都由 HTML（全名 HyperText Markup Language）寫成，它是編寫網頁的基本語言，也是網頁控制的關鍵。

5. 馬達驅動模組(L9110S)：

依本研究所需，採用的是 L9110S 直流電機驅動板，其特色是面板上有 2 個 L9110S 馬達控制晶片，模組可以同時驅動 2 個直流電機或 1 個 4 線 2 相式步進電機。

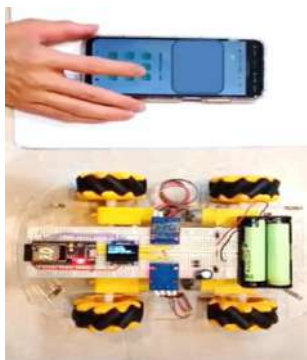
表二：馬達收到訊號對應作動對應（研究者製作）

	正轉	反轉	停	煞車
馬達 A-IA	High	Low	Low	High
馬達 A-IB	Low	High	Low	High
馬達 B-IA	High	Low	Low	High
馬達 A-IB	Low	High	Low	High

6. 以 HTML 控制驗證

四輪小車體馬達如下表分 15 種情況驅動方式，代入程式，依據實體製作可驗證現行使用方式的方向移動與表一無誤。

圖七：車體移動測試（研究者拍攝）



表三：四輪小車體馬達 15 種情況驅動方式與移動方向（研究者製作）

傳統 45 度控制的程式

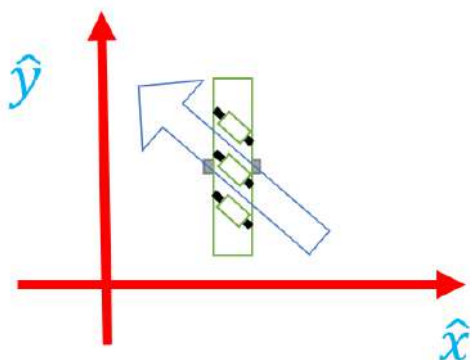
接腳 行進方向	GPIO 15	GPIO 2	GPIO 4	GPIO 16	GPIO1 7	GPIO 5	GPIO1 8	GPIO 19
前進	H	L	H	L	H	L	H	L
後退	L	H	L	H	L	H	L	H
停	L	L	L	L	L	L	L	L
左移	H	L	L	H	L	H	H	L
右移	L	H	H	L	H	L	L	H
左前斜	H	L	L	L	L	L	H	L
右前斜	L	L	H	L	H	L	L	L
左後斜	L	L	L	H	L	H	L	L
右後斜	L	H	L	L	L	L	L	H
向前左轉	H	L	H	L	L	L	L	L
向前右轉	L	L	L	L	H	L	H	L
向後左轉	L	H	L	H	L	L	L	L
向後右轉	L	L	L	L	L	H	L	H
左旋轉	H	L	H	L	L	H	L	H
右旋轉	L	H	L	H	H	L	H	L

三、以純滾動分析單輪合力

(一) 單輪分析

我認為，麥克納姆輪在等速運動時，要讓輪子保持純滾動，地面的摩擦力要和馬達輸出的功率抵銷，而因為輪子和地面夾了 45 度角，所以為了讓輪子底部不要滑動，會有傾向於接觸面的合力方向，與速度方向夾了 45 度，車子會有傾向於圖八中的箭頭方向運動。

圖八：麥克納姆輪單輪橫切圖（研究者繪製）



小輪相對於大輪軸是往後的速度

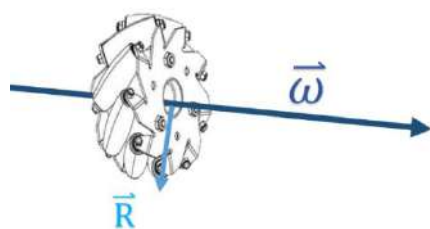
$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

其中 R 是小輪質心到大輪質心的距離

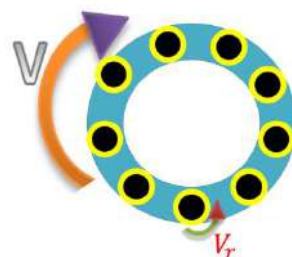
$$\vec{\omega}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + \frac{-\sqrt{2}}{2} \hat{y}$$

$$\vec{R} = -R\hat{z}$$

圖九：麥克納姆輪側視圖（研究者繪製）



圖十：麥克納姆輪縱切圖（研究者繪製）



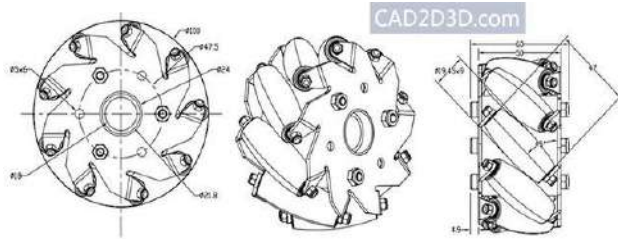
小輪整體往後，但是小輪以 45 度角為軸，繞其中心旋轉，所以小輪底部相對於地面是有成 45 度摩擦力的，所以小輪底部的速度相對地面是藍色箭頭的反方向，大輪速度比小輪快。討論四輪平台移動時的狀況，因為輪子上都有斜角 45 度的小輪子，所以除了輪子本來的速度之外，還要再加上小輪子速度，整個模型如圖，若轉動會產生 V 和 V_r 兩個速度，其中 V 是大輪速度， V_r 是小輪速度，與大輪呈反向，由於 4 個小輪子上的方向不同，再根據不同運動模式狀態下他組成的向量就可以達到選項的移動根據四顆輪子的方向及轉速就可以改變整個平台的移動整個平台的速度可以分為水平速度 V 和垂直速度比與角速度推倒出四個輪子與整個平台的移動關係。

(二) 探討麥克納姆輪車全向移動：

麥克納姆輪是由具有特殊幾何形狀的滾輪構成，9 個滾輪傾斜地附著在輪框的圓周上這些滾輪以 45 度角放置，可以讓車子進行多方位移動。整個車體由兩對擁有滾輪鏡像排列的麥克納姆輪所驅動，對角線是一樣的，每個推力可以被分為縱向和橫向兩個向量，每個車輪各自會產生相應的向量，這個這些向量的合力決定了車體最終的

運動狀態（包括移動和轉動）。單一麥克納姆輪合力情形如圖十一，而四輪麥克納姆輪車體包括 2 個右輪和 2 個左輪，這種方式可以讓車子進行多方位的移動。通過調節每個單一麥克納姆車輪獨自的轉向和轉速，車體可以前行、橫移、斜移、旋轉及迴轉等運動方式，讓使用者可依其需求操控或設定，隨心所欲朝各個方向移動。

圖十一：單輪麥克納姆輪合力情形

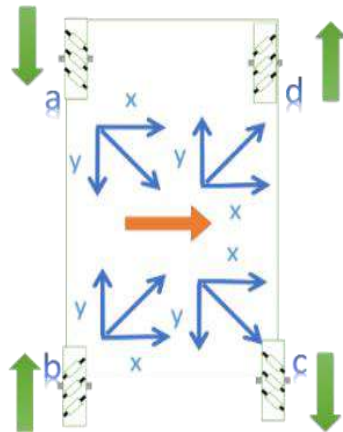


資料來源：每日頭條（2018 年 12 月 13 日）CAD2D3D

四、以向量矩陣建立數學模式

有了對單輪受力分析的了解後，就可以套用到整個平面上的四個輪子，為了簡化模型，以矩陣的方式來表示。

圖十二：麥克納姆輪車體右移之合力情形（研究者繪製）



若忽略車體的長寬力矩，其車體直線速度方程式可列出如下【方程式一】：

【方程式一】

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_a \\ \vec{v}_b \\ \vec{v}_c \\ \vec{v}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{v}_a| * \cos\theta_a & |\vec{v}_a| * \sin\theta_a \\ |\vec{v}_b| * \cos\theta_b & |\vec{v}_b| * \sin\theta_b \\ |\vec{v}_c| * \cos\theta_c & |\vec{v}_c| * \sin\theta_c \\ |\vec{v}_d| * \cos\theta_d & |\vec{v}_d| * \sin\theta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

代入式子推導分析右移的運動方式如下：

$$\vec{v}_a = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_a|}\hat{x} + \frac{-1}{\sqrt{2}|\vec{v}_a|}\hat{y}$$

$$\vec{v}_b = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_b|}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_b|}\hat{y}$$

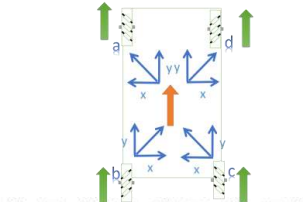
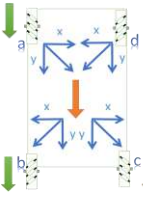
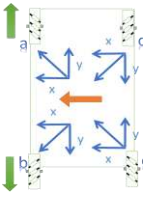
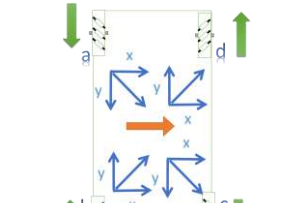
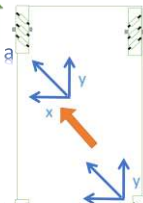
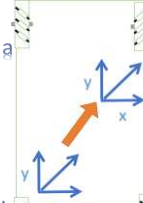
$$\vec{v}_c = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_c|}\hat{x} + \frac{-1}{\sqrt{2}|\vec{v}_c|}\hat{y}$$

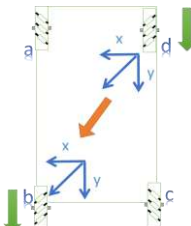
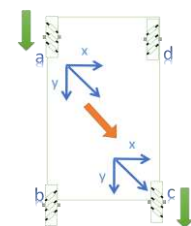
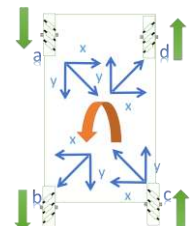
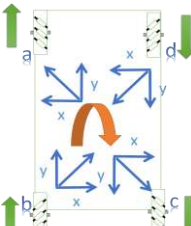
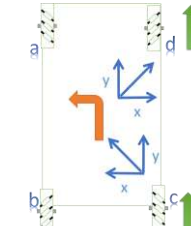
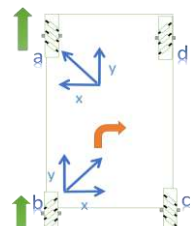
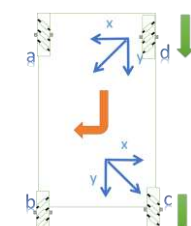
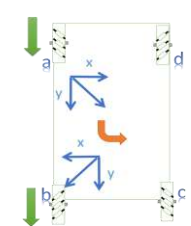
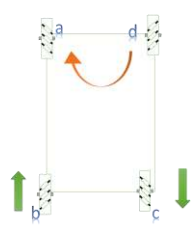
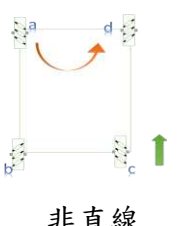
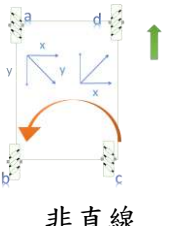
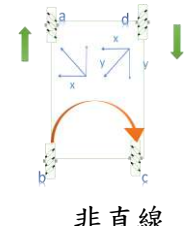
$$\vec{v}_d = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_d|}\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{v}_d|}\hat{y}$$

$$v_{\text{合}} = 2\sqrt{2}\hat{x}$$

即可得到：車體往右直走。同理，可推導另外 17 個移動的方向，圖示以 xy 座標表示，共 18 個方向，如下表所示：

表三：四輪麥克納姆輪車體之 18 個行駛方向與合力分析（研究者製作）

(1)前進  $v_a = v_b = v_c = v_d = v$ $v_{\text{合}} = 2\sqrt{2}v \hat{y}$	(2)後退  $v_a = v_b = v_c = v_d = -v$ $v_{\text{合}} = -2\sqrt{2}v \hat{x}$	(3)左移  $v_a = v_c = -v, v_b = v_d = v$ $v_{\text{合}} = -2\sqrt{2}v \hat{x}$
(4)右移  $v_a = v_c = v, v_b = v_d = -v$ $v_{\text{合}} = 2\sqrt{2}v \hat{x}$	(5)左前移  $v_a = v_c = 0, v_b = v_d = v$ $v_{\text{合}} = -\sqrt{2}v \hat{x} + \sqrt{2}v \hat{y}$	(6)右前移  $v_a = v_c = v, v_b = v_d = 0$ $v_{\text{合}} = \sqrt{2}v \hat{x} + \sqrt{2}v \hat{y}$

(7) 左後移  $v_a = v_c = -v, v_b = v_d = 0$ $v_{\text{合}} = -\sqrt{2}v \hat{x} - \sqrt{2}v \hat{y}$	(8) 右後移  $v_a = v_c = 0, v_b = v_d = -v$ $v_{\text{合}} = \sqrt{2}v \hat{x} - \sqrt{2}v \hat{y}$	(9) 左迴轉  非直線
(10) 右迴轉  非直線	(11) 左前轉  非直線	(12) 右前轉  非直線
(13) 左後轉  非直線	(14) 右後轉  非直線	(15) 繞前方左擺尾  非直線
(16) 繞前方右擺尾  非直線	(17) 繞後方左擺尾  非直線	(18) 繞後方右擺尾  非直線

五、建立 360°全向運動的數學模式

依據現有文獻中麥克納姆輪車的一般運動方式，必須有兩個條件：

1. $|\vec{v}_a| = |\vec{v}_b| = |\vec{v}_c| = |\vec{v}_d| = |\vec{V}_{max}|$
2. $\theta_a = \theta_c = 45^\circ$
 $\theta_b = \theta_d = 135^\circ$

方可得到 45° 倍數的方向移動，但除了這些移動方向外，是否有其他方向的移動，或甚至是全方向 360° 的移動？

若要進行全向移動，由上列現行運動方式【方程式一】可發現有兩個參數可控制，即 $|\vec{v}|$ 和 θ ，但 θ 為輪子的結構，要改變控制較不可能，因此只能改變 $|\vec{v}|$ 的大小，亦即改變輪子的轉速，而輪子轉速如何改變？根據控制原理，可用 PWM（脈波調變）控制輸出電壓的平均大小，進而改變速度大小，而 ESP32-S 微處理機有一個 12bit(4096)的 PWM（脈波調變）輸出控制，只要運用程式即可輕易達到此一控制方法，因此，可在【方程式一】加上一個變化參數，如【方程式二】

【方程式二】

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_a \\ \vec{v}_b \\ \vec{v}_c \\ \vec{v}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |V_{max}| * \frac{D_a}{4096} * \cos\theta_a & |V_{max}| * \frac{D_a}{4096} * \sin\theta_a \\ |V_{max}| * \frac{D_b}{4096} * \cos\theta_b & |V_{max}| * \frac{D_b}{4096} * \sin\theta_b \\ |V_{max}| * \frac{D_c}{4096} * \cos\theta_c & |V_{max}| * \frac{D_c}{4096} * \sin\theta_c \\ |V_{max}| * \frac{D_d}{4096} * \cos\theta_d & |V_{max}| * \frac{D_d}{4096} * \sin\theta_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

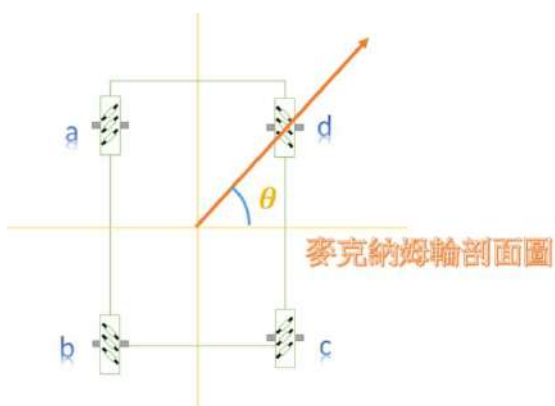
為證明【方程式二】中四輪麥克納姆輪車體的速度，由 $\vec{v}_a + \vec{v}_b + \vec{v}_c + \vec{v}_d$ 可改變車體行進方向，為了達成直線移動，不旋轉，所以其中 $D_a = D_c$ ； $D_b = D_d$ ，並且，若要達成全向直線移動，應將參數修改。

以嘗試代入法，將 $\vec{D}_a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $\vec{D}_b = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $\vec{D}_c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $\vec{D}_d = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 代入，

可得車體速度為 $\sqrt{3}\hat{x} + 1\hat{y}$ ， $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ， $\theta = \tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 30^\circ$

成功驗證：改變個別輪子的速度，確實可以改變車體行進方向，並且不是 45° 的倍數。

圖十三 麥克納姆輪剖面圖（研究者繪製）



【D 參數之計算】

用 PWM 轉速控制，假設欲使車體往 θ 方向直線運動，可由上列矩陣【方程式二】，經比例運算得如下方程式：

$$D_a:D_b:D_c:D_d = \sin(\theta + \frac{\pi}{4}):\sin(\theta - \frac{\pi}{4}):\sin(\theta + \frac{\pi}{4}):\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$$

以嘗試代入法，將 $\theta=45^\circ$ 以及 $\theta = 30^\circ$ ，可得 $D_a:D_b:D_c:D_d$ 之比值如下：

當 $\theta=45^\circ$ ，比例為 1:0:1:0，符合傳統 45° 直線之控制，

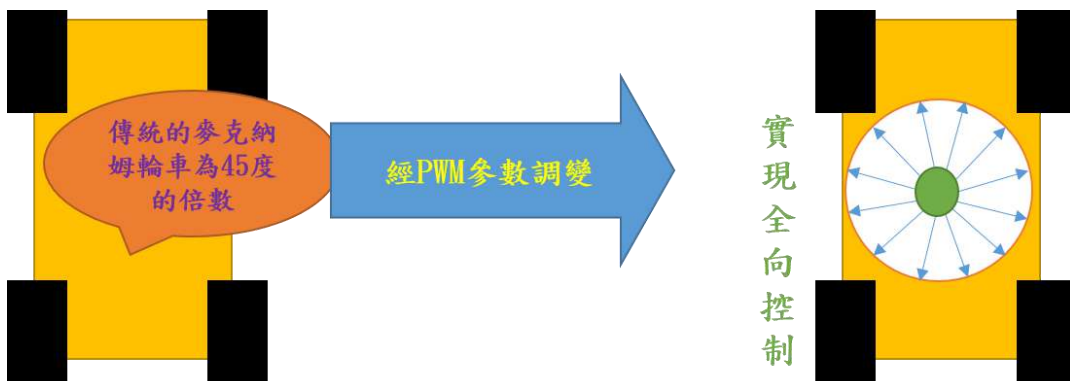
當 $\theta=30^\circ$ ，比例為 $\sin 75^\circ:\sin(-15^\circ):\sin 75^\circ:\sin(-15^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

符合上方【方程式二】之證明中的算式：證明可找出控制任何角度直線運動之 D 參數的比例值。

因此可知，四個輪子依不同的速度，可產生不同角度的移動方向，所以經推導後，可將希望的合力方向反推計算，即可得到 D_a 、 D_b 、 D_c 、 D_d 的值，如此即可控制車體全方向 360° 直線移動。（如圖十四）

圖十四：調控速度達全向移動（研究者繪製）



成功代入 PWM 如下

```
int resolution = 12;
int dcMoterPin0=15;
int pwmChannel0=0;
int LED1status=0;
void setup() {
    pinMode(dcMoterPin0, OUTPUT);
    pinMode(dcMoterPin1, OUTPUT);
    pinMode(dcMoterPin2, OUTPUT);
    pinMode(dcMoterPin3, OUTPUT);
```

```
pinMode(dcMotorPin4, OUTPUT);
pinMode(dcMotorPin5, OUTPUT);
pinMode(dcMotorPin6, OUTPUT);
pinMode(dcMotorPin7, OUTPUT);
ledcSetup(pwmChannel0,100, resolution);
ledcAttachPin(dcMotorPin0, pwmChannel0);
ledcWrite(pwmChannel0, 0);
```

```
void d15() {
  ledcWrite(pwmChannel0,0);
  ledcWrite(pwmChannel1,2047);
  ledcWrite(pwmChannel2,3546);
  ledcWrite(pwmChannel3,0);
  ledcWrite(pwmChannel4,3546);
  ledcWrite(pwmChannel5,0);
  ledcWrite(pwmChannel6,0);
  ledcWrite(pwmChannel7,2047);
}
```

```
void d105() {
  ledcWrite(pwmChannel0,4080);
  ledcWrite(pwmChannel1,0);
  ledcWrite(pwmChannel2,800);
  ledcWrite(pwmChannel3,0);
  ledcWrite(pwmChannel4,800);
  ledcWrite(pwmChannel5,0);
  ledcWrite(pwmChannel6,4080);
  ledcWrite(pwmChannel7,0);
}
```

```
void d75() {
  ledcWrite(pwmChannel0,800);
  ledcWrite(pwmChannel1,0);
  ledcWrite(pwmChannel2,4080);
  ledcWrite(pwmChannel3,0);
  ledcWrite(pwmChannel4,4080);
  ledcWrite(pwmChannel5,0);
  ledcWrite(pwmChannel6,800);
  ledcWrite(pwmChannel7,0);
}
```

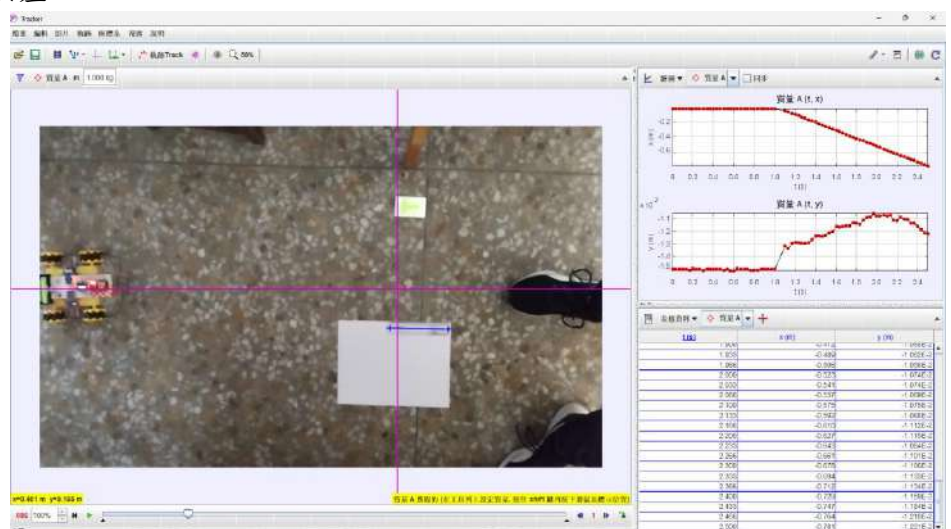
```
void d165() {
  ledcWrite(pwmChannel0,3546);
  ledcWrite(pwmChannel1,0);
  ledcWrite(pwmChannel2,0);
  ledcWrite(pwmChannel3,2047);
  ledcWrite(pwmChannel4,0);
  ledcWrite(pwmChannel5,2047);
  ledcWrite(pwmChannel6,3546);
  ledcWrite(pwmChannel7,0);
}
```

六、使用 Tracker 實測角度誤差

(一)地面測試：

分以下三種地面

- 1、磁磚地面
- 2、磨石子地面
- 3、磚塊路面

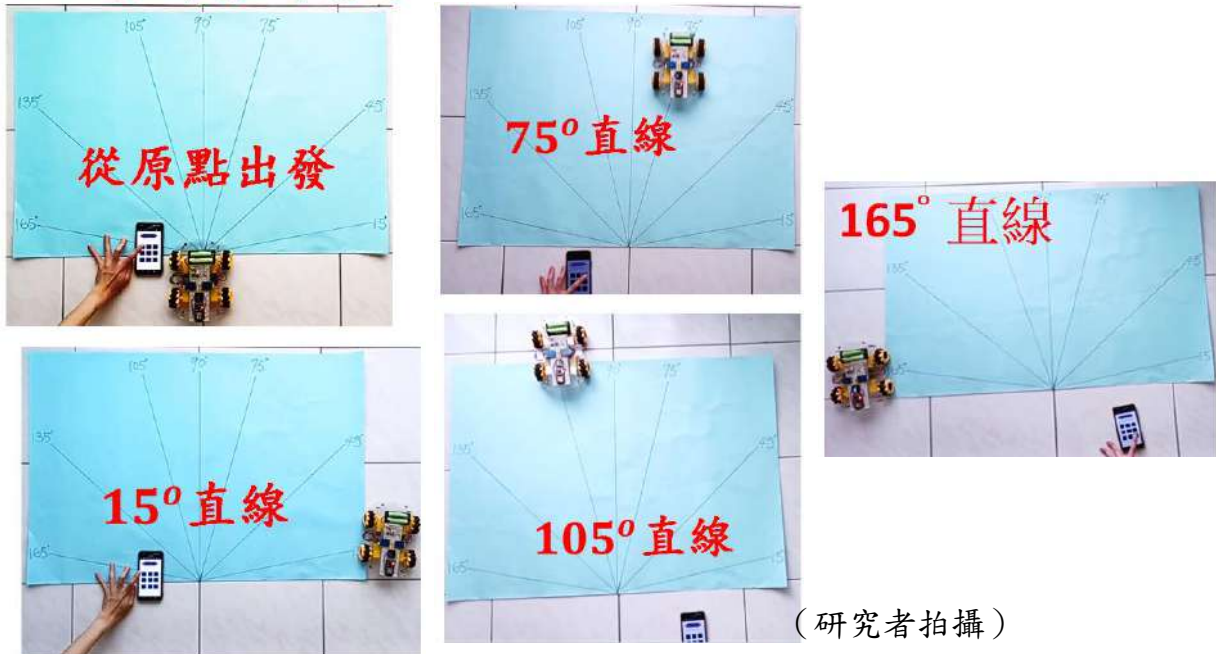


Tracker 實測麥克納姆輪車行進軌跡的角度誤差，如上圖。

(二)PWM 達成精確的全向定位

研究者在海報上分別畫出各角度直線，實測時由海報下方中央的原點出發，操控車體分別朝 15° 、 75° 、 105° 、 165° 等非 45° 倍數方向行進，大致符合。

PWM操作實測情形

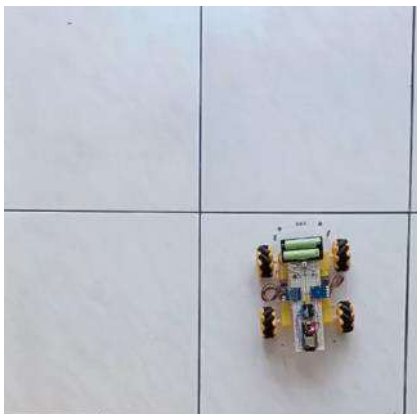


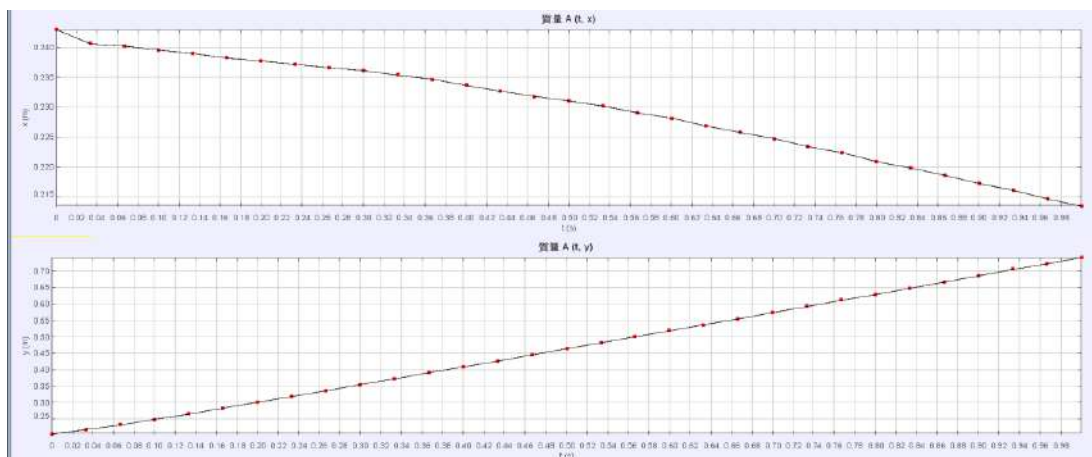
伍、研究結果

一、地面測試

(一)磁磚地面

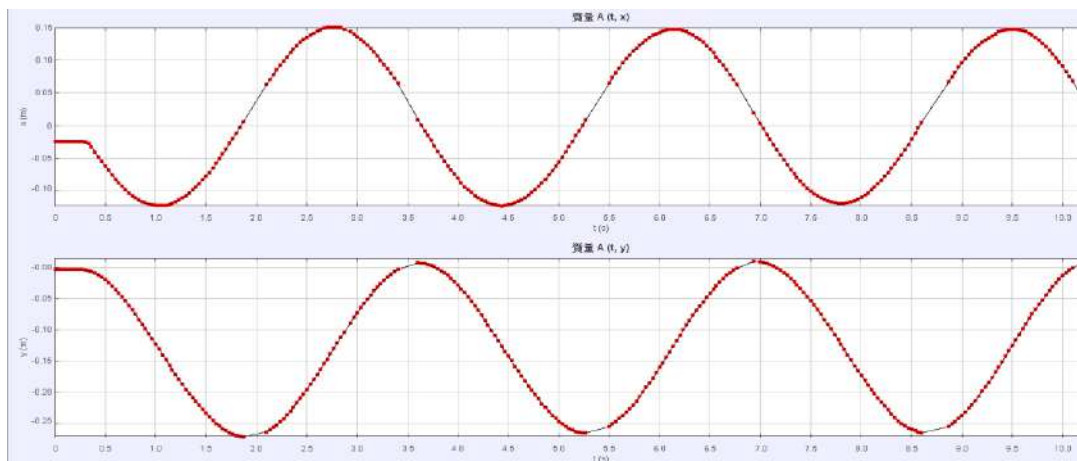
1. 前後移動





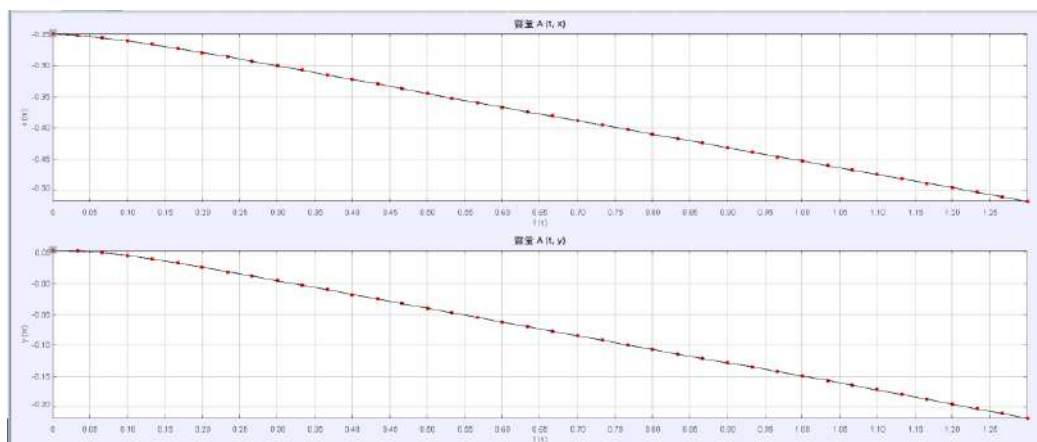
移動的向量為 $(-0.0267, 0.512)$ 單位:公尺
與座標向量 $(0, 1)$ 夾了 2.99 度

2. 旋轉



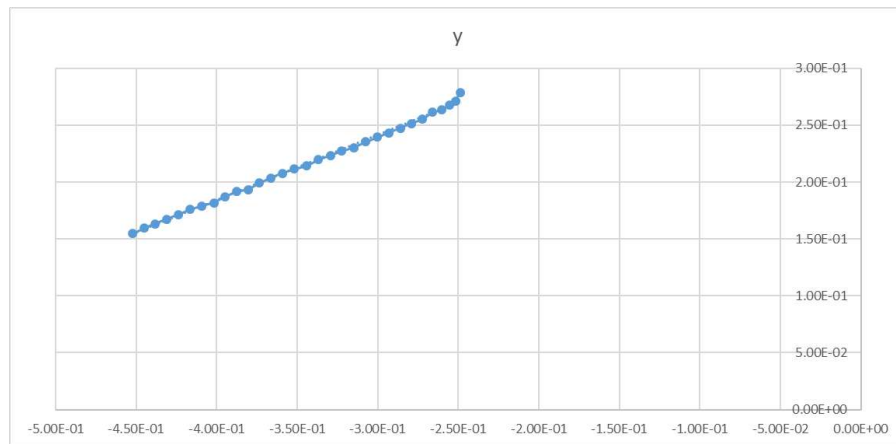
一圈偏移了 0.675cm

3. 45 度移動



移動的向量為 $(-2.03, -2.04)$ 單位:公尺
與預設的斜移向量 $(-1, -1)$ 夾了 0.14 度

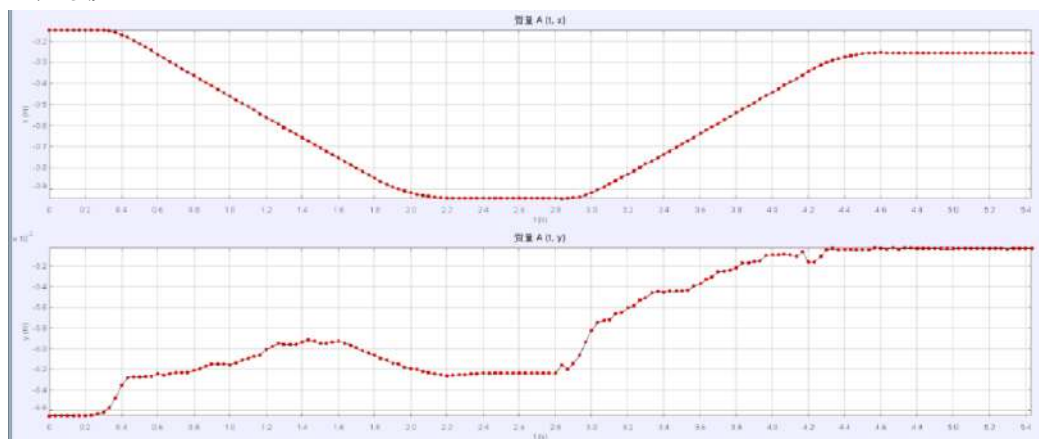
4. 30 度移動



移動的向量為(0.203, 0.124)單位:公尺
與預設的 30 度向量(1.732, 1) 夾了 1.42 度

(二)磨石子地面

1. 前後移動



	時間	位置	時間	位置	時間	位置	時間	位置	時間	位置	時間	位置
偏移量		6.23E-04		1.17E-03		1.29E-03		-1.13E-03		-1.54E-03		1.10E-04
時長	3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01	
起始	5.00E-01	-6.27E-02	8.33E-01	-6.19E-02	1.17E+00	-6.06E-02	1.50E+00	-5.95E-02	1.83E+00	-6.09E-02	2.17E+00	-6.25E-02
	5.33E-01	-6.27E-02	8.66E-01	-6.17E-02	1.20E+00	-6.01E-02	1.53E+00	-5.94E-02	1.87E+00	-6.11E-02	2.20E+00	-6.26E-02
	5.67E-01	-6.27E-02	9.00E-01	-6.15E-02	1.23E+00	-5.98E-02	1.57E+00	-5.94E-02	1.90E+00	-6.14E-02	2.23E+00	-6.25E-02
	6.00E-01	-6.24E-02	9.33E-01	-6.15E-02	1.27E+00	-5.95E-02	1.60E+00	-5.93E-02	1.93E+00	-6.15E-02	2.27E+00	-6.25E-02
	6.33E-01	-6.26E-02	9.66E-01	-6.15E-02	1.30E+00	-5.96E-02	1.63E+00	-5.94E-02	1.97E+00	-6.18E-02	2.30E+00	-6.25E-02
	6.67E-01	-6.24E-02	1.00E+00	-6.15E-02	1.33E+00	-5.96E-02	1.67E+00	-5.96E-02	2.00E+00	-6.19E-02	2.33E+00	-6.24E-02
	7.00E-01	-6.23E-02	1.03E+00	-6.14E-02	1.37E+00	-5.96E-02	1.70E+00	-5.99E-02	2.03E+00	-6.20E-02	2.37E+00	-6.24E-02
	7.33E-01	-6.23E-02	1.07E+00	-6.11E-02	1.40E+00	-5.93E-02	1.73E+00	-6.02E-02	2.07E+00	-6.22E-02	2.40E+00	-6.24E-02
	7.67E-01	-6.23E-02	1.10E+00	-6.09E-02	1.43E+00	-5.92E-02	1.77E+00	-6.04E-02	2.10E+00	-6.23E-02	2.43E+00	-6.24E-02
結束	8.00E-01	-6.21E-02	1.13E+00	-6.07E-02	1.47E+00	-5.93E-02	1.80E+00	-6.06E-02	2.13E+00	-6.24E-02	2.47E+00	-6.24E-02
偏移量平均		8.69E-05										

起始 (-0.147, -0.06645)

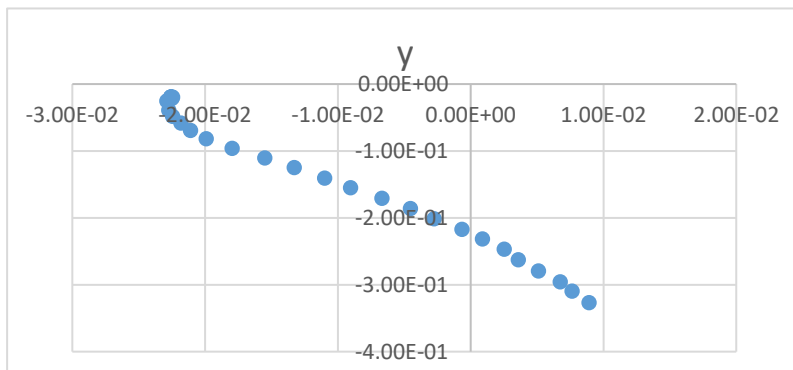
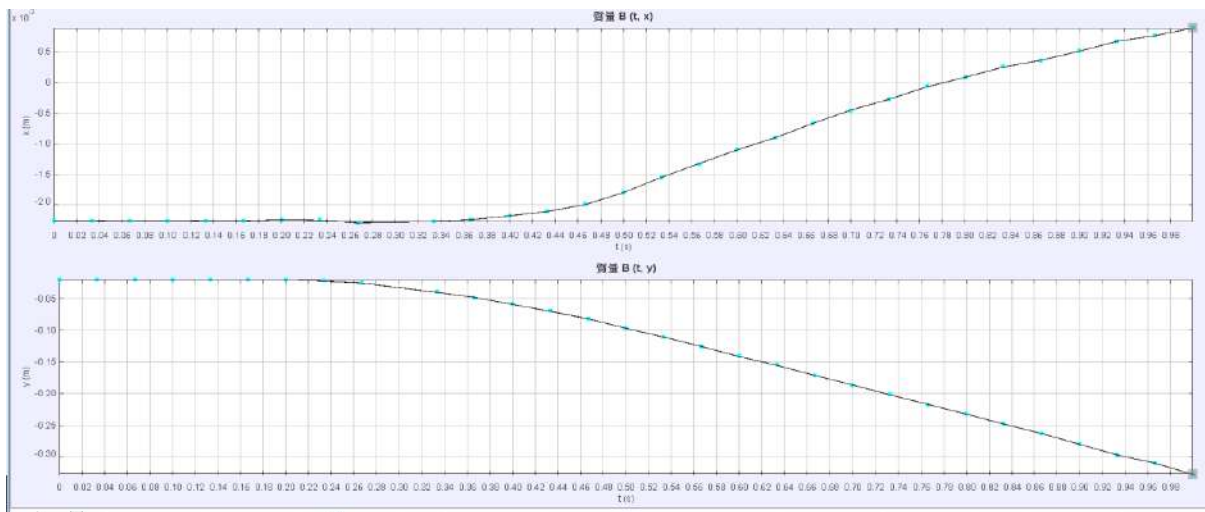
終點 (-0.942, -0.0626)

位移向量(-0.795, 0.00385)

與水平夾了 0.277 度

2. 左右平移

直接往左移



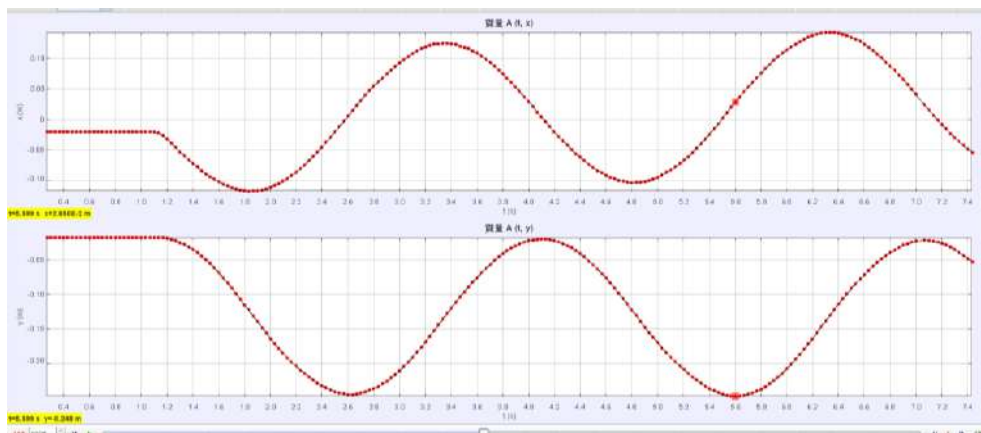
起始 $(-0.025, -0.025)$

終點 $(0.0075, -0.325)$

位移向量 $(0.0325, -0.3)$

與垂直軸夾 6.183°

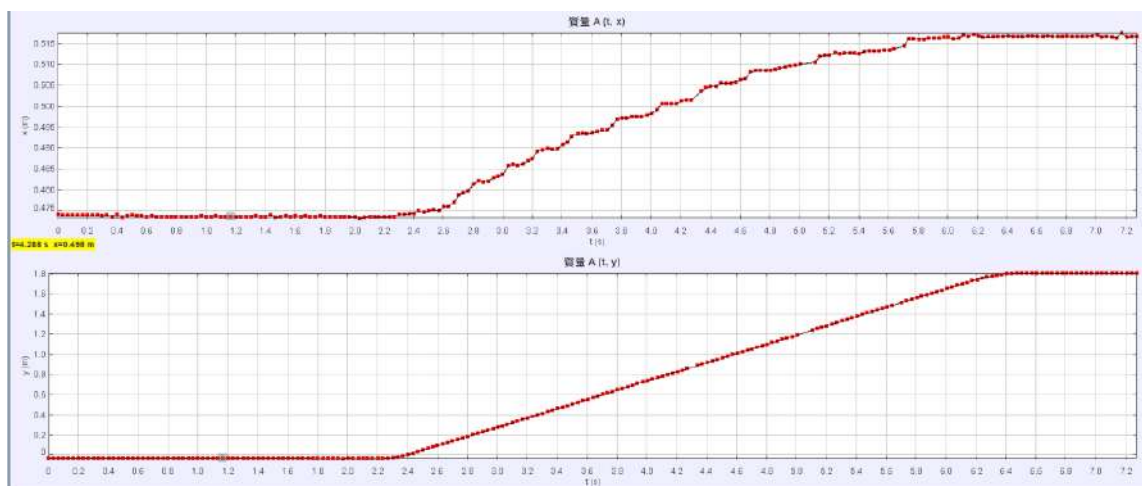
3. 旋轉



1/4 圓周偏差 1 公分

(三). 磚塊地面

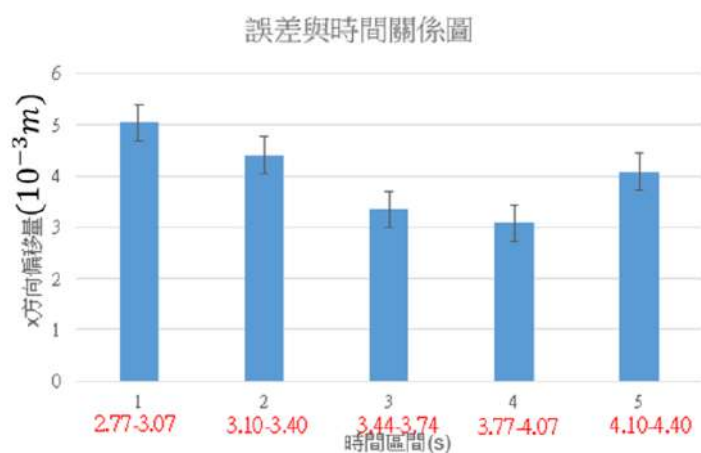
1. 前後移動



因為是戶外實驗，有比較多不確定因素，所以我做了兩大組，以減少其他變因的干擾。

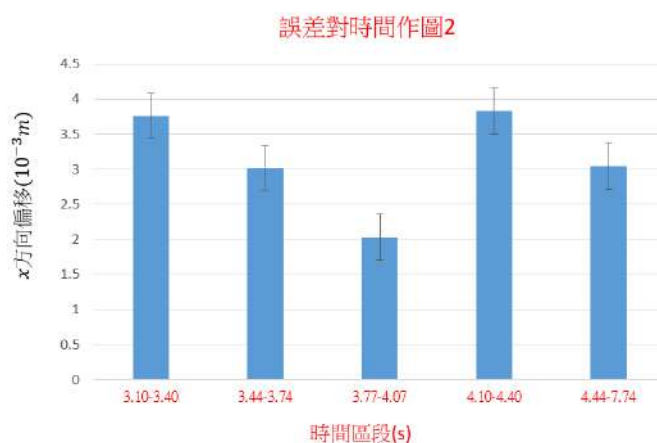
【第一組】

	1		2		3		4		5	
	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)
時長	3.00E-01		3.00E-01		3.02E-01		3.35E-03		3.00E-01	
起始	2.77E+00	9.27E-01	3.10E+00	9.33E-01	3.44E+00	9.38E-01	3.77E+00	9.42E-01	4.10E+00	9.45E-01
	2.80E+00	9.27E-01	3.14E+00	9.33E-01	3.47E+00	9.38E-01	3.80E+00	9.42E-01	4.14E+00	9.45E-01
	2.84E+00	9.28E-01	3.17E+00	9.33E-01	3.50E+00	9.39E-01	3.84E+00	9.42E-01	4.17E+00	9.45E-01
	2.87E+00	9.28E-01	3.20E+00	9.34E-01	3.54E+00	9.39E-01	3.87E+00	9.43E-01	4.20E+00	9.46E-01
	2.90E+00	9.29E-01	3.24E+00	9.35E-01	3.57E+00	9.39E-01	3.90E+00	9.43E-01	4.24E+00	9.46E-01
	2.94E+00	9.30E-01	3.27E+00	9.35E-01	3.60E+00	9.39E-01	3.94E+00	9.43E-01	4.27E+00	9.46E-01
	2.97E+00	9.30E-01	3.30E+00	9.36E-01	3.64E+00	9.40E-01	3.97E+00	9.43E-01	4.30E+00	9.47E-01
	3.00E+00	9.31E-01	3.34E+00	9.36E-01	3.67E+00	9.40E-01	4.00E+00	9.43E-01	4.34E+00	9.48E-01
	3.04E+00	9.32E-01	3.37E+00	9.36E-01	3.70E+00	9.40E-01	4.04E+00	9.44E-01	4.37E+00	9.48E-01
結束	3.07E+00	9.32E-01	3.40E+00	9.37E-01	3.74E+00	9.41E-01	4.07E+00	9.45E-01	4.40E+00	9.49E-01
偏差		5.04E-03		4.40E-03		3.35E-03		3.08E-03		4.09E-03
平均偏差	3.99E-03									
(m)										



【第二組】

	1		2		3		4		5	
	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)
時長	3.00E-01		3.02E-01		3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01	
起始	3.10E+00	9.16E-01	3.44E+00	9.20E-01	3.77E+00	9.24E-01	4.10E+00	9.26E-01	4.44E+00	9.29E-01
	3.14E+00	9.16E-01	3.47E+00	9.21E-01	3.80E+00	9.24E-01	4.14E+00	9.26E-01	4.47E+00	9.31E-01
	3.17E+00	9.17E-01	3.50E+00	9.21E-01	3.84E+00	9.25E-01	4.17E+00	9.26E-01	4.50E+00	9.31E-01
	3.20E+00	9.18E-01	3.54E+00	9.22E-01	3.87E+00	9.25E-01	4.20E+00	9.26E-01	4.54E+00	9.32E-01
	3.24E+00	9.18E-01	3.57E+00	9.22E-01	3.90E+00	9.25E-01	4.24E+00	9.27E-01	4.57E+00	9.32E-01
	3.27E+00	9.19E-01	3.60E+00	9.22E-01	3.94E+00	9.25E-01	4.27E+00	9.28E-01	4.60E+00	9.32E-01
	3.30E+00	9.19E-01	3.64E+00	9.22E-01	3.97E+00	9.26E-01	4.30E+00	9.29E-01	4.64E+00	9.32E-01
	3.34E+00	9.19E-01	3.67E+00	9.23E-01	4.00E+00	9.26E-01	4.34E+00	9.29E-01	4.67E+00	9.32E-01
	3.37E+00	9.19E-01	3.70E+00	9.23E-01	4.04E+00	9.26E-01	4.37E+00	9.29E-01	4.70E+00	9.32E-01
結束	3.40E+00	9.20E-01	3.74E+00	9.23E-01	4.07E+00	9.26E-01	4.40E+00	9.30E-01	4.74E+00	9.32E-01
偏差		3.76E-03		3.02E-03		2.03E-03		3.83E-03		3.04E-03
平均偏差(m)	0.003135									



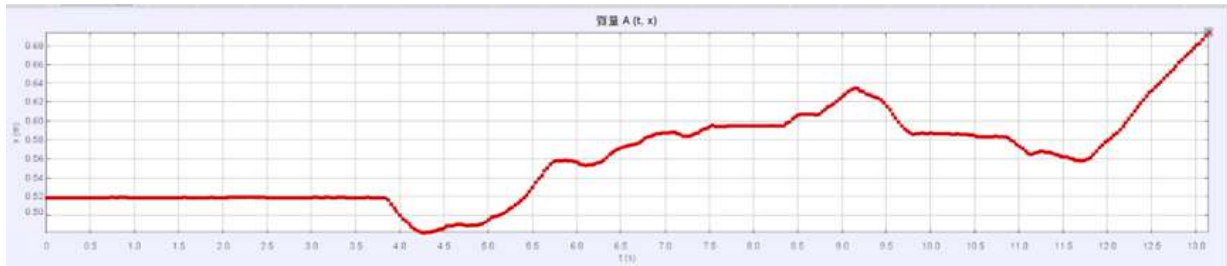
起始 (0.475, 0.515)

終點 (0, 1.8)

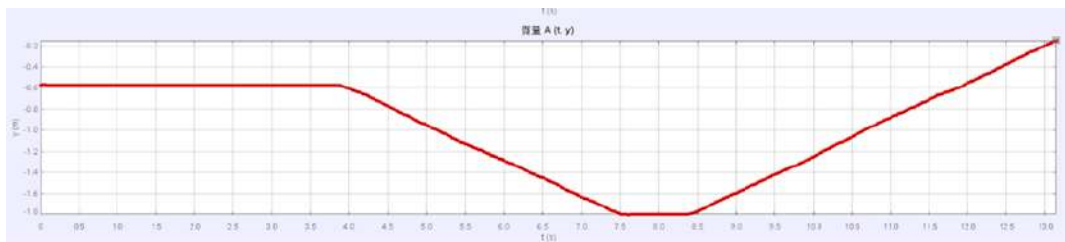
位移向量(-0.475, 1.185)

夾角為 21.843 度

2. 左右移動(橫向)

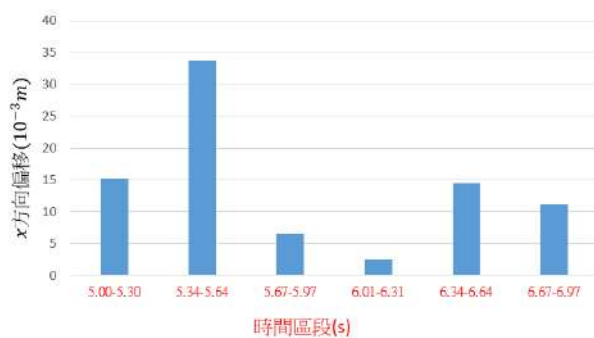


X 軸變化相當不規律也不穩定



	1		2		3		4		5		6	
	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)	時間(S)	位置(m)
時長	3.00E-01		3.00E-01		3.02E-01		3.00E-01		3.00E-01		3.00E-01	
起始	5.00E+00	4.95E-01	5.34E+00	5.13E-01	5.67E+00	5.51E-01	6.01E+00	5.56E-01	6.34E+00	5.61E-01	6.67E+00	5.76E-01
	5.04E+00	4.98E-01	5.37E+00	5.15E-01	5.70E+00	5.54E-01	6.04E+00	5.54E-01	6.37E+00	5.64E-01	6.71E+00	5.77E-01
	5.07E+00	4.99E-01	5.40E+00	5.19E-01	5.74E+00	5.57E-01	6.07E+00	5.54E-01	6.41E+00	5.67E-01	6.74E+00	5.79E-01
	5.10E+00	5.00E-01	5.44E+00	5.22E-01	5.77E+00	5.58E-01	6.11E+00	5.53E-01	6.44E+00	5.68E-01	6.77E+00	5.81E-01
	5.14E+00	5.01E-01	5.47E+00	5.26E-01	5.81E+00	5.58E-01	6.14E+00	5.53E-01	6.47E+00	5.70E-01	6.81E+00	5.83E-01
	5.17E+00	5.02E-01	5.50E+00	5.30E-01	5.84E+00	5.58E-01	6.17E+00	5.54E-01	6.51E+00	5.72E-01	6.84E+00	5.84E-01
	5.20E+00	5.04E-01	5.54E+00	5.35E-01	5.87E+00	5.58E-01	6.21E+00	5.55E-01	6.54E+00	5.72E-01	6.87E+00	5.85E-01
	5.24E+00	5.07E-01	5.57E+00	5.39E-01	5.91E+00	5.58E-01	6.24E+00	5.55E-01	6.57E+00	5.73E-01	6.91E+00	5.86E-01
	5.27E+00	5.09E-01	5.60E+00	5.42E-01	5.94E+00	5.58E-01	6.27E+00	5.56E-01	6.61E+00	5.75E-01	6.94E+00	5.86E-01
	5.30E+00	5.11E-01	5.64E+00	5.47E-01	5.97E+00	5.57E-01	6.31E+00	5.58E-01	6.64E+00	5.75E-01	6.97E+00	5.87E-01
結束	5.30E+00	5.11E-01	5.64E+00	5.47E-01	5.97E+00	5.57E-01	6.31E+00	5.58E-01	6.64E+00	5.75E-01	6.97E+00	5.87E-01
偏差		1.52E-02		3.38E-02		6.56E-03		2.48E-03		1.45E-02		1.11E-02
平均偏差(m)	平均偏差	0.013931										

磚塊地面橫向移動，偏移量對時間作圖



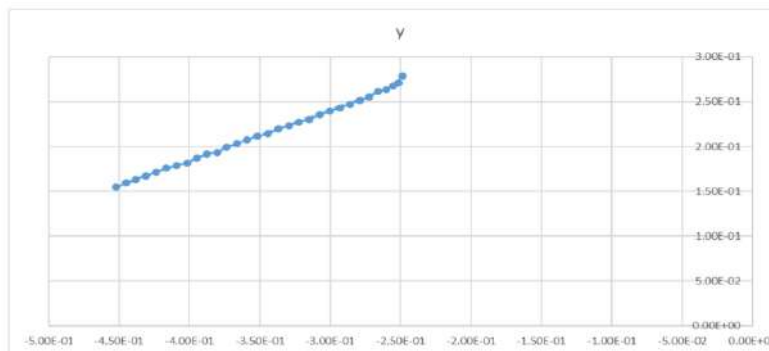
起始 (0.52, -0.6)

終點 (0.595, -1.8)

位移向量(0.075, -1.2)

角度 3.576 度

二、 PWM 達成精確的全向定位：以 30 度為例



陸、討論

本研究一開始是以探討及分析現行麥克納姆輪的合力與行進方向，發現其限制，因此，進一步透過建立數學模式嘗試達到全向控制的可能，在實現的過程中，藉由軟硬體結合，並由數學模式的理論推導進入實測。而在實測過程發現存在誤差，因此進一步測量誤差及修正，期望能達到更準確的精確控制。

數學模式及硬體實現的解決方式皆已於本文探討可行，也證明無誤，也進一步探討由數學分析得出 D_a 、 D_b 、 D_c 、 D_d 預測電壓。實驗中，在磁磚地面運作得比較穩定，磨石子地面比較不穩定，磚塊地面順著磚塊方向會造成巨大偏差，車子的偏移量與時間無關，應該是指不會順著地面紋理的方向走，但是如果遇到縫隙很大的磚塊路面，則會造成極大的偏移，不過仍與時間無關，不會往一個方向一直偏移，而是有些忽左忽右的偏移，因此，不是和重量大，太多縫隙的路面，一般家裡磁磚和工廠地面都是非常良好的，只需要將參數調成結論中的比例即可。

柒、結論

一、驗證一般麥克納姆輪的合力方向：

- 1、以數學式驗證：用速度的數學方程式推導方式，驗證傳統麥克納姆輪的 18 個方向移動的數學式。
- 2、採用目前熱門的 ESP32-S 單晶片加上 WIFI 的控制法，將目前麥克納姆輪能控制的 18 個方向全部實現驗證，大致符合所建立的模型，些微的誤差再使用 PWM 調整即可。

二、推導麥克納姆輪的全向移動：

- 1、建立數學式：用變速度建立麥克納姆輪的全方向 360° 直線移動的數學式。
- 2、使用程式解決數學式：利用 PWM 的控制理論，透過 ESP32-S 的 DA 輸出，解決數學式中速度的變化。
- 3、已經使用 PWM 實現全向控制：利用自訂的解析度、頻率的 PWM 控制系統，成功改變個別單輪的速度。

三、麥克納姆輪上路實測：

麥克納姆輪適合在適中負重的情況下運作，在室內適合走直線，如果要走斜線可以參考我更改的參數，在室外適合以橫移的方式，比較能克服磚塊的縫隙，麥克納姆輪模組中，移動時，部分輪子可能會沒有轉動，而他們的摩擦力又會減速，所以我認為如果要準確一些，要離 90 度(橫向移動)遠一點。麥克納姆輪車用途廣泛，可用於廠房內運送貨物、居家智能助理、糧倉的監測機器人，具備良好機動性。

四、以 Tracker 測量誤差：

(一) 參數修正

磁磚組在前後移動時偏移了 2.99 度，在 45 度斜移偏移了 0.14 度，在 30 度斜移偏移了 1.42 度。

	前後	左右	左前
磁磚	2.9 度		0.14 度
磨石子	0.277	6.183	
磚塊	21.843	3.576	

磁磚往前移動的四輪參數應該為 0.7077:0.6704: 0.7077:0.6704

磁磚左前移動的四輪參數應該為 0.9978:0.0650:0.9978:0.065

磨石子向左移動的四輪參數應該為 0.779:-0.6284: 0.779:-0.6284

磚塊向左移動的四輪參數應該為 0.7498:-0.6616: 0.7498:-0.6616

(二) 測量麥克納姆輪的誤差：

1、改變地面材質：摩擦係數下降，精準度上升，但是磚塊的縫隙似乎不會影響方向，過程中的誤差也與時間點無關。

2、實驗測量誤差 Tracker 程式追蹤效果不是非常穩定，所以取了很多組數據來平均。

捌、參考文獻

一、每日頭條(2018 年 12 月 13 日) CAD2D3D 。<https://kknews.cc/news/oagax3q.html>。

二、梅克工作室編著。Arduino 微電腦控制實習(2014)。台科大圖書。

三、黃冠璋(2017)。全向輪高階控制方法的開發。東海大學電機工程學系：碩士論文。

四、尤濬哲(編著)(2021)。IoT 物連網應用。勁園國際股份有限公司。

五、LastMinuteEngineer.com(無日期)。Create A Simple ESP8266 NodeMCU Web Server In Arduino IDE。

六、詹秉寰(2022)。ESP32-S Htm1 九宮格按鍵控制。全國高級中等學校小論文寫作比賽工程技術類。小論文。

七、家倫股份有限公司(無日期)。PWM 電路設計技術。網路文章。

【評語】 100019

1. 本計畫研究四輪麥克納姆輪機器人進行合成移動的可行性，有合宜之文獻回顧。
2. 對麥克納姆輪機器人運動補償在國內外已有非常多的討論，建議可進一步找尋探索內容，確認本計畫的創新性與獨特性。比如說，是否可以針對誤差來源應做系統化分析？或針對不同地面的摩擦條件發展自動化的補償機制？
3. PWM 法對馬達的控制，是電壓而不是速度，而實際馬達速度也為力矩的函數。這個驅動方法本身就會使單輪的轉速會有誤差，也是造成整體機器人運動誤差的來源。
4. 也由於各類驅動誤差均可使機器人未依規劃的方式進行，可考慮加上陀螺儀和加速度計等感測器，對機器人實際運動狀態進行監測，並開發回授控制機制，即時修正各輪的速度，以合成適宜的機器人運動。
5. 麥克納姆輪產生的運動本身即為微觀的向量合成，因此原本預設的多種運動可以直接用線性合成方式來產生多方向的運動，可在

學理方面進行多一些分析，可讓機器人可達成運動更具泛用性。

舉例來說，平面上有三個運動維度（前後、左右、旋轉），但機器人有四個驅動輪，因此具備一個限制條件。在任何的運動需求（特定前後、左右、和旋轉的速度），可以用逆向運動學直接反推四輪的驅動轉速。