2025年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010038

參展科別　數學

作品名稱　歐氏空間中固定圖形在整數格點的最大覆蓋

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　陳鵬旭
　　　　　郭君逸

作者姓名　劉宇昕
　　　　　陳冠宇

關鍵詞　歐氏空間、整數格點、覆蓋

2025 年臺灣國際科學展覽會
研究報告

區別：

科別：數學科

計畫名稱：歐氏空間中固定圖形在整數格點的最大覆蓋

關鍵詞：歐氏空間、整數格點、覆蓋

編號：

中文摘要

本作品針對固定格點中的最大覆蓋進行研究，探討三角形與平行六面體的最大覆蓋面積與體積，以及此時的作圖圖形。對於三角形，我們的研究對象為平面 $9n^2$ 格點，我們觀察出每三圈格點為一個作圖單位，並藉由定義點集合範圍來證明最大面積三角形。為了證明所提出的猜想，我們以三個正方形與四個三角形之間的轉換關係為方向進行研究，並求出相同旋轉點三角形的大小關係，將坐標分門別類後加以探討。至於平行六面體的部分，我們則研究立體 $8n^3$ 格點，在提出最大體積總和之猜想後，以底面積與高兩方面來推算出最大體積，最後將平行六面體依據平面法向量分成數類以證明猜想。

英文摘要

This project studies the largest coverage with fixed shapes in Euclidean space at integer lattice points. Focusing on triangles and parallelepipeds, we've explored the coverage area, volume, and graphical representations when the coverage reaches its maximum. A conjecture is proposed for the maximum area of $9n^2$ planar lattice points, and another for the maximum volume formula for $8n^3$ cubic lattice points.

壹、 研究動機

我們在 IMO Shortlist 2021 看到一道特別的幾何題目：

設 n 為一固定正整數，並令 S 為直角坐標平面中，坐標 x 和 y 均小於 $2n$ 的格點集合，$S = \{(x,y)|0 \le x,y < 2n \wedge x,y \in \mathbb{Z}\}$, $|S| = 4n^2$。假設 F 是多邊形組成的集合，使得它們的所有頂點皆在S中，而S中的每個點恰好是F中的一個多邊形的頂點。確定所有多邊形面積的最大可能總和。

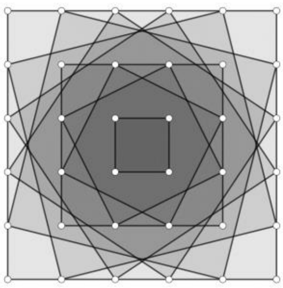


圖 1

原題的面積總和在所有多邊形皆為四邊形時可以達到最大值，如圖 1。於是我們感到好奇，將 F 改為三角形組成的集合，或將其推廣為立體格點，將 F 改為平行六面體組成的集合，其體積的最大可能總和是否會有同樣的規律，為此我們展開研究。

貳、 研究目的

一、觀察$9n^2$格點面積最大可能總和之特徵並提出最大可能總和之猜想

二、探討$9n^2$格點最大可能總和猜想公式

三、分析$9n^2$格點最大可能總和猜想特徵與證明

四、觀察$8n^3$立體格點體積最大可能總和之特徵並提出最大可能總和之猜想

五、探討$8n^3$立體格點最大可能總和猜想公式

六、分析$8n^3$立體格點最大可能總和猜想特徵與證明

參、 研究設備及器材

紙筆、筆電、平板電腦、*GeoGebra* 繪圖軟體

肆、 研究過程或方法及進行步驟

一、觀察$9n^2$格點面積最大可能總和之特徵並提出最大可能總和之猜想

由於將F改為三角形組成的集合，原題$4n^2$的格點集合不一定能完整用完，因此將$9n^2$ 格點原題敘述如下：

設n為一固定正整數，並令S為直角坐標平面中，坐標x和y均小於$3n$的格點集合，$S=\{(x,y)|0\le x\,,y<3n\wedge x,y\in\mathbb{Z}\}\,,|S|=9n^2$。假設$F$是由$3n^2$個三角形組成的集合，使得它們的所有頂點皆在$S$中，而$S$中的每個點恰好是$F$中的一個三角形的頂點。確定所有$3n^2$個三角形面積的最大可能總和。為方便研究，定義下列名詞：

第k圈：$x=k-1\,,x=3n-k\,,y=k-1\,,y=3n-k$四條直線通過之格點。

第k圈端點：指$(k-1,k-1)\,,(k-1,3n-k)\,,(3n-k,k-1)\,,(3n-k,3n-k)$四點。

(一) 針對$9n^2$格點原題，我們觀察後發現其規律，寫出 **[猜想一]**。

[猜想一]：$9n^2$格點面積最大可能總和應為以下作圖方式結果之面積，分為五個步驟：

1. 第 1 圈有$12n-4$個格點，減去由第 1 圈端點數過來第$(n+1)$個點，共 8 個點，剩餘

$12n-12$個格點，將其分成$4n-4$個三角形，並使每個三角形頂點間隔格點數相同，故3 頂點間的間隔格點數為$\frac{(12n-12)-3}{3}=4n-5$。

圖 2、圖 3 為$n=3$的作圖結果，紅色為減去的點，藍色為剩下的點

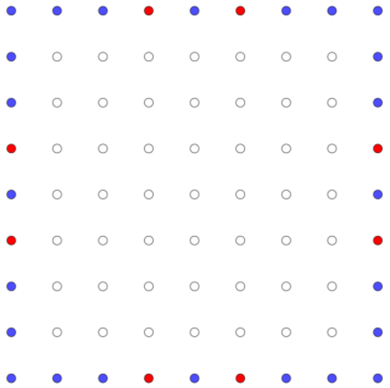


圖 2

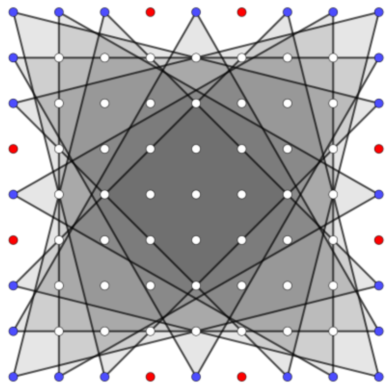


圖 3

2. 第 1 圈減去的 8 個點與第 2 圈端點共 12 個點，將其分成 4 個三角形，使三角形 3 頂點間隔格點數相同，3 頂點互相間隔 3 個格點，如圖 4、圖 5。

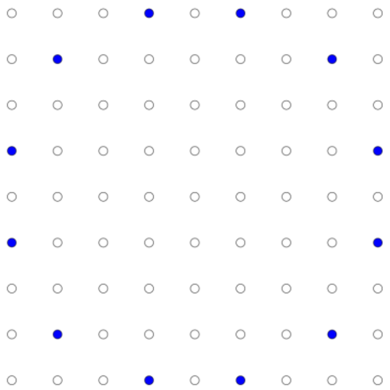


圖 4

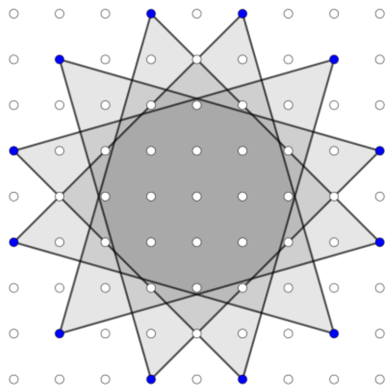


圖 5

3. 第 2 圈有$12n-12$個格點，減去由第 2 圈端點數過來第n個點與第 2 圈端點，共 12 個點，剩餘$12n-24$個格點，分成$4n-8$個三角形，並使三角形頂點間隔格點數相同，故3 頂點間的間隔格點數為 $\frac{(12n-24)-3}{3}=4n-9$，如圖 6、圖 7。

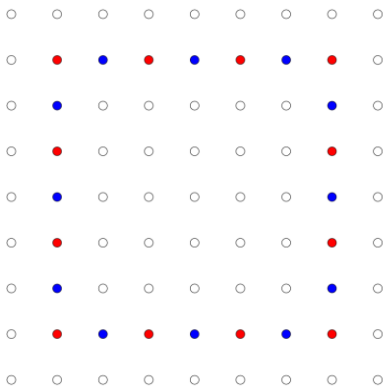


圖 6

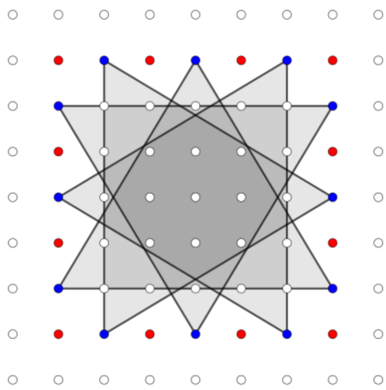


圖 7

4. 第 2 圈減去的 8 個點與第 3 圈端點共 12 個點，將其分成 4 個三角形，使三角形 3 頂點間隔格點數相同，3 頂點互相間隔 3 個格點，如圖 8、圖 9。

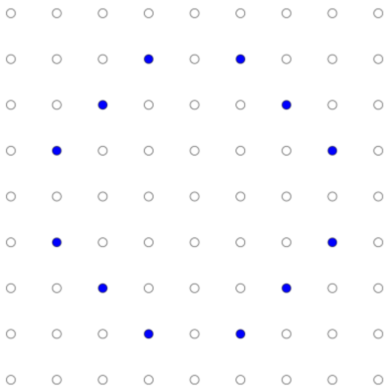


圖 8

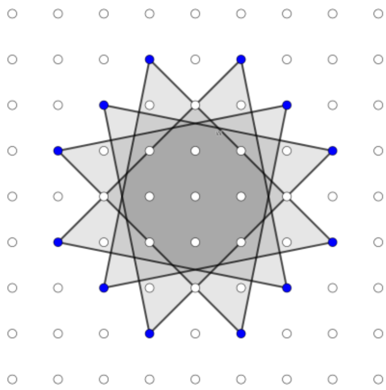


圖 9

5. 第 3 圈有$12n-20$個格點，減去第 3 圈端點，共 4 個點，剩餘$12n-24$個格點，將其分成$4n-8$個三角形，並使三角形頂點間隔格點數相同，故3 頂點間的間隔格點數為$\dfrac{(12n-24)-3}{3}=4n-9$，如圖 10、圖 11。

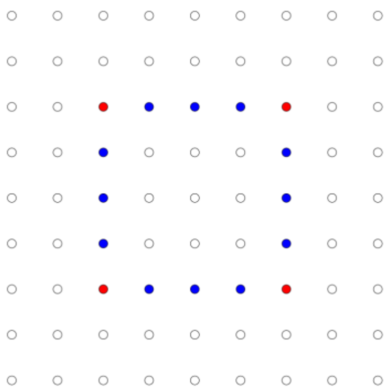


圖 10

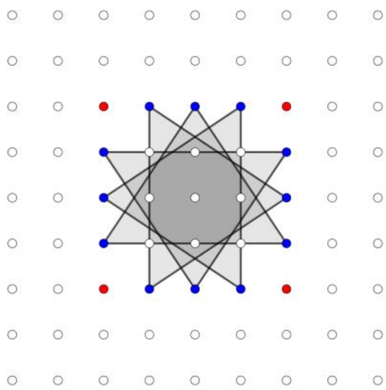


圖 11

二、 探討$9n^2$格點最大可能總和猜想公式

(一) **[猜想一]**圖形特徵討論

觀察**[猜想一]**做出之圖形後，我們整理出以下特徵：

1. 觀察每三圈的格點，可以完整進行一次**[猜想一]**的五步驟，因此若n為奇數，需重複以上步驟 $\frac{n+1}{2}$ 次；若n為偶數，需重複以上步驟n次，即可完整做出最大可能面積之圖形，如圖 12。
2. 圖中任 1 個三角形皆能找到另 3 個三角形使得這 4 個三角形相互全等，且其 12 個頂點恰可形成 3 個正方形，如圖 13 為其中一組 4 個全等三角形。

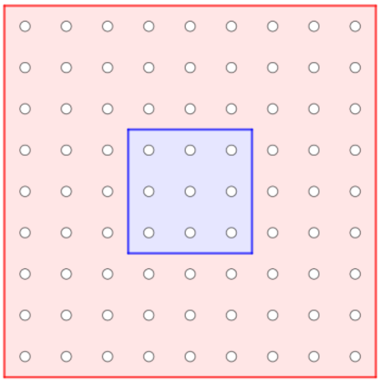


圖 12

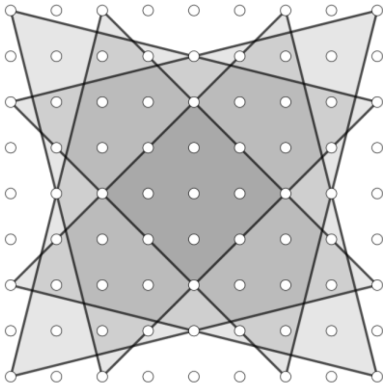


圖 13

(二) **[猜想一]**圖形面積討論

計算**[猜想一]**圖形之面積，並將五個步驟分開探討：

1.圖形中四個三角形互相全等，只需計算$n-1$個三角形的面積，再乘以 4 即面積總和。以$(0,3n-1)$, $(1,3n-1)$, … , $(n-2,3n-1)$為三角形的起始點，又兩頂點間隔格點數為 $4n-5$，可推導出另外兩頂點，並列出 $n-1$個三角形的 3 頂點坐標如下：

$$\begin{pmatrix} (0,3n-1) & (3n-1,2n) & (n-1,0) \\ (1,3n-1) & (3n-1,2n-2) & (n-2,0) \\ (2,3n-1) & (3n-1,2n-3) & (n-3,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-2,3n-1) & (3n-1,n+1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

上述 $n-1$個三角形的面積和可用以下行列式表示：

$$Area = 4\times\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 0 & 3n-1 & 1 \\ 3n-1 & 2n & 1 \\ n-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| + 4\times\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}\left\|\begin{vmatrix} k & 3n-1 & 1 \\ 3n-1 & 2n-k-1 & 1 \\ n-k-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\|$$

$$= 2|(n-1)^2-(3n-1)^2| + 2\sum_{k=1}^{n-2}|-2k^2+(2n-2)k+(-8n^2+5n-1)|$$

$$= 2[(3n-1)^2-(n-1)^2] + 2\sum_{k=1}^{n-2}|-2k^2+(2n-2)k+(-8n^2+5n-1)|$$

$$= 8n(2n-1) + 2\sum_{k=1}^{n-2}|-2k^2+(2n-2)k+(-8n^2+5n-1)|$$

令 $f(k) = -2k^2+(2n-2)k+(-8n^2+5n-1)$，其判別式：

$$\Delta = (2n-2)^2+8(-8n^2+5n-1)$$
$$= -60\left(n-\frac{4}{15}\right)^2+\frac{4}{15} \le -60\left(2-\frac{4}{15}\right)^2+\frac{4}{15} = -180 < 0$$

又領導係數為-2，故 $f(k) < 0$ 。

得到

$$Area = 8n(2n-1) + 2\sum_{k=1}^{n-2}\left(2k^2-(2n-2)k+(8n^2-5n-1)\right)$$
$$= 8n(2n-1) + 2\left[2\sum_{k=1}^{n-2}k^2-(2n-2)\sum_{k=1}^{n-2}k+(n-2)(8n^2-5n+1)\right]$$
$$= 8n(2n-1) + \frac{2}{3}(n-2)(23n^2-14n+3)$$

2.四個三角形互相全等，以$(1,3n-2)$為三角形的起始點，又兩頂點間隔格點數為 3，可推導出另外兩頂點，$(3n-1,2n-1),(n,0)$，面積和可用以下行列式表示：

$$Area = 4\times\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & 3n-2 & 1 \\ 3n-1 & 2n-1 & 1 \\ n & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 2|-8n^2+10n-3|$$

其中　$-8n^2+10n-3 = -8\left(\mathrm{n}-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8} \le -8\left(2-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8} = -15 < 0$

得到　$Area = 2(8n^2-10n+3) = 16n^2-20n+6$

3.四個三角形互相全等，計算 $n-2$個三角形的面積，再乘以 4 即面積總和。以 $(2,3n-$

$2), (3, 3n-2), \ldots, (n-1, 3n-2)$為三角形的起始點，兩頂點間隔格點數為$4n-9$，可推導出另外兩頂點，並列出$n-2$個三角形的 3 頂點坐標如下：

$$\begin{pmatrix} (2, 3n-2) & (3n-2, 2n-2) & (n-1, 1) \\ (3, 3n-2) & (3n-2, 2n-3) & (n-2, 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1, 3n-2) & (3n-2, n+1) & (2, 1) \end{pmatrix}$$

上述 $n-2$個三角形的面積和可用以下行列式表示：

$$Area = 4 \times \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} k & 3n-2 & 1 \\ 3n-2 & 2n-k & 1 \\ n+1-k & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 4\left|-k^2 + (n+1)k + (-4n^2 + 7n - 4)\right|$$

令 $f(k) = -k^2 + (n+1)k + (-4n^2 + 7n - 4)$，其判別式：

$$\Delta = (n+1)^2 + 4(-4n^2 + 7n - 4) = -15(n-1)^2 \leq -15(2-1)^2 = -15 < 0$$

又領導係數為-1，故 $f(k) < 0$

得到

$$\begin{aligned} Area &= 4[k^2 - (n+1)k + (4n^2 - 7n + 4)] \\ &= 4\left[\sum_{k=2}^{n-1} k^2 - (n+1)\sum_{k=2}^{n-1} k + (n-2)(4n^2 - 7n + 4)\right] \\ &= \frac{2}{3}(n-1)(n-2)(23n - 24) \end{aligned}$$

4. 四個三角形互相全等，以$(2, 3n-3)$為三角形的起始點，又兩頂點間隔格點數為 3，可推導出另外兩頂點，$(3n-2, 2n-1), (n, 1)$，面積和可用以下行列式表示：

$$Area = 4 \times \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 2 & 3n-3 & 1 \\ 3n-2 & 2n-1 & 1 \\ n & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 2\left|-8n^2 + 20n - 12\right|$$

其中　$-8n^2 + 20n - 12 = -8\left(\mathrm{n} - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \leq -8\left(2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$

得到　$Area = 2(8n^2 - 20n + 12) = 16n^2 - 40n + 24$

5. 四個三角形相互全等，計算 $n-2$個三角形的面積，再乘以 4 即面積總和。以$(3, 3n-3), (4, 3n-3), \ldots, (n, 3n-3)$為三角形的起始點，兩頂點間隔格點數為$4n-9$，可推導出另外兩頂點，並列出$n-2$個三角形的 3 頂點坐標如下：

$$\begin{pmatrix} (3,3n-3) & (3n-3,2n-2) & (n,2) \\ (4,3n-3) & (3n-3,2n-3) & (n-1,2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (n,3n-3) & (3n-3,n+1) & (3,2) \end{pmatrix}$$

上述$n-2$個三角形的面積可用以下行列式表示：

$$Area = 4\times\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} k & 3n-3 & 1 \\ 3n-3 & 2n-k+1 & 1 \\ n+3-k & 2 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 2|-2k^2+(2n+6)k+(-8n^2+23n-27)|$$

令 $f(k)=-2k^2+(2n+6)k+(-8n^2+23n-27)$，其判別式：

$$\begin{aligned}\Delta &= (2n+6)^2+8(-8n^2+23n-27) \\ &= -60\left(n-\frac{26}{15}\right)^2+\frac{4}{15}\le -60\left(2-\frac{26}{15}\right)^2+\frac{4}{15}=-4<0\end{aligned}$$

又領導係數為-2，故 $f(k)<0$ 。

得到

$$\begin{aligned}Area &= 2[2k^2-(2n+6)k+(8n^2-23n+27)] \\ &= 2\left[2\sum_{k=3}^{n}k^2-(2n+6)\sum_{k=3}^{n}k+(n-2)(8n^2-23n+27)\right] \\ &= \frac{2}{3}(n-2)(23n^2-80n+69)\end{aligned}$$

最後將以上五點所求出的面積和加總，得

$$\begin{aligned}Area &= \left[8n(2n-1)+\frac{2}{3}(n-2)(23n^2-14n+3)\right]+(16n^2-20n+6) \\ &\quad+\frac{2}{3}(n-1)(n-2)(23n-24)+(16n^2-40n+24)+\frac{2}{3}(n-2)(23n^2-80n+69) \\ &= \frac{2}{3}(n-2)(69n^2-141n+96)+48n^2-68n+3 \\ &= 2(23n^3-69n^2+92n-49)\end{aligned}$$

推論一：$\forall n\ge 2, n\in\mathbb{N}, 9n^2$格點第 1、2、3 圈面積最大可能總和為

$$2(23n^3-69n^2+92n-49)$$

接著討論$9n^2$格點面積最大可能總和，設 $f(p)=2(23p^3-69p^2+92p-49)$。

令 n 為偶數時的最大面積和為 $E(n)$ ，n為奇數時的最大面積和為 $Od(n)$。

若 n為偶數，令$p=2k$, $k=1,2,\dots,\frac{n}{2}$

$$E(n)=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(2k)=2\left[23\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k)^3-69\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k)^2+92\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k)-49\left(\frac{n}{2}\right)\right]=\frac{23n^4-12n}{4}$$

若 n為奇數，令 $p=2k+1, k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$

$$\begin{aligned}Od(n)&=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} f(2k+1)+4\\&=2\left[23\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)^3-69\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)^2+92\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)-49\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]+4\\&=\frac{23n^4-12n+5}{4}\end{aligned}$$

又$Od(1)=4$，表$n=1$時亦符合函數$Od(n)$，故對所有的奇數n，$Od(n)$均成立。

推論二： $\forall n\in\mathbb{N}, 9n^2$格點面積最大可能總和可表示如下：

$$\begin{cases}\dfrac{23n^4-12n}{4}, if\ n\ is\ even.\\ \dfrac{23n^4-12n+5}{4}, if\ n\ is\ odd.\end{cases}$$

三、 分析$9n^2$格點最大可能總和猜想特徵與證明

為了證明**[猜想一]**即為$9n^2$格點面積最大可能總和，觀察**[猜想一]**的特徵：

1.作圖方法以 3 圈為 1 次循環，因此若n為奇數，需重複以上步驟 $\frac{n+1}{2}$ 次；若n為偶數，需重複以上步驟n次，即可完整做出最大可能面積之圖形。

2.圖中任 1 個三角形皆能找 到另 3 個三角形使得這 4 個三角形相互全等，且其 12 個頂點恰可形成 3 個正方形。

可以得出**[推論三]**：

推論三： 以 3 圈格點為 1 作圖單位，共有$36n-36$個格點，$\forall n\geq 2$，可作出$9n-9$個以格點中心$\left(\frac{3n-1}{2},\frac{3n-1}{2}\right)$為重心的正方形，並每次取 3 個正方形轉換成 4 個全等三角形，且全等三角形的頂點在不同範圍，可作出$3n-3$組相互全等的三角形。

由**[推論三]**得出以下證明步驟：

(1) 證明 9 點選取三角形 3 頂點的最大面積為△ $P_1''P_2P_3'$

(2) 證明 3 個正方形選取的全等三角形 3 頂點在不同範圍時有最大值

(3) 證明 3 個正方形選取的三角形為全等三角形時有最大值

(4) 證明 3 個正方形選取最大的面積時的三角形 3 頂點分別為P_1, P_2, P_3的旋轉點

(5) 證明選取的 3 個非端點正方形的坐標關係最大值為$(h+k,h),(n+k,h),(2n-h,h)$

(6) 求證選取的 3 個端點正方形的坐標關係最大值

(7) 證明 3 個正方形轉換成 4 個三角形時有面積最大值

3. 證明(1) 9 點選取三角形 3 頂點的最大面積為△ $P_1''P_2P_3'$

如圖 14，設有三相異點$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$，使得 $P_1,P_2,P_3\in$

$\{(x_k,y_k)|0\le x_k\le(3n-4)\,,0\le y_k\le 2,x_k,y_k\in\mathbb{Z}\}\,,n\ge 2$

且$x_1\le x_2\le x_3$，以$\left(\frac{3n+1}{2},\frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，將$P_1,P_2,P_3$分別旋轉 $\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$後，得出以下

六點： $P_1'(3n-1-y_1,x_1),P_2'(3n-1-y_2,x_2),P_3'(3n-1-y_3,x_3),$

$P_1''(y_1,3\mathrm{n}-1-x_1),P_2''(y_2,3\mathrm{n}-1-x_2),P_3''(y_3,3\mathrm{n}-1-x_3)$

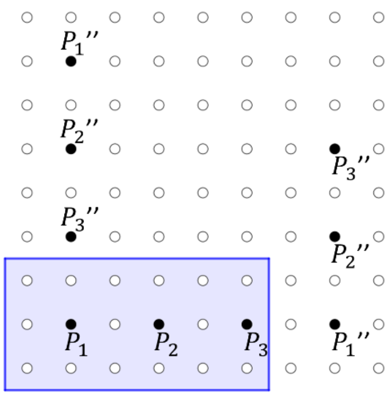


圖 14

從旋轉 $\frac{\pi}{2},0,-\frac{\pi}{2}$ 三種中各取一點，且三點分別為P_1,P_2,P_3的旋轉點，可得六種三角形。

$$\triangle P_1''P_2P_3',\triangle P_1''P_3P_2',\triangle P_2''P_1P_3',\triangle P_2''P_3P_1',\triangle P_3''P_1P_2',\triangle P_3''P_2P_1'$$

為了比較六種三角形的面積大小，接著求出其分別的面積，又因六種三角形的頂點皆為

$(y_a\,,3\mathrm{n}-1-x_a)\,,(x_b\,,y_b)\,,(3n-1-y_c\,,\,x_c)$的形式，可由行列式求得其面積為

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3n-1-y_c-x_b & y_a-x_b \\ x_c-y_b & 3\mathrm{n}-1-x_a-y_b \end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1-y_{\mathrm{c}}-x_b)(3\mathrm{n}-1-x_a-y_b)-(x_c-y_b)(y_a-x_b)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)^2-(3n-1)(\mathrm{x}_a+x_b+y_b+y_{\mathrm{c}})+x_ax_b+y_ay_b+x_bx_c+y_by_c+x_ay_c-x_cy_a]$$

(1) 觀察 x值相同下y_a , y_b , y_c的關係

首先探討 x值相同的情況，設 $x_1=x_2=x_3=x$，三角形面積可改寫成下式：

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2-(3n-1)(2x+y_b+y_{\mathrm{c}})+x^2+y_ay_b+x^2+y_by_c+xy_c-xy_a]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)^2-2x(3n-1)+2x^2-(3n-1)(y_b+y_{\mathrm{c}})+y_b(y_a+y_{\mathrm{c}})+x(y_c-y_a)]$$

觀察三角形面積公式，發現在兩個三角形相減時，部分公式相減後為零。

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2-2x(3n-1)+2x^2]$$

因此只須比較剩餘部分即可。

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_b+y_{\mathrm{c}})+y_b(y_a+y_c)+x(y_c-y_a)]$$

假設△ $P_a''P_bP_c'$為六種三角形中最大面積三角形，觀察P_a,P_b,P_c三點間關係。

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_c''P_bP_a'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_b+y_{\mathrm{c}})+y_b(y_a+y_{\mathrm{c}})+x(y_c-y_a)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_b+y_a)+y_b(y_c+y_a)+x(y_a-y_c)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(y_a-y_c)+2x(y_c-y_a)]=\left(x-\frac{3n-1}{2}\right)(y_c-y_a)$$

$$\because\left(x-\frac{3n-1}{2}\right)(y_c-y_a)\geq 0 \quad \therefore\begin{cases} y_c>y_a\,, if\ x>\frac{3n-1}{2} \\ y_a>y_c\,, if\ x\leq\frac{3n-1}{2} \end{cases}$$

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_b''P_aP_c'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_b+y_{\mathrm{c}})+y_b(y_a+y_{\mathrm{c}})+x(y_c-y_a)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_a+y_{\mathrm{c}})+y_a(y_b+y_{\mathrm{c}})+x(y_c-y_b)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(y_a-y_b)+y_c(y_b-y_a)+x(y_b-y_a)]=\frac{1}{2}(3n-1-y_c-x)(y_a-y_b)$$

$\because (3n-1-y_c-x)(y_a-y_b)\geq 0, 0\leq y_c\leq 2, 0\leq y_c\leq (3n-4)\ \therefore y_a>y_b$

將$\triangle P_a''P_bP_c'$減去$\triangle P_a''P_cP_b'$：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[(3n-1)(y_b+y_c)+y_b(y_a+y_c)+x(y_c-y_a)]\\&-\frac{1}{2}[-(3n-1)(y_c+y_b)+y_c(y_a+y_b)+x(y_b-y_a)]\\=&\frac{1}{2}[y_a(y_b-y_c)+x(y_c-y_b)]=\frac{1}{2}(x-y_a)(y_c-y_b)\end{aligned}$$

$\because \frac{1}{2}(x-y_a)(y_c-y_b)\geq 0, 0\leq y_a\leq 2\ \therefore \begin{cases}y_c>y_b\,, if\ x\geq y_a\\ y_b>y_c\,, if\ x<y_a\end{cases}$

以上三點的結果可以統整成以下：

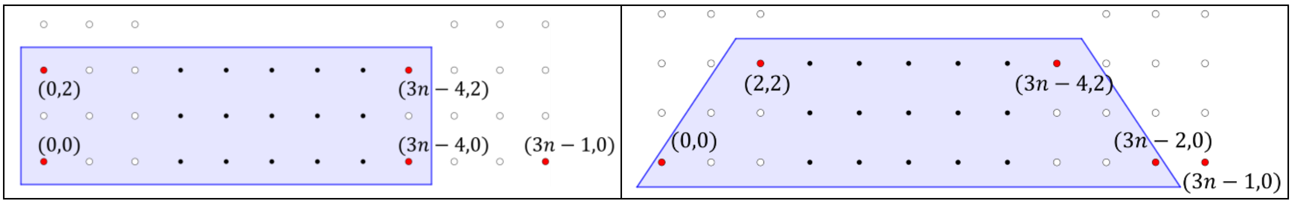
$$\begin{cases}y_c>y_a>y_b\,, if\ x>\dfrac{3n-1}{2}\\ y_a>y_c>y_b\,, if\ 2<x\leq\dfrac{3n-1}{2}\\ y_a>y_b>y_c\,, if\ x<2\end{cases}$$

將其轉為數字後可以表示如下：

$$(y_a,y_b,y_c)=\begin{cases}(1,0,2)\,, if\ x>\dfrac{3n-1}{2}\\ (2,0,1)\,, if\ 2<x\leq\dfrac{3n-1}{2}\\ (2,1,0)\,, if\ x<2\end{cases}$$

觀察上述結論可以得知，在$x_1=x_2=x_3$時，(y_a,y_b,y_c)會因x值與$\frac{3n-1}{2}$, 2兩者的關係而改變，因此我們重新定義三相異點$P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$來符合此關係。

原本定義的三相異點P_1,P_2,P_3： $P_1,P_2,P_3\in\left\{(x_k,y_k)\middle\vert\begin{matrix}0\leq x_k\leq(3n-4)\\0\leq y_k\leq 2\\x_k,y_k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$ $n\geq 2, x_1\leq x_2\leq x_3$	重新定義後的三相異點P_1,P_2,P_3： P_1,P_2,P_3 $\in\left\{(x_k,y_k)\middle\vert\begin{matrix}0\leq x_k\leq(3n-4), if y_k=0\\1\leq x_k\leq(3n-3), if y_k=1\\2\leq x_k\leq(3n-2), if y_k=2\\0\leq y_k\leq 2\\x_k,y_k\in\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$ $n\geq 2, x_1\leq x_2\leq x_3$
圖例：圖 15	圖例：圖 16



重新定義三相異點後，我們可以將$x_1 = x_2 = x_3$時y_a, y_b, y_c的關係表示如下：

$$(y_a, y_b, y_c) = \begin{cases} (1,0,2)\,, if\ x > \dfrac{3n-1}{2} \\ (2,0,1)\,, if\ x \le \dfrac{3n-1}{2} \end{cases}$$

因此我們可以將其寫成**[定理一]**。

定理一：當$x_1 = x_2 = x_3$時，$(y_a, y_b, y_c) = \begin{cases} (1,0,2)\,, if\ x > \frac{3n-1}{2} \\ (2,0,1)\,, if\ x \le \frac{3n-1}{2} \end{cases}$

(2) 觀察 y值相同下x_a，x_b，x_c的關係

接著以重新定義後的三相異點 P_1, P_2, P_3探討 y值相同的情況，設$y_1 = y_2 = y_3 = y$，三角形面積可改寫成下式：

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2 - 2y(3n-1) + 2y^2 - (3n-1)(x_a + x_b) + x_b(x_a + x_c) + y(x_a - x_c)]$$

觀察三角形面積公式，發現在兩個三角形相減時，部分公式相減後為零。

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2 - 2y(3n-1) + 2y^2]$$

因此只須比較剩餘部分即可。

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a + x_b) + x_b(x_a + x_c) + y(x_a - x_c)]$$

同樣假設$\triangle P_a''P_bP_c'$為六種三角形中最大面積三角形，觀察P_a, P_b, P_c三點間關係。

設 $y = 0$，將$\triangle P_a''P_bP_c'$減去$\triangle P_c''P_bP_a'$：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a + x_b) + x_b(x_a + x_c) + 0 \times (x_a - x_c)] \\ &-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_c + x_b) + x_b(x_c + x_a) + 0 \times (x_c - x_a)] \\ &= \frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a + x_b) + (3n-1)(x_c + x_b)] = \frac{1}{2}(3n-1)(x_c - x_a) \end{aligned}$$

$\because \frac{1}{2}(3n-1)(x_c - x_a) \ge 0, n \ge 2 \quad \therefore x_c > x_a$

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_b''P_aP_c'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+0\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_b+x_a)+x_a(x_b+x_c)+0\times(x_a-x_c)]$$
$$=\frac{1}{2}[x_b(x_a+x_c)-x_a(x_b+x_c)]=\frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)$$

$\because \frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)\geq 0, x_c>0 \ \therefore x_b>x_a$

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_a''P_cP_b'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+0\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_c)+x_c(x_a+x_b)+0\times(x_a-x_b)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_b)+x_a(x_b-x_c)]=\frac{1}{2}(3n-1-x_a)(x_c-x_b)$$

$\because \frac{1}{2}(3n-1-x_a)(x_c-x_b)\geq 0, x_a\leq 3n-4 \ \therefore x_c>x_b$

由以上三點可以求得當 $y=0$時，$x_c>x_b>x_a \Rightarrow (x_a, x_b, x_c)=(x_1, x_2, x_3)$。

設 $y=1$，將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_c''P_bP_a'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+1\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_c+x_b)+x_b(x_c+x_a)+1\times(x_c-x_a)]$$
$$=\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+(3n-1)(x_c+x_b)+2(x_a-x_c)]=\frac{1}{2}(3n-3)(x_c-x_a)$$

$\because \frac{1}{2}(3n-3)(x_c-x_a)\geq 0, n\geq 2 \ \therefore x_c>x_a$

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_b''P_aP_c'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+1\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_b+x_a)+x_a(x_b+x_c)+1\times(x_a-x_c)]$$
$$=\frac{1}{2}[x_b(x_a+x_c)-x_a(x_b+x_c)]=\frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)$$

$\because \frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)\geq 0, x_c>0 \ \therefore x_b>x_a$

將△ $P_a''P_bP_c'$減去△ $P_a''P_cP_b'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+1\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_c)+x_c(x_a+x_b)+1\times(x_a-x_b)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_b)+x_a(x_b-x_c)+(x_b-x_c)]=\frac{1}{2}(3n-2-x_a)(x_c-x_b)$$

$\because \frac{1}{2}(3n-2-x_a)(x_c-x_b)\geq 0$, $x_a\leq 3n-4$ $\quad\therefore x_c>x_b$

由以上三點可以求得當 $y=1$時，$x_c>x_b>x_a\Rightarrow(x_a,x_b,x_c)=(x_1,x_2,x_3)$。

設 $y=2$，將△ $P_a{}''P_bP_c{}'$減去△ $P_c{}''P_bP_a{}'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+2\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_c+x_b)+x_b(x_c+x_a)+2\times(x_c-x_a)]$$
$$=\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+(3n-1)(x_c+x_b)+4(x_a-x_c)]=\frac{1}{2}(3n-5)(x_c-x_a)$$

$\because\frac{1}{2}(3n-5)(x_c-x_a)\geq 0, n\geq 2$ $\therefore x_c>x_a$

將△ $P_a{}''P_bP_c{}'$減去△ $P_b{}''P_aP_c{}'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+2\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_b+x_a)+x_a(x_b+x_c)+2\times(x_a-x_c)]$$
$$=\frac{1}{2}[x_b(x_a+x_c)-x_a(x_b+x_c)]=\frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)$$

$\because \frac{1}{2}x_c(x_b-x_a)\geq 0, x_c>0$ $\quad\therefore x_b>x_a$

將△ $P_a{}''P_bP_c{}'$減去△ $P_a{}''P_cP_b{}'$：

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b)+x_b(x_a+x_c)+2\times(x_a-x_c)]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_c)+x_c(x_a+x_b)+2\times(x_a-x_b)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_b)+x_a(x_b-x_c)+2(x_b-x_c)]=\frac{1}{2}(3n-3-x_a)(x_c-x_b)$$

$\because \frac{1}{2}(3n-3-x_a)(x_c-x_b)\geq 0, x_a\leq 3n-4$ $\therefore x_c>x_b$

由以上三點可以求得當 $y=2$時，$x_c>x_b>x_a\Rightarrow(x_a,x_b,x_c)=(x_1,x_2,x_3)$。

因此我們可以得出，當$y_1=y_2=y_3$時，△ $P_1{}''P_2P_3{}'$有六種三角形中最大面積，將其寫成**[定理二]**。

定理二： 當$y_1 = y_2 = y_3$時，$\triangle P_1''P_2P_3'$有六種三角形中最大面積。

(3) 證明 P_a, P_b, P_c 的 x值關係必定為$x_a \le x_b \le x_c$

由前述可以得知，三角形面積為：

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2-(3n-1)(x_a+x_b+y_b+y_c)+x_ax_b+y_ay_b+x_bx_c+y_by_c+x_ay_c-x_cy_a]$$

且$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$分別為 $P_a(x_a, y_a), P_b(x_b, y_b), P_c(x_c, y_c)$三點中一點。

觀察三角形面積公式，發現在兩個三角形相減時，部分公式相減後為零。

$$\frac{1}{2}((3n-1)^2)$$

因此只須比較剩餘部分即可。

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b+y_b+y_c)+x_ax_b+y_ay_b+x_bx_c+y_by_c+x_ay_c-x_cy_a]$$

同樣假設$\triangle P_a''P_bP_c'$為六種三角形中最大面積三角形。

以**[定理一]**、**[定理二]**結果證明 $x_a \le x_b \le x_c$。

① 證明$x_a \le x_c$，將$\triangle P_a''P_bP_c'$減去$\triangle P_c''P_bP_a'$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b+y_b+y_c)+x_ax_b+y_ay_b+x_bx_c+y_by_c+x_ay_c-x_cy_a]\\
&-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_c+x_b+y_b+y_a)+x_cx_b+y_cy_b+x_bx_a+y_by_a+x_cy_a-x_ay_c]\\
&=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_a+y_a-y_c)+2(x_cy_a-x_ay_c)]\\
&=\frac{3n-1}{2}(x_c-x_a)+y_a\left(\frac{3n-1}{2}-x_c\right)+y_c\left(x_a-\frac{3n-1}{2}\right)\ge 0
\end{aligned}$$

假設$x_c > x_a$，在 $x_c \ge \frac{3n-1}{2} \ge x_a, y_a = y_c = 2$ 時有最小值。

$$\frac{3n-1}{2}(x_c-x_a)+2\left(\frac{3n-1}{2}-x_c\right)+2\left(x_a-\frac{3n-1}{2}\right)=\frac{3n-5}{2}(x_c-x_a)$$

$\because x_c > x_a \quad \therefore \frac{3n-5}{2}(x_c-x_a) > 0$

假設 $x_a > x_c$，在 $x_a \ge \frac{3n-1}{2} \ge x_c$，$y_a = y_c = 2$ 時有最大值。

$$\frac{3n-1}{2}(x_c-x_a)-2\left(x_c-\frac{3n-1}{2}\right)-2\left(\frac{3n-1}{2}-x_a\right)=-\frac{3n-5}{2}(x_a-x_c)$$

$\because x_a > x_c \quad \therefore -\frac{3n-5}{2}(x_a - x_c) < 0$

假設$x_a = x_c = x$，由**[定理一]**可知：

$$\begin{cases} y_c \geq y_a \,, if\ x_a = x_c > \dfrac{3n-1}{2} \\ y_a \geq y_c \,, if\ \dfrac{3n-1}{2} > x_a = x_c \end{cases}$$

則我們可以發現

$$\frac{3n-1}{2}(x_c - x_a) + y_a\left(\frac{3n-1}{2} - x_c\right) + y_c\left(x_a - \frac{3n-1}{2}\right) = (y_a - y_c)\left(\frac{3n-1}{2} - x\right) \geq 0$$

因此$x_c \geq x_a$。

② 證明$x_a \leq x_b$，將$\triangle P_a''P_bP_c'$減去$\triangle P_b''P_aP_c'$

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a + x_b + y_b + y_c) + x_a x_b + y_a y_b + x_b x_c + y_b y_c + x_a y_c - x_c y_a]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_b + x_a + y_a + y_c) + x_b x_a + y_b y_a + x_a x_c + y_a y_c + x_b y_c - x_c y_b]$$
$$= \frac{1}{2}[(3n-1)(y_a - y_\mathrm{b}) + (x_b x_c + y_b y_c + x_a y_c - x_c y_a - x_a x_c - y_a y_c - x_b y_c + x_c y_b)]$$
$$= \frac{1}{2}[x_c(x_b - x_a) + y_c(x_a - x_b) + y_a(3n - 1 - x_c - y_c) + y_b(-3n + 1 + x_c + y_c)]$$
$$= \frac{1}{2}[(x_c - y_c)(x_b - x_a) + (y_a - y_b)(3n - 1 - x_c - y_c)] \geq 0$$

$\because (x_c - y_c) \geq 0\,, (3n - 1 - x_c - y_c) \geq 0$

$$\therefore \begin{cases} x_b \geq x_a - 2 + \frac{2(3n-1-2y_c)}{x_c - y_c}\,,\ if\ y_a - y_b = 2 \\ x_b \geq x_a - 1 + \frac{3n-1-2y_c}{x_c - y_c}\,,\ if\ y_a - y_b = 1 \\ x_b \geq x_a\,,\ if\ y_a \leq y_b \end{cases}$$

由下證明可知因$\left(1 - \frac{3n-1-2y_c}{x_c - y_c}\right) < \frac{1}{2}$，所以$x_b \geq x_a$。

$$\left(1 - \frac{3n-1-2y_c}{x_c - y_c}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left[2 - \frac{2(3n-1-2y_c)}{x_c - y_c}\right] < 1 \Rightarrow \frac{2(3n-1-2y_c)}{x_c - y_c} > 1$$
$$\Rightarrow \frac{3n-1-2y_c}{x_c - y_c} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2(3n-1-2y_c) > x_c - y_c \Rightarrow 2(3n-1) > x_c + 3y_c$$

$\because 0 \leq x_c + 3y_c \leq 3n - 2 + 2y_c \leq 3n + 2 < 2(3n-1) \therefore \left(1 - \frac{3n-1-2y_c}{x_c - y_c}\right) < \frac{1}{2}$

③ 證明$x_b \leq x_c$，將$\triangle P_a''P_bP_c'$減去$\triangle P_a''P_cP_b'$

$$\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_b+y_b+y_c)+x_ax_b+y_ay_b+x_bx_c+y_by_c+x_ay_c-x_cy_a]$$
$$-\frac{1}{2}[-(3n-1)(x_a+x_c+y_c+y_b)+x_ax_c+y_ay_c+x_cx_b+y_cy_b+x_ay_b-x_by_a]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_b)+(x_ax_b+y_ay_b+x_ay_c-x_cy_a-x_ax_c-y_ay_c-x_ay_b+x_by_a)]$$
$$=\frac{1}{2}[(3n-1)(x_c-x_b)+x_a(x_b-x_c+y_c-y_b)+y_a(x_b-x_c+y_b-y_c)]$$
$$=\frac{1}{2}[(x_c-x_b)(3n-1-x_a-y_a)+(x_a-y_a)(y_c-y_b)]\geq 0$$

$\because(3n-1-x_a-y_a)\geq 0\,,(x_a-y_a)\geq 0$

$$\therefore\begin{cases}x_c\geq x_b-2+\frac{2(3n-1-2y_a)}{3n-1-x_a-y_a}\ ,\ if\ y_c-y_b=2\\ x_c\geq x_b-1+\frac{3n-1-2y_a}{3n-1-x_a-y_a}\ ,\ if\ y_c-y_b=1\\ x_c\geq x_b\ ,\ if\ y_c\geq y_b\end{cases}$$

由下證明可知因$\left(1-\frac{3n-1-2y_a}{3n-1-x_a-y_a}\right)<\frac{1}{2}$，所以$x_c\geq x_b$。

$$\left(1-\frac{3n-1-2y_a}{3n-1-x_a-y_a}\right)<\frac{1}{2}\Rightarrow\left[2-\frac{2(3n-1-2y_a)}{3n-1-x_a-y_a}\right]<1\Rightarrow\frac{2(3n-1-2y_a)}{3n-1-x_a-y_a}>1$$
$$\Rightarrow\frac{3n-1-2y_a}{3n-1-x_a-y_a}>\frac{1}{2}\Rightarrow 2(3n-1-2y_a)>3n-1-x_a-y_a$$
$$\Rightarrow 3n-1>-x_a+3y_a$$

$\because -(3n-2)+4y_a\leq -x_a+3y_a\leq 0+2y_a\leq 4<3n-1$

$\therefore 1-\frac{3n-1-2y_a}{3n-1-x_a-y_a}<\frac{1}{2}$

統整以上三點，並寫成**[定理三]**。

定理三：設三相異點P_1,P_2,P_3使得

$$P_1,P_2,P_3\in\left\{(x_k,y_k)\middle|\begin{array}{l}0\leq x_k\leq(3n-4),if\,y_k=0\\1\leq x_k\leq(3n-3),if\,y_k=1\\2\leq x_k\leq(3n-2),if\,y_k=2\\0\leq y_k\leq 2\\x_k,y_k\in\mathbb{Z}\end{array}\right\},n\geq 2\text{且}x_1\leq x_2\leq x_3\text{，}$$

以$\left(\frac{3n+1}{2},\frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，將$P_1,P_2,P_3$分別旋轉$\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$後，從旋轉$\frac{\pi}{2},0,-\frac{\pi}{2}$三種中各取一點作為頂點，且三頂點分別為$P_1,P_2,P_3$的旋轉點的六種三角形中，$\triangle P_1''P_2P_3'$必定存在最大面積。

4.證明(2)3 個正方形選取的全等三角形，其 3 頂點在不同範圍時有最大值。

接續前述三個相異點的定義，進一步定義出四個點集合。

設三相異點P_1, P_2, P_3，使得$P_1, P_2, P_3 \in S_1 = \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{cases} 0 \leq x_k \leq (3n-4), if y_k = 0 \\ 1 \leq x_k \leq (3n-3), if y_k = 1 \\ 2 \leq x_k \leq (3n-2), if y_k = 2 \\ 0 \leq y_k \leq 2 \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right\}$,

$n \geq 2$且$x_1 \leq x_2 \leq x_3$，定義 S_1, S_2, S_3如下：

$$S_2 = \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{cases} 0 \leq y_k \leq (3n-2), if x_k = 3n-1 \\ 1 \leq y_k \leq (3n-3), if x_k = 3n-2 \\ 2 \leq y_k \leq (3n-4), if x_k = 3n-3 \\ (3n-2) \leq x_k \leq (3n-4) \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right\};$$

$$S_3 = \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{cases} 1 \leq x_k \leq (3n-1), if y_k = 3n-1 \\ 2 \leq x_k \leq (3n-2), if y_k = 3n-2 \\ 3 \leq x_k \leq (3n-3), if y_k = 3n-3, \\ (3n-3) \leq y_k \leq (3n-1) \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right\};$$

$$S_4 = \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{cases} 1 \leq y_k \leq (3n-1), if x_k = 0 \\ 2 \leq y_k \leq (3n-2), if x_k = 1 \\ 3 \leq y_k \leq (3n-3), if x_k = 2 \\ 0 \leq x_k \leq 2 \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right\}。$$

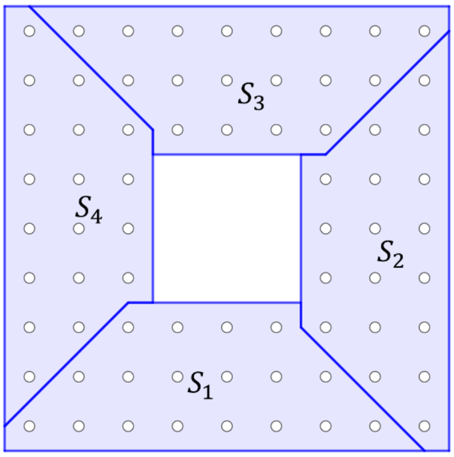


圖 17

並將P_1, P_2, P_3以$\left(\frac{3n+1}{2}, \frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，旋轉 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ 後，分別落在S_2, S_3, S_4三個點集合

中，並設旋轉π、落在S_3的三點$P_1'''(3n-1-x_1, 3n-1-y_1), P_2'''(3n-1-x_2, 3n-1-y_3)$, $P_3'''(3n-1-x_3, 3n-1-y_3)$。

為了證明全等三角形 3 頂點必定分別位於不同點集合時才存在最大面積，我們將四個全等三角形可能的形狀分為以下三種：

(1) 全等三角形 3 頂點落在同一點集合

此情形只會有一種作圖結果，即為△ $P_1P_2P_3$，其面積可由行列式求得：

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_2 & x_1-x_2 \\ y_3-y_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(x_3-x_2)(y_1-y_2)-(x_1-x_2)(y_3-y_2)]$$
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2)$$

(2) 全等三角形 3 頂點落在兩個點集合

因每種全等三角形皆有四個，為了避免相同的三角形重複計算，故設點集合S_1存在兩頂點，剩餘一頂點落於S_2, S_3, S_4其中之一，因只有一頂點旋轉，故將剩餘頂點稱為旋轉點，可得九種作圖結果。

① 旋轉點落於S_2或S_4時，共有六種作圖結果。

旋轉點位於S_2時，三頂點坐標為$P_a(x_a, y_a)$, $P_b(x_b, y_b)$, $P_c'(3n-1-y_c\ , x_c)$，其面積為

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_b-x_a & 3n-1-y_c-x_a \\ y_b-y_a & x_c-y_a \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(x_b-x_a)(x_c-y_a)-(3n-1-y_c-x_a)(y_b-y_a)|$$
$$= \frac{1}{2}|(3n-1)(y_a-y_b)-x_ax_c+x_bx_c-y_ay_c+y_by_c+x_ay_b-x_by_a|$$

旋轉點位於S_4時，三頂點坐標為$P_a(x_a, y_a)$, $P_b(x_b, y_b)$, $P_c'''(y_c, 3n-1-x_c)$，其面積為

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_c-x_b & x_a-x_b \\ 3n-1-x_c-y_b & y_a-y_b \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|\,(y_c-x_b)(y_a-y_b)-(3n-1-x_c-y_b)(x_a-x_b)|$$
$$= \frac{1}{2}|(3n-1)(x_b-x_a)+x_ax_c-x_bx_c+y_ay_c-y_by_c+x_ay_b-x_by_a|$$

② 旋轉點落於S_3時，共有三種作圖結果。

三頂點坐標分別為$P_a(x_a, y_a)$, $P_b(x_b, y_b)$, $P_c''(3n-1-x_c\ , 3n-1-y_c)$，其面積為

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_a + x_c - (3n-1) & x_b + x_c - (3n-1) \\ y_a + y_c - (3n-1) & y_b + y_c - (3n-1) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\{[x_a + x_c - (3n-1)][y_b + y_c - (3n-1)] - [x_b + x_c - (3n-1)][y_a + y_c - (3n-1)]\}$$
$$= \frac{1}{2}[(3\text{n}-1)(x_a - x_b - y_a + y_b) + x_a(y_b + y_c) - x_b(y_a + y_c) - x_c(y_a - y_b)]$$

③ 相同旋轉點 3 種三角形面積之比較

因相同旋轉點 3 種三角形的大小關係在三相異點P_1, P_2, P_3改變座標時會不同，故考慮在不同情況下 3 種三角形的大小關係。

下列討論將以P_3作為旋轉點，討論$\triangle P_1P_2P_3'$，$\triangle P_1P_2P_3''$，$\triangle P_1P_2P_3'''$的大小關係。

因$\triangle P_1P_2P_3'$，$\triangle P_1P_2P_3'''$兩三角形面積公式有絕對值，且兩者大小關係會因三相異點P_1, P_2, P_3改變座標時而有所不同，因此假設$\triangle P_1P_2P_3'$，$\triangle P_1P_2P_3'''$兩三角形面積公式中絕對值為正，且$\triangle P_1P_2P_3'''$面積大於$\triangle P_1P_2P_3'$面積，以縮小三相異點P_1 , P_2 , P_3的座標範圍。

$$\begin{cases} \triangle P_1P_2P_3'\text{面積} = \dfrac{1}{2}[(3\text{n}-1)(y_1 - y_2) - x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 + y_2y_3 + x_1y_2 - x_2y_1] \\ \triangle P_1P_2P_3'''\text{面積} = \dfrac{1}{2}[(3\text{n}-1)(x_2 - x_1) + x_1x_3 - x_2x_3 + y_1y_3 - y_2y_3 + x_1y_2 - x_2y_1] \\ \triangle P_1P_2P_3'''\text{面積大於} \triangle P_1P_2P_3'\text{面積} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 \ge \dfrac{(y_2 - y_1)(3\text{n}-1-y_3-x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\ (3\text{n}-1-x_3) \ge \dfrac{(y_2 - y_1)(y_3 - x_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \\ \dfrac{1}{2}[(3\text{n}-1)(x_2 - x_1 + y_2 - y_1) + 2x_3(x_1 - x_2) + 2y_3(y_1 - y_2)] \ge 0 \end{cases}$$

以$\triangle P_1P_2P_3''$減去$\triangle P_1P_2P_3'''$，由上述假設三條件可得下面不等式關係。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[(3\text{n}-1)(x_1 - x_2 - y_1 + y_2) + x_1(y_2 + y_3) - x_2(y_1 + y_3) - x_3(y_1 - y_2)] \\ &-\frac{1}{2}[(3\text{n}-1)(x_2 - x_1) + x_1x_3 - x_2x_3 + y_1y_3 - y_2y_3 + x_1y_2 - x_2y_1] \\ &= \frac{1}{2}[(3n-1)(y_1 - y_2) - x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 + y_2y_3 + x_1y_3 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2] \\ &\ge (-x_1y_2 - x_2y_1) + x_1y_3 - x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 \\ &= (x_2 - x_3)y_1 + (x_3 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_3 \end{aligned}$$

上式在$(y_1, y_2, y_3) = (0,0,0), (1,1,1), (2,2,2), (0,1,0), (0,2,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,2,0), (0,2,1)$, $(2,2,0), (0,2,2), (1,2,1), (2,2,1), (1,2,2)$共 14 種情況時大於等於 0，代表在上述 14 種情況時△

$P_1P_2P_3''$大於等於△ $P_1P_2P_3'''$恆成立，剩下的 13 種情況分別為上式小於 0 (11 種)與無法確定其正負(兩種)。

將剩下的 13 種情況代入△ $P_1P_2P_3''$減去△ $P_1P_2P_3'''$後，可以發現除了$(y_1,y_2,y_3)=(0,1,2)$外，其餘的情況皆大於 0，△ $P_1P_2P_3''$大於等於△ $P_1P_2P_3'''$恆成立。

接著我們討論$(y_1,y_2,y_3)=(0,1,2)$的情況，因$x_2-x_1>x_3-x_2$時上式可能為負，故設$2x_2>x_1+x_3$，並將$(y_1,y_2,y_3)=(0,1,2)$代入△ $P_1P_2P_3''$減去△ $P_1P_2P_3'''$。

$$\begin{aligned}&(3n-1)(0-1)-x_1x_3+x_2x_3-0\times2+1\times2+x_1\times2-x_2\times2-x_3\times0+x_3\times1\\=&-(3n-1)+x_3(x_2-x_1)+2-2(x_2-x_1)+x_3\\=&-(3n-1)+(x_3-2)(x_2-x_1)+x_3+2\end{aligned}$$

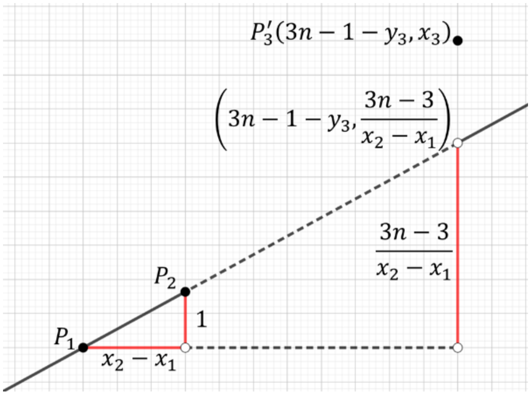


圖 18

從前述的條件我們可以推得圖 18 的相似關係，進一步得出：

$$-(3n-1)+(x_3-2)(x_2-x_1)+x_3+2\geq 2x_1-2x_2+x_3$$

由$2x_2-x_1-x_3>0$可知$x_2-x_1\geq2$，得出當$x_3\geq\frac{3n+1}{3}$時，△ $P_1P_2P_3''\geq$△ $P_1P_2P_3'''$恆成立，而當$x_3<\frac{3n+1}{3}$時，因上述不等式成立範圍改變，所以x_2-x_1可以表示如下：

$$x_2-x_1\geq\frac{3n-3}{x_3}-\frac{2x_1}{x_3}$$

求x_1最大值並將不等式右側以x_3表示：

$$x_1\leq\frac{x_3x_2-(3n-3)}{x_3-2}$$

不等式成立範圍中，$x_2=x_3-1$時有x_1最大值。

$$x_1\leq\frac{x_3(x_3-1)-(3n-3)}{x_3-2}=\frac{{x_3}^2-x_3-(3n-3)}{x_3-2}$$

當$x_3 < \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2}$時，$x_1$最大值為負，由以下公式解可知：

$$x_3{}^2 - x_3 - (3n-3) = 0, x_3 = \frac{1^2 \pm \sqrt{1+4(3n-3)}}{2}$$

因$x_3 < \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2}$時，不存在合理的$x_1$，所以$x_3 \geq \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2}$。

將x_1最大值代回$x_2 - x_1$可得

$$x_2 - x_1 \geq -\frac{2(x_3(x_3-1)-(3n-3))}{x_3(x_3-2)} + \frac{3n-3}{x_3}$$

將$x_2 - x_1$的最小值代入$\triangle P_1P_2P_3''$減去$\triangle P_1P_2P_3'''$。

$$\begin{aligned}
&-(3n-1) + (x_3-2)(x_2-x_1) + x_3 + 2 \\
&= -(3n-1) + (x_3-2)\left[-\frac{2\left(x_3(x_3-1)-(3n-3)\right)}{x_3(x_3-2)} + \frac{3n-3}{x_3}\right] + x_3 + 2 \\
&= -(3n-1) + \left[-\frac{2\left(x_3(x_3-1)-(3n-3)\right)-(x_3-2)(3n-3)}{x_3}\right] + x_3 + 2 \\
&= -(3n-1) - 2(x_3-1) + \frac{2(3n-3)+(x_3-2)(3n-3)}{x_3} + x_3 + 2 \\
&= -(3n-1) - 2(x_3-1) + (3n-3) + x_3 + 2 = -x_3 + 2
\end{aligned}$$

由上可得當$x_3 \leq 2$且$x_3 \geq \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2}$時，$\triangle P_1P_2P_3''$大於等於$\triangle P_1P_2P_3'''$恆成立，但因$n \geq 2$，所以$x_3 \leq 2$與$x_3 \geq \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2}$的交集為空集合，將上述統整為**[定理四]**。

定理四：假設$\triangle P_1P_2P_3'$,$\triangle P_1P_2P_3'''$兩三角形面積公式中絕對值為正，且$\triangle P_1P_2P_3'''$面積大於$\triangle P_1P_2P_3'$面積，即以下條件的情況下，

$$\begin{cases}
x_3 \geq \frac{(y_2-y_1)(3\mathrm{n}-1-y_3-x_1)}{x_2-x_1} + y_1 \\
(3\mathrm{n}-1-x_3) \geq \frac{(y_2-y_1)(y_3-x_1)}{x_2-x_1} + y_1 \\
\frac{1}{2}[(3\mathrm{n}-1)(x_2-x_1+y_2-y_1) + 2x_3(x_1-x_2) + 2y_3(y_1-y_2)] \geq 0
\end{cases}$$

$\triangle P_1P_2P_3''$與$\triangle P_1P_2P_3'''$大小關係可以表示如下：

$$\begin{cases}
\triangle P_1P_2P_3'' < \triangle P_1P_2P_3''', if(y_1,y_2,y_3) = (0,1,2) \wedge \frac{1+\sqrt{12n-11}}{2} \leq x_3 < \frac{3n+1}{3} \\
\triangle P_1P_2P_3'' \geq \triangle P_1P_2P_3''', else
\end{cases}$$

(3) 全等三角形3頂點落在三個不同點集合

依照前述**[定理三]**，當三角形 3 頂點落在三個不同點集時，最大三角形必為$\triangle P_1''P_2P_3'$，面積為

$$\frac{1}{2}[(3n-1)^2-(3n-1)(x_1+x_2+y_2+y_3)+x_1x_2+y_1y_2+x_2x_3+y_2y_3+x_1y_3-x_3y_1]$$

四、觀察$8n^3$格點體積最大可能總和之特徵並提出最大可能總和之猜想

將F改為平行六面體組成的集合，將$8n^3$格點題目敘述如下：

設n為一固定正整數，並令S為空間直角坐標系中，座標x,y,z均小於$2n$的格點集合，$S=\{(x,y,z)|0\leq x,y,z<2n\wedge x,y,z\in\mathbb{Z}\},|S|=8n^3$。假設$F$是由$n^3$個平行六面體組成的集合，使得它們的所有頂點皆在$S$中，而$S$中的每個點恰好是$F$中的一個平行六面體的頂點。確定所有$n^3$個平行六面體體積的最大可能總和。

針對$8n^3$格點原題，觀察後發現其規律，並寫出以下**[猜想二]**。

[猜想二]：$8n^3$格點體積最大可能總和為底面為最大面積和的形式，再乘上最大的高總和。

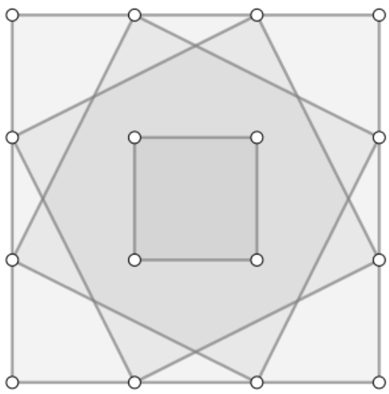


圖 19

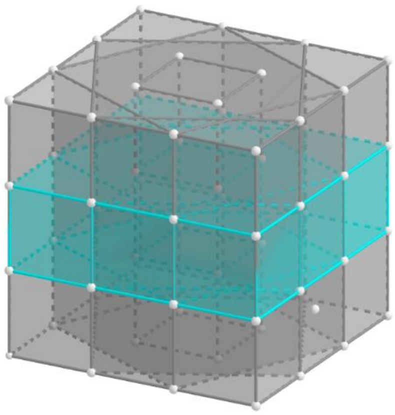


圖 20

圖 19、20 為$n=2$的作圖結果，左圖為底面形式，右圖為具有最大高總和的作圖結果。

五、探討$8n^3$格點最大可能總和猜想公式

(一) **[猜想二]**圖形特徵討論

觀察**[猜想二]**做出之圖形後，我們可以整理出以下特徵：

1. 作圖方法為先決定底面為最大面積和之形式，再由此底面做出最大的高總和，即可

完整做出最大可能體積之立體圖形。

2. 圖中所有平行六面體皆有兩相對面之法向量與其他平行六面體平行。

(二) **[猜想二]**圖形體積討論

因$8n^3$立體格點具對稱性，故可就平面$E: z = 0$來討論。

在此定義下列名詞：

V_1：設所有的平行六面體皆有兩面與平面E平行，則以V_1表示所有平行六面體之體積總和。

V_2：設所有的平行六面體皆至少有兩面垂直$\mathbb{R}^3$的單位行向量，則以V_2表示所有平行六面體之體積總和。

V_3：設至少有一個平行六面體，其六個面的法向量均非$\mathbb{R}^3$的單位行向量，則以V_3表示所有平行六面體之體積總和。

透過計算V_1之最大值來得出**[猜想二]**之最大體積總和。

因V_1中的平行六面體皆有兩面與平面E平行，故可將$z = 0, 1, \ldots, 2n-1$共$2n$個平面上，各$4n^2$個點，分成n^2個平行四邊形，再將這些平行四邊形與其餘平面上全等的平行四邊形組成平行六面體，可得

$$V_1 \leq (\text{最大的底面面積總和}) \times (\text{最大的高總和})$$

1. 最大底面積總和

由$4n^2$的格點原題的結論可知，當所有多邊形都是正方形，且皆以$\left(\frac{2n-1}{2}, \frac{2n-1}{2}\right)$為重心時，其面積和最大值為 $\frac{1}{3}n^2(2n-1)(2n+1)$。

而當所有多邊形皆為平行四邊形時，其最大值依然成立。

推論四：最大的底面積總和為$\frac{1}{3}n^2(2n-1)(2n+1)$。

2. 最大高總和

最大高的總和等價於有$2n$個間隔1單位的點排成一列且將其兩兩連線，長度總和之最大值為n^2以下使用數學歸納法證明。

(1) 當$n = 1$時，兩點間距離為$1 = 1^2$

(2) 設當$n = k$，$k \in \mathbb{N}$ 時命題成立，即長度總和之最大值為 k^2

當$n = k + 1$時，新增兩點分別填入原本$2k$個點的兩側，如圖 21。

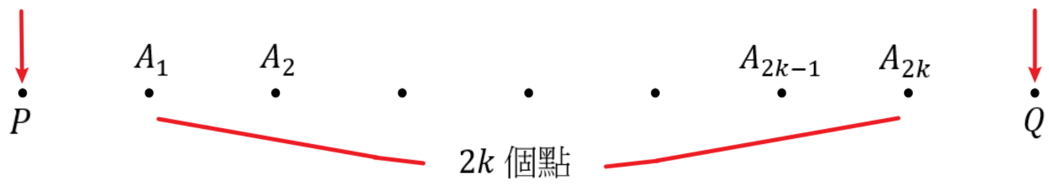


圖 21

此時連線有三種可能的變化：

第一種：新加入的兩點P, Q直接相連，長度總和多出$[2(k + 1) - 1] = 2k + 1$

第二種：其中任意兩個點之間的連線斷開，令此兩點之距離為x，左側的點連接P，右側的點連接Q，長度總和多出$-x + [2(k + 1) - 1 - x] = 2k + 1 - 2x$。

第三種：其中任意兩個點之間的連線斷開，令此兩點之距離為x，左側的點連接Q，右側的點連接P，長度總和多出$-x + [2(k + 1) - 1 + x] = 2k + 1$。

因第一、第三種長度總和均增加$(2k + 1)$，而第二種的長度總和增加$(2k + 1 - 2x)$，又$2k + 1 - 2x < 2k + 1$，故 $n = k + 1$時長度總和之最大值為$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$。

(3) 根據(1)、(2)，由數學歸納法可知：$\forall n \in \mathbb{N}$，命題均成立，故得證。

將上述寫為**[推論五]**。

推論五：最大的高總和為n^2。

由**[推論四]**、**[推論五]**可知：

$$
\begin{aligned}
V_1 \leq (\text{最大的底面積總和}) \times (\text{最大的高總和}) &= \frac{1}{3}n^2(2n - 1)(2n + 1) \times n^2 \\
&= \frac{1}{3}n^4(2n - 1)(2n + 1)
\end{aligned}
$$

將其統整為**[推論六]**：

推論六：$\forall n \in \mathbb{N}, V_1 \leq \frac{1}{3}n^4(2n - 1)(2n + 1)$。

六、 分析$8n^3$格點最大可能總和猜想特徵與證明

對**[猜想二]**提出以下證明步驟：

(一) 證明 $V_2 \leq V_1$

在平行六面體中取三個互不平行的面，令其法向量分別為 n_1, n_2, n_3，並設

$$T = \{(k,0,0),(0,k,0),(0,0,k), k \in \mathbb{R}\}$$

欲滿足V_2的條件，有以下三種可能的情況：

1. n_1, n_2, n_3只有一個屬於T，即n_1, n_2, n_3僅有一個為$(k,0,0) \vee (0,k,0) \vee (0,0,k)$。

2. n_1, n_2, n_3有二個屬於T，即n_1, n_2, n_3有二個分別為$(k,0,0)$及$(0,k,0)$，$(0,k,0)$及$(0,0,k)$，或$(0,0,k)$及$(k,0,0)$。

3. n_1, n_2, n_3 皆屬於T，即n_1, n_2, n_3為$(k,0,0),(0,k,0),(0,0,k)$的一種排列。

以圖 22 為例，藍色的平行六面體之體積為$\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times 3 = 15$，而橙色的平行六面體之體積為$2 \times 3 \times 3 = 18$，若將藍色轉換至橙色，體積會增大或維持不變，又因藍色滿足V_2的條件，橙色滿足V_1的條件，可以得知所有滿足V_2條件的平行六面體皆能藉由類似的變換，轉換至滿足V_1條件的平行六面體而不使用重複的格點，故轉換後的體積，會較轉換前的體積來得大，因此我們可以得到$V_2 \leq V_1$。

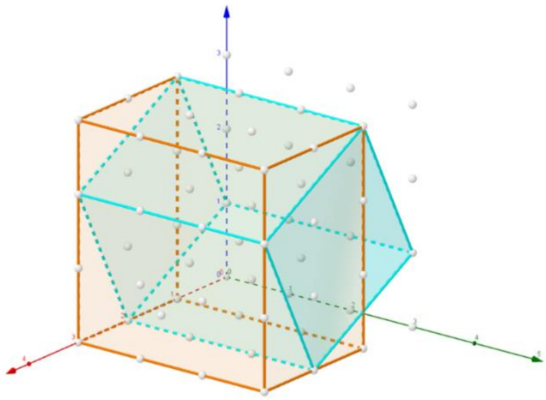


圖 22

(二) 證明 $V_3 \leq V_2$

以圖 23 為例，藍色的平行六面體之體積為3，而橙色的平行六面體之體積亦為3，若將藍色轉換至橙色，體積將會增大或維持不變，又因藍色滿足V_3的條件，橙色滿足V_2的條件，且容易得知所有滿足V_3條件的平行六面體皆能藉由類似的變換，轉換至滿足V_2條件的平行六面體而不使用重複格點，故轉換後的體積，會比轉換前的體積來得大。因此可得$V_3 \leq V_2$。

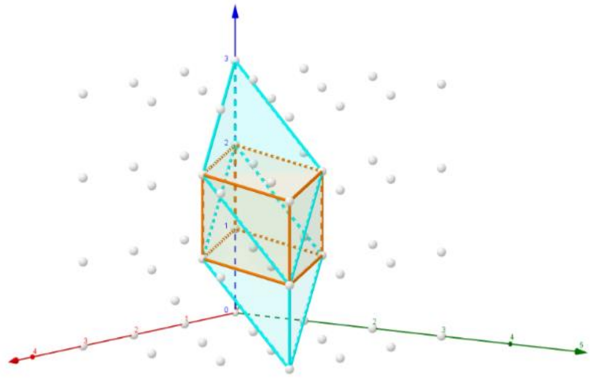


圖 23

綜上所述可以得出 $V_3 \leq V_2 \leq V_1$，又由**[推論六]**可知

$$V_1 \leq \frac{1}{3}n^4(2n-1)(2n+1)$$

將其統整為**[定理五]**。

定理五：$\forall n \in \mathbb{N}, 8n^3$格點體積的最大可能總和為 $\frac{1}{3}n^4(2n-1)(2n+1)$。

伍、 研究結果

一、$9n^2$平面格點第 1、2、3 圈面積最大可能總和

由**[推論一]**可知，$\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}, 9n^2$格點第 1、2、3 圈面積最大可能總和為

$$2(23n^3 - 69n^2 + 92n - 49)$$

二、$9n^2$ 平面格點面積最大可能總和

由**[推論二]**可知，$\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}, 9n^2$格點面積最大可能總和可表示如以下：

$$\begin{cases} \dfrac{23n^4 - 12n}{4}, if\ n\ is\ even. \\ \dfrac{23n^4 - 12n + 5}{4}, if\ n\ is\ odd. \end{cases}$$

三、$9n^2$平面格點上當$x_1 = x_2 = x_3$時，y_a, y_b, y_c的關係

由**[定理一]**可知，有三點 P_1, P_2, P_3，使得

$$P_1, P_2, P_3 \in \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x_k \le (3n-4), if\, y_k = 0 \\ 1 \le x_k \le (3n-3), if\, y_k = 1 \\ 2 \le x_k \le (3n-2), if\, y_k = 2 \\ 0 \le y_k \le 2 \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\},\ n \ge 2 \text{且} x_1 \le x_2 \le x_3，$$

以$\left(\frac{3n+1}{2}, \frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，將$P_1, P_2, P_3$分別旋轉$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$後，從旋轉 $\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}$三種中各取一點作為頂點，可作出六種三角形，設$\triangle P_a''P_bP_c'$為最大面積三角形，

當$x_1 = x_2 = x_3$時，則$(y_a, y_b, y_c) = \begin{cases} (1,0,2)\ ,\ if\ x > \frac{3n-1}{2} \\ (2,0,1)\ , if\ x \le \frac{3n-1}{2} \end{cases}$

四、$9n^2$平面格點上當$y_1 = y_2 = y_3$時，$x_a\ , x_b\ , x_c$ 的關係

由**[定理二]**可知，有三點 $P_1\ , P_2\ , P_3$，使得

$$P_1\ , P_2\ , P_3 \in \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x_k \le (3n-4), if\, y_k = 0 \\ 1 \le x_k \le (3n-3), if\, y_k = 1 \\ 2 \le x_k \le (3n-2), if\, y_k = 2 \\ 0 \le y_k \le 2 \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\},\ n \ge 2 \text{且} x_1 \le x_2 \le x_3，$$

以$\left(\frac{3n+1}{2}, \frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，將$P_1, P_2, P_3$分別旋轉$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$後，從旋轉$\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}$ 三種中各取一點作為頂點，可作出六種三角形，設$\triangle P_a''P_bP_c'$為最大面積三角形，當$y_1 = y_2 = y_3$時，則$x_a = x_1\ , x_b = x_2\ , x_c = x_3$

因此可以推得當$y_1 = y_2 = y_3$時，$\triangle P_1''P_2P_3'$有六種三角形中最大面積。

五、$9n^2$平面格點中9點選取三角形3頂點的最大面積

由**[定理三]**可知，有三點P_1, P_2, P_3，使得

$$P_1, P_2, P_3 \in \left\{ (x_k, y_k) \middle| \begin{array}{l} 0 \le x_k \le (3n-4), if\, y_k = 0 \\ 1 \le x_k \le (3n-3), if\, y_k = 1 \\ 2 \le x_k \le (3n-2), if\, y_k = 2 \\ 0 \le y_k \le 2 \\ x_k, y_k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\},\ n \ge 2 \text{且} x_1 \le x_2 \le x_3，$$

以$\left(\frac{3n+1}{2}, \frac{3n+1}{2}\right)$為旋轉中心，將$P_1, P_2, P_3$分別旋轉$\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$後，從旋轉$\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}$三種中各取一點作為頂點，且三頂點分別為$P_1\ , P_2\ , P_3$的旋轉點的六種三角形中，$\triangle P_1''P_2P_3'$必定存在最大面積。

六、$9n^2$平面格點中$\triangle P_1P_2P_3''$與$\triangle P_1P_2P_3'''$在$\triangle P_1P_2P_3''' > \triangle P_1P_2P_3'$條件下的大小關係

由**[定理四]**可知，假設$\triangle P_1P_2P_3', \triangle P_1P_2P_3'''$兩三角形面積公式中絕對值為正，且$\triangle P_1P_2P_3'''$面積大於$\triangle P_1P_2P_3'$面積，即以下條件

$$\begin{cases} x_3 \geq \dfrac{(y_2-y_1)(3\mathrm{n}-1-y_3-x_1)}{x_2-x_1}+y_1 \\ (3\mathrm{n}-1-x_3) \geq \dfrac{(y_2-y_1)(y_3-x_1)}{x_2-x_1}+y_1 \\ \dfrac{1}{2}[(3\mathrm{n}-1)(x_2-x_1+y_2-y_1)+2x_3(x_1-x_2)+2y_3(y_1-y_2)] \geq 0 \end{cases}$$

的情況下，$\triangle P_1P_2P_3''$與$\triangle P_1P_2P_3'''$大小關係可以表示如下：

$$\begin{cases} \triangle P_1P_2P_3'' < \triangle P_1P_2P_3''' \text{ , } if \ (y_1,y_2,y_3)=(0,1,2) \wedge \dfrac{1+\sqrt{12n-11}}{2} \leq x_3 < \dfrac{3n+1}{3} \\ \triangle P_1P_2P_3'' \geq \triangle P_1P_2P_3''' \text{ , } else \end{cases}$$

七、$8n^3$立體格點最大的底面積總和

由**[推論四]**可知，最大的底面積總和為$\frac{1}{3}n^2(2n-1)(2n+1)$。

八、$8n^3$立體格點最大的高總和

由**[推論五]**可知，最大的高總和為n^2。

九、$8n^3$立體格點的V_1最大值

由**[推論六]**可知，$\forall n \in \mathbb{N}, V_1 \leq \frac{1}{3}n^4(2n-1)(2n+1)$。

十、$8n^3$格點體積的最大可能總和

由**[定理五]**可知，$\forall n \in \mathbb{N}, 8n^3$格點體積的最大可能總和為 $\frac{1}{3}n^4(2n-1)(2n+1)$。

陸、 創見性及其未來應用

當維度為 2 時，我們針對三角形的最大覆蓋進行探討，發現其與四邊形有著密不可分的關係；維度為 3 時，我們則探討平行六面體的最大覆蓋，亦發現其與四邊形之間的巧妙關聯。素知行列式值在 n 維空間有獨特的意義，我們希望未來也能朝向這方面發展。

柒、 討論與結論

我們從 IMO Shortlist 2021 一道幾何題出發，將問題中的四邊形推廣到三角形與平行

六面體，平時利用 Geogebra 軟體不斷的試驗並計算的面積，猜想可能的面積和公式，過程中發現了 x , y 值相同時三相異點的關係，最終也找到了定理三，發現從 9 點取三角形 3 頂點的最大面積為三角形△ $P_1''P_2P_3'$，這解決四個全等三角形頂點位於不同範圍時有面積總和最大值的問題；而在平行六面體的方面，我們已經提出體積總和最大值猜想，未來能繼續完整證明出猜想二，以及期望向往更高維度發展。

捌、 參考文獻

一、IMO Shortlist 2021。取自 https://www.imo-official.org/problems/IMO2021SL.pdf

【評語】010038

給定 3nx3n 格子點，作者將其三個一組分成 3n^2 組，而後以各組頂點做三角形，試圖最大化這些三角形的面積和。作者也將問題推廣到三維的情況。證明手法精簡，問題分類清楚。成果豐碩。但關於某些設計是否取得最大值，數學的嚴謹性有待釐清。