

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號

010037

參展科別

數學

作品名稱

Wi-Fi收訊範圍—三角形覆蓋圓面積之探討

就讀學校

國立彰化高級中學

指導教師

龔詩尹

作者姓名

陳偉群

關鍵詞

覆蓋、最小面積和

作者簡介



我是陳偉群，來自彰化高中，興趣是學習、探索數學。目前就讀高三，未來希望在數學領域發展。此份研究「Wi-Fi 收訊範圍—三角形覆蓋圓面積之探討」在尋找利用多個圓覆蓋三角形時，圓面積總和的最小值。運用幾何和代數方法，歸納所有可能的最小覆蓋圓組合，並討論覆蓋圓連心線，圓面積和與三角形面積比例的關聯。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：*Wi-Fi* 收訊範圍—三角形覆蓋圓面積之探討

關鍵詞：覆蓋、最小面積和

編號：

(編號由國立臺灣科學教育館統一填列)

目錄

摘要.....	1
壹、研究動機.....	2
貳、研究目的.....	2
參、研究設備及器材.....	2
肆、研究過程或方法.....	2
一、文獻探討.....	2
二、名詞釋義.....	3
三、研究過程.....	3
(一) 利用 N 個不等圓覆蓋銳角和直角三角形.....	7
(二) 利用 N 個不等圓覆蓋鈍角三角形.....	19
伍、討論.....	27
一、當 N 遞增， $\min \sum^n r^2$ ($N=1,2,3$) 和上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值嚴格遞減。.....	27
二、當 $n \rightarrow \infty$ ，上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 的最小值和各個覆蓋圓半徑的極限。.....	27
三、上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 的最小值中的係數。.....	28
四、 $N=3$ 的最小覆蓋圓組。.....	29
五、各覆蓋圓之間的連心線.....	39
六、覆蓋圓總面積和的最小值與三角形面積的比值及其最小值.....	44
陸、研究結果.....	50
柒、結論.....	53
捌、未來展望.....	54
玖、參考資料及其他.....	54

摘要

本研究在探討「利用數個半徑不相等的圓，完全覆蓋三角形所需的圓面積總和之最小值」，其最小值以三角形的邊長、角度及外接圓半徑去作表示。

首先，我們討論利用 1、2、3 個圓去覆蓋三角形，並分銳角、直角、鈍角三角形做分類，有完整的結果。並且在銳角及直角三角形中，發現有相似的結論。

再者，用多個圓覆蓋時，我們以特殊樣式去作排列，歸納出最小值的規律，並連結「雙曲函數」與覆蓋圓面積和之間的關係。

最後，我們研究覆蓋圓面積和與三角形面積的比值及其最小值，並討論覆蓋圓圓心之連心線的相關性質。

Abstract

This study investigates the problem of determining the minimum total area of circles, required to completely cover a given triangle. The minimum total area is expressed in terms of the triangle's side lengths, angles, and circumradius.

Initially, we discuss the cases where 1, 2, and 3 circles are used to cover the triangle, classifying the triangles as acute, right, or obtuse. Comprehensive results are obtained for each classification, and similar conclusions are observed for acute and right triangles.

Furthermore, when covering with multiple circles, we use a specific covering pattern, and deduce a regularity for the minimum total area, connecting the relationship between the “hyperbolic function” and the total area of the covering circles.

Finally, we investigate the ratio between the total area of the covering circles and the triangle's area, determining its minimum value, and discuss the properties of the lines of centers of the covering circles.

壹、研究動機

「欲在一個三角形的城鎮中放入數個 *Wi-Fi* 分享器，分享器的分享範圍是以本身為中心的圓，並且費用與圓面積成正比，那麼要如何放置分享器和利用多大的分享範圍才能使費用最低呢？」為了解決這個問題，我們開始了我們的研究。

貳、研究目的

- 一、利用 1 個圓覆蓋銳角和直角三角形，求圓面積的最小值。
- 二、利用 2 個圓覆蓋銳角和直角三角形，求兩圓面積和的最小值。
- 三、利用 3 個圓覆蓋銳角和直角三角形，求三圓面積和的最小值。
- 四、利用 1 個圓覆蓋鈍角三角形，求圓面積的最小值。
- 五、利用 2 個圓覆蓋鈍角三角形，求兩圓面積和的最小值。
- 六、利用 3 個圓覆蓋鈍角三角形，求三圓面積和的最小值。
- 七、利用 N 個圓上下型排列覆蓋任意三角形，求總面積和的最小值。
- 八、最小覆蓋圓組中，尋找各覆蓋圓之間連心線的性質。
- 九、最小覆蓋圓組中，求覆蓋圓總面積和的最小值與三角形面積比值及其最小值。

參、研究設備及器材

紙、筆、平板、*GeoGebra*。

肆、研究過程或方法

一、文獻探討

林宜樺、李佳駿、唐婉馨與張博盛（2004）在【鋪天蓋地】中，有一部分討論到「利用數個半徑相等的圓覆蓋正多邊形」，其中大多是討論特殊情況並且以對稱的方式排列。劉宇昕與陳正昕（2022）在【「點」移默化—探討不同個數的圓覆蓋正方形所需最小半徑】中，討論了「利用數個半徑相等的圓覆蓋正方形」。這讓我們思考，若要利用「半徑相等的圓」去覆蓋三角形或多邊形，這樣的條件很難有良好的性質去限制圓的位置，對於多個圓的討論，半徑的大小是牽一髮而動全身，並且整體的討論更接近多變數的極值問題，因此我們決定轉而只研究「利用數個半徑不相等的圓去覆蓋三角形」。

何詩涵、董家瑋與楊沛錡（2018）在【蓋世”五”功】中，討論了「一個圓覆蓋三角形、四邊形、五邊形的半徑最小值」，與本研究中， $N = 1$ 的最小覆蓋圓組重疊，但文獻中沒有對於更多圓的情況作討論。

結合以上的文獻，我們決定對於「利用數個半徑不相等的圓完全覆蓋三角形」作討論。

二、名詞釋義

1. 覆蓋圓：下文中的圓皆為覆蓋圓，即為覆蓋三角形的圓。
2. （最小）覆蓋圓組：在一個三角形中，如果若干個覆蓋圓可以完全覆蓋這個三角形，我們稱這些覆蓋圓為覆蓋圓組，特別的，若覆蓋圓組的面積總和最小，則稱此覆蓋圓組為最小覆蓋圓組，其中的覆蓋圓稱為最小覆蓋圓。
3. 圓數 N 、 n ：覆蓋圓組中圓的個數，其中 N 、 n 為正整數。
4. $\sum^n r^2$ ：對於 N 個圓的覆蓋圓組中，各個覆蓋圓的半徑平方和。 $\min \sum^n r^2$ 表示 N 個圓的最小覆蓋圓組的半徑平方和，亦稱為最小半徑平方和。
5. R ：三角形的外接圓半徑。
6. L ：三角形的最長邊長。
7. $O_1, O_2, O_3 \dots$ ：在覆蓋圓組中的覆蓋圓，其半徑分別為 $r_1, r_2, r_3 \dots$ 。
8. 外接圓 C_k ：在上下型覆蓋圓中，被 $O_1, O_2, \dots, O_k$ 覆蓋的三角形的外接圓，稱為 C_k ，其半徑為 R_k ($k = 1, 2, \dots$)。
9. α, β, γ ：分別為三角形的三個對應內角角度 ($\angle A = \alpha, \dots$)。
10. a, b, c ：分別為三角形的三個對應邊長（頂點 A 對邊為 $a, \dots$)。
11. 有向角：以 $\angle BAC$ 表示直線 BA, CA 的有向夾角。即將 BA 以逆時針方向旋轉直到與 CA 重合的最小正角度。
12. 有向弧：研究中的弧均為有向的弧。弧 AB 表示由點 A 沿逆時針方向到點 B 的弧。
13. θ ：在雙曲函數中，如無特別說明，則 $\theta = \tanh^{-1}(\sin \alpha)$ 。

三、研究過程

要討論「利用數個半徑不相等的圓完全覆蓋三角形」，自然聯想到讓面積或最大半徑越小越好。而要讓最大圓的半徑最小其實就是利用數個半徑相等的圓覆蓋三角形的討論，而我們要研究的是圓面積和的最小值，也就是半徑平方和的最小值。

首先我們說明存在性和唯一性，對於覆蓋圓組，顯然具有存在性（只要半徑足夠大），而最小覆蓋圓組因為有三角形面積的下界，所以也是存在的，雖然不一定具有唯一性，但也不影響總面積最小值是唯一的。接下來，我們先處理最基礎的情況：

1. $N = 1$ ，利用 1 個圓覆蓋任意三角形

$$\text{定理 1. } \min \sum^1 r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角或直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}。$$

Proof. 對於銳角和直角三角形，其外接圓可以覆蓋三角形。令銳角和直角三角形外接圓為 O ，最小覆蓋圓為 O_I ，如圖 1-1。假設 $r_I < R$ ，則圓 O 與圓 O_I 的交點的連線長 $\leq 2r_I < 2R$ ， $\Rightarrow$ 圓 O 被圓 O_I 覆蓋的弧的角度 $< \pi$ （右圖紅色弧），但三角形為銳角或直角三角形，其三頂點不同時落在不含端點的半圓中，矛盾。故三頂點不可能同時落在圓 O_I 內或圓 O_I 上，故 $r_I \geq R$ 。

對於鈍角三角形，令最長邊為 L ，以最長邊為直徑作一圓 C （此時圓即為最小），因圓 C 可以覆蓋整個三角形，故 $O_I = C$ 。

$$\text{所以，} \min \sum^1 r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}。 \quad \square$$

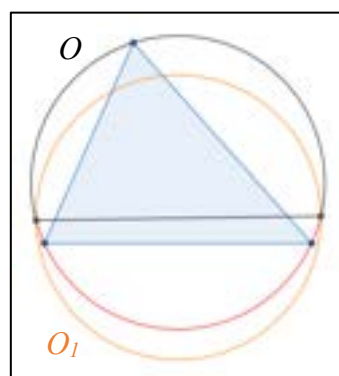


圖 1-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

2. 最小覆蓋圓組的必要條件

當 $N > 1$ ，我們不再能輕易看出覆蓋圓的位置和大小，所以我們想找出滿足圓為最小覆蓋圓的必要條件。首先我們發現最小覆蓋圓組中，覆蓋圓與頂點和邊的交點有以下關係：

引理 1. 在最小覆蓋圓組中，若 $\angle A$ 為銳角或直角，則 A 在最小覆蓋圓組的某一個覆蓋圓上。

Proof. 我們先說明下面這個命題：對相交於兩點的兩圓，若交點連線的一側，圓 O_I 覆蓋另一圓 O_I' ，則在連線另一側，圓 O_I' 覆蓋圓 O_I 。從右圖 2-1 中可以清楚地看出來。

接下來我們開始證明引理。首先說明存在性：

假設存在一個最小覆蓋圓組，其 A 點不在任一覆蓋圓上，因為此覆蓋圓組覆蓋整個三角形，故存在一個最小覆蓋圓 O_I 覆蓋 A 點。接下來有兩種情況：

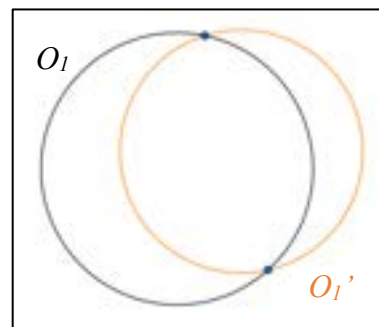


圖 2-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

(1) 圓 O_I 與 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 有交點（包含頂點 B 在圓 O_I 上）

如右圖 2-2， O_I 為最小覆蓋圓，點 X 為弧 DE 上一點，因為 $\angle A$ 為銳角或直角，故 $\angle EXD$ 為銳角。將點 X 向 $\overline{DE}$ 靠近適當距離形成點 X' ，使得 $\triangle X'DE$ 的外接圓 $O_{I'}$ 仍覆蓋 $\triangle ADE$ ，因為點 X' 在圓 O_I 內，由上頁說明，圓 $O_{I'}$ 覆蓋了圓 O_I 覆蓋 $\triangle ABC$ 的區域。

又 $\angle DXE < \angle DX'E < \angle DAE \leq 90^\circ$

$$\Rightarrow R_{O_I} = \frac{\overline{DE}}{2\sin\angle EXD} > \frac{\overline{DE}}{2\sin\angle EX'D} = R_{O_{I'}}, \text{ 故圓 } O_I \text{ 不為最小覆蓋圓。}$$

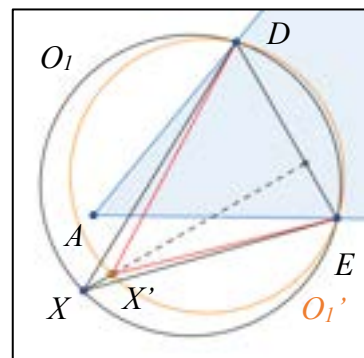


圖 2-2 來源：GeoGebra
作者自行繪製

(2) 圓 O_I 與 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 有交點

如圖 2-3， O_I 為最小覆蓋圓。作 $\overline{AB}$ 的延長線交圓 O_I 於 H ，點 Y 為弧 GH 上一點，因為 $\angle HAG$ 為銳角或直角，故 $\angle HYG$ 為銳角。將點 Y 向 $\overline{GH}$ 靠近適當距離形成點 Y' ，使得 $\triangle Y'GH$ 的外接圓 $O_{I'}$ 仍覆蓋四邊形 $AGFC$ ，因為點 Y' 在圓 O_I 內，由上頁說明，圓 $O_{I'}$ 覆蓋了圓 O_I 覆蓋 $\triangle ABC$ 的區域。又 $\angle HYG < \angle HY'G \leq \angle HAG \leq 90^\circ$

$$\Rightarrow R_{O_I} = \frac{\overline{GH}}{2\sin\angle HYG} > \frac{\overline{GH}}{2\sin\angle HY'G} = R_{O_{I'}}, \text{ 故圓 } O_I \text{ 不為最小覆蓋圓。}$$

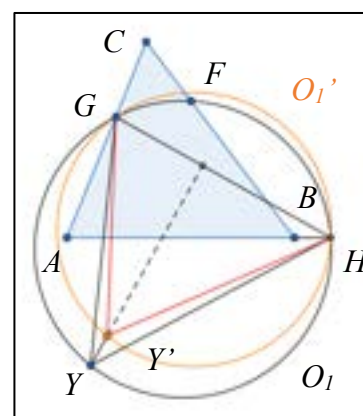


圖 2-3 來源：GeoGebra
作者自行繪製

由(1)、(2)，我們證明了對於任一頂點，存在覆蓋圓使得三角形的頂點在此圓上。

接下來證明唯一性：

若有兩圓同時覆蓋 A 點，令為 O_I 、 O_2 ，其符號如圖 2-4 所示。

作 $\triangle MNQ$ 的 $N=I$ 最小覆蓋圓 $O_{I'}$ ，因為圓 $O_{I'}$ 覆蓋了圓 O_I 實際覆蓋三角形的區域，所以我們只要說明 $R_{O_I} > R_{O_{I'}}$ 。

因為 $\pi > \text{弧 } NP \geq \text{弧 } NQ$ ，故 $\overline{PN} \geq \overline{QN}$ 。若 $\angle NMQ$ 為銳角，

$$\text{則 } \angle NAQ < \angle NMQ, R_{O_I} = \frac{\overline{PN}}{2\sin\angle A} > \frac{\overline{QN}}{2\sin\angle NMQ} \geq R_{O_{I'}}.$$

$$\text{若 } \angle NMQ \text{ 為鈍角或直角，則 } R_{O_I} = \frac{\overline{PN}}{2\sin\angle A} > \frac{\overline{QN}}{2} = R_{O_{I'}}, \text{ 故圓 } O_I \text{ 不為最小覆蓋圓。}$$

由此，我們證明了對於銳角和直角三角形的最小覆蓋圓組中，都存在唯一的覆蓋圓，使得三角形的一個頂點在此覆蓋圓上。 □

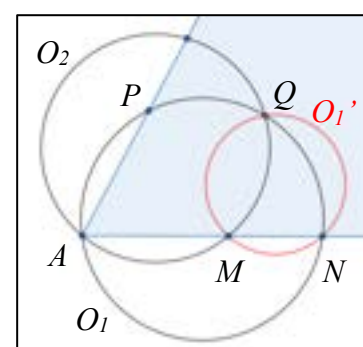


圖 2-4 來源：GeoGebra
作者自行繪製

引理2. 若圓 O 為最小覆蓋圓組中的某覆蓋圓，則圓 O 與邊的交點，必有另一覆蓋圓通過。

Proof. 利用反證法，假設有一最小覆蓋圓組，其中兩圓 O_1 、 O_2 及三角形一邊相交情形如下

圖 2-5，圓 O_1 、 O_2 交點不在邊 $\overline{EH}$ 上。不失一般性，令 $\angle GFP \geq \angle PGF$ ，作一圓 O_2' 通過點 P 、 H ，交 $\overline{EH}$ 於 $\overline{FG}$ 中，令交點為 X 。因為圓 O_1 和圓 O_2' 覆蓋了圓 O_1 、 O_2 覆蓋的區域，

所以接下來我們只要說明 $r_2' < r_2$ 。 $r_2' = \frac{\overline{PH}}{2\sin\angle PXH}$ ， $r_2 = \frac{\overline{PH}}{2\sin\angle PGH}$ ，

由 $\angle GFP \geq \angle PGF \Rightarrow \angle PGF$ 為銳角 $\Rightarrow \angle HPG$ 為鈍角，取適當的 X 使 $\angle HXP$ 也為鈍角或直角。

$$\therefore \angle HGP > \angle GXP \geq 90^\circ$$

$$\therefore r_2' = \frac{\overline{PH}}{\sin\angle PXH} < \frac{\overline{PH}}{\sin\angle PGH} = r_2$$

故圓 O_2 不為最小覆蓋圓 $\Rightarrow$ 圓 O_1 、 O_2 交於 $\overline{EH}$ 上。 $\square$

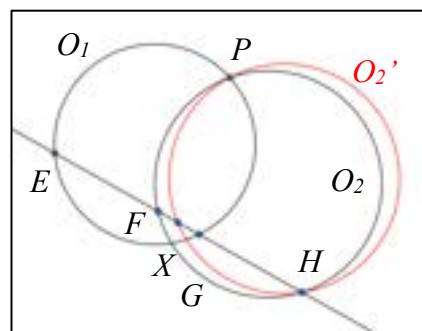


圖 2-5 來源：GeoGebra
作者自行繪製

由引理 1 和定理 1，我們發現銳角和直角三角形與鈍角三角形有不同的性質。

但是對於「直角三角形」，因為直角三角形為「銳角三角形及鈍角三角形的交界」，某種意義上，可說是兩者取極限；若是三者獨立證明，結果可以用來驗證其性質及結論的正確性。接下來的研究內容，直角三角形的處理手法與銳角三角形的方法相似，並可得到相同的結論，於是在下面的研究中，我們分開討論（一）銳角和直角三角形和（二）鈍角三角形：

(一) 利用 N 個不等圓覆蓋銳角和直角三角形

在研究目的中，我們要求出 $N = 2, 3$ 的最小覆蓋圓組。由引理 1、2，我們將 $N = 2, 3$ 可能的最小覆蓋圓組分成下面幾類：

1. $N = 2$

此時有一圓覆蓋兩個頂點，不失一般性令覆蓋 $B、C$ 兩點的圓為 O_2 ，覆蓋 A 點的圓為 O_1 。由引理 1， $B、C$ 在圓 O_2 上， A 在圓 O_1 上，且由引理 2， O_1 與 O_2 的交點在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，令其分別為點 $E、D$ ，如下頁圖 3-1。

2. $N = 3$

可以分成兩種情況：(1) 三個覆蓋圓各蓋住一個頂點 (2) 有一圓蓋住兩個頂點。

在情況 1 中，令覆蓋 A 點的圓為 O_1 、覆蓋 B 點的圓為 O_2 ，覆蓋 C 點的圓為 O_3 ，由引理 2，

(i) 若 $O_1、O_2$ 有交點，則 $O_1、O_2$ 與邊 $\overline{AB}$ 交於一點。(重心型，如左一圖 4-1，)

(ii) 若 $O_1、O_2$ 無交點，則 $O_1、O_3$ 與邊 $\overline{AB}$ 交於一點，

$O_2、O_3$ 與邊 $\overline{AB}$ 交於一點。(四點型，如左二圖 4-2)。

在情況 2 中，令覆蓋 $B、C$ 兩點的圓為 O_3 ，由引理 1， $B、C$ 在圓 O_3 上。令圓 O_3 分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 $E、D$ ，由引理 1, 2， $A、D、E$ 皆在某個覆蓋圓上，此時同樣有兩種情況：

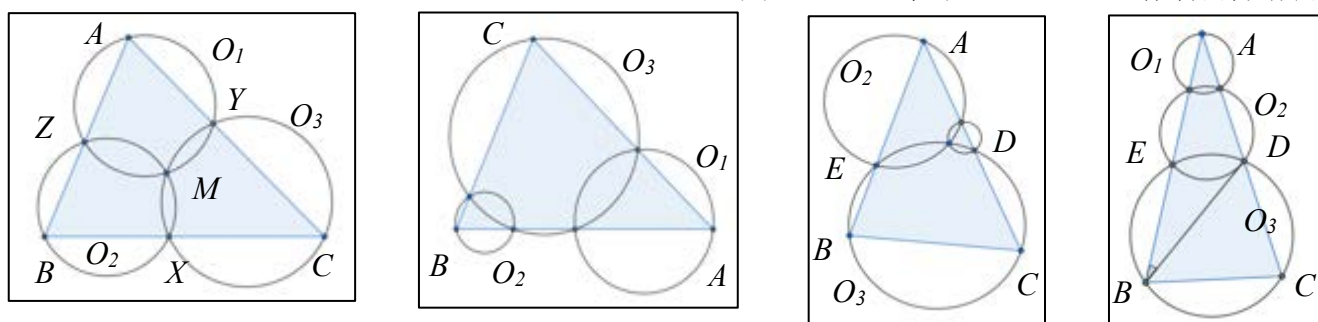
(iii) 不失一般性， $A、E$ 在 O_2 上。(兩點型，如右二圖 4-3)，

(iv) $D、E$ 在 O_2 上。(上下型，如右一圖 4-4)。

而我們如何確定只有上述幾種情況呢？我們考慮覆蓋圓之間的相交情形作分類。以 $N = 3$ 情況 1 的 i 為例，我們先作 O_2 交 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 於 $X、Z$ 上，若 $O_2、O_3$ 有交點，由引理 2，有一交點會在 $\overline{BC}$ 上，即為 X 。令 O_3 交 $\overline{AC}$ 於 Y ，交 O_2 於 M 。由密克定理和引理 2， O_1 會通過 $A、Z、M、Y$ ，即為圖 4-1。

由此，經過幾次「二分法」，我們便從眾多覆蓋圓組中，找出了可能的「候選覆蓋圓」，並且因為引理 1, 2 為必要條件，所以最小覆蓋圓組必在這些「候選覆蓋圓」中。

圖 4-1~4-4 來源：GeoGebra 作者自行繪製



3. $N = 2$ ，對於銳角和直角三角形，利用 2 個不等圓覆蓋

定理 2. 銳角和直角三角形 ABC 的 $\min \sum r^2 = R^2 \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{2}$ 。

Proof. 符號如圖 3-1 所示。令 $\angle DBA = x_2$ 、 $\angle A = \alpha$ ，由圓內接四邊形 $BCDE$ ，

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

$$\sum r^2 = r_1^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2x_2} \times r_1^2 \quad (\overline{DE} = 2r_1 \cdot \sin\alpha = 2r_2 \cdot \sin x_2)$$

$$= \left(R \cdot \frac{\sin x_2}{\sin(\pi - \alpha - x_2)} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2x_2} \right)$$

$$(\text{由} \triangle AEC \text{ 的正弦定理及} \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ 可知 } \frac{r_1}{R} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\sin x_2}{\sin(\pi - \alpha - x_2)})$$

$$= R^2 \cdot \frac{\sin^2x_2}{\sin^2(\alpha+x_2)} \cdot \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x_2}{\sin^2x_2} = R^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x_2}{\sin^2(\alpha+x_2)}。$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x}{\sin^2(\alpha+x)},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin^2(\alpha+x) - (\sin^2\alpha + \sin^2x) \cdot 2\sin(\alpha+x) \cdot \cos(\alpha+x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x \cdot \sin(\alpha+x) = (\sin^2\alpha + \sin^2x) \cdot \cos(\alpha+x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin\alpha \cdot \cos x + \cos\alpha \cdot \sin x) = (\sin^2\alpha + \sin^2x)(\cos\alpha \cdot \cos x - \sin\alpha \cdot \sin x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \cos^2x \cdot \sin\alpha + \sin^2x \cdot \cos x \cdot \cos\alpha = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos x - \sin^3\alpha \cdot \sin x + \cos\alpha \cdot \sin^2x \cdot \cos x - \sin\alpha \cdot \sin^3x$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \sin\alpha(\cos^2x + \sin^2x) = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos x - \sin^3\alpha \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \sin\alpha(1 + \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin x_2 = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}}, \cos x_2 = \frac{1 + \sin^2\alpha}{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}}$$

將上式代入 $f''(x)$ ，檢驗得到此時 $f''(x_2) = 2 + 2\sin^2\alpha + \frac{\cos^4\alpha}{4\sin^2\alpha} > 0$ ，

$$f(x) \text{ 有最小值 } f(x_2)。 \text{ 代入 } \sum r^2 = R^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x_2}{(\sin\alpha \cdot \cos x_2 + \cos\alpha \cdot \sin x_2)^2}$$

$$\geq R^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha \cdot \frac{(1 + \sin^2\alpha)^2}{1 + 3\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha \cdot \frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha} + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{(1 + \sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}}$$

$$= R^2 \cdot \frac{\sin^2\alpha (1 + 3\sin^2\alpha) + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha \cdot (1 + \sin^2\alpha)^2 + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot (1 + \sin^2\alpha) \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

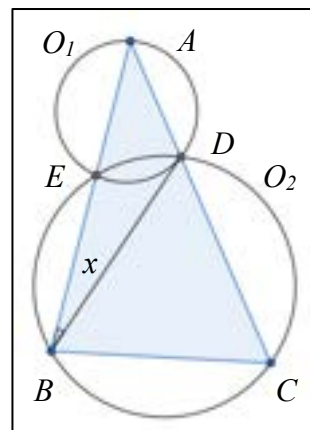


圖 3-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

$$\begin{aligned}
&= R^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cdot [\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 1 + 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha]}{\sin^2 \alpha \cdot [1 + 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2(1 + \sin^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha]} \\
&= R^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 1 + \sin^2 \alpha + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{1 + 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha)} \\
&= R^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + 1 + \sin^2 \alpha + 1}{1 + 2 + 1^2} = R^2 \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2}
\end{aligned}$$

所以 $\sum^2 r^2 \geq R^2 \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2}$ 。不失一般性，令 $\angle A$ 為最小角，此時 $\min \sum^2 r^2 = R^2 \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2}$ 。□

4. $N = 3$ ，對於銳角和直角三角形，利用 3 個不等圓覆蓋

討論 1. 銳角和直角三角形 ABC 的 $\min \sum^3 r^2$ 。

情況 1.(i) (重心型)

如下圖 4-1。由引理 2， O_1 與 O_2 、 O_3 分別交於 Z 、 Y ，由密克定理， A 、 Z 、 M 、 Y 四點共圓 O_1 。在 $\triangle ABC$ 中，對於「任意的」 M 點，

$$4 \sum^3 r^2 = \frac{\overline{AM}^2}{\sin^2 \angle AYM} + \frac{\overline{BM}^2}{\sin^2 \angle BZM} + \frac{\overline{CM}^2}{\sin^2 \angle CXM} = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2}{\sin^2 \angle AYM} \geq \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$$

(由共圓， $\angle AYM = \angle BZM = \angle CXM$)

等號成立在 $\sin \angle AYM = \sin \angle BZM = \sin \angle CXM = 1$ 時 $\Rightarrow \angle AYM = \angle BZM = \angle CXM = 90^\circ$ 。

又 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2$ 的最小值發生在 M 為重心時 (參考文獻一)，

$$\begin{aligned}
\text{故 } \sum^3 r^2 &\geq \frac{\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2}{4} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} \times (\text{三中線平方和}) \\
&= \frac{1}{18} (a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} + b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + c^2 + a^2 - \frac{b^2}{2}) = \frac{1}{12} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{R^2}{3} \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)。
\end{aligned}$$

因為此時 M 點在重心的位置，我們將此情況稱為「重心型」。

故重心型 $\sum^3 r^2$ 的最小值為 $\frac{R^2}{3} \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$ 。

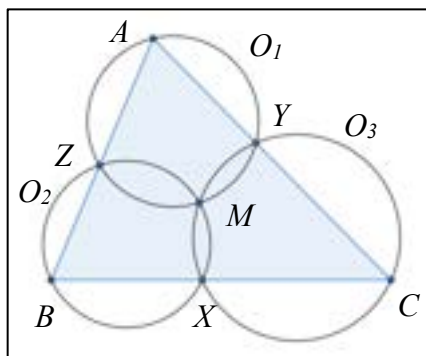


圖 4-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

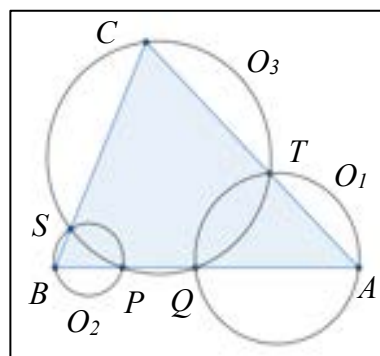


圖 4-2 來源：GeoGebra
作者自行繪製

(ii) (四點型) 如上頁圖 4-2。由引理 2， O_3 交 O_2 於 P 、 S 、交 O_1 於 Q 、 T ，對於這類情況 (一覆蓋圓與三邊有四個交點)，我們稱為「四點型」。 $\beta' = \angle CBA$ 、 $\alpha = \angle CAB$ 。

先假設 $R = I$ ，利用座標化，以 C 在 $\overline{AB}$ 上的垂足為原點， BA 方向為 x 軸正向，令三點座標為 $C(0, 2\sin\alpha\sin\beta')$ 、 $B(2\sin\alpha\cos\beta', 0)$ 、 $A(2\cos\alpha\sin\beta', 0)$ ，

令圓 O_1 的半徑為 r_1 ，圓心在 (p, q) ，因為點 A 在圓 O_1 上，我們有 $p^2 + (2\sin\alpha\sin\beta' - q)^2 = r_1^2$ 。

以 $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r_1^2 = p^2 + (2\sin\alpha\sin\beta' - q)^2$ 聯立 $y=0$ 、 $y = -x \cdot \tan\beta' + 2\sin\alpha\sin\beta'$ 和 $y = -x \cdot \tan\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta'$ ，我們得到

$$P(p - \sqrt{p^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta' - 4q \cdot \sin\alpha\sin\beta'}, 0)、Q(p + \sqrt{p^2 + 4\sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta' - 4q \cdot \sin\alpha\sin\beta'}, 0)、$$

$$T(2p \cdot \cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha \cos\alpha \sin\beta' - 2q \cdot \sin\alpha \cos\alpha, -2p \cdot \sin\alpha \cos\alpha - 4\sin^3\alpha \sin\beta' + 2\sin\alpha \sin\beta' + 2q \cdot \sin^2\alpha)、$$

$$S(2p \cdot \cos^2\beta' + 4\sin^2\beta' \cos\beta' \sin\alpha - 2q \cdot \sin\beta' \cos\beta', -2p \cdot \sin\beta' \cos\beta' - 4\sin^3\beta' \sin\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta' + 2q \cdot \sin^2\beta')。$$

注意到上式中的根號中 q 的次數是 1，我們可以令 $p^2 + 4\sin^2\beta' \cdot \sin^2\alpha - 4q \cdot \sin\beta' \cdot \sin\alpha = x^2$ ，

$$\text{此時 } q = \frac{p^2 + 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}, \text{ 則 } \sum r^2 = r_1^2 + \frac{\overline{PS}^2}{4\sin^2\angle B} + \frac{\overline{QT}^2}{4\sin^2\angle C}$$

$$= p^2 + (2\sin\alpha\sin\beta' - q)^2 + \cot^2\alpha \cdot (p \cdot \cos\alpha + 2\sin^2\alpha\sin\beta' - q \cdot \sin\alpha)^2$$

$$+ \cot^2\beta' \cdot (p \cdot \cos\beta' + 2\sin^2\beta' \sin\alpha - q \cdot \sin\beta')^2 - \cot\beta' \cdot (p \cdot \cot\beta' + 2\sin\beta' \sin\alpha - q)(p - x) -$$

$$\cot\alpha \cdot (p \cdot \cot\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta' - q)(p + x) + \frac{(p-x)^2}{4\sin^2\beta'} + \frac{(p+x)^2}{4\sin^2\alpha}$$

$$+ (-p \cdot \cos\beta' - 2\sin^2\beta' \sin\alpha + \sin\alpha + q \cdot \sin\beta')^2 + (-p \cdot \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\sin\beta' + \sin\beta' + q \cdot \sin\alpha)^2$$

$$= p^2 + 3(2\sin\alpha \sin\beta' - q)^2 + p \cdot \cot\alpha \cos^2\alpha (2\sin\alpha \sin\beta' - q) + p \cdot \cot\beta' \cos^2\beta' (2\sin\alpha \sin\beta' - q)$$

$$- px \cdot \cot^2\alpha + p \cdot \sin\alpha \cos\alpha (2\sin\alpha \sin\beta' - q) + px \cdot \cot^2\beta' + p \cdot \sin\beta' \cos\beta' (2\sin\beta' \sin\alpha - q)$$

$$- x \cdot \cot\alpha (2\sin\alpha \sin\beta' - q) + x \cdot \cot\beta' (2 \sin\alpha \sin\beta' - q) - 4\sin\alpha \sin\beta' (2\sin\alpha \sin\beta' - q) + \frac{(p+x)^2}{4\sin^2\alpha}$$

$$+ \frac{(p-x)^2}{4\sin^2\beta'} - 2p \cdot \sin(\alpha + \beta') + \sin^2\alpha + \sin^2\beta'$$

(將上式的 q 改寫成 $\frac{p^2 + 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}$)

$$= p^2 + 3\left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right)^2 - p \cdot \cot\alpha \cdot \cos^2\alpha \left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right)$$

$$- p \cdot \cot\beta' \cos^2\beta' \left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right) - px \cdot \cot^2\alpha - p \cdot \sin\alpha \cos\alpha \left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right)$$

$$+ px \cdot \cot^2\beta' - p \cdot \sin\beta' \cos\beta' \left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right) + x \cdot \cot\alpha \left(\frac{p^2 - 4\sin^2\alpha \sin^2\beta' - x^2}{4\sin\alpha\sin\beta'}\right)$$

$$\begin{aligned}
& -x \cdot \cot \beta' \left(\frac{p^2 - 4\sin^2 \alpha \sin^2 \beta' - x^2}{4\sin \alpha \sin \beta'} \right) + 4\sin \alpha \sin \beta' \left(\frac{p^2 - 4\sin^2 \alpha \sin^2 \beta' - x^2}{4\sin \alpha \sin \beta'} \right) \\
& + \frac{(p+x)^2}{4\sin^2 \alpha} + \frac{(p-x)^2}{4\sin^2 \beta'} + 2p \cdot \sin(\alpha + \beta') + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta' \\
& = \frac{3(p^2 - x^2)^2}{16\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} - (p \cdot (\cot \alpha + \cot \beta') - x \cdot (\cot \alpha - \cot \beta')) \left(\frac{p^2 - x^2}{4\sin \alpha \sin \beta'} \right) \\
& + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2 \alpha} + \frac{1}{4\sin^2 \beta'} \right) - \frac{px}{2} \cdot (\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta') - p \cdot \sin(\alpha + \beta') + x \cdot \sin(\alpha - \beta') + \sin^2 \alpha + \\
& \sin^2 \beta' - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta' \\
& = \frac{3(p^2 - x^2)^2}{16\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} - (p \cdot \sin(\alpha + \beta') + x \cdot \sin(\alpha - \beta')) \cdot \frac{p^2 - x^2}{4\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2 \alpha} + \right. \\
& \left. \frac{1}{4\sin^2 \beta'} \right) + \frac{px}{2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} \cdot \sin(\alpha - \beta') \sin(\alpha + \beta') - p \cdot \sin(\alpha + \beta') + x \cdot \sin(\alpha - \beta') + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta' - \\
& \sin^2 \alpha \sin^2 \beta'
\end{aligned}$$

而在前面假設中，為了計算的方便，我們令 $R = 1$ 。這裡我們將其一般化，令

$$\begin{aligned}
\Sigma^3 r^2 &= R^2 \cdot s(x, p) = \left[\frac{3(p^2 - x^2)^2}{16\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} - (p \cdot \sin(\alpha + \beta') + x \cdot \sin(\alpha - \beta')) \cdot \frac{p^2 - x^2}{4\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \right. \right. \\
& \left. \frac{1}{4\sin^2 \alpha} + \frac{1}{4\sin^2 \beta'} \right) + \frac{px}{2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta'} \cdot \sin(\alpha - \beta') \sin(\alpha + \beta') - p \cdot \sin(\alpha + \beta') + x \cdot \sin(\alpha - \beta') + \sin^2 \alpha + \\
& \sin^2 \beta' - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta' \Big] \cdot R^2 \\
&= \left[\frac{3(p^2 - x^2)^2}{16\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - (p \cdot \sin(\beta - \alpha) - x \cdot \sin(\alpha + \beta)) \cdot \frac{p^2 - x^2}{4\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2 \alpha} + \frac{1}{4\sin^2 \beta} \right) - \right. \\
& \left. \frac{px}{2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha) - p \cdot \sin(\beta - \alpha) - x \cdot \sin(\alpha + \beta) + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \right] \cdot R^2 \\
& \quad (\text{令 } \beta = \pi - \beta' = \angle B)
\end{aligned}$$

上式是一個以 x 、 p 為變數的二元四次多項式，係數由 α , β , R 組成，我們要求函數 $s(x, p)$ 的最小值。但礙於上式為二元四次多項式，計算上十分困難，難以寫出 $s(x, p)$ 的「解析解」，只能求出特殊情況下的解，這個部分我們放在（伍）討論當中。

情況 2. (iii) (兩點型)

如下圖 4-3。此時 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，由引理 2，圓 O_I 會通過 D 、 Y 兩點，我們接下來說明圓 O_I 通過點 X 。由圓內接四邊形 $AEXY$ 和圓內接五邊形 $BEXDC$ ，我們得到 $\angle XYD = \angle XYA = \angle XEA = \angle XEB = \angle XCB$ 和 $\angle YDX = \angle CDX = \angle CBX$ 。故 $\triangle XYD \sim \triangle XCB$ (AA 相似)。

因為 $\angle BXC$ 為銳角 (若 $\angle BXC$ 為鈍角，則以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓覆蓋了 O_3 覆蓋三角形的區域且半徑 $< r_3$)，所以 $\angle DXY$ 亦為銳角，則因為圓 O_I 為最小覆蓋圓，故會通過點 X 。對於這類情況 (一覆蓋圓與三邊只有兩個交點)，我們稱為「兩點型」。

令 $\overline{DY} = l$ ， $\angle ABD = x$ ，此時 $\angle DXY = \angle BXC = \alpha + x$

$$\begin{aligned} \sum^3 r^2 &= \frac{4R^2 \sin^2 \alpha}{4 \sin^2(\alpha+x)} + \frac{l^2}{4 \sin^2(\alpha+x)} + \frac{l^2 + 4R^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - 2l \cdot 2R \sin \alpha \cdot \frac{\sin x}{\sin(\alpha+x)} \cos \beta}{4 \sin^2 \alpha} \\ &= \left(\frac{l}{4 \sin^2(\alpha+x)} + \frac{l}{4 \sin^2 \alpha} \right) \cdot \left(1 - 2R \cdot \frac{\sin x \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha+x)}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)} \right)^2 + R^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - R^2 \cdot \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)} \end{aligned}$$

$$\geq R^2 \cdot \left[\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)} \right], \text{ 令 } f(x) = \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)},$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{-\sin^2 \alpha \cdot 2 \sin(\alpha+x) \cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} + \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x \cdot 2 \sin(\alpha+x) \cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} \\ &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 \beta \cdot 2 \sin(\alpha+x) \cos(\alpha+x)}{(\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x))^2}, \text{ 化簡得到} \end{aligned}$$

$$(2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha) t^5 + (7 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 5 \cos^2 \beta \cdot \cos^3 \alpha) t^4 + (8 - 4 \cos^4 \alpha - 9 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha) t^3 + (12 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha - 7 \cos^2 \beta \cdot \cos \alpha) t^2 + (8 - 12 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta) t - 4 \cos \alpha = 0, \text{ 其中 } t = (\tan x) / \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{令 } w(t) &= (2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha) t^5 + (7 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 5 \cos^2 \beta \cdot \cos^3 \alpha) t^4 + (8 - 4 \cos^4 \alpha - 9 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha) t^3 \\ &+ (12 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha - 7 \cos^2 \beta \cdot \cos \alpha) t^2 + (8 - 12 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta) t - 4 \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{若將上式的 } t \text{ 解出，利用 } GeoGebra \text{ 驗證，代入 } R^2 \cdot \left[\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha+x)} \right] \\ = R^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] \text{ 後即得最小值。} \end{aligned}$$

$$\text{故兩點型 } \sum^3 r^2 \text{ 的最小值為 } R^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right], \text{ 其中 } t \text{ 滿足 } w(t) = 0.$$

其中值得注意的是， α, β, γ 並沒有大小關係。也就是對於任一三角形，我們需比較「6 種」不同角度的排列組合 $\sum^3 r^2$ 的大小。但 α, β, γ 其實有大小關係，我們放在 (伍) 討論的定理 12 中。

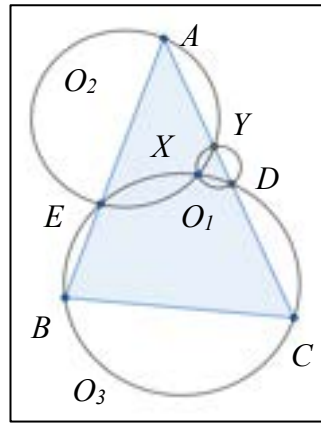


圖 4-3
來源：GeoGebra
作者自行繪製

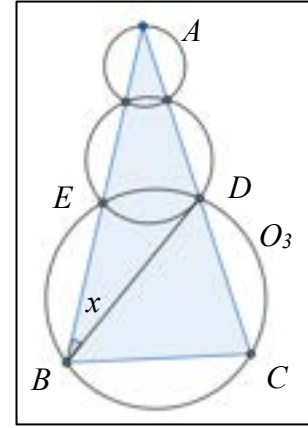


圖 4-4
來源：GeoGebra
作者自行繪製

(iv) (上下型) 當 D 、 E 在 O_2 上，我們利用 $\triangle ADE$ 的 $N=2$ 最小覆蓋圓組覆蓋 $\triangle ADE$ 。如上圖 4-4，這種類型的覆蓋方式，我們稱為「上下型」。 R_2 為 $\triangle ADE$ 的外接圓半徑。

由定理 2， $\triangle ADE$ 的 $\min \sum^2 r^2$ 為 $R^2 \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2}$ 。

與 $N=2$ 類似的，令 $\angle ABD = x_3$ ，

$$\begin{aligned} \sum^3 r^2 &= R_2^2 \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 x_3} \times R_2^2 = \left(R \cdot \frac{2R \cdot \sin \beta \cdot \frac{\sin x_3}{\sin(\alpha+x_3)}}{2R \sin \beta} \right)^2 \cdot \left(\frac{1+\sin^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 x_3} \right) \\ &= R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_3}{\sin^2(\alpha+x_3)} \cdot \frac{\sin^2 x_3 + \sin^2 x_3 \cdot \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{2\sin^2 x_3} = R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_3 + \sin^2 x_3 \cdot \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{2\sin^2(\alpha+x_3)}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sin^2 x_3 + \sin^2 x_3 \cdot \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{2\sin^2(\alpha+x_3)},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x_3 = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1+10\sin^2 \alpha+5\sin^4 \alpha}}, \cos x_3 = \frac{1+3\sin^2 \alpha}{\sqrt{1+10\sin^2 \alpha+5\sin^4 \alpha}}$$

將 x_3 代入 $f''(x)$ ，檢驗得到此時 $f''(x_3) > 0$ ， $f(x)$ 有最小值 $f(x_3)$ 。

$$\begin{aligned} \text{代入 } \sum^3 r^2 &= R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_3 + \sin^2 x_3 \cdot \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha}{2\sin^2(\alpha+x_3)} \\ &\geq R^2 \cdot \frac{2\sin^2 \alpha \cdot (1+10\sin^2 \alpha+5\sin^4 \alpha) + 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 4\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha \cdot (1+3\sin^2 \alpha)^2 + 2\cos^2 \alpha \cdot 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \cdot 2\sin \alpha \cdot (1+\sin^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= R^2 \cdot \frac{(1+10\sin^2 \alpha+5\sin^4 \alpha) + 2\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{(1+3\sin^2 \alpha)^2 + 4\cos^4 \alpha + 2 \cdot (1+\sin^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= R^2 \cdot \frac{3\sin^4 \alpha + 10\sin^2 \alpha + 3}{\sin^4 \alpha + 6\sin^2 \alpha + 9} = R^2 \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} \end{aligned}$$

所以 $\sum^3 r^2 \geq R^2 \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3}$ 。不失一般性，令 $\angle A$ 為最小角，此時 $R^2 \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3}$ 最小。

故上下型 $\sum^3 r^2$ 的最小值為 $R^2 \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3}$ 。

5. 銳角和直角三角形的上下型覆蓋圓組

在前面的討論中，如定理 2 和討論 1 的情況 2 (iv)，不難發現這樣的覆蓋方式有遞迴的特徵，我們將這樣的這種覆蓋稱為上下型，而我們可以對任意的 N ，求出上下型之 $\sum r^2$ 的最小值。(Note：上下型的排列不一定為最小覆蓋圓組)

定理 3. 對於任意 N 個圓，銳角和直角三角形「上下型」覆蓋圓組之

$$\sum r^2 \text{ 的最小值} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n}。$$

Proof. 令 N 個圓的「上下型 $\sum r^2$ 」的最小值 = $R^2 \cdot \frac{A_n}{B_n}$ 。由定理 2 和討論 1 的情況 2 (iv)， $A_2 = 1 + \sin^2 \alpha$ ， $B_2 = 2$ 、 $A_2 = 3 \sin^2 \alpha + 1$ ， $B_2 = \sin^2 \alpha + 3$ ，接下來我們要求出 A_n, B_n 的一般式：

欲用 k 個圓以上下型覆蓋 $\triangle ABC$ ，與定理 2 和討論 1 的上下型覆蓋圓組類似的，我們做一圓 O_k 覆蓋 B, C 兩點，交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於分別為 E, D ，如圖 5-1。此時 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，接著利用 $k-1$ 個圓覆蓋 $\triangle ADE$ ， $\triangle ADE$ 的「 $N = k-1$ 」上下型覆蓋圓組的半徑平方和即為 $R_{k-1}^2 \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ (R_{k-1} 為 $\triangle ADE$ 的外接圓)

$$\text{令 } \angle ABD = x_k, \text{ 則 } \sum r^2 = R_{k-1}^2 \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 x_k} \times R_{k-1}^2$$

$$= R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_k}{\sin^2(\alpha + x_k)} \cdot \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 x_k} \right) = R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_k \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + x_k)}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{\sin^2 x \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + x)},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \cdot \sin^2(\alpha + x)$$

$$= (\sin^2 x \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \sin^2 \alpha) \cdot 2 \sin(\alpha + x) \cdot \cos(\alpha + x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} (\sin(\alpha + x) \cdot \cos_{k-1} + \cos(\alpha + x) \cdot \sin_{k-1}) = \sin^2 \alpha \cdot \cos(\alpha + x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} = \sin \alpha \cdot (\cos \alpha \cdot \cos x - \sin \alpha \cdot \sin x)$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \sin^2 \alpha \right) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos x \Rightarrow \frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}$$

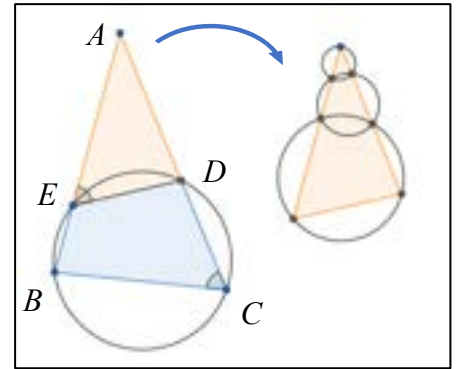


圖 5-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

$$\Rightarrow \sin x_k = \frac{B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2 \alpha}}, \cos x_k = \frac{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2 \alpha}}$$

接下來我們驗證此時的 $f(x_k)$ 是最小值：

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \left[\frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{4\sin x \cdot \cos x \cdot \sin(\alpha+x) \cdot \cos(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\sin x \cdot \cos x \cdot \cos(\alpha+x) - 2\sin^2 x \cdot \sin(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)} + \frac{2\sin^2 x \cdot \cos(\alpha+x) \cdot 3\sin^2(\alpha+x) \cdot \cos(\alpha+x)}{\sin^6(\alpha+x)} \right] \\ &\quad - \sin^2 \alpha \cdot \left[\frac{-2\sin(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)} - \frac{2\cos(\alpha+x) \cdot 3\sin^2(\alpha+x) \cdot \cos(\alpha+x)}{\sin^6(\alpha+x)} \right] \\ &= \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \left[\frac{2\cos^2 x}{\sin^2(\alpha+x)} - \frac{8\sin x \cdot \cos x \cdot \cos(\alpha+x)}{\sin^3(\alpha+x)} + \frac{6\sin^2 x \cdot \cos^2(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} \right] + \sin^2 \alpha \cdot \left[\frac{2}{\sin^2(\alpha+x)} + \frac{6\cos^2(\alpha+x)}{\sin^4(\alpha+x)} \right] \\ &\quad \left(\text{將 } \frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha} \text{ 代入 } f''(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x_k) &= \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \left[\frac{2(A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha)^2}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^2} - \frac{8B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha) \cdot A_{k-1} \cdot \cos \alpha}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot A_{k-1}^2 \cdot \cos^2 \alpha}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^4} \right] + \sin^2 \alpha \cdot \left[\frac{2(A_{k-1}^2 + B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2A_{k-1}B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha)}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6A_{k-1}^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (A_{k-1}^2 + B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2A_{k-1}B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha)}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^4} \right] \\ &= \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \cdot \frac{2A_{k-1}^4 \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^4} + \frac{2A_{k-1}^4 \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} \cdot \sin \alpha + B_{k-1} \cdot \sin \alpha)^4} + \frac{4A_{k-1}^4}{(A_{k-1} + B_{k-1})^4} + \frac{4A_{k-1}^3 B_{k-1}}{(A_{k-1} + B_{k-1})^4} \\ &\quad + \frac{2A_{k-1}^3 B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} + B_{k-1})^4} + \frac{2A_{k-1}^2 B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} + B_{k-1})^4} + \frac{4A_{k-1}^2}{(A_{k-1} + B_{k-1})^2} + \frac{6A_{k-1}B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} + B_{k-1})^2} + \frac{2B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(A_{k-1} + B_{k-1})^2} > 0 \end{aligned}$$

故我們說明了當 $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}$ 時， $f(x)$ 有最小值 $f(x_k)$ 。代入 $\sum_{k=1}^n r^2$ ，

$$\sum_{k=1}^n r^2 = R^2 \cdot \frac{\sin^2 x_k \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} + \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha+x_k)}$$

$$\geq R^2 \cdot \left[\sin^2 \alpha \cdot (B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha)^2 + B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right] /$$

$$\left[\sin^2 \alpha \cdot (A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha)^2 + \cos^2 \alpha \cdot B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot (A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha) \right]$$

$$= R^2 \cdot \left[B_{k-1}^2 \cdot \sin^2 \alpha + A_{k-1}^2 + A_{k-1} \cdot B_{k-1} + A_{k-1} \cdot B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha \right] /$$

$$\left[A_{k-1}^2 + B_{k-1}^2 \cdot \sin^4 \alpha + 2A_{k-1} \cdot B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha + B_{k-1}^2 \cdot \cos^4 \alpha + 2B_{k-1} \cdot \cos^2 \alpha \cdot (A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha) \right]$$

$$= R^2 \cdot \left[A_{k-1} + B_{k-1} \right] \left[A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha \right] / \left[A_{k-1} + B_{k-1} \right]^2 = R^2 \cdot \frac{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha}{A_{k-1} + B_{k-1}}$$

$$\therefore \text{我們定義 } A_1 = 1, B_1 = 1, A_0 = 1, B_0 = 0, \begin{cases} A_k = A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha & A_0 = 1 \\ B_k = A_{k-1} + B_{k-1} & B_0 = 0 \end{cases} \quad (k \geq 1)。$$

接下來我們將遞迴關係式寫成矩陣，求出一般式：

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin^2 \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{k-1} \\ B_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin^2 \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin^2 \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } \begin{bmatrix} 1 & \sin^2 \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M, \text{ 則 } ch_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot I),$$

$$\det(M - \lambda \cdot I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \sin^2 \alpha \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \sin^2 \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \sin \alpha, \text{ 令 } \lambda_1 = 1 + \sin \alpha, \lambda_2 = 1 - \sin \alpha.$$

$$\text{令 } v_1 \in \text{Ker}(M - \lambda_1 \cdot I) \Rightarrow \begin{bmatrix} -\sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ 1 & -\sin \alpha \end{bmatrix} \cdot v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 取 } v_1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{令 } v_2 \in \text{Ker}(M - \lambda_2 \cdot I) \Rightarrow \begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin^2 \alpha \\ 1 & \sin \alpha \end{bmatrix} \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 取 } v_2 = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{令 } P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2\sin \alpha} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 1 & -\sin \alpha \end{bmatrix}, \text{ 則 } P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$M^k = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^k \cdot P^{-1} = \frac{1}{2\sin \alpha} \cdot \begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \sin \alpha \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 1 & -\sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sin \alpha} \cdot \begin{bmatrix} \sin \alpha & \sin \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [1 + \sin \alpha]^k & 0 \\ 0 & [1 - \sin \alpha]^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sin \alpha \\ 1 & -\sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\sin \alpha} \cdot \begin{bmatrix} \sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^k + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^k & \sin^2 \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^k - \sin^2 \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^k \\ [1 + \sin \alpha]^k - [1 - \sin \alpha]^k & \sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^k + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} & \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^k - \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^k}{2} \\ \frac{[1 + \sin \alpha]^k - [1 - \sin \alpha]^k}{2\sin \alpha} & \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = M^k \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} & \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^k - \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^k}{2} \\ \frac{[1 + \sin \alpha]^k - [1 - \sin \alpha]^k}{2\sin \alpha} & \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} \\ \frac{[1 + \sin \alpha]^k - [1 - \sin \alpha]^k}{2\sin \alpha} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_k = \frac{[1 + \sin \alpha]^k + [1 - \sin \alpha]^k}{2} \\ B_k = \frac{[1 + \sin \alpha]^k - [1 - \sin \alpha]^k}{2\sin \alpha} \end{cases}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$\therefore N \text{ 個圓覆蓋 } \triangle ABC \text{ 的上下型 } \sum r^2 \text{ 的最小值} = R^2 \cdot \frac{A_n}{B_n} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} \quad \square$$

定理 4. 上下型覆蓋圓組中各個覆蓋圓的半徑

$$r_k = R \cdot \frac{\sin\alpha \sqrt{2[I+\sin\alpha]^{2k-1} + 2[I-\sin\alpha]^{2k-1}}}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} \cdot \cos^{n-k}\alpha \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Proof. 我們將 $\frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2\alpha}$ 寫成 A_n, B_n 的表達式： $\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \cdot \sin^2\alpha \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-1} \end{cases}$

$$\frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2\alpha} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A_k} = \frac{B_k - A_k}{1 - \sin^2\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A_k} = \frac{B_k \cdot \sin\alpha - A_k \cdot \sin\alpha}{A_k \cdot \cos\alpha}$$

有了 $\sin x_k, \cos x_k$ 的值，我們就可以求出此時的 r_k ：

$$r_k = R_k \cdot \frac{\sin x_n}{\sin(\alpha + x_n)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin x_n} = R_k \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos x_n + \cos\alpha \cdot \sin x_n} =$$

$$R_k \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sqrt{A_n^2 \cdot \cos^2\alpha + B_n^2 \cdot \sin^2\alpha + A_n^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_n \cdot B_n \cdot \sin^2\alpha}}{\sin\alpha \cdot A_n \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot (B_n \cdot \sin\alpha - A_n \cdot \sin\alpha)} = R_k \cdot \frac{\sqrt{A_n^2 + B_n^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_n \cdot B_n \cdot \sin^2\alpha}}{B_n \cdot \cos\alpha}$$

接下來，我們還需要求出 R_k （被 $O_1, O_2, \dots, O_k$ 覆蓋的三角形的外接圓）：

$$R_{i-1} = R_i \cdot \frac{\sin x_i}{\sin(\alpha + x_i)} = R_i \cdot \frac{\sin x_i}{\sin\alpha \cdot \cos x_i + \cos\alpha \cdot \sin x_i} = R_i \cdot \frac{B_{i-1} \cdot \cos\alpha}{A_{i-1} + B_{i-1}}$$

$$\text{故 } R_i = R_{i-1} \cdot \frac{B_i}{B_{i-1} \cdot \cos\alpha}$$

$$\Rightarrow R_n = R_k \cdot \prod_{i=k}^{n-1} \frac{B_{i+1}}{B_i \cdot \cos\alpha} = R_k \cdot \frac{B_n}{B_k} \cdot \frac{1}{\cos^{n-k}\alpha}$$

$$\Rightarrow R_k = R \cdot \frac{B_k}{B_n} \cdot \cos^{n-k}\alpha$$

最後，我們求出 $r_k (k = 1, \dots, n)$ ：

$$r_k = R_k \cdot \frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_k \cdot B_k \cdot \sin^2\alpha}}{B_k \cdot \cos\alpha}$$

$$= R \cdot \frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_k \cdot B_k \cdot \sin^2\alpha}}{B_k \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{B_k}{B_n} \cdot \cos^{n-k}\alpha$$

$$= R \cdot \frac{\sqrt{A_k^2 + B_k^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_k \cdot B_k \cdot \sin^2\alpha}}{B_n} \cdot \cos^{n-k-1}\alpha$$

最後代入 B_n, A_k, B_k 的一般式即得

$$r_k = R \cdot \frac{\sin\alpha \sqrt{2[I+\sin\alpha]^{2k-1} + 2[I-\sin\alpha]^{2k-1}}}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} \cdot \cos^{n-k}\alpha \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \square$$

值得注意的是，無論是上下型覆蓋圓組的總面積或是各覆蓋圓的半徑，都只被 N, R, α （覆蓋圓數、外接圓半徑、最小角大小）決定！換句話說，只要 N, R, α 不變，上下型覆蓋圓組的總面積和各覆蓋圓的半徑皆不變！

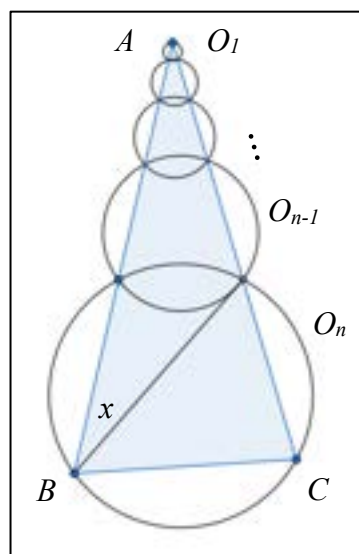


圖 5-2 來源：GeoGebra
作者自行繪製

定理 5. 對於任意 N 個圓，銳角和直角三角形「上下型」覆蓋圓組之

$$\sum^n r^2 \text{ 的最小值} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin \alpha))}。$$

Proof. 令 $\sin \alpha = \tanh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$

$$\therefore \left[\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right] = \left[\frac{2e^\theta / (e^\theta + e^{-\theta})}{2e^{-\theta} / (e^\theta + e^{-\theta})} \right] = e^{2\theta}$$

$$\therefore R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} = R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\left[\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right]^{n+1}}{\left[\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right]^n - 1} = R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{e^{2n\theta} + 1}{e^{2n\theta} - 1}$$

$$= R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n\theta)} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin \alpha))} \quad \square$$

由此，我們不僅提供了一個計算上下型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值的快速求法，更連結了上下型覆蓋圓組與「雙曲函數」不為人知的關聯。

而此處我們說明令 $\sin \alpha = \tanh(\theta)$ 是可行的：

$$\because \sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \tanh : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1],$$

又 $\tanh$ 是雙射函數 (*bijection*)，故 $\tanh^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \tanh^{-1} \circ \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ，

所以對於任意的 α ，我們總能找到 θ 使得 $\theta = \tanh^{-1}(\sin \alpha)$ 。

至此，我們討論對於任意 N 個圓，其上下型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值和此時各覆蓋圓半徑的一般式，利用遞迴的方式得到良好的結果，最後找到上下型覆蓋圓組與「雙曲函數」的關聯。而我們正在從雙曲函數的幾何定義中，也就是雙曲線裡與「面積」相關的定義，找出與上下型覆蓋圓組覆蓋圓「面積」之間的關聯。

(二) 對於鈍角三角形，利用 N 個不等圓覆蓋

6. 對於鈍角三角形，利用 2 個不等圓覆蓋

定理 6. 鈍角或直角三角形 ABC 的 $\min \sum r^2 = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{2}$ 。

Proof. 令 $\angle C$ 為鈍角，由引理 1， A, B 兩點在覆蓋圓上，若有一圓同時覆蓋 A, B ，則其直徑 $\geq L$ ，我們稍後說明這不是最小覆蓋圓。令覆蓋 A 點的圓為 O_1 ，覆蓋 B, C 兩點的圓為 O_2 ，由引理 2， O_1, O_2 交於 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上，令交點分別為 E, D ，如圖 6-1。

(Note: O_1, O_2 有可能沒覆蓋到點 C)

若 D 點的位置固定， $r_1 = \frac{\overline{AD}}{2\sin\angle DEA}$ ， $r_2 = \frac{\overline{BD}}{2\sin\angle DEB}$ ，

當 $\angle DEA = 90^\circ$ ，即 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 時， $r_1^2 + r_2^2$ 最小。

(此時 O_2 以 $\overline{BD}$ 為直徑，會覆蓋 $\triangle BCD$)

令 $\angle ABD = x$ 且 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ，

$$\sum r^2 = r_1^2 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2x} \times r_1^2 \quad (\overline{DE} = 2r_1 \cdot \sin\alpha = 2r_2 \cdot \sin x)$$

$$= \left(\frac{L}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sin(\pi - \alpha - x)} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2x} \right)$$

$$\left(\text{由 } \triangle ABD \text{ 中的正弦定理及 } \overline{AD} = 2r_1 \text{ 可知: } \frac{2r_1}{L} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\sin x}{\sin(\pi - \alpha - x)} \right)$$

$$= \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x}{\sin^2(\alpha + x)}, \text{ 令 } f(x) = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x}{\sin^2(\alpha + x)},$$

與 $N = 2$ 銳角三角形的情況同樣的 (定理 2)， $f(x)$ 的最小值發生在

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \sin^2\alpha} \Rightarrow \sin x = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}}, \cos x = \frac{1 + \sin^2\alpha}{\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}}.$$

故 $\sum r^2 = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin^2\alpha + \sin^2x}{\sin^2(\alpha + x)} \geq \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2}$ 。又 $\frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2} < \frac{L^2}{4}$ ，所以沒有一圓同

時覆蓋 A, B (半徑平方和 $\geq \frac{L^2}{4} > \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2}$)。不失一般性，令 $\angle A$ 為最小角，此時

$$\frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2} \text{ 最小。故鈍角三角形 } ABC \text{ 的 } \min \sum r^2 = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2}。 \quad \square$$

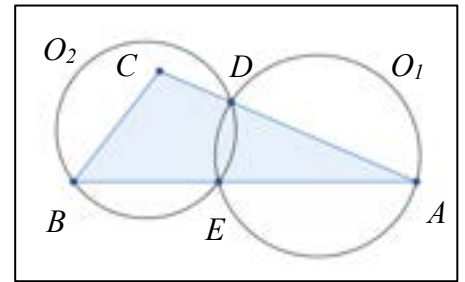


圖 6-1 來源: GeoGebra
作者自行繪製

其實從證明中不難發現，當 $N=2$ ，銳角三角形與鈍角三角形的最小覆蓋圓組很相似，我們想嘗試分析其原因。

若我們作 $\overline{AC}$ 的延長線，交 O_2 於 H ，連接 $\overline{BH}$ ，如下圖 6-2。則 $\angle BHA = 90^\circ$ （ B 、 E 、 D 、 H 共圓），所以此覆蓋圓組正是直角 $\triangle ABH$ 的 $N=2$ 最小覆蓋圓組！並且此時 $L=2R'$ ，由此可得鈍角三角形 ABC 的 $\min \sum_{i=1}^2 r_i^2 = R'^2 \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{2} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1+\sin^2\alpha}{2}$ （令 R' 為 $\triangle ABH$ 的外接圓半徑）。

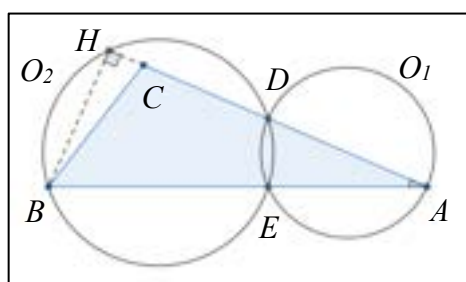


圖 6-2 來源：GeoGebra 作者自行繪製

7. 鈍角三角形的上下型覆蓋圓組

從上面的討論中，我們看到鈍角三角形的最小覆蓋圓組也具有上下型的樣子，只是將鈍角三角形轉化成直角三角形，所以我們將銳角三角形上下型的討論拓展到鈍角三角形中。

定理 7. 對於任意 N 個圓，鈍角三角形「上下型」覆蓋圓組之

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 \text{ 的最小值} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot [1+\sin\alpha]^n + \sin\alpha \cdot [1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n}.$$

Proof. 對於鈍角三角形，我們不再像先前銳角三角形有良好的遞迴關係，我們需要自行造出直角，而且我們需要說明為什麼這樣的上下型覆蓋圓組是好的定義。利用數學歸納法，我們說明鈍角三角形的上下型覆蓋圓組都可以轉換成直角三角形的上下型覆蓋圓組。

當 $N=2$ ，由定理 4，此時上下型覆蓋圓組為直角 $\triangle ABH$ 的最小覆蓋圓組

假設 $N=k$ 時，鈍角三角形的上下型覆蓋圓組可以轉換成直角三角形的最小覆蓋圓組。

當 $N=k+1$ ，令覆蓋 B 、 C 兩點的圓為 O_{k+1} ，分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 E 、 D ，我們要選 $\triangle ADE$ 的上下型覆蓋圓，為了使覆蓋圓組的 $\sum_{i=1}^n r_i^2$ 盡量的小，我們有以下討論：

當 $\angle BED$ 為鈍角，如下左圖 7-1， O_{k+1} 覆蓋了四邊形 $BEDC$ ，我們可以作另一圓 O_{k+1}' 以 $\overline{BD}$ 為直徑，因為 $\angle BED$ 和 $\angle C$ 皆為鈍角，故 O_{k+1}' 也覆蓋四邊形 $BEDC$ 且 $r_{k+1}' < r_{k+1}$ ，表示還有 $\sum^n r^2$ 更小的上下型覆蓋圓組。

當 $\angle BED$ 為銳角，如下中圖 7-2，由歸納法假設， $\triangle ADE$ 的上下型覆蓋圓組中 O_k （覆蓋兩個頂點的圓）交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D 、 H ，其中 $\angle DHA = 90^\circ$ ，但由引理 2， O_k 與 O_{k+1} 要交於 E 、 D ，表示還有 $\sum^n r^2$ 更小的上下型覆蓋圓組。

當 $\angle BED$ 為直角， O_{k+1} 覆蓋四邊形 $BEDC$ ，如下右圖 7-3，因為 $\angle DEC = 90^\circ$ ，故 O_{k+1} 以 $\overline{BD}$ 為直徑，所以 O_{k+1} 也會覆蓋直角 $\triangle BDH$ ，其中 $\angle BHD = 90^\circ$ ，故 $\triangle ABC$ 的上下型覆蓋圓組也會覆蓋直角 $\triangle ABH$ ，取 $\triangle ABC$ 的上下型覆蓋圓組為直角 $\triangle ABH$ 的上下型覆蓋圓組

由數學歸納法，我們證明鈍角三角形都可以轉換成直角三角形的上下型覆蓋圓組。

$\therefore$ 鈍角 $\triangle ABC$ 的上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值 = 直角 $\triangle ABH$ 的上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值

$$= \frac{L^2}{4} \cdot \frac{A_n}{B_n} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot [1+\sin\alpha]^n + \sin\alpha \cdot [1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n} \quad \square$$

並且由定理 5，鈍角 $\triangle ABC$ 的上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值也可以被寫成 $\frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin\alpha))}$ 。

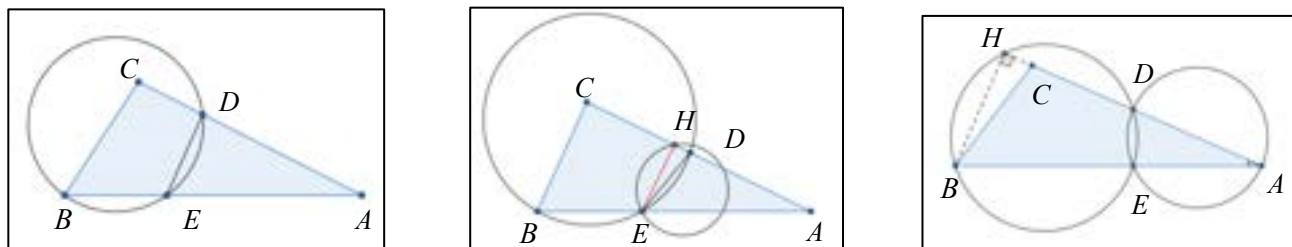


圖 7-1~7-3 來源：GeoGebra 作者自行繪製

8. $N = 3$ ，對於鈍角三角形，利用 3 個不等圓覆蓋

討論 2. 鈍角三角形 ABC 的 $\min \sum^3 r^2$ 。

與銳角情況同樣的，我們利用相似的步驟將最小覆蓋圓組分成類似的四種情況：

(i) 重心型 (ii) 四點型 (iii) 兩點型 (iv) 上下型。

下面我們分開討論：（不失一般性，令 $\angle C$ 為最大角）

(i) (重句型)

令 O_1 與 O_2 的交點為 M 、 Z ，其中 Z 在 $\overline{AB}$ 上， O_1 與 O_2 分別與 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 的交點為 Y 、 X ，如下圖 8-1，由引理 2， O_3 與 O_1 、 O_2 分別交於 Y 、 X 。

由密克定理， C 、 X 、 M 、 Y 四點共圓。接下來我們說明若 O_3 為最小覆蓋圓，則 O_3 為過 C 、 X 、 M 、 Y 四點的圓。

首先，若 O_3 為最小覆蓋圓，則 X 、 Y 在 O_3 上。因為 O_3 為覆蓋圓，故 O_3 會覆蓋 C 、 M 兩點，又 $\angle C$ 為鈍角，所以 $\angle XMY$ 為銳角， $\triangle XMY$ 的 $N=1$ 最小覆蓋圓組即為 $\triangle XMY$ 的外接圓，又 C 、 X 、 M 、 Y 四點共圓，故 C 點亦在 $\triangle XMY$ 的外接圓上， O_3 即為過 C 、 X 、 M 、 Y 四點的圓。

與 $N=3$ 銳角和直角三角形的重句型覆蓋圓組完全相同，此時 $\sum^3 r^2$ 的最小值發生在 $\angle AYM = \angle BZM = \angle CXM = 90^\circ$ 且 M 為重心時， $\sum^3 r^2$ 的最小值 $= \frac{R^2}{3} \cdot (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma)$ 。

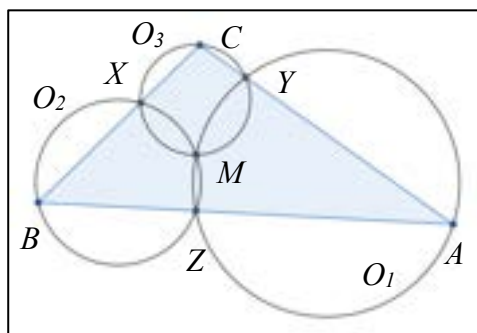


圖 8-1 來源：GeoGebra
作者自行繪製

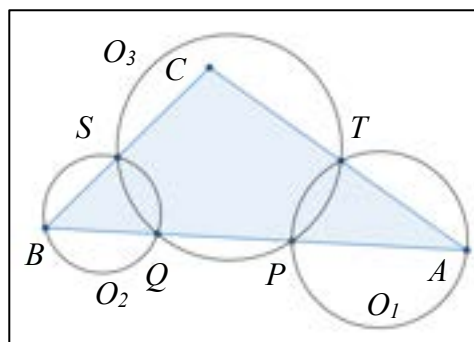


圖 8-2 來源：GeoGebra
作者自行繪製

(ii) (四點型) 若 O_1 、 O_2 無交點，由引理 2，令 O_1 、 O_2 與邊 $\overline{BC}$ 交於 Q 、 P ， O_1 、 O_2 分別與 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 交於 T 、 S ，由引理 2，令 O_3 交 O_1 於 Q 、 T ，交 O_2 於 P 、 S ，如上圖 8-2，此種情況亦稱為「四點型」。

與 $N=3$ 銳角和直角三角形的四點型覆蓋圓組類似地，先假設 $R=1$ ，利用座標化，以 A 在 $\overline{BC}$ 上的垂足為原點， BC 方向為 x 軸正向。因為對於一般化的三角形，我們尚無法求出四點型覆蓋圓組面積的一般式，故我們先取「等腰」的情況。

令 $\alpha = \angle CAB$ 、 $\beta = \angle CBA$ 且 $\alpha + \beta = \theta^\circ$ ，則三角形三頂點座標為 $C(0, 2\sin^2 \alpha)$ 、 $B(2\sin \alpha \cdot \cos \beta, 0)$ 、 $A(2\sin \beta \cdot \cos \alpha, 0) \Rightarrow C(0, 2\sin^2 \alpha)$ 、 $B(-2\sin \alpha \cdot \cos \alpha, 0)$ 、 $A(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha, 0)$ ，

由對稱性，圓 O_I 圓心的 x 座標為 0 ， AC 、 BC 的直線方程式分別為 $y = -x \cdot \tan \alpha + 2\sin^2 \alpha$ 和 $y = x \cdot \tan \alpha + 2\sin^2 \alpha$ 。

令圓 O_I 的半徑為 r_I ，交 $\overline{AB}$ 於 $P(p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, 0)$ 和 $Q(-p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, 0)$ 、交 $\overline{AC}$ 於

$T(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha, h \cdot \sin^2 \alpha)$

我們有 $\sqrt{r_I^2 - \overline{OP}^2} - \sqrt{r_I^2 - \overline{HT}^2} = \overline{OT}$

$$\Rightarrow \sqrt{r_I^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2} - \sqrt{r_I^2 - (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2} = h \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow r_I^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2$$

$$= r_I^2 - (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + h^2 \cdot \sin^4 \alpha + 2h \cdot \sin^2 \alpha \sqrt{r_I^2 - (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - h^2 \cdot \sin^4 \alpha$$

$$= 2h \cdot \sin^2 \alpha \sqrt{r_I^2 - (2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - h^2 \cdot \sin^4 \alpha}{h \cdot \sin^2 \alpha} \right)^2$$

$$= 4r_I^2 - 4(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4r_I^2 = \left(\frac{(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{h \cdot \sin^2 \alpha} \right)^2$$

$$- 2[(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2] + h^2 \cdot \sin^4 \alpha + 4(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4r_I^2 = \left(\frac{(2\cos \alpha - h \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \cos \alpha)^2}{h} \right)^2$$

$$+ 2[(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + (p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2] + h^2 \cdot \sin^4 \alpha$$

$$\text{由正弦定理， } r_2^2 = r_3^2 = \frac{\overline{PT}^2}{4\sin^2 \alpha} = \frac{(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 + h^2 \cdot \sin^4 \alpha}{4\sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{(2\cos \alpha - h \cdot \cos \alpha - p \cdot \cos \alpha)^2 + h^2 \cdot \sin^2 \alpha}{4}$$

$$\text{故 } 4\sum r^2 = \left(\frac{(2\cos \alpha - h \cdot \cos \alpha)^2 - (p \cdot \cos \alpha)^2}{h} \right)^2 + 2[(2\sin \alpha \cdot \cos \alpha - h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 +$$

$$(p \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2] + h^2 \cdot \sin^4 \alpha + 2(2\cos \alpha - h \cdot \cos \alpha - p \cdot \cos \alpha)^2 + 2h^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha \cdot \left(\frac{(2-h)^2 - p^2}{h} \right)^2 + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot [(2-h)^2 + p^2] + h^2 \cdot \sin^4 \alpha + 2(2\cos \alpha - h \cdot \cos \alpha - p \cdot$$

$$\cos \alpha)^2 + 2h^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha \cdot \left(\frac{4-p^2}{h} - 4 + h \right)^2 + 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot [4 - 4h + h^2 + p^2] + h^2 \cdot \sin^4 \alpha$$

$$+ 2\cos^2 \alpha \cdot [4 + h^2 + p^2 - 4h - 4p + 2ph] + 2h^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^4\alpha \cdot \left(\frac{4-p^2}{h} - 4\right)^2 + 2\cos^4\alpha \cdot (4-p^2-4h) + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot [4-4h+p^2] + \\
&+ 2\cos^2\alpha \cdot [4+p^2-4h-4p+2ph] + h^2 \cdot (2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha) \\
&= \cos^4\alpha \cdot \left(\frac{4-p^2}{h} - 4\right)^2 + p^2 \cdot (-2\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 2\cos^2\alpha) \\
&+ h \cdot (-8\cos^4\alpha - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - 8\cos^2\alpha) + (8\cos^4\alpha + 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + 8\cos^2\alpha) + 4ph \cdot \cos^2\alpha + 3h^2 \\
&= \cos^4\alpha \cdot \left(\frac{4-p^2}{h} - 4\right)^2 + 4p^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - 16h \cdot \cos^2\alpha + 16\cos^2\alpha + 4ph \cdot \cos^2\alpha + 3h^2 \\
\Rightarrow \sum^3 r^2 &= \cos^4\alpha \cdot \left(\frac{4-p^2}{2h} - 2\right)^2 + \frac{3h^2}{4} + p^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha - 4h \cdot \cos^2\alpha + ph \cdot \cos^2\alpha + 4\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

但與銳角三角形 $N=3$ 中情況 $I(ii)$ 不同， C 點不一定在圓 O_3 上，故我們少了一個條件，使得我們無法求解一般化的情況，只能轉而討論等腰的特殊情況，不過即使如此，上式仍是以 p 、 h 為變數的雙變數極值問題，其中 h 出現在分母的位置，使得我們無法求出此情況的解析解。目前我們仍無法處理一般化的情況。

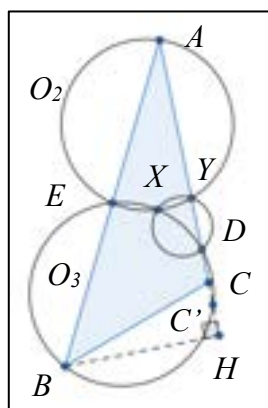


圖 8-3
來源：GeoGebra
作者自行繪製

(iii) (兩點型)

我們先說明「 A 、 D 在 O_2 上」不是最小覆蓋圓組，令 O_3 與 $\overline{AC}$ 的延長線交於 C' ，作一點 H 在 $\overline{AC}$ 的延長線使得 $\angle BHA = 90^\circ$ ，顯然 C' 在 $\overline{CH}$ 中（若在 $\overline{CH}$ 外，則以 $\overline{BD}$ 為直徑的圓半徑 $< r_3$ 且覆蓋了 O_3 覆蓋三角形的區域），所以 $\angle BC'A$ 為鈍角或直角。因為 $\triangle ADE \sim \triangle ABC'$ ，故 $\angle AED$ 亦為鈍角或直角，則當 O_2 （過 A 、 D 兩點）為以 $\overline{AD}$ 為直徑的圓半徑最小且圓 O_2 、 O_3 即覆蓋 $\triangle ABC$ ，而這回到 $N=2$ 的情況，不合。

所以 A 、 E 在 O_2 上。令 O_2 與 O_3 的交點為 E 、 X ，其中 X 在弧 DE 上，令 O_2 交 $\overline{AC}$ 於 Y ，由引理 2， O_1 與 O_2 、 O_3 分別交於 D 、 E ，與銳角三角形兩點型同樣地，圓 O_1 會通過點 X 且 $\triangle XYD \sim \triangle XC'B$ 。對於這類情況，我們亦稱為「兩點型」。

令 $\angle ABC' = \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$)，與銳角和直角三角形兩點型覆蓋圓組完全相同的，

$$\text{令 } t = \frac{\tan \angle ABD}{\sin \alpha}, \text{ 則 } \sum^3 r^2 \geq \left(\frac{R \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \varphi)} \right)^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right],$$

因為當中有兩個變數 t 、 φ ，故我們對函數

$$u(t, \varphi) = \left(\frac{R \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \varphi)} \right)^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] \text{ 進行偏微分。}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \Rightarrow (2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi \cdot \cos^4 \alpha)t^5 + (7 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 5 \cos^2 \varphi \cdot \cos^3 \alpha)t^4 + (8 - 4 \cos^4 \alpha -$$

$$9 \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha)t^3 + (12 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha - 7 \cos^2 \varphi \cdot \cos \alpha)t^2 + (8 - 12 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \varphi)t - 4 \cos \alpha = 0$$

$$\text{整理可得 } \cos^2 \varphi = \frac{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}{t(1 + t \cdot \cos \alpha)^3(2 + t \cdot \cos \alpha)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} = \frac{t^2 \cos \alpha (1 + t \cdot \cos \alpha)^2}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)}.$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \tan \varphi = \frac{t^2 \cos \alpha (1 + t \cdot \cos \alpha)^2}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \varphi = \left[\cos \alpha - \frac{t^2 \cos \alpha (1 + t \cdot \cos \alpha)^2}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)} \right]^2$$

聯立 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$ ，因為 $\sec^2 \varphi = 1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$ ，我們有

$$\sin^2 \alpha \cdot \left(\frac{t(1 + t \cdot \cos \alpha)^3(2 + t \cdot \cos \alpha)}{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2} - 1 \right)$$

$$= \left[\cos \alpha - \frac{t^2 \cos \alpha (1 + t \cdot \cos \alpha)^2}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)} \right]^2$$

$$- \sin^2 \alpha \cdot \frac{(2 - \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha)t^5 + (7 \cos \alpha - 9 \cos^3 \alpha)t^4 + (8 - 9 \cos^2 \alpha - 4 \cos^4 \alpha)t^3 + (5 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha)t^2 + (6 - 12 \cos^2 \alpha)t - 4 \cos \alpha}{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}$$

$$= 4 \cos^2 \alpha \cdot \left[\frac{(1 - \cos^2 \alpha)t^4 + \cos \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)t^3 + (2 - \cos^2 \alpha)t^2 + \cos \alpha \cdot t + 1}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)} \right]^2$$

$$(\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{(2 - \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha)t^5 + (7 \cos \alpha - 9 \cos^3 \alpha)t^4 + (8 - 9 \cos^2 \alpha - 4 \cos^4 \alpha)t^3 + (5 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha)t^2 + (6 - 12 \cos^2 \alpha)t - 4 \cos \alpha}{(2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha}$$

$$= 4 \cos^2 \alpha \cdot \frac{(t^2 + \cos \alpha \cdot t + 1)^2((1 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)^2}{((2 - \cos^2 \alpha)t^2 + 1)^2}$$

顯然上式的計算量非常龐大，不過稍加觀察可以發現，實際上上式只是一個以 t 為變數，

$\cos \alpha$ 為係數的「一元」9 次方程式。換句話說，這個極值的點是能夠計算出來的，展開如

下：

$$\begin{aligned}
n(t) &= (1 - \cos^2 \alpha)^2 (2 - \cos^2 \alpha) (-4 - 4\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) t^9 + \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (\cos^6 \alpha - 23\cos^4 \alpha + 52\cos^2 \alpha - 28) t^8 \\
&- (1 - \cos^2 \alpha) (2 + \cos^2 \alpha) (13\cos^4 \alpha - 32\cos^2 \alpha + 20) t^7 - \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (7\cos^2 \alpha - 6) (5\cos^2 \alpha - 8) t^6 \\
&+ (19\cos^6 \alpha - 100\cos^4 \alpha + 135\cos^2 \alpha - 58) t^5 - \cos \alpha (31\cos^4 \alpha - 38\cos^2 \alpha + 11) t^4 \\
&+ (-41\cos^4 \alpha + 69\cos^2 \alpha - 32) t^3 - \cos \alpha (7\cos^2 \alpha - 11) t^2 + (10\cos^2 \alpha - 6) t + 4\cos \alpha = 0
\end{aligned}$$

如此便可以唯一確定 $t = \frac{\tan \angle ABD}{\sin \alpha}$ 的極值！

只要再代入

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}{t(1 + t \cdot \cos \alpha)^3(2 + t \cdot \cos \alpha)}} \right) \text{ 便可以確定面積的最小值。}$$

$$\text{故此時 } \sum^3 r^2 \text{ 的最小值為 } u(t, \varphi) = \left(\frac{R \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \varphi)} \right)^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$$

$$= \frac{L^2}{4 \sin^2(\alpha + \varphi)} \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$$

$$\text{且 } t, \varphi \text{ 滿足 } n(t) = 0, \varphi = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}{t(1 + t \cdot \cos \alpha)^3(2 + t \cdot \cos \alpha)}} \right)。$$

那麼此時的 φ 是否是我們想求出的最小值呢？我們將此部分放在（伍）討論中。

(iv) (上下型)

令圓 O_3 覆蓋 B 、 C 兩點，且分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 E 、 D ，此時 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，與銳角三角形一樣地，我們只需處理 $\triangle ADE$ 的 $N=2$ 最小覆蓋圓組即可。而這就是鈍角三角形上下型的

排列，即同定理 6，3 個圓覆蓋鈍角 $\triangle ABC$ 的上下型 $\sum^3 r^2$ 的最小值 $= \frac{L^2}{4} \cdot \frac{A_3}{B_3}$

$$= \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^3 + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^3}{[1 + \sin \alpha]^3 - [1 - \sin \alpha]^3} = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3}。$$

伍、討論

一、當 N 遞增， $\min \sum^n r^2$ ($N=1,2,3$) 和上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值嚴格遞減。

(一) $N=1,2,3$ ，當 N 遞增， $\min \sum^n r^2$ 嚴格遞減。

定理 8. $\min \sum^1 r^2 > \min \sum^2 r^2 > \min \sum^3 r^2$ 。

Proof. 因為 $|\sin \alpha| < 1$ ， $\frac{1+\sin^2 \alpha}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ 。故

$$\min \sum^1 r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases} > \min \sum^2 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} & \text{鈍角三角形} \end{cases}$$

$$\text{且 } \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} - \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} = \frac{\sin^4 \alpha - 2\sin^2 \alpha + 1}{2\sin^2 \alpha + 6} = \frac{(\sin^2 \alpha - 1)^2}{2\sin^2 \alpha + 6} > 0,$$

故我們有 $\frac{1+\sin^2 \alpha}{2} > \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3}$ ，則

$$\min \sum^2 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} & \text{銳角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1+\sin^2 \alpha}{2} & \text{鈍角三角形} \end{cases} > \begin{cases} R^2 \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} & \text{銳角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{3\sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} & \text{鈍角三角形} \end{cases} \geq \min \sum^3 r^2 \quad \square$$

(二) 上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 的最小值隨著 N 遞增而嚴格遞減。

定理 9. 上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 隨著 N 遞增而嚴格遞減。

$$\text{Proof. } R^2 \cdot \frac{A_n}{B_n} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1+\sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1-\sin \alpha]^n}{[1+\sin \alpha]^n - [1-\sin \alpha]^n} = R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1 + [\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}]^n}{1 - [\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}]^n}$$

$\because 0 < \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} < 1$ ，故 $[\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}]^n$ 為以 n 為變數的嚴格遞減函數。

故上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 隨著 N 遞增嚴格遞減。 $\square$

二、當 $n \rightarrow \infty$ ，上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 的最小值和各個覆蓋圓半徑的極限。

討論 3. 當 $n \rightarrow \infty$ ，上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 的最小值的極限。

$\because f(x)$ 嚴格遞減且 $f(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在 (遞減且有下界)

$$\therefore \text{當 } n \rightarrow \infty, R^2 \cdot \frac{A_n}{B_n} = R^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin \alpha))} \rightarrow R^2 \cdot \sin \alpha \quad (\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1) \quad \square$$

討論 4. 當 $n \rightarrow \infty$ ，上下型覆蓋圓組的 r_k 的極限。

同樣的，當 $n \rightarrow \infty$ ，（已知 $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow \sin\alpha$ 、 $\frac{B_n}{B_{n-1}} = \frac{A_{n-1}+B_{n-1}}{B_{n-1}} \rightarrow \sin\alpha+1$ ）

$$\begin{aligned}
 r_{n-k} &= R \cdot \frac{\sqrt{A_{n-k}^2 + B_{n-k}^2 \cdot \sin^2\alpha - 2A_{n-k} \cdot B_{n-k} \cdot \sin^2\alpha}}{B_n} \cdot \cos^{k-1}\alpha \\
 &= R \cdot \sqrt{\left(\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\right)^2 + \sin^2\alpha - 2\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}} \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{B_{n-k}}{B_n} \cdot \cos^{k-1}\alpha \\
 &= R \cdot \sqrt{\left(\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}}\right)^2 + \sin^2\alpha - 2\frac{A_{n-k}}{B_{n-k}} \cdot \sin^2\alpha} \cdot \frac{B_{n-k}}{B_{n-k+1}} \cdot \frac{B_{n-k+1}}{B_{n-k+2}} \cdots \frac{B_{n-1}}{B_n} \cdot \cos^{k-1}\alpha \\
 &\rightarrow R \cdot \sqrt{2\sin^2\alpha - 2\sin^3\alpha} \cdot \left(\frac{1}{1+\sin\alpha}\right)^k \cdot \cos^{k-1}\alpha = R \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2-2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^{2k}}} \cdot \cos^{2k-2}\alpha \\
 &= R \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2-2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)^{2k}} \cdot (1+\sin\alpha)^{k-1} (1-\sin\alpha)^{k-1}} = R \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{1+\sin\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}^k \quad (k=0, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

令人驚訝的是，當 $n \rightarrow \infty$ ，上下型覆蓋圓組中各覆蓋圓的半徑成「等比」的關係，正是體現了遞迴關係的美妙特性！

三、上下型覆蓋圓組的 $\sum_{k=0}^n r^2$ 的最小值中的係數。

我們實際將 $\frac{\sin\alpha \cdot [1+\sin\alpha]^n + \sin\alpha \cdot [1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n}$ 展開：

$$\frac{A_1}{B_1} = 1, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{\sin^2\alpha+1}{2}, \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{\sin^2\alpha+3}{3\sin^2\alpha+1}, \quad \frac{A_4}{B_4} = \frac{\sin^4\alpha+6\sin^2\alpha+1}{4\sin^2\alpha+4}.$$

不難注意到，上式中的係數就是二項式係數，下面我們進行證明：

定理 10. 上下型覆蓋圓組的 $\sum_{k=0}^n r^2$ 的最小值中的係數為二項式係數。

$$\text{Proof. } \frac{A_n}{B_n} = \frac{\sin\alpha \cdot [1+\sin\alpha]^n + \sin\alpha \cdot [1-\sin\alpha]^n}{[1+\sin\alpha]^n - [1-\sin\alpha]^n} = \sin\alpha \cdot \frac{\sum_{k=0}^n C_k^n \cdot \sin^k\alpha + \sum_{k=0}^n C_k^n \cdot (-\sin\alpha)^k}{\sum_{k=0}^n C_k^n \cdot \sin^k\alpha - \sum_{k=0}^n C_k^n \cdot (-\sin\alpha)^k}$$

當 n 為偶數，令 $n = 2s$ ，

$$= \sin\alpha \cdot \frac{2 \cdot \sum_{m=0}^s C_{2m}^n \cdot \sin^{2m}\alpha}{2 \cdot \sum_{m=0}^{s-1} C_{2m+1}^n \cdot \sin^{2m+1}\alpha} = \frac{\sum_{m=0}^s C_{2m}^n \cdot \sin^{2m}\alpha}{\sum_{m=0}^{s-1} C_{2m+1}^n \cdot \sin^{2m+1}\alpha} = \frac{C_0^n + C_2^n \cdot \sin^2\alpha + \dots + C_n^n \cdot \sin^n\alpha}{C_1^n + C_3^n \cdot \sin^2\alpha + \dots + C_{n-1}^n \cdot \sin^n\alpha}$$

當 n 為奇數，令 $n = 2s+1$ ，

$$= \sin\alpha \cdot \frac{2 \cdot \sum_{m=0}^s C_{2m}^n \cdot \sin^{2m}\alpha}{2 \cdot \sum_{m=0}^s C_{2m+1}^n \cdot \sin^{2m+1}\alpha} = \frac{\sum_{m=0}^s C_{2m}^n \cdot \sin^{2m}\alpha}{\sum_{m=0}^s C_{2m+1}^n \cdot \sin^{2m+1}\alpha} = \frac{C_0^n + C_2^n \cdot \sin^2\alpha + \dots + C_{n-1}^n \cdot \sin^{n-1}\alpha}{C_1^n + C_3^n \cdot \sin^2\alpha + \dots + C_n^n \cdot \sin^n\alpha} \quad \square$$

定理 11. 當 α 為三角形中的最小角，上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 最小。 ($0 < \alpha < 90^\circ$)

Proof. $R^2 \cdot \frac{A_n}{B_n} = R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1 + [\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}]^n}{1 - [\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}]^n}$ ，當 α 遞減，

$\sin \alpha$ 遞減、 $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ 遞減 ($1 > \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} > 0$)，故 $R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1 + [\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}]^n}{1 - [\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}]^n}$ 遞減。

$\Rightarrow$ 上下型覆蓋圓組的 $\sum^n r^2$ 在 α 最小時達到最小值，故 α 為三角形中的最小角。 $\square$

四、 $N = 3$ 的最小覆蓋圓組。

前文中提到，在兩點型覆蓋圓中，對於任一三角形，我們仍需比較「6 種」不同大小的角度排列組合，而現在我們證明當中僅有「1 種」情況是最小值：

定理 12. 對於銳角或直角三角形，兩點型覆蓋圓組的最小值 $\sum^n r^2$ 為

$R^2 \cdot [\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2}]$ ，其中 α 為三角形中的最小角、 β 為第二小角。

Proof. 對於銳角三角形或直角 ($\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$)，顯然 $\cos^2 \beta$ 越大， $u(t, \beta) =$

$R^2 \cdot [\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2}]$ 越小。故 β 必不是最大角（面積和與 γ 大小無關）。

考慮 $x > 0$ ，令函數 $f(u, v) = \frac{1 + x^2 \cdot (2 - u^2)}{(1 + x \cdot u)^2} - \frac{x^2 \cdot v^2}{2 + 2x \cdot u + x^2}$ ， $g_v(\varepsilon) = f(v, v + \varepsilon) - f(v + \varepsilon, v)$ 。

對任意正數 $\varepsilon > 0$ ，我們要證明 $g_v'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(v, v + \varepsilon) - f(v + \varepsilon, v)}{\varepsilon} > 0$ ($v \in (-1, 1)$)：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\frac{1 + x^2 \cdot (2 - v^2)}{(1 + x \cdot v)^2} - \frac{x^2 \cdot (v + \varepsilon)^2}{2 + 2x \cdot v + x^2}] - [\frac{1 + x^2 + x^2 \cdot (1 - (v + \varepsilon)^2)}{(1 + x \cdot (v + \varepsilon))^2} - \frac{x^2 \cdot v^2}{2 + 2x \cdot (v + \varepsilon) + x^2}]}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\frac{(1 + x^2 \cdot (2 - v^2))(1 + x \cdot (v + \varepsilon))^2 - (1 + x \cdot v)^2(1 + x^2 + x^2 \cdot (1 - (v + \varepsilon)^2))}{(1 + x \cdot v)^2(1 + x \cdot (v + \varepsilon))^2}$$

$$+ \frac{(x^2 \cdot v^2)(2 + 2x \cdot v + x^2) - (2 + 2x \cdot (v + \varepsilon) + x^2)(x^2 \cdot (v + \varepsilon)^2)}{(2 + 2x \cdot (v + \varepsilon) + x^2)(2 + 2x \cdot v + x^2)}] / \varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\frac{(1 + x^2 \cdot (2 - v^2))(2(1 + x \cdot v) + x\varepsilon) - (1 + x \cdot v)^2 x(-2v - \varepsilon)}{(1 + x \cdot v)^2(1 + x \cdot (v + \varepsilon))^2} \varepsilon x$$

$$- \frac{(2 + 2x \cdot v + x^2)(2v + \varepsilon) + 2x \cdot v^2 + 2x\varepsilon^2}{(2 + 2x \cdot (v + \varepsilon) + x^2)(2 + 2x \cdot v + x^2)} \varepsilon x^2] / \varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x \cdot [\frac{(1 + x^2 \cdot (2 - v^2))(2(1 + x \cdot v) + x\varepsilon) + (1 + x \cdot v)^2 x(2v + \varepsilon)}{(1 + x \cdot v)^2(1 + x \cdot (v + \varepsilon))^2} -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(2+2x \cdot v+x^2)(2v+\varepsilon)+2x \cdot v^2+2x\varepsilon^2}{(2+2x \cdot (v+\varepsilon)+x^2)(2+2x \cdot v+x^2)} x] \\
= & x \cdot \left[\frac{(1+x^2 \cdot (2-v^2))2(1+x \cdot v)+(1+x \cdot v)^2x(2v)}{(1+x \cdot v)^4} - \frac{(2+2x \cdot v+x^2)(2v)+2x \cdot v^2}{(2+2x \cdot v+x^2)^2} x \right] \\
= & x \cdot \left[\frac{4v \cdot x^3+(6v^2+4(1-v^2))x^2+4x \cdot v+2}{(1+x \cdot v)^4} - \frac{2v \cdot x^3+6x^2 \cdot v^2+4x \cdot v}{(2+2x \cdot v+x^2)^2} \right] \\
= & x \cdot \left[\frac{4v \cdot x^3+6x^2 \cdot v^2+4x \cdot v}{(1+x \cdot v)^4(2+2x \cdot v+x^2)^2} [(2+2x \cdot v+x^2)^2-(1+x \cdot v)^4] + \frac{4x^2 \cdot (1-v^2)+2}{(1+x \cdot v)^4} + \right. \\
& \left. \frac{2v \cdot x^3}{(2+2x \cdot v+x^2)^2} \right] \\
= & x \cdot \left[\frac{4v \cdot x^3+6x^2 \cdot v^2+4x \cdot v}{(1+x \cdot v)^4(2+2x \cdot v+x^2)^2} [(2+2x \cdot v+x^2)-(1+2x \cdot v+x^2 \cdot v^2)] + \frac{4x^2 \cdot (1-v^2)+2}{(1+x \cdot v)^4} + \right. \\
& \left. \frac{2v \cdot x^3}{(2+2x \cdot v+x^2)^2} \right] \\
= & x \cdot \left[\frac{4v \cdot x^3+6x^2 \cdot v^2+4x \cdot v}{(1+x \cdot v)^4(2+2x \cdot v+x^2)^2} [(1+x^2 \cdot (1-v^2))][3+4x \cdot v+(1+v^2)x^2] + \right. \\
& \left. \frac{4x^2 \cdot (1-v^2)+2}{(1+x \cdot v)^4} + \frac{2v \cdot x^3}{(2+2x \cdot v+x^2)^2} \right] > 0
\end{aligned}$$

故當 $\varepsilon > 0$, $g_v'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(v, v+\varepsilon) - f(v+\varepsilon, v)}{\varepsilon} > 0$, , 即 $g_v(\varepsilon)$ 是在 $\varepsilon > 0$ 是嚴格遞增函數。

又 $g_v(0) = 0$, 故 $g_v(\varepsilon) > g_v(0) = 0 \Rightarrow f(v, v+\varepsilon) > f(v+\varepsilon, v)$ 。也就是說，對於同樣的 x 且 $u, v \in (0, 1)$ 開區間，若 $u > v$, 則 $f(v, u) > f(u, v)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \left[\frac{1+x^2 \cdot (2-v^2)}{(1+x \cdot v)^2} - \frac{x^2 \cdot u^2}{2+2x \cdot v+x^2} \right] > \left[\frac{1+x^2 \cdot (2-u^2)}{(1+x \cdot u)^2} - \frac{x^2 \cdot v^2}{2+2x \cdot u+x^2} \right] \\
\Rightarrow & \left[\frac{1+t_{vu}^2 \cdot (2-v^2)}{(1+t_{vu} \cdot v)^2} - \frac{t_{vu}^2 \cdot u^2}{2+2t_{vu} \cdot v+t_{vu}^2} \right] > \left[\frac{1+t_{vu}^2 \cdot (2-u^2)}{(1+t_{vu} \cdot u)^2} - \frac{t_{vu}^2 \cdot v^2}{2+2t_{vu} \cdot u+t_{vu}^2} \right] \\
\geq & \left[\frac{1+t_{uv}^2 \cdot (2-u^2)}{(1+t_{uv} \cdot u)^2} - \frac{t_{uv}^2 \cdot v^2}{2+2t_{uv} \cdot u+t_{uv}^2} \right] 。
\end{aligned}$$

(t_{vu} 、 t_{uv} 為滿足面積最小值 (上式) 的 x)

所以若 $90^\circ \geq \gamma \geq \beta \geq \alpha$, 則兩點型的最小值為 $R^2 \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2+2t \cdot \cos \alpha+t^2} \right]$,

其中 t 滿足 $w(t) = (2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha)t^5 + (7 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 5 \cos^2 \beta \cdot \cos^3 \alpha)t^4 + (8 - 4 \cos^4 \alpha - 9 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha)t^3 + (12 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha - 7 \cos^2 \beta \cdot \cos \alpha)t^2 + (8 - 12 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta)t - 4 \cos \alpha = 0$

由此便確定兩點型角度的唯一情況。 □

因為我們難以直接說明 $f(v, v+\varepsilon) - f(v+\varepsilon, v) > 0$, 於是我們構造一個函數 $g_v(\varepsilon)$, 說明 $g_v(0) = 0$ 且 g_v 在 $\varepsilon > 0$ 是嚴格遞增的，如此就能說明 $f(v, v+\varepsilon) > f(v+\varepsilon, v)$ 了！

而在此定理被證明前，我們需要考慮所有 α, β, γ 的大小關係，並一一代入，找出「6 種」不同大小的角度排列組合中，覆蓋圓面積總和最小的。而現在我們證明當中僅有「1 種」情況是最小值，大幅降低了運算量。

定理 13. 對於鈍角三角形，兩點型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值為

$$\begin{cases} L^2 \cdot u(t, \varphi) = \frac{L^2}{4\sin^2(\alpha+\varphi)} \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta \leq \varphi \\ L^2 \cdot u(t, \beta) = R^2 \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta > \varphi \end{cases},$$

其中 t 滿足 $n(t)=0$ ， $\varphi = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{((2-\cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}{t(1+t \cdot \cos \alpha)^3(2+t \cdot \cos \alpha)}} \right)$ 。

考慮一個函數

$$f(x) = u(t, x) = \frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)} \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]。$$

當 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，

當 x 遞減，左式 $\frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)}$ 遞增，右式 $\left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$ 遞減；

當 x 遞增，左式 $\frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)}$ 遞減，右式 $\left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$ 遞增。

故 $f(x)$ 應在區間 $(0, \frac{\pi}{2} - \alpha)$ 有極小值。

當 $\frac{\pi}{2} - \alpha \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ，

當 x 遞減，左式 $\frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)}$ 遞減，右式 $\left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$ 遞減；

當 x 遞增，左式 $\frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)}$ 遞增，右式 $\left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$ 遞增。

故 $f(x)$ 在區間 $(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2})$ 無極小值。

有此即得 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2} - \alpha$ 。

而在尋找 $u(t, \varphi) = \frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)} \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$ 的極小值時，並無討論到 β ，也就是 β 與 $u(t, \varphi)$ 互相獨立。

當 $\beta \leq \varphi$ ，此時兩點型覆蓋圓組完全覆蓋三角形，於是我們可以選擇此 φ 值來覆蓋；而

當 $\beta > \varphi$ ，此時兩點型覆蓋圓組沒有完全覆蓋三角形，需要退而求其次，選擇 $x = \beta$ 來覆蓋，

下面我們說明 $f(x) = u(t, x)$ 在 $x > \varphi$ 時遞增。

$$u(t, \varphi) = \frac{1}{4\sin^2(\alpha+x)} \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 x}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right]$$

$$\frac{df}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{\cos(\alpha+x)}{\cos x} < \frac{t^2 \cos \alpha (1+t \cdot \cos \alpha)^2}{((2-\cos^2 \alpha)t^2+1)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)}。$$

$$\Rightarrow \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \tan x < \frac{t^2 \cos \alpha (1+t \cdot \cos \alpha)^2}{((2-\cos^2 \alpha)t^2+1)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 x > \left[\cos \alpha - \frac{t^2 \cos \alpha (1+t \cdot \cos \alpha)^2}{((2-\cos^2 \alpha)t^2+1)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)} \right]^2$$

$$\text{且 } \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \varphi = \left[\cos \alpha - \frac{t^2 \cos \alpha (1+t \cdot \cos \alpha)^2}{((2-\cos^2 \alpha)t^2+1)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)} \right]^2$$

$$\text{故當 } \frac{\pi}{2} > x > \varphi > 0, \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 x > \sin^2 \alpha \cdot \tan^2 \varphi = \left[\cos \alpha - \frac{t^2 \cos \alpha (1+t \cdot \cos \alpha)^2}{((2-\cos^2 \alpha)t^2+1)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)} \right]^2$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $(\varphi, \frac{\pi}{2})$ 遞增，故我們取 $x = \beta$ 來覆蓋三角形會使得兩點型覆蓋圓組完全覆蓋三角

形且面積最小。於是我們有，兩點型覆蓋圓組 $\sum^n r^2$ 的最小值為

$$\begin{cases} L^2 \cdot u(t, \varphi) = \frac{L^2}{4\sin^2(\alpha+\varphi)} \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta \leq \varphi \\ L^2 \cdot u(t, \beta) = R^2 \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1+t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2+2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta > \varphi \end{cases},$$

其中 t 滿足 $n(t) = 0$ ， $\varphi = \cos^{-1}(\sqrt{\frac{((2-\cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2+2t \cdot \cos \alpha+2)^2}{t(1+t \cdot \cos \alpha)^3(2+t \cdot \cos \alpha)}})$ 。 $\square$

討論 5. 當 $N = 3$ ，四種覆蓋圓組是否皆可能為最小覆蓋圓組？

下面我們說明上下型、重心型、四點型覆蓋圓組皆有可能是最小覆蓋圓組：

我們首先考慮正三角形，此時 $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ 。

$$\text{對於上下型覆蓋圓組，} \sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{3\sin^2(\frac{\pi}{3})+1}{\sin^2(\frac{\pi}{3})+3} = R^2 \cdot \frac{9/4+1}{3/4+3} = R^2 \cdot \frac{13}{15} \approx 0.8667 R^2 ;$$

$$\text{對於重心型覆蓋圓組，} \sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{3\sin^2(\frac{\pi}{3})}{3} = R^2 \cdot \sin^2\frac{\pi}{3} = R^2 \cdot \frac{3}{4} = 0.75 R^2 ;$$

對於四點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot s(x,p)$ ，其中

$$\begin{aligned} s(x,p) &= \left[\frac{3(p^2-x^2)^2}{16\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}} - (p \cdot \sin(0) + x \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})) \cdot \frac{p^2-x^2}{4\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}} + (p^2+x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{3}} \right) + \frac{px}{2\sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}} \cdot \sin(\frac{2\pi}{3})\sin(0) - p \cdot \sin(0) + x \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3} \right] \\ &= \frac{3(p^2-x^2)^2}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \cdot \frac{4(p^2-x^2)}{9} + (p^2+x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{9}{16} \\ &= \frac{p^4-2p^2x^2+x^4}{3} + \frac{2\sqrt{3}(p^2-x^2)x}{9} + \frac{7}{6} (p^2+x^2) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{15}{16} \\ &= \frac{1}{3} (p^4 - 2(x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4}) p^2 + (x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4})^2) + \frac{x^4}{3} - \frac{2\sqrt{3}x^3}{9} + \frac{7}{6} x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{15}{16} \\ &\quad - \frac{1}{3} (x^4 - \frac{2\sqrt{3}x^3}{3} - \frac{19}{6} x^2 + \frac{7\sqrt{3}x}{6} + \frac{49}{16}) \\ &= \frac{1}{3} (p^2 - (x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4}))^2 + \frac{20}{9} x^2 - \frac{8\sqrt{3}}{9} \cdot x - \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3} (p^2 - (x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4}))^2 + \frac{20}{9} (x - \frac{\sqrt{3}}{5})^2 - \frac{7}{20} \end{aligned}$$

$$\text{若極值發生在 } x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4} \geq 0, \text{ 則 } x \geq \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} + 7}}{2} \geq \frac{1 + \sqrt{22}}{2\sqrt{3}} \quad (x > 0),$$

$$s(x,p) \geq \frac{20}{9} (x - \frac{\sqrt{3}}{5})^2 - \frac{7}{20} \geq \frac{20}{9} \left(\frac{5\sqrt{22}-1}{10\sqrt{3}} \right)^2 - \frac{7}{20} \approx 3.384 \quad (p^2 = x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4} \geq 0)$$

$$\text{若極值發生在 } x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4} < 0, \text{ 則 } 0 < x < \frac{1 + \sqrt{22}}{2\sqrt{3}},$$

此時 $p=0$ 會使得 $s(x,p)$ 最小 ($p^2 - (x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4}) > 0$)。

$$\begin{aligned} s(x,0) &= \frac{1}{3}(x^2 - \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{7}{4})^2 + \frac{20}{9}(x - \frac{\sqrt{3}}{5})^2 - \frac{7}{20} \\ &= \frac{x^4}{3} - \frac{2\sqrt{3}x^3}{9} + \frac{7}{6}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

此極小值發生在 $s(0.4156,0) \approx 0.7614$ 。顯然 $3.384 > 0.7614$ ，

故對於四點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot s(x,p)$ 的最小值 $= R^2 \cdot s(0.4156,0) \approx 0.7614 R^2$ ；

對於兩點型覆蓋圓組，

$$R^2 \cdot \left[\frac{1+t^2+t^2 \cdot \sin^2(\frac{\pi}{3})}{(1+t \cdot \cos(\frac{\pi}{3}))^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{3})}{2+2t \cdot \cos(\frac{\pi}{3})+t^2} \right] = R^2 \cdot \left[\frac{4+7t^2}{(2+t)^2} - \frac{t^2}{8+4t+4t^2} \right]$$

其中 t 滿足 $w(t) = (2 - \cos^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^4 \frac{\pi}{3})t^5 + (7\cos \frac{\pi}{3} - 4\cos^3 \frac{\pi}{3} - 5\cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^3 \frac{\pi}{3})t^4 +$

$(8 - 4\cos^4 \frac{\pi}{3} - 9\cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{3})t^3 + (12\cos \frac{\pi}{3} - 12\cos^3 \frac{\pi}{3} - 7\cos^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3})t^2 + (8 - 12\cos^2 \frac{\pi}{3} - 2\cos^2 \frac{\pi}{3})t$

$- 4\cos \frac{\pi}{3} = 0$

$$\Rightarrow w(t) = (128 - 16 - 1) \frac{t^5}{2^6} + (112 - 16 - 5) \frac{t^4}{2^5} + (128 - 4 - 9) \frac{t^3}{2^4} + (48 - 12 - 7) \frac{t^2}{2^3}$$

$$+ (32 - 12 - 2) \frac{t}{2^2} - \frac{4}{2} = 0$$

$$\Rightarrow w(t) = 111 \cdot \frac{t^5}{2^5} + 91 \cdot \frac{t^4}{2^4} + 115 \cdot \frac{t^3}{2^3} + 29 \cdot \frac{t^2}{2^2} + 18 \cdot \frac{t}{2} - 4 = 0 \quad , \text{解得 } t = 0.3112 ,$$

故對於兩點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \left[\frac{4+7t^2}{(2+t)^2} - \frac{t^2}{8+4t+4t^2} \right] \approx 0.8657 R^2$ 。

$\therefore \min \sum^3 r^2 = 0.75 R^2$ (重句型)。

(重句型 $0.75 R^2 < \text{四點型 } 0.7614 R^2 < \text{兩點型 } 0.8657 R^2 < \text{上下型 } 0.8667 R^2$)

接下來考慮等腰直角三角形，此時 $\alpha = \beta = 45^\circ$ ， $\gamma = 90^\circ$ 。

對於上下型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{3\sin^2(\frac{\pi}{2})+1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})+3} = R^2 \cdot \frac{3/2+1}{1/2+3} = R^2 \cdot \frac{5}{7} \approx 0.7143 R^2$ ；

對於重心型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{3} = R^2 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.6667 R^2$ ；

對於四點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot s(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}, 0) = \frac{2 + \sqrt[3]{2}}{6} \approx 0.5433 R^2$ ；

對於兩點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot [\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2(\frac{\pi}{2})}{(1 + t \cdot \cos(\frac{\pi}{2}))^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2(\frac{\pi}{2})}{2 + 2t \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + t^2}]$

$$= R^2 \cdot [\frac{2 + 3t^2}{(\sqrt{2} + t)^2} - \frac{t^2}{4 + 2\sqrt{2}t + 2t^2}] \approx 0.7030 R^2 \quad (\text{此時 } t = 0.6099)。$$

$\therefore \min \sum^3 r^2 \approx 0.5433 R^2$ （四點型）。

（四點型 $0.5433 R^2 <$ 重心型 $0.6667 R^2 <$ 兩點型 $0.7030 R^2 <$ 上下型 $0.7143 R^2$ ）

接下來考慮一個極端情況， $\alpha = 0^\circ$ ， $\beta = \gamma = 90^\circ$ 。

對於上下型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{3\sin^2(0) + 1}{\sin^2(0) + 3} = R^2 \cdot \frac{1}{3} \approx 0.3333 R^2$ ；

對於重心型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{0 + 1 + 1}{3} = R^2 \cdot \frac{2}{3} \approx 0.6667 R^2$ ；

對於四點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot s(x, p)$ 的最小值，其中

$$\begin{aligned} s(x, p) &= \frac{3(p^2 - x^2)^2}{16\sin^2\beta\sin^2\gamma} - (p \cdot \sin(\gamma - \beta) - x \cdot \sin(\beta + \gamma)) \cdot \frac{p^2 - x^2}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma} + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\sin^2\beta} + \frac{1}{4\sin^2\gamma} \right) \\ &\quad - \frac{px}{2\sin^2\beta\sin^2\gamma} \cdot \sin(\beta + \gamma)\sin(\gamma - \beta) - p \cdot \sin(\gamma - \beta) - x \cdot \sin(\beta + \gamma) + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\beta\sin^2\gamma \\ &= \frac{3(p^2 - x^2)^2}{16} + (p^2 + x^2) + 2 - 1 \geq 1 = s(0, 0) \end{aligned}$$

故對於四點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot s(0, 0) = 1 R^2$ ；

對於兩點型覆蓋圓組， $\sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{1 + t^2}{(1 + t)^2} = 0.5 R^2$ （此時 $t = 1$ ）。

$\therefore \min \sum^3 r^2 \approx 0.3333 R^2$ （上下型）。

（上下型 $0.3333 R^2 <$ 兩點型 $0.5 R^2 <$ 重心型 $0.6667 R^2 <$ 四點型 $1 R^2$ ）

故我們取了三種特殊三角形證明了上下型、重心型、四點型覆蓋圓組皆有可能是最小覆蓋圓組，然而目前我們沒有找到滿足兩點型為最小覆蓋圓組的三角形，我們將嘗試證明或舉出反例。

討論 6. 當 $N = 3$ ，重心型、上下型和兩點型的大小關係。

考慮重心型、上下型的大小關係，我們先求兩種覆蓋圓面積和相等的 α, β ：

$$\text{對於銳角三角形，令 } \frac{R^2}{3} (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = R^2 \cdot \frac{3\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 \cdot \frac{3\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma = \frac{-2\sin^4\alpha + 12\sin^2\alpha + 6}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow (1 - \cos 2\beta) + (1 - \cos 2\gamma) = \frac{-2\sin^4\alpha + 12\sin^2\alpha + 6}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \frac{2\sin^4\alpha - 10\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{2\beta + 2\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{2\beta - 2\gamma}{2}\right) = \frac{2\sin^4\alpha - 10\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow \cos(\pi - \alpha)\cos(\beta - \gamma) = \frac{\sin^4\alpha - 5\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow \gamma - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha - 4}{\cos^3\alpha - 4\cos\alpha}\right) \quad (\text{令 } \gamma \geq \beta)$$

$$\Rightarrow \pi - 2\beta - \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha - 4}{\cos^3\alpha - 4\cos\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \cdot [\pi - \alpha - \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4\alpha + 3\cos^2\alpha - 4}{\cos^3\alpha - 4\cos\alpha}\right)]$$

$$\text{對於鈍角或直角三角形，令 } \frac{R^2}{3} (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = \frac{L^2}{4} \cdot \frac{3\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + 3}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 \cdot \frac{3\sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + 3} \cdot \sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3} \cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha + 2(\sin^2\alpha \cdot \cos^2\gamma + \cos^2\alpha \cdot \sin^2\gamma + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos\gamma) = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3} \cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\alpha + (\sin^2\alpha \cdot (1 + \cos 2\gamma) + (1 - \sin^2\alpha) \cdot (1 - \cos 2\gamma) + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\gamma) = \frac{8\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + 3} \cdot 2\sin^2\gamma$$

$$\Rightarrow \sin 2\gamma \cdot (2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (\sin^2\alpha + 3)) + \cos 2\gamma \cdot (2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3) = (-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(2\gamma + \sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3}{\sqrt{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot (\sin^2\alpha + 3)^2 + (2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3)^2}}\right)) \\ = \frac{-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3}{\sqrt{4\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot (\sin^2\alpha + 3)^2 + (2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3)^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\gamma + \sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) + 2k\pi$$

$$\text{or } 2\gamma + \sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) = \pi + 2k\pi$$

經檢驗，第一式不符合 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ，故

$$2(\pi - \beta - \alpha) + \sin^{-1}\left(\frac{2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3}{\sqrt{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}}\right) = \pi$$

化簡得到 $\beta =$

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left[2\sin\alpha(\sin^2\alpha + 3) \cdot \frac{(2\sin^4\alpha + 13\sin^2\alpha - 3)\cos^2\alpha + (-2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 3)\sqrt{-\sin^4\alpha + 12\sin^2\alpha - 3}}{32\sin^6\alpha + 145\sin^4\alpha - 42\sin^2\alpha + 9}\right]$$

我們利用 *GeoGebra* 模擬，結果如下圖 9-1。圖中 x 座標表示 α ， y 座標表示 β （弧度），紫色區域和藍色區域為滿足 (x, y) 為三角形和 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ 的區域，紫色區域為鈍角三角形，藍色區域為銳角三角形，交界處為直角三角形。

當 (x, y) 在曲線上方時，上下型 < 重心型，

當 (x, y) 在曲線上時，上下型 = 重心型，

當 (x, y) 在曲線下方時，上下型 > 重心型。

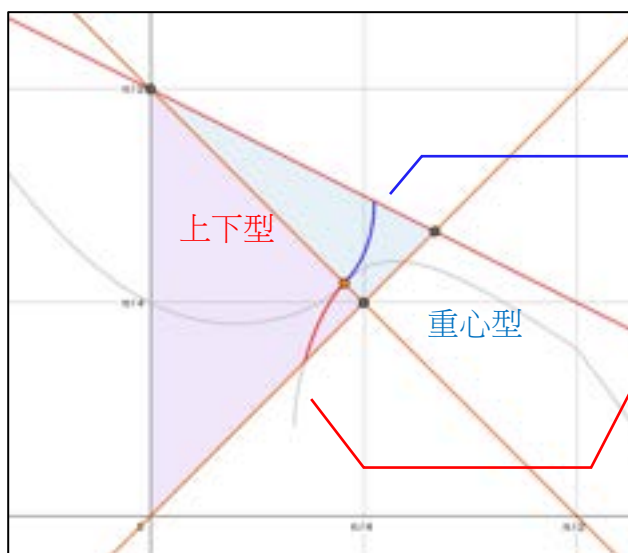


圖 9-1 來源：*GeoGebra*

作者自行繪製

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left[\pi - x - \cos^{-1}\left(\frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x - 4}{\cos^3 x - 4\cos x}\right) \right]$$

$$y = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left[2\sin x(\sin^2 x + 3) \cdot \frac{(2\sin^4 x + 13\sin^2 x - 3)\cos^2 x + (-2\sin^4 x + \sin^2 x - 3)\sqrt{-\sin^4 x + 12\sin^2 x - 3}}{32\sin^6 x + 145\sin^4 x - 42\sin^2 x + 9}\right]$$

$$\frac{(2\sin^4 x + 13\sin^2 x - 3)\cos^2 x + (-2\sin^4 x + \sin^2 x - 3)\sqrt{-\sin^4 x + 12\sin^2 x - 3}}{32\sin^6 x + 145\sin^4 x - 42\sin^2 x + 9}$$

雖然我們難以用解析解的形式表達兩點型與重心型、上下型覆蓋圓組的大小關係，我們仍可以用 *GeoGebra* 模擬。此外，因為四點型的情況難以用電腦模擬所有情況，於是我們取重心型、上下型、兩點型比較三種覆蓋圓面積總和的大小

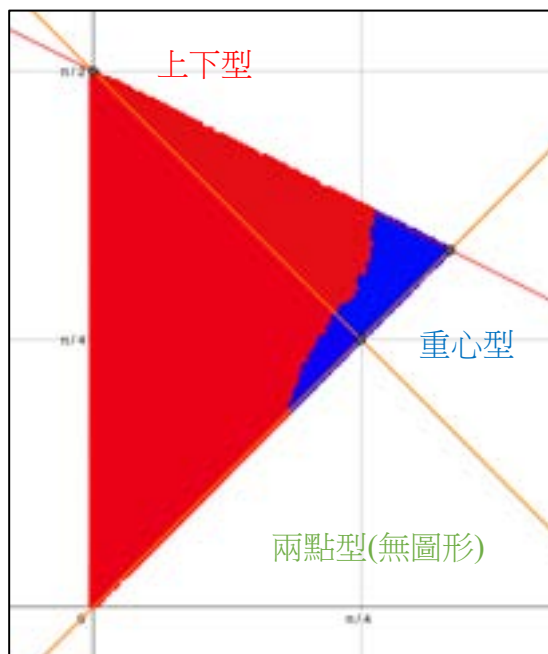


圖 9-2 來源：*GeoGebra* 作者自行繪製

上圖 9-2 中，紅色點為上下型是三種覆蓋圓組中最小的 (α, β) 、藍色點為重心型、綠色點為兩點型。雖然 *GeoGebra* 無法直接計算整塊三角形區域的覆蓋圓組面積大小，不過我們透過改變 (α, β) ，計算三種不同覆蓋圓組（重心型、上下型、兩點型）中，最小的為何種覆蓋圓組，並將該點塗色（即作 (α, β) 的「軌跡」）。

而我們便可以透過觀察上圖大致確定三種覆蓋圓組為最小覆蓋圓組的分佈區域。可以觀察到圖中並沒有綠色的點，也就是「兩點型覆蓋圓組並不是最小覆蓋圓組」！不過我們仍需透過代數證明，目前我們正嘗試證明此定理。值得注意的是，兩點型並不總是總面積和最大的覆蓋圓組，並且兩點型覆蓋圓組不是最小覆蓋圓組的幾何意義仍是我們關注的重點。

五、各覆蓋圓之間連心線

在前面的研究中，我們發現對於四點型的研究，我們已經無法使用引理 1、2，求出面積總和的最小值。於是我們想利用連心線，嘗試從已知條件中找出更多滿足圓為最小覆蓋圓的必要條件。

我們先證明稍後會重複用到的引理：

引理 如右圖 9-3，在圓 O 中， M 為 B 、 C 中點，則 $\angle BAC = \angle MOC$ 。

Proof.

由圓周角和圓心角，

$$2\angle BAC = (\text{弧 } BC) = \angle BOC = 2\angle MOC。$$

故 $\angle BAC = \angle MOC$ $\square$

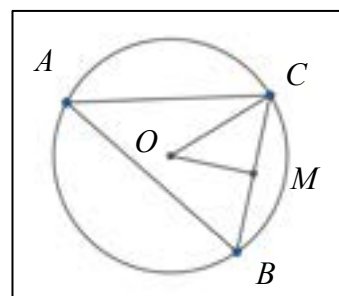


圖 9-3 來源：GeoGebra
作者自行繪製

接下來我們開始討論最小覆蓋圓中，連心線的性質：

1. $N=2$ 最小覆蓋圓

定理 14. $\overline{O_1O_2} = R$ ，且 $O_1O_2 \parallel AO$ 。(即四邊形 AO_1O_2O 為平行四邊形)

Proof.

符號如圖 9-4 所示。連結 $\overline{O_1O_2}$ ，由引理， $\angle A = \angle O_2O_1D$ 、

$$\angle EBD = \angle O_1O_2D。$$

故 $\triangle O_1O_2D \sim \triangle ABD$ (AA 相似)

$$\overline{O_1O_2} = \overline{AB} \cdot \frac{r_1}{AD} = \overline{AB} \cdot \frac{R}{AB} = R$$

($\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$)

$$\angle BAO = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \angle DEA$$

故 $AO \perp DE$ ，又 $O_1O_2 \perp DE$ (連心線) $\Rightarrow \overline{O_1O_2} \parallel \overline{AO}$ $\square$

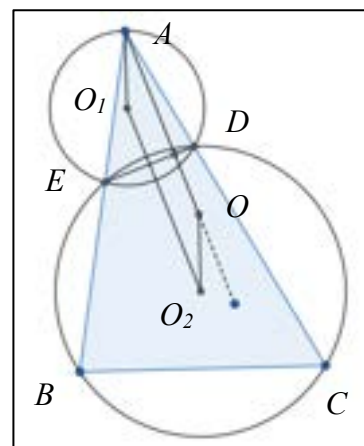


圖 9-4 來源：GeoGebra
作者自行繪製

由此，我們證明了四邊形 AO_1O_2O 為兩邊長為 R 和 r_1 的平行四邊形，那麼我們想知道平行四邊形中， $\angle O_1AO$ 的大小。

$$\angle O_1AO = \angle O_1AC - \angle OAC = (90^\circ - \frac{1}{2} \angle DO_1A) - (90^\circ - \frac{1}{2} \angle COA) = \angle CBA - \angle DEA = |\beta - \gamma|。$$

求出了 $\angle O_1AO$ ，我們就可以確定平行四邊形 AO_1O_2O 的形狀了。

2. 上下型覆蓋圓組

我們先定義一些名詞，在上下型覆蓋圓組中，

外接圓 C_k ：被 $O_1, O_2, \dots, O_k$ 覆蓋的三角形的外接圓， C_n 即為原三角形外接圓 O 。

外接圓半徑 R_k ： C_k 的半徑， R_n 即為原三角形外接圓半徑 R 。

定理 15. C_k, O_k, O_{k+1} 共線； $A, C_2, C_4, \dots, C_{2n}$ 共線；

$A, C_1, C_3, \dots, C_{2n-1}$ 共線。 $(k = 1, 2, \dots)$

Proof.

如圖 9-5，由相似可得 $\triangle ABC$ 與 $\triangle AB''C''$ 位似，位似中心為 A ，故 A, C_1, C_3 共線。更一般地說，外接圓為 $C_1, C_3, \dots, C_{2n-1}$ 的所有三角形皆位似，位似中心為 A 。

故 $A, C_1, C_3, \dots, C_{2n-1}$ 共線。

同理， $A, C_2, C_4, \dots, C_{2n}$ 共線。

對於 C_k, O_k, O_{k+1} ，顯然他們都通過 D, E 兩點，

故 C_k, O_k, O_{k+1} 皆在 $\overline{DE}$ 的中垂線上。 $\square$

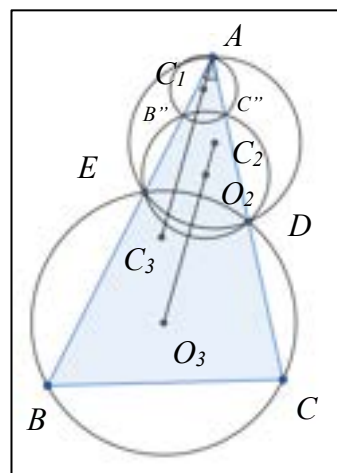


圖 9-5 來源：GeoGebra
作者自行繪製

定理 16. $AO_1 \parallel O_2O_3 \parallel O_4O_5 \parallel O_6O_7 \parallel \dots$; $O_1O_2 \parallel O_3O_4 \parallel O_5O_6 \parallel \dots$ 。

$\overline{O_kO_{k+1}} = R_{k+1} - R_k = R \cdot \frac{2\cosh(k\theta) \sinh(\theta)}{\sinh(n\theta)}$, 且 $\frac{R_k}{\sinh(k\theta)}$ 為一定值 ,

故 $R_k = R \cdot \frac{\sinh(k\theta)}{\sinh(n\theta)}$, 其中 $\theta = \tanh^{-1}(\sin\alpha)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 。

Proof.

由定理 13 , $C_{k-1}O_k \parallel AC_k$ 。

由定理 14 , C_k, O_k, O_{k+1} 共線 $\Rightarrow C_{k-1}O_k \parallel O_{k-1}O_k$ 。(定義 $O_0 = A$)

又 $A, C_2, C_4, \dots, C_{2n}$ 共線 $\Rightarrow AO_2 \parallel AO_4 \parallel \dots \parallel AO_{2n}$;

$A, C_1, C_3, \dots, C_{2n-1}$ 共線 $\Rightarrow AO_1 \parallel AO_3 \parallel \dots \parallel AO_{2n-1}$ 。($k = 1, 2, \dots, n$)

故 $AC_{2n} \parallel C_{2n-1}O_{2n} \parallel O_{2n-1}O_{2n} \Rightarrow O_1O_2 \parallel O_3O_4 \parallel \dots \parallel O_{2n-1}O_{2n}$;

故 $AC_{2n-1} \parallel C_{2n-2}O_{2n-1} \parallel O_{2n-2}O_{2n-1} \Rightarrow AO_1 \parallel O_2O_3 \parallel \dots \parallel O_{2n-2}O_{2n-1}$ 。

由定理 13 , $\overline{C_{k-1}O_k} = R_k$, (四邊形 $AC_{k-1}O_kC_k$ 為平行四邊形)

$$\overline{O_kO_{k+1}} = \overline{C_kO_{k+1}} - \overline{C_kO_k} = R_{k+1} - \overline{AC_{k-1}} = R_{k+1} - R_{k-1}$$

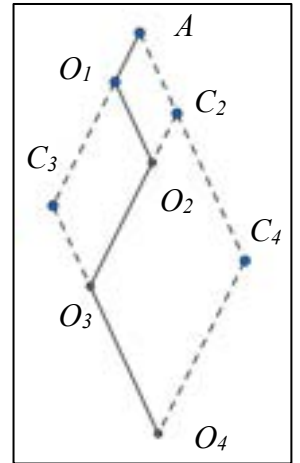


圖 9-6

示意圖 (長度不符合比例)

來源: GeoGebra

作者自行繪製

$$\text{由 } R_{i-1} = R_i \cdot \frac{\sin x_i}{\sin(\alpha + x_i)} = R_i \cdot \frac{\sin x_i}{\sin \alpha \cdot \cos x_i + \cos \alpha \cdot \sin x_i} = R_i \cdot \frac{B_{i-1} \cdot \cos \alpha}{A_{i-1} + B_{i-1}}$$

$$\text{故 } R_i = R_{i-1} \cdot \frac{B_i}{B_{i-1} \cdot \cos \alpha} \Rightarrow R_n = R_k \cdot \prod_{i=k}^{n-1} \frac{B_{i+1}}{B_i \cdot \cos \alpha} = R_k \cdot \frac{B_n}{B_k} \cdot \frac{1}{\cos^{n-k} \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{R_n}{B_n} \cdot \cos^n \alpha = \frac{R_k}{B_k} \cdot \cos^k \alpha \quad \left(\frac{\sin x_k}{\cos x_k} = \frac{B_{k-1} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{A_{k-1} + B_{k-1} \cdot \sin^2 \alpha} \right), \begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \cdot \sin^2 \alpha \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-1} \end{cases}$$

$$\text{令 } \sin \alpha = \tanh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}, \quad \left(\left[\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right] = \left[\frac{2e^\theta / (e^\theta + e^{-\theta})}{2e^{-\theta} / (e^\theta + e^{-\theta})} \right] = e^{2\theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{R_k}{B_k} \cdot \cos^k \alpha &= \frac{2\sin \alpha \cdot R_k}{[1+\sin \alpha]^k - [1-\sin \alpha]^k} \cos^k \alpha = \frac{2\sin \alpha \cdot R_k}{\left[\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right]^k - 1} \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)(1-\sin \alpha)}{(1-\sin \alpha)^2}}^k \\ &= \frac{2\sin \alpha \cdot R_k}{e^{2k\theta} - 1} \cdot e^{k\theta} = R_k \cdot \sin \alpha \cdot \frac{2}{e^{k\theta} - e^{-k\theta}} = R_k \cdot \frac{\sin \alpha}{\sinh(k\theta)} \end{aligned}$$

$$\text{故 } R_k \cdot \frac{\sin \alpha}{\sinh(k\theta)} = R_n \cdot \frac{\sin \alpha}{\sinh(n\theta)} = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\sinh(n\theta)} \Rightarrow R_k = R \cdot \frac{\sinh(k\theta)}{\sinh(n\theta)}$$

$$\begin{aligned} \overline{O_k O_{k+1}} &= R_{k+1} - R_{k-1} = R \cdot \frac{\sinh((k+1)\theta)}{\sinh(n\theta)} - R \cdot \frac{\sinh((k-1)\theta)}{\sinh(n\theta)} \\ &= \frac{R}{\sinh(n\theta)} \cdot (\sinh((k+1)\theta) - \sinh((k-1)\theta)) = \frac{R}{\sinh(n\theta)} \cdot 2 \cosh(k\theta) \sinh(\theta) \\ &= R \cdot \frac{2 \cosh(k\theta) \sinh(\theta)}{\sinh(n\theta)} \quad \square \end{aligned}$$

3. $N=3$ 重心型覆蓋圓組

定理 17. 此時 $\triangle O_1 O_2 O_3 \sim \triangle ABC$ ，且 $\overline{AB} = 2 \overline{O_1 O_2}$ 。

Proof. 如右圖 9-7，

因為 O_1, O_2, O_3 為 $\overline{MA}, \overline{MB}, \overline{MC}$ 中點，

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MO_2}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MO_3}}{\overline{MC}} = \frac{1}{2}$$

故 $AB \parallel O_1 O_2, BC \parallel O_2 O_3, CA \parallel O_3 O_1$

$$\text{且 } \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2 O_3}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{O_3 O_1}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \triangle O_1 O_2 O_3 \sim \triangle ABC$ (SSS 相似)， $\overline{AB} = 2 \overline{O_1 O_2}$ $\square$

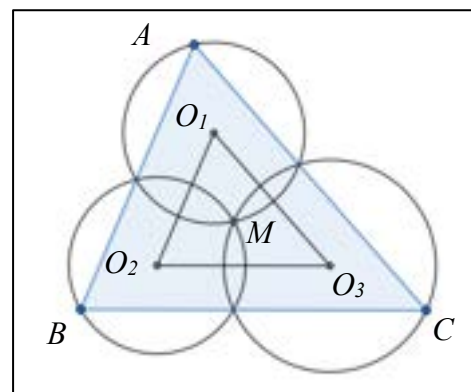


圖 9-7 來源：GeoGebra
作者自行繪製

4. $N=3$ 兩點型覆蓋圓組

定理 18. 對銳角三角形 $\triangle ABC$ ， $\triangle O_2 O_3 O_1 \sim \triangle ABD$ ，作 O_c 在直線 $O_1 O_2$ 上使得 $\triangle O_2 O_3 O_c \sim \triangle ABC$ ，則 O_c 為 $\triangle XYC$ 的外接圓圓心，且 $CO_c \perp BC$ 。

Proof.

如下頁圖 9-8。由引理， $\angle BAC = \angle O_3 O_2 O_1, \angle EBD = \angle O_2 O_3 O_1$ 。

故 $\triangle O_2 O_3 O_1 \sim \triangle ABD$ (AA 相似)。

$$\therefore \angle ABC = \angle O_2 O_3 O_c$$

又 $O_2 O_3$ 平分 $\overline{EX}$ ，故 $O_3 O_c$ 平分 $\overline{CX}$ 。 $(\angle O_2 O_3 O_c = \frac{1}{2} \angle EO_3 X + \frac{1}{2} \angle XO_3 C)$ ，

且直線 O_2O_c = 直線 O_1O_2 平分 $\overline{XY}$ (連心線),

故 O_c 在 $\overline{CX}$ 和 $\overline{XY}$ 的中垂線上, 故 O_c 為 $\triangle XYC$ 的外心,

$$\angle CXY = \angle CXE + \angle EXY = \angle CBE + \angle EAY = \angle CBA + \angle BAC = -\angle ACB$$

(由圓內接四邊形 $AEXY$ 、圓內接四邊形 $BEXC$)

$$\text{又由引理, } \angle CXY = \frac{1}{2} \angle CO_cY = 90^\circ - \angle YCO_c$$

$$\text{故 } \angle CXY = -\angle ACB = 90^\circ - \angle YCO_c$$

$$\Rightarrow \angle BCY = 90^\circ - \angle YCO_c$$

$$\Rightarrow \angle BCY + \angle YCO_c = \angle BCO_c = 90^\circ \quad \square$$

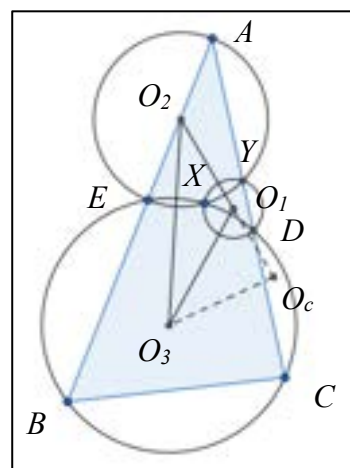


圖 9-8
示意圖 (長度不符合比例)
來源: *GeoGebra*
作者自行繪製

對於三種覆蓋圓組, 連心線都有不錯的性質。不過其中大多是角度的性質, 也就是不論是否為最小覆蓋圓組, 上述性質都存在。基本上, 除了上下型覆蓋圓組中計算出各連心線長以外, 其他性質皆為一般化的性質, 不一定要是最小覆蓋圓。換句話說, 我們無法透過這些性質推論出更多滿足圓為最小覆蓋圓的必要條件。

六、覆蓋圓總面積和的最小值與三角形面積的比值及其最小值

在前面的討論中，我們計算出對於任意三角形， $N = 1、2、3$ 時，各最小覆蓋圓組的總面積和。那麼這些覆蓋圓組的總面積和與三角形面積呈現什麼樣的比例關係呢？

尤其在鈍角三角形裡，若其中的鈍角接近 180° ，其外接圓半徑會非常大，使得用外接圓半徑計算的覆蓋圓面積和最小值難以估量，所以我們希望用此比值以更了解覆蓋圓面積的性質。

這裡我們先列出 $\frac{\sum^n r^2}{\Delta ABC}$ 的值 ($\Delta ABC = 2R^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$)，因為兩點型和四點型我們尚未求出解析解，故我們先不做討論，其餘覆蓋圓組如下：

1. $N = 1$

$$\frac{\sum^1 r^2}{\Delta ABC} = \begin{cases} \frac{I}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{\sin\gamma}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

2. $N = 2$

$$\frac{\sum^2 r^2}{\Delta ABC} = \begin{cases} \frac{I + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{(I + \sin^2\alpha) \cdot \sin\gamma}{4\sin\alpha \cdot \sin\beta} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

3. $N = 3$ 上下型覆蓋圓組

$$\frac{\sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \begin{cases} \frac{I}{2\sin\beta \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{I + 3\sin^2\alpha}{3 + \sin^2\alpha} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} \cdot \frac{I + 3\sin^2\alpha}{3 + \sin^2\alpha} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

4. 上下型覆蓋圓組

$$\frac{\sum^n r^2}{\Delta ABC} = \begin{cases} \frac{I}{2\sin\beta \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{[I + \sin\alpha]^n + [I - \sin\alpha]^n}{[I + \sin\alpha]^n - [I - \sin\alpha]^n} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} \cdot \frac{[I + \sin\alpha]^n + [I - \sin\alpha]^n}{[I + \sin\alpha]^n - [I - \sin\alpha]^n} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

5. $N = 3$ 重心型

$$\frac{\sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{6\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}。$$

接下來，我們想求 $\min \frac{\sum^n r^2}{\Delta_{ABC}}$ （即最小覆蓋圓組總面積和與三角形面積比的最小值）

首先，若固定 $\alpha, \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ ，則

$$\frac{1}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = \frac{2}{\cos(\gamma-\beta) - \cos(\beta+\gamma)} = \frac{2}{\cos(\gamma-\beta) - \cos(\pi-\alpha)} \geq \frac{2}{1 + \cos\alpha} \quad (\text{等號成立 } \beta=\gamma)$$

若固定 $\alpha, \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ 且 $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta > 90^\circ \Rightarrow \beta < 90^\circ - \alpha$ ，則

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\pi-\alpha-\beta)}{\sin\beta} = \sin\alpha \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \cos\alpha > \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

（等號成立在 $\beta = 90^\circ - \alpha$ ）

由此，上面的式子便可以化簡成以 α 為變數的式子。

接下來我們一一處理個情況的 $\min \frac{\sum^n r^2}{\Delta_{ABC}}$ ：

<u>定理 19.</u> $\min \frac{\pi \cdot \sum^I r^2}{\Delta_{ABC}} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 2.418$ （成立在 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$）。

Proof.

$$\frac{\pi \cdot \sum^I r^2}{\Delta_{ABC}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{\pi \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases} \geq \begin{cases} \frac{\pi}{\sin\alpha \cdot (1+\cos\alpha)} \\ \frac{\pi}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin\alpha \cdot (1+\cos\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha} \cdot (1+\cos\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3}} \geq \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$\left(\frac{1}{2} = \frac{(1-\cos\alpha) + \frac{1}{3} \cdot (1+\cos\alpha) + \frac{1}{3} \cdot (1+\cos\alpha) + \frac{1}{3} \cdot (1+\cos\alpha)}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3}{27}} \right)$$

且 $\frac{1}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1$ （此時 $\alpha=\beta=\gamma$ ）

故 $\begin{cases} \frac{\pi}{\sin\alpha \cdot (1+\cos\alpha)} \\ \frac{\pi}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \end{cases} \geq \begin{cases} \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 2.418 & (\alpha=\beta=\gamma=60^\circ) \\ \pi \approx 3.142 & (\alpha=\beta=45^\circ, \gamma=90^\circ) \end{cases}。$

又 $\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} < \pi$

$\therefore \min \frac{\pi \cdot \sum^I r^2}{\Delta_{ABC}} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 2.418$ （成立在 $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ ） $\square$

因為上下型的情況稍嫌複雜，我們直接處理一般化的情況：

討論 7. 上下型覆蓋圓組的 $\min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC}$ 。

$$\text{上下型覆蓋圓組的} \frac{\sum^n r^2}{\Delta ABC} = \begin{cases} \frac{I}{2\sin\beta \cdot \sin\gamma} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{\sin\gamma}{2\sin\beta} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

$$\geq \begin{cases} \frac{I}{I+\cos\alpha} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{I}{2\cos\alpha} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} & \text{鈍角三角形 } (\gamma > 90^\circ) \end{cases}$$

$$\therefore \frac{I}{I+\cos\alpha} < \frac{I}{2\cos\alpha}$$

$$\therefore \min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC} = \frac{I}{I+\cos\alpha} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} \text{ 的最小值。}$$

對於銳角和直角三角形，考慮 $\frac{I}{I+\cos\alpha} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n}$ 的最小值：

$$\text{令 } \sin\alpha = \tanh(\theta),$$

$$\text{上式} = \frac{I}{I+\cos\alpha} \cdot \frac{[I+\sin\alpha]^n + [I-\sin\alpha]^n}{[I+\sin\alpha]^n - [I-\sin\alpha]^n} = \frac{I}{I+\sqrt{1-\tanh^2(\theta)}} \cdot \frac{I}{\tanh(n\theta)} = \frac{I}{(I+\operatorname{sech}(\theta)) \tanh(n\theta)}$$

$$\text{考慮函數 } f(\theta) = \frac{I}{(I+\operatorname{sech}(\theta)) \tanh(n\theta)}。$$

$$f'(\theta) = 0 \Rightarrow -\tanh(\theta)\operatorname{sech}(\theta)\tanh(n\theta) + n \cdot (I+\operatorname{sech}(\theta)) \cdot \operatorname{sech}^2(n\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tanh(\theta) \operatorname{sech}(\theta) \tanh(n\theta) = n \cdot (I+\operatorname{sech}(\theta)) \cdot \operatorname{sech}^2(n\theta)$$

$$\Rightarrow \sinh(n\theta) \cosh(n\theta) = n \cdot \frac{I+\operatorname{sech}(\theta)}{\tanh(\theta) \operatorname{sech}(\theta)}$$

$$\Rightarrow \sinh(2n\theta) = 2n \cdot \frac{\cosh^2(\theta) + \cosh(\theta)}{\sinh(\theta)}$$

$$\Rightarrow 2\sinh(\theta)\sinh(2n\theta) = 2n(2\cosh^2(\theta) + 2\cosh(\theta))$$

$$\Rightarrow \cosh((2n+1)\theta) - \cosh((2n-1)\theta) = 2n(2\cosh^2(\theta) + 2\cosh(\theta))$$

我們可以使用切比雪夫多項式 T_m （參考資料八），因為 $T_m(\cos x) = \cos(mx)$ ，我們可以透過遞迴證明出 $T_m(\cosh\theta) = \cosh(m\theta)$ （證明過程在本討論最後），如此將 $\cosh\theta$ 多倍角全部轉換成 $\cosh\theta$ ，上式將變成一個一元高次方程式，便可以求出 θ 的值。

$$\cosh((2n+1)\theta) - \cosh((2n-1)\theta) = 2n(2\cosh^2(\theta) + 2\cosh(\theta))$$

$$\Rightarrow T_{2n+1}(\cosh\theta) - T_{2n-1}(\cosh\theta) = 2n(2\cosh^2(\theta) + 2\cosh(\theta))$$

$$\Rightarrow T_n(\cosh\theta)(T_{n+1}(\cosh\theta) - T_{n-1}(\cosh\theta)) = 2n(\cosh^2(\theta) + \cosh(\theta))$$

$$(T_{2n+1}(x) = 2T_n(x)T_{n+1}(x) - x)$$

$$\Rightarrow T_n(\cosh\theta)(2\cosh\theta \cdot T_n(\cosh\theta) - 2T_{n-1}(\cosh\theta)) = 2n(\cosh^2(\theta) + \cosh(\theta))$$

$$(T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow T_n(\cosh\theta)(\cosh\theta \cdot T_n(\cosh\theta) - T_{n-1}(\cosh\theta)) = n \cdot \cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

如此，當給定 n 的大小時，我們便可以計算 $\cosh(\theta)$ 了。

$$(T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x)$$

當 $N = 2$ 時，上式為

$$(2\cosh^2\theta - 1)(\cosh(\theta)(2\cosh^2\theta - 1) - \cosh\theta) = 4\cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

$$\Rightarrow 4\cosh(\theta)(2\cosh^2\theta - 1)(\cosh(\theta) - 1)(\cosh(\theta) + 1) = 4\cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

$$\Rightarrow (2\cosh^2\theta - 1)(\cosh\theta - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2\cosh^3\theta - 2\cosh^2\theta - \cosh\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\cosh^2\theta - 2\cosh\theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cosh\theta = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \quad (\text{負不合}) \Rightarrow \tanh\theta = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}} \approx 0.6813$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\tanh(\theta)) \approx \sin^{-1}(0.6813) \approx 42.94^\circ$$

故上下型覆蓋圓組的

$$\min \frac{\pi \cdot \sum r^2}{\Delta ABC} = \pi \cdot \frac{1 + \sin^2\alpha}{2\sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)} = \frac{\pi}{(1 + \operatorname{sech}(\theta)) \tanh(2\theta)} \approx 1.949 \quad (\alpha \approx 42.94^\circ)$$

當 $N = 3$ 時，上式為

$$(4\cosh^3\theta - 3\cosh(\theta))(\cosh\theta(4\cosh^3\theta - 3\cosh\theta) - (2\cosh^2\theta - 1)) = 3\cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

$$\Rightarrow (4\cosh^3\theta - 3\cosh(\theta))(4\cosh^4\theta - 5\cosh^2\theta + 1) = 3\cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

$$\Rightarrow (4\cosh^3\theta - 3\cosh(\theta))(4\cosh^2\theta - 1)(\cosh(\theta) - 1)(\cosh(\theta) + 1) = 3\cosh(\theta)(\cosh(\theta) + 1)$$

$$\Rightarrow (4\cosh^2\theta - 3)(4\cosh^2\theta - 1)(\cosh(\theta) - 1) = 3$$

$$\Rightarrow 16\cosh^5\theta - 16\cosh^4\theta - 16\cosh^3\theta + 16\cosh^2\theta + 3\cosh(\theta) - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \cosh\theta \approx 1.2129 \Rightarrow \tanh\theta \approx 0.5659$$

$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\tanh(\theta)) \approx \sin^{-1}(0.5659) \approx 34.46^\circ$$

故上下型覆蓋圓組的

$$\min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \pi \cdot \frac{1 + 3\sin^2\alpha}{3\sin\alpha + \sin^3\alpha} \cdot \frac{1}{1 + \cos\alpha} = \frac{\pi}{(1 + \operatorname{sech}(\theta)) \tanh(3\theta)} \approx 1.819 \quad (\alpha \approx 34.46^\circ)。$$

對於一般的上下型覆蓋圓組，

$$\min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC} = \frac{\pi}{1 + \cos\alpha} \cdot \frac{[1 + \sin\alpha]^n + [1 - \sin\alpha]^n}{[1 + \sin\alpha]^n - [1 - \sin\alpha]^n} = \frac{\pi}{(1 + \operatorname{sech}(\theta)) \tanh(n\theta)}。$$

$$\text{當 } n \rightarrow \infty, \frac{\pi}{(1 + \operatorname{sech}(\theta)) \tanh(n\theta)} \rightarrow \frac{\pi}{1 + \operatorname{sech}(\theta)} \geq \frac{\pi}{2} \approx 1.570 \quad (\text{此時 } \theta = 0),$$

$$\text{並且 } \frac{\pi}{(1 + \operatorname{sech}(\theta)) \tanh(n\theta)} \text{ 關於 } n \text{ 嚴格遞減, 故上下型覆蓋圓組的 } \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC} \geq \frac{\pi}{2} \approx 1.570,$$

$$\text{此時 } \alpha = \sin^{-1}(\tanh(\theta)) = \sin^{-1}(\tanh(0)) = 0^\circ, \beta = \gamma = 90^\circ$$

由參考資料八， T_m 滿足 $T_{m+1}(x) = 2x \cdot T_m(x) - T_{m-1}(x)$ ， $T_0(x) = 1$ ， $T_1(x) = x$ 。

我們利用數學歸納法證明 $T_m(\cosh\theta) = \cosh(m\theta)$ 。

$$T_0(\cosh\theta) = 1 = \cosh(0 \cdot \theta)$$

$$T_1(\cosh\theta) = \cosh(\theta) = \cosh(1 \cdot \theta)$$

假設對於非負整數 $0, 1, \dots, k$ 都滿足 $T_k(\cosh\theta) = \cosh(k\theta)$ ，

$$\begin{aligned} T_{k+1}(\cosh\theta) &= 2\cosh\theta \cdot T_k(\cosh\theta) - T_{k-1}(\cosh\theta) = 2\cosh\theta \cdot \cosh(k\theta) - \cosh((k-1)\theta) \\ &= 2\cosh\theta \cdot \cosh(k\theta) - (\cosh(k\theta) \cosh(\theta) - \sinh(k\theta) \sinh(\theta)) \\ &= \cosh\theta \cdot \cosh(k\theta) + \sinh(k\theta) \sinh(\theta) = \cosh((k+1)\theta) \end{aligned}$$

由數學歸納法，對任意非負整數 m ， $T_m(\cosh\theta) = \cosh(m\theta)$ 。

至此，我們找出了上下型覆蓋圓組的 $\min \frac{\pi \cdot \sum^2 r^2}{\Delta ABC}$ 和 $\min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC}$ ，並給出了一般化的

$\min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC}$ 的求法，最後給出了上下型覆蓋圓組 $\min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC}$ 的下界。

定理 20. 對於重心型覆蓋圓組， $\min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.813$ （成立在 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ ）。

Proof. 由算幾不等式，

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi \sum^3 r^2}{\Delta ABC} &= \pi \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{6 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \geq \pi \cdot \frac{3 \sqrt[3]{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}}{6 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \\
 &= \pi \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}{\sin^3 \alpha \cdot \sin^3 \beta \cdot \sin^3 \gamma}} = \pi \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}} \geq \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \\
 &\geq \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3})} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.813 \quad (\text{等號成立在 } \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3})。
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}, \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sin(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}) \right)$$

故 $\min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.813$ （此時 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ ） □

在此討論中，我們針對 $N = 1、2、3$ 時的上下型覆蓋圓組和重心型覆蓋圓組，討論了覆蓋圓總面積和的最小值與三角形面積的比值，並得到對於不同的覆蓋圓組，何種三角形會使得此比值最小。幾何意義上來看，也就是覆蓋圓組浪費的區域相對於三角形的面積最少。

陸、研究結果

彙整上述的定理與討論，我們歸納出了以下研究結果：

一、最小覆蓋圓組的必要條件

- (一) 在最小覆蓋圓組中，若 $\angle A$ 為銳角或直角，則 A 在最小覆蓋圓組的某一個覆蓋圓上。
- (二) 令圓 O 為一最小覆蓋圓，則圓 O 與三角形邊的交點，必定有另一圓通過。

二、 $N=1, 2, 3$ ，任意三角形的 $\min \sum^n r^2$ （此處令 $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ ）

$$(一) \min \sum^1 r^2 = \begin{cases} R^2 & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} & \text{鈍角三角形} \end{cases}。$$

$$(二) \min \sum^2 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2} & \text{銳角和直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{1 + \sin^2 \alpha}{2} & \text{鈍角三角形} \end{cases}。$$

(三) 銳角和直角三角形的 $\min \sum^3 r^2$ 為下面四種覆蓋圓中的最小值：

$$\text{重心型} \sum^3 r^2 = R^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{3} \quad \text{任意三角形；}$$

$$\text{四點型} \sum^3 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot s(x, p) & \text{銳角或直角三角形} \\ \text{尚無解析解} & \text{鈍角三角形} \end{cases}；$$

$$\text{兩點型} \sum^3 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot u(t, \varphi) = \frac{L^2}{4 \sin^2(\alpha + \varphi)} \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta \leq \varphi \\ R^2 \cdot u(t, \beta) = R^2 \cdot \left[\frac{1 + t^2 + t^2 \cdot \sin^2 \alpha}{(1 + t \cdot \cos \alpha)^2} - \frac{t^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 + 2t \cdot \cos \alpha + t^2} \right] & \text{if } \beta > \varphi \end{cases}；$$

$$\text{上下型} \sum^3 r^2 = \begin{cases} R^2 \cdot \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} & \text{銳角或直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{3 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 3} & \text{鈍角三角形} \end{cases}，$$

$$\text{其中 } s(x, p) = \frac{3(p^2 - x^2)^2}{16 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - (p \cdot \sin(\alpha + \beta) + x \cdot \sin(\alpha - \beta)) \cdot \frac{p^2 - x^2}{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} + (p^2 + x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{4 \sin^2 \beta} \right) + \frac{px}{2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \cdot \sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) - p \cdot \sin(\alpha + \beta) + x \cdot \sin(\alpha - \beta) + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta。$$

兩點型中當 $\beta \leq \varphi$ ， t 滿足 $w(t) = (2 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta \cdot \cos^4 \alpha)t^5 + (7 \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 5 \cos^2 \beta \cdot \cos^3 \alpha)t^4 + (8 - 4 \cos^4 \alpha - 9 \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha)t^3 + (12 \cos \alpha - 12 \cos^3 \alpha - 7 \cos^2 \beta \cdot \cos \alpha)t^2 + (8 - 12 \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \beta)t - 4 \cos \alpha = 0$ ；

當 $\beta > \varphi$, t 滿足 $n(t) = (1 - \cos^2 \alpha)^2 (2 - \cos^2 \alpha) (-4 - 4\cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) t^9 + \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (\cos^6 \alpha - 23\cos^4 \alpha + 52\cos^2 \alpha - 28) t^8 - (1 - \cos^2 \alpha) (2 + \cos^2 \alpha) (13\cos^4 \alpha - 32\cos^2 \alpha + 20) t^7 - \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) (7\cos^2 \alpha - 6) (5\cos^2 \alpha - 8) t^6 + (19\cos^6 \alpha - 100\cos^4 \alpha + 135\cos^2 \alpha - 58) t^5 - \cos \alpha (31\cos^4 \alpha - 38\cos^2 \alpha + 11) t^4 + (-41\cos^4 \alpha + 69\cos^2 \alpha - 32) t^3 - \cos \alpha (7\cos^2 \alpha - 11) t^2 + (10\cos^2 \alpha - 6) t + 4\cos \alpha = 0$,

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{((2 - \cos^2 \alpha)t - \cos \alpha)(t^2 + 2t \cdot \cos \alpha + 2)^2}{t(1 + t \cdot \cos \alpha)^3(2 + t \cdot \cos \alpha)}} \right) .$$

(四) $N = 1, 2, 3$, 當 N 遞增 , $\min \sum^n r^2$ 嚴格遞減。

三、任意三角形的上下型覆蓋圓組

(一) 任意三角形的上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值

$$= \begin{cases} R^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot [1 + \sin \alpha]^n + \sin \alpha \cdot [1 - \sin \alpha]^n}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} \end{cases} = \begin{cases} R^2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin \alpha))} & \text{銳角或直角三角形} \\ \frac{L^2}{4} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tanh(n \cdot \tanh^{-1}(\sin \alpha))} & \text{鈍角三角形} \end{cases} .$$

(二) 當 N 遞增 , 上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值嚴格遞減。

(三) 上下型各覆蓋圓的半徑

$$r_{n-k} = \begin{cases} R \cdot \frac{\sin \alpha \sqrt{2[1 + \sin \alpha]^{2n-2k-1} + 2[1 - \sin \alpha]^{2n-2k-1}}}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} \cdot \cos^k \alpha & \text{銳角或直角三角形} \\ \frac{L}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \sqrt{2[1 + \sin \alpha]^{2n-2k-1} + 2[1 - \sin \alpha]^{2n-2k-1}}}{[1 + \sin \alpha]^n - [1 - \sin \alpha]^n} \cdot \cos^k \alpha & \text{鈍角三角形} \end{cases} .$$

(四) 當 $n \rightarrow \infty$, 上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值 $\rightarrow R^2 \cdot \sin \alpha$ 。

(五) 當 $n \rightarrow \infty$, 上下型各個覆蓋圓的半徑 $r_{n-k} \rightarrow R \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + \sin \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}^k$ 。

(六) 上下型 $\sum^n r^2$ 的最小值中的係數為二項式係數。

四、 $N = 3$ 的最小覆蓋圓組之間的關聯

(一) 當 $N = 3$, 重心型、上下型、四點型覆蓋圓組皆可能為最小覆蓋圓組。

(二) 當 $N = 3$, 當 $\triangle ABD$ 為銳角三角形且 $\beta = \frac{1}{2} \cdot [\pi - \alpha - \cos^{-1}(\frac{\cos^4 \alpha + 3\cos^2 \alpha - 4}{\cos^3 \alpha - 4\cos \alpha})]$ 時及

當 $\triangle ABD$ 為鈍角或直角三角形且 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}[2\sin \alpha (\sin^2 \alpha + 3)]$.

$\frac{(2\sin^4 \alpha + 13\sin^2 \alpha - 3)\cos^2 \alpha + (-2\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha - 3)\sqrt{-\sin^4 \alpha + 12\sin^2 \alpha - 3}}{32\sin^6 \alpha + 145\sin^4 \alpha - 42\sin^2 \alpha + 9}$ 時 , 上下型 $\sum^3 r^2 =$ 重心型 $\sum^3 r^2$ 。

(三) 當 $N=3$ ，重心型、上下型、兩點型覆蓋圓組為最小覆蓋圓組的分佈區域如下圖9-2。

在模擬結果中，我們觀察到兩點型覆蓋圓組不是最小覆蓋圓組。

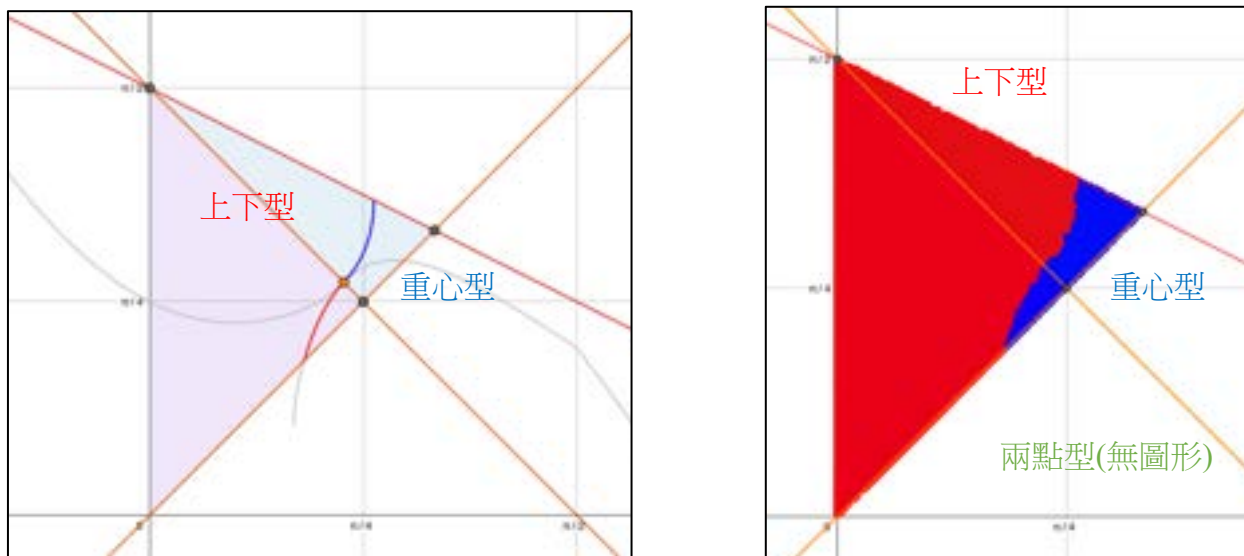


圖 9-1、圖 9-2 來源：GeoGebra 作者自行繪製

五、覆蓋圓圓心之連心線之性質

(一) 當 $N=2$ ，在最小覆蓋圓組中，四邊形 AO_1O_2O 為平行四邊形，且 $\overline{O_1O_2} = R$ 、

$$\angle O_1AO = |\beta - \gamma|。$$

(二) 在上下型覆蓋圓組中， C_k 、 O_k 、 O_{k+1} 共線； A 、 C_2 、 C_4 、...、 C_{2n} 共線；

A 、 C_1 、 C_3 、...、 C_{2n-1} 共線。 $(k=1, 2, \dots, n, n$ 為正整數)

$$AO_1 \parallel O_2O_3 \parallel O_4O_5 \parallel O_6O_7 \parallel \dots; O_1O_2 \parallel O_3O_4 \parallel O_5O_6 \parallel \dots。$$

(三) 在上下型覆蓋圓組中， $\overline{O_kO_{k+1}} = R_{k+1} - R_{k-1} = R \cdot \frac{2\cosh(k\theta) \sinh(\theta)}{\sinh(n\theta)}$ ，

其中 $\theta = \tanh^{-1}(\sin\alpha)$ ， $k=1, 2, \dots, n$ 。

(四) 在上下型覆蓋圓組中， $\frac{R_k}{\sinh(k\theta)}$ 為一定值， $R_k = R \cdot \frac{\sinh(k\theta)}{\sinh(n\theta)}$ ，

其中 $\theta = \tanh^{-1}(\sin\alpha)$ ， $k=1, 2, \dots, n$ 。

(五) 在重心型覆蓋圓組中， $\Delta O_1O_2O_3 \sim \Delta ABC$ 且 $\overline{AB} = 2 \overline{O_1O_2}$ 。

(六) 對於銳角三角形 ΔABC ， $\Delta O_2O_3O_1 \sim \Delta ABD$ ，作 O_c 在直線 O_1O_3 上使得

$\Delta O_2O_3O_c \sim \Delta ABC$ ，則 O_c 為 ΔXYC 的外接圓圓心，且 $CO_c \perp BC$ 。

六、覆蓋圓面積和與三角形面積的比值

$$(一) \min \frac{\pi \cdot \sum^1 r^2}{\Delta ABC} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 2.418 \quad (\text{成立在 } \alpha=\beta=\gamma=60^\circ)。$$

$$(二) \text{當 } N=2, \min \frac{\pi \cdot \sum^2 r^2}{\Delta ABC} \approx 1.949 \quad (\text{成立在 } \alpha \approx 42.94^\circ, \beta=\gamma \approx 68.53^\circ)。$$

$$(三) \text{上下型覆蓋圓的 } \min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC} \approx 1.819 \quad (\text{成立在 } \alpha \approx 34.46^\circ, \beta=\gamma \approx 72.77^\circ)。$$

$$(四) \text{對任意正整數 } N, \text{上下型覆蓋圓的 } \min \frac{\pi \cdot \sum^n r^2}{\Delta ABC} \geq \frac{\pi}{2} \approx 1.570。$$

$$(五) \text{對於重心型覆蓋圓組, } \min \frac{\pi \cdot \sum^3 r^2}{\Delta ABC} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \approx 1.813 \quad (\text{成立在 } \alpha=\beta=\gamma=60^\circ)。$$

柒、結論

在文獻探討中，關於三角形或多邊形的覆蓋，大多是利用「等圓」去作覆蓋，而我們嘗試利用「不等圓」去作覆蓋，雖然看似是放寬條件讓問題變得更複雜，實際上正是因為多邊形本身不帶有像圓一樣的對稱性，利用不等圓去覆蓋正好彌補了多邊形的不對稱性。

研究中，我們從 $N=1$ 的情況開始，找出滿足最小覆蓋圓的必要條件，並分成銳角和直角三角形與鈍角三角形兩種情況，並逐一解決 $N=2, 3$ 的情況。過程中，我們發現了上下型覆蓋圓組的遞迴關係，並推廣至任意 N 個圓的情況，並利用「雙曲函數」進一步得到相當簡潔的解析式。

在討論中，我們比較 $N=1, 2, 3$ 的大小關係、尋找上下型覆蓋圓組的性質、討論 $N=3$ 中四種覆蓋圓組之間的關係，並研究了覆蓋圓面積和與三角形面積的比值及其最小值與覆蓋圓圓心之連心線的相關性質。其中，我們確定了上下型及兩點型覆蓋圓組中，角度的大小關係、研究上下型覆蓋圓組在 $n \rightarrow \infty$ 時的性質、及透過模擬數據猜想「兩點型覆蓋圓組並不是最小覆蓋圓組」。

最後，回到研究一開始提出的問題：「在一個三角形的城鎮中放入 N 個 *Wi-Fi* 分享器...」，我們提出了當 $N=1, 2, 3$ 的解決方案，即將 *Wi-Fi* 分享器放置在最小覆蓋圓組中覆蓋圓圓心的位置，分享範圍即為此覆蓋圓，如此便能在覆蓋三角形的情況下使費用最低。

捌、未來展望

在研究中，我們針對「哪些是成為最小覆蓋圓組的必要條件」進行觀察，發現上述的最小覆蓋圓組，都有一些共同的性質，但由於我們對於 N 更大的情況尚不熟悉，因此放在未來展望中，盼未來有機會解決這些未解之謎。

猜想 對於銳角三角形，在最小覆蓋圓組中，若 P 點為某三圓的共同交點，則沒有第四個圓通過 P 點。

猜想 對於銳角三角形，令圓 O 為最小覆蓋圓，則圓 O 與其他圓或邊的交點為三線共點。

並且，在 $N=3$ 的討論中，我們遺留了一些尚未解決的問題，包括鈍角三角形的四點型覆蓋圓的 $\sum^3 r^2$ 的最小值，以及對於任意三角形的 $\min \sum^3 r^2$ ，期望未來能夠逐一解決。

玖、參考資料及其他

- 一、朱啟台、李政豐、陳昭地（2015）。凸多邊形邊上或內部一點到各頂點距離平方和的極值。《科學教育月刊》，(376)，14-24。
- 二、何詩涵、董家瑋、楊沛錡（2018）。蓋世”五”功。金門地區第 58 屆中小學科學展覽會。
- 三、林宜樺、李佳駿、唐婉馨，張博盛（2004）。鋪天蓋地。中華民國第 44 屆中小學科學展覽會。
- 四、劉宇昕、陳正昕（2022）。當三角形遇見圓—最大覆蓋率之探討。中華民國第 62 屆中小學科學展覽會。
- 五、James Stewart (2019). *Calculus* (8th edition.).
- 六、Kenneth M Hoffman, & Ray Kunze (1971). *Linear algebra* (second edition.).
- 七、Miquel's Theorem. Wikipedia. From https://en.wikipedia.org/wiki/Miquel's_theorem
- 八、Rivlin, Theodore J. (1974). “Chapter 2, Extremal properties”. *The Chebyshev Polynomials*. Pure and Applied Mathematics (1st ed.). New York-London-Sydney: Wiley-Interscience [John Wiley & Sons]. pp. 56–123. [ISBN 978-047172470-4](https://www.wiley.com/ISBN/978-047172470-4).

【評語】 010037

以三個圓覆蓋給定三角，作者試圖刻畫三圓總面積最小的情況。作者將最小覆蓋分成四類，逐一討論，有些有解析解。有些無解析解。問題有趣，計算詳實。然而本作品的前作已獲第 64 屆科展第三名。而本作品僅增加討論及修正筆誤。數學貢獻的幅度不足，十分可惜。但若要繼續拓展作品內容，以目前方法相當困難，建議作者採納一些新觀點。