

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010036
參展科別	數學
作品名稱	連通圖上行走路徑經過邊數期望值之研究
得獎獎項	四等獎

就讀學校	臺北市立永春高級中學
指導教師	鄭硯仁 高晟鈞
作者姓名	張仲辰

關鍵詞	<u>期望值、連通圖、距離</u>
-----	-------------------

作者簡介



我是張仲辰，目前就讀永春高中高三數理資優班。數學是我最感興趣的科目，每次學到全新的知識時，都如同打開新世界的大門般，令我雀躍不已，因此經常利用課餘時間加深學習，也會參加各種檢定與競賽。在高一時接觸到了數學科展，從一開始跌跌撞撞的過程到現在已經能夠明確規劃研究，在這過程中漸漸掌握做研究的要領，繁忙且無盡的研究使我一天比一天充實。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：連通圖上行走路徑經過邊數期望值之研究

關鍵詞：期望值、連通圖、距離（最多三個）

編號：

中文摘要

本研究延續自作者前一年的研究「連通圖上行走步數期望值之研究」，原題為在一個六面體中，有一隻螞蟻位於其中一個頂點並沿著邊行走，每當牠走到頂點時就會選擇一條邊繼續行走，且牠前往任何方向之機率皆相同，但不可走回頭路，求螞蟻回到出發點時經過邊數之期望值。本研究將題目延伸出了以下幾個問題，得出結論後並證明。結果如下： K_n (n -complete graph)、任意 tree、 $C_m \star C_n$ 、 $K_m \star K_n$ 中，螞蟻

從其中一點 v_i 出發，第一次走到另一點 v_j 時經過邊數之期望值通式。除了研究不同的圖上點到點經過邊數期望值通式，針對圖論中經常用的距離（點到點的最短路徑經過邊數）與點到點的期望長度最大者進行比較，探討在圖上之性質。

英文摘要

This study is a continuation of the author's research from the previous year's research titled "A Study on the Expected Number of Steps for Walking on a Connected Graph." The original problem involves an ant located at one of the vertices of a cube, which moves along the edges. Each time it reaches a vertex, it randomly chooses an edge to continue walking, with equal probability in all directions, except it cannot go back to the previous vertex. The goal is to find the expected number of edges the ant will traverse before returning to the starting point. This study extends the original problem to address several new questions, deriving conclusions and providing proofs. The results are as follows: K_n (n -complete graphs), tree graph, and $C_m \star C_n$, $K_m \star K_n$. In addition to deriving general formulas for the expected number of edges traversed between points on different types of graphs, the study also compares these expectations with commonly used distances in graph theory, such as the shortest path length (in terms of the number of edges) between two points, and the maximum expected number of edges. The properties of these comparisons are explored to understand their characteristics on various graphs.

壹、研究動機

一、研究發想

本研究延續自作者前一年的研究「連通圖上行走步數期望值之研究」[2]，原題敘述如下：在一個正六面體中，有一隻螞蟻位於其中一個頂點，每當牠到達頂點時，牠就會以均等的機率選擇一條邊並走到下一個頂點，但不可走回頭路，求當螞蟻第一次回到出發點時，經過邊數之期望值？

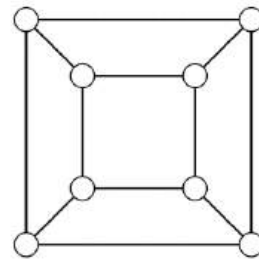


圖 (一)：正六面體平面圖
圖片來源：研究者自製

一開始在研究原題該如何求解時，透過樹狀圖列舉後不難解出答案。但在與指導老師討論的過程中發現，其實將原題的正六面體視為圖論中的平面圖，從簡單連通圖的角度出發，改變原題的圖的結構，會有哪些值得探討的環節？

二、前篇研究結果

(一)任意簡單連通圖中，螞蟻從其中一點 v_i 出發，螞蟻往任何方向之機率皆相同，無論螞蟻可走回頭路時與不可走回頭路時，螞蟻第一次回到出發點時經過邊數之期望值為 $\frac{2 \times \text{邊數}}{\deg(v_i)}$ 。

(二) n 點連通路徑圖 P_n 中螞蟻從點 v_i 出發第一次走到點 v_j ，經過邊數之期

$$\text{望值為：} E_{ij} = \begin{cases} j^2 - i^2 - 2j + 2i, & i < j \\ \frac{2n-2}{\deg(v_i)}, & i = j \end{cases}, E_{1j} - E_{ij} = (i-1)^2, i < j,$$

$$E_{1j} = (j-1)^2, j \geq 2。$$

(三) n 點循環圖 C_n 中，螞蟻從點 v_i 出發，第一次走到點 v_j ，其中

$$d(v_i, v_j) = d, \text{ 其經過邊數之期望值 } E_d \text{ 為：} E_d = \begin{cases} n, & d = 0 \\ d(n-d), & d \geq 1 \end{cases}。$$

貳、研究目的

一、針對 n 點完全圖 K_n (n - complete graph)、任意樹 (tree)、 $C_m \star C_n$ 、 $K_m \star K_n$ 。

螞蟻從任意一點 v_i 出發，第一次走到 v_j 時，經過邊數之期望值。

二、研究任意連通圖中，點到點經過邊數期望值通式。

三、將點到點經過邊數期望值視為一種距離並將其稱為期望長度，比較期望長度和點到點最短路徑經過邊數在連通圖上的性質。

參、研究過程或方法及進行步驟

一、名詞解釋

(一) 簡單連通圖：沒有迴圈及重邊且連通的圖。

(二) 圖上與點 v_i 連接的邊數 (度數) 以 $\deg(v_i)$ 表示。

(三) P_n : n 點連通路徑圖 (n - path graph)。其中 P_n 有 n 個點 (依序為

$v_1, v_2, \dots, v_n$)， $n-1$ 個邊， $\deg(v_1) = \deg(v_n) = 1$ ， $\deg(v_i) = 2$ ($1 < i < n$) 且

點 v_i 與點 v_{i+1} 相連 ($1 \leq i < n$)。

(四) C_n : n 點循環圖 (n - cycle graph)。其中 C_n 上有 n 個點， n 個邊，

$\deg(v_i) = 2$ ($1 \leq i \leq n$) 且點 v_i 與點 v_{i+1} 相連 ($1 \leq i < n$)、點 v_n 與點 v_1 相連。

(五) $d(v_i, v_j)$: 表示點 v_i 與點 v_j 中最短路徑相連的邊數。

(六) 從點 v_i 出發，第一次走到點 v_j 時 (其中 $d(v_i, v_j) = d$)，經過邊數之期望

值以 E_d 表示。 E_0 即表示從點 v_i 出發，第一次回到點 v_i 經過邊數之期望值。

(七) K_n : n 點完全圖 K_n (n - complete graph)，其中 K_n 上有 n 個點，

$\frac{n(n-1)}{2}$ 個邊， $\deg(v_i) = n-1$ ($1 \leq i \leq n$)。

(八) $C_m \star C_n$: 兩個 cycle C_m 以及 C_n 連接 (共用其中一個點)。

(九) $K_m \star K_n$: 兩個完全圖 K_m 以及 K_n 連接 (共用其中一個點)。

(十) 可走回頭路時，從點 v_i 出發，第一次走到點 v_j 經過邊數之期望值以 E_{ij}

表示。不可回頭時則以 E_{ij}^* 表示。

(十一) $d'(v_i, v_j)$ ：為了後續研究方便與 $d(v_i, v_j)$ 比較距離的相關性質，定義

$d'(v_i, v_j)$ 表示點 v_i 到點 v_j 經過邊數期望值，且在討論距離時以期望長度代稱。

(十二)點 v 到點最短路徑經過邊數中最大者稱為離心率，以 $e(v)$ 表示。點 v 第一次到達各點時經過邊數期望值中最大者，則以 $e'(v)$ 表示。

(十三)若圖 G 上的一點 v 的 $e(v)$ 不大於圖中其它所有點 u 的 $e(u)$ ，則稱該點為由距離形成的中心點。

(十四)若圖 G 上的一點 v 的 $e'(v)$ 不大於圖中其它所有點 u 的 $e'(u)$ ，則稱該點為由期望長度形成的中心點。

(十五)圖 G 中所有點的 $e(v)$ 最大值定義為直徑 $diam(G)$ ，最小值定義為半徑 $rad(G)$ 。所有點的 $e'(v)$ 最大值則以 $diam'(G)$ 表示，最小值以 $rad'(G)$ 表示。

二、探討 K_n 上螞蟻從點 v_i 出發第一次到點 v_j 時經過邊數期望值

由於 K_n 中任意兩點皆連接一個邊，因此經過邊數期望值僅需要探討終點是否為走回出發點以及螞蟻可否走回頭路。

【定理一】 n 點完全圖 K_n 中，螞蟻從點 v_i 出發，第一次走到點 v_j 時經過

$$\text{邊數期望值 } E_{ij} = \begin{cases} n, i = j \\ n-1, i \neq j \end{cases}, E_{ij}^* = \begin{cases} n, i = j \\ \frac{n^2 - 3n + 3}{n-1}, i \neq j \end{cases}$$

證明：

(一) 探討 K_n 與 E_{ij}

1. $i = j$

由於完全圖 K_n 中每一個點的 degree 皆為 $n-1$ ，且圖的邊數為

$$\frac{n(n-1)}{2}, \text{ 透過前篇研究結果 (一) 即可得知 } E_{ij} = \frac{2 \times \frac{n(n-1)}{2}}{n-1} = n$$

2. $i \neq j$

一開始螞蟻位在點 v_i 時，螞蟻第一步走到點 v_j 的機率為 $\frac{1}{n-1}$ ，

因此經過邊數期望值為 $\frac{1}{n-1} \times 1$ 。第二步走到點 v_j 的機率則為

$\frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-1}$ 是因為螞蟻第一步不走到點 v_j 的機率為 $\frac{n-2}{n-1}$ ，此時下一步走到點 v_j 的機率為 $\frac{1}{n-1}$ ，因此經過邊數期望值為 $\frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-1} \times 2$ 。

後續以此類推，因此螞蟻第一次走到點 v_j 的經過邊數期望值如下：

$$E_{ij} = \frac{1}{n-1} \times 1 + \frac{n-2}{(n-1)^2} \times 2 + \frac{(n-2)^2}{(n-1)^3} \times 3 + \dots (1)$$

$$\frac{n-2}{n-1} E_{ij} = \frac{n-2}{(n-1)^2} \times 1 + \frac{(n-2)^2}{(n-1)^3} \times 2 + \frac{(n-2)^3}{(n-1)^3} \times 3 + \dots (2)$$

$$(1) - (2) = \frac{1}{n-1} E_{ij} = \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{(n-1)^2} + \frac{(n-2)^2}{(n-1)^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n-1} E_{ij} = \frac{\frac{1}{n-1}}{1 - \frac{n-2}{n-1}} = 1 \Rightarrow E_{ij} = n-1$$

(二) 探討 K_n 與 E_{ij}^*

1. $i = j$

透過前篇研究結果 (一) 可以知道，無論螞蟻可否走回頭路，牠第一次回到出發點時經過邊數期望值皆相同，因此 $E_{ij}^* = E_{ij} = n$

2. $i \neq j$

一開始螞蟻位在點 v_i 時，螞蟻第一步走到點 v_j 的機率為 $\frac{1}{n-1}$ ，

因此經過邊數期望值為 $\frac{1}{n-1} \times 1$ 。第二步走到點 v_j 的機率則為

$\frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2}$ 是因為螞蟻第一步不走到點 v_j 的機率為 $\frac{n-2}{n-1}$ ，此時下一

步走到點 v_j 的機率為 $\frac{1}{n-2}$ ，因此經過邊數期望值為

$\frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} \times 2$ ，第三步走到點 v_j 的機率則為 $\frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{1}{n-2}$ ，因

此經過邊數期望值為 $\frac{1}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times 3$ 。後續以此類推，因此螞蟻第一次

走到點 v_j 的期望值如下：

$$\begin{aligned} E_{ij}^* &= \frac{1}{n-1} \times 1 + \frac{1}{n-1} \times 2 + \frac{n-3}{(n-1)(n-2)} \times 3 + \dots \\ &= \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n-1} \times \left(\frac{n-3}{n-2} \times 3 + \left(\frac{n-3}{n-2} \right)^2 \times 4 + \dots \right) \\ &= \frac{3}{n-1} + \frac{n^2 - 3n}{n-1} = \frac{n^2 - 3n + 3}{n-1} \end{aligned}$$

至此本研究成功得到完全圖 K_n 中 E_{ij} 及 E_{ij}^* 之通式，即為

$$E_{ij} = \begin{cases} n, i = j \\ n-1, i \neq j \end{cases}, \quad E_{ij}^* = \begin{cases} n, i = j \\ \frac{n^2 - 3n + 3}{n-1}, i \neq j \end{cases}$$

三、探討樹上螞蟻從點 v_i 出發第一次到點 v_j 時經過邊數期望值

起初在研究樹 (tree) 時，為了簡化問題本研究先針對結構較為單純的完美二元樹進行討論。由於樹 (tree) 中，從任意一點到另外一點的最短行走路徑唯一，因此本研究只會探討螞蟻可走回頭路時，從任意一點第一次走到另外一點時，經過邊數期望值。

(一) 探討完美二元樹

以圖 (二) 為例，本研究嘗試計算 E_{12} 及 E_{14} ，並嘗試找出兩數值之關聯。

1. 計算 E_{12}

當螞蟻位在點 v_1 時，螞蟻有 $\frac{1}{2}$

的機率走一步到達點 v_2 ，因此期望值

為 $\frac{1}{2} \times 1$ ， $\frac{1}{2}$ 的機率走往點 v_3 走，

由前篇研究結果 (一) 可知再次走到點

v_1 時經過邊數期望值為 $\frac{2 \times 3}{1} = 6$ ，此

時螞蟻又有 $\frac{1}{2}$ 的機率走一步到達點

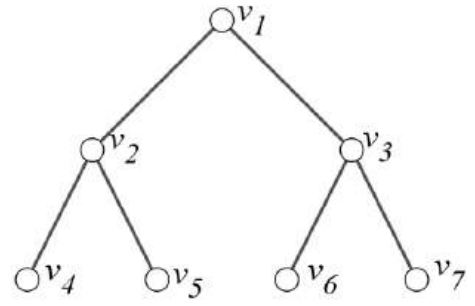


圖 (二)：完美二元樹
圖片來源：研究者自製

v_2 ，但這是建立在螞蟻一開始選擇走向點 v_3 的情況下，因此發生此情

況的機率 $\frac{1}{4}$ ，經過邊數則是 $6+1$ ，所以經過邊數期望值為 $\frac{1}{4} \times 7$ 。後

續以此類推，因此期望值算式如下：

$$E_{12} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 7 + \frac{1}{8} \times 13 + \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} E_{12} = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{8} \times 7 + \frac{1}{16} \times 13 + \dots (2)$$

$$(1) - (2) = \frac{1}{2} E_{12} = \frac{1}{2} + 6 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} E_{12} = \frac{1}{2} + 6 \times \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \Rightarrow E_{12} = 7$$

2. 計算 E_{14}

由於螞蟻在走到點 v_4 前一定會先走到點 v_2 ，因此 E_{14} 可以改寫

為 $E_{12} + E_{24}$ ，即為 $7 + E_{24}$ 。而 E_{24} 的計算與計算 E_{12} 的方法類似。

當螞蟻位在點 v_2 時，螞蟻有 $\frac{1}{3}$ 的機率走一步到達點 v_4 ，因此期望值

為 $\frac{1}{3} \times 1$ ， $\frac{2}{3}$ 的機率走向點 v_1 或點 v_5 ，由前篇研究結果 (一) 可知再

次走到點 v_2 時經過邊數期望值為 $\frac{2 \times \text{邊數}}{\text{deg}(\text{出發點})}$ ，由於在此情況中，螞

蟻僅能選擇走向點 v_1 或點 v_5 ，因此要將出發點 degree 視為 2，邊數

則為點 v_2 往點 v_4 以外的方向延伸出的邊數，因此當螞蟻再次走到點

v_2 時經過邊數期望值為 $\frac{2 \times 5}{2}$ ，此時螞蟻又有 $\frac{1}{3}$ 的機率走一步到達點

v_4 ，但這是建立在螞蟻一開始選擇走向點 v_1 或點 v_5 的情況下，所以

發生此情況之機率為 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ ，經過邊數為 $5+1$ ，因此經過邊數期望值為

$\frac{2}{9} \times 6$ 。後續以此類推，因此期望值算式如下：

$$E_{24} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{9} \times 6 + \frac{4}{27} \times 11 + \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} E_{24} = \frac{2}{9} \times 1 + \frac{4}{27} \times 6 + \frac{8}{81} \times 11 + \dots (2)$$

$$(1) - (2) = \frac{1}{3} E_{24} = \frac{1}{3} + 5 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} E_{24} = \frac{1}{3} + 5 \times \left(\frac{\frac{2}{9}}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{10}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow E_{24} = 11 \quad \Rightarrow E_{14} = E_{12} + E_{24} = 7 + 11 = 18$$

透過計算圖 (二) 中的 E_{12} 及 E_{14} ，本研究發現 $E_{12} = 7 = 2 \times 3 + 1$ ，其

中 3 為點 v_1 往點 v_2 以外的方向延伸出的邊數， $E_{24} = 11 = 2 \times 5 + 1$ ，其中

5 為點 v_2 往點 v_4 以外的方向延伸出的邊數。

本研究查詢相關文獻後發現在樹 (tree) 中任意兩點中一定只有一條最短路徑，因此可以將期望值進行拆分，以圖 (三) 為例，從點 v_2 走到點 v_7

時一定要依序經過點 v_4 、 v_5 ，所以螞蟻從點

v_2 走到點 v_7 時經過邊數期望值 E_{27} 即為

$E_{24} + E_{45} + E_{57}$ ，因此只要獲得一條邊上其中

一點走到另一點之經過邊數期望值通式即可完成 tree 中，螞蟻從任意一點出發走到任意一點時經過邊數期望值。

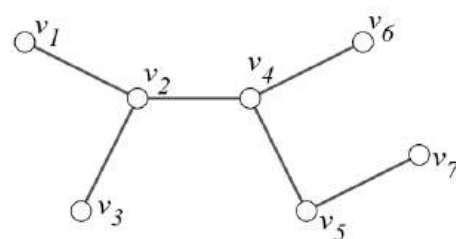


圖 (三)：樹
圖片來源：研究者自製

(二) 探討任意一點 v_i 第一次走到與其相鄰的點 v_j ，經過邊數期望值

【定理二】一個邊上連接著點 v_i 與點 v_j ，若點 v_i 往點 v_j 以外的方向延伸出的邊數為 t (紅框內)，則 $E_{ij} = 2t + 1$

證明：

如圖 (四)，假設 $\deg(v_i) = k$ 。

當螞蟻位在點 v_i 時，牠有 $\frac{1}{k}$ 的機率

走一步到達點 v_j ， $\frac{k-1}{k}$ 的機率走向

紅框內的邊並返回點 v_i ，且透過前篇

研究結果 (一) 可以知道此時經過邊數

期望值為 $\frac{2t}{k-1}$ ，接下來螞蟻又有 $\frac{1}{k}$

的機率走一步到達點 v_j ，但由於此情

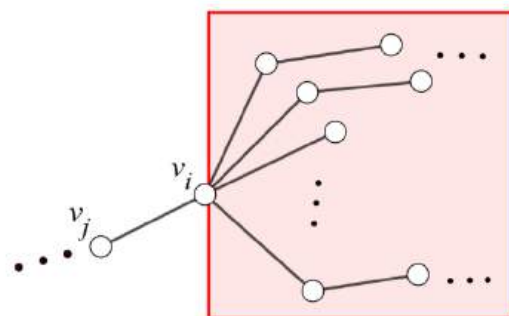


圖 (四)：定理二證明用
圖片來源：研究者自製

況是建立在螞蟻一開始在點 v_i 時選擇走向紅框內的邊，因此發生此情況的

機率為 $\frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k}$ ，因此經過邊數期望值為 $\frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k} \times 1$ 。後續依此類推，因此期望值算式如下：

$$\begin{aligned}
E_{ij} &= \frac{1}{k} \times 1 + \frac{k-1}{k} \times \frac{2t}{k-1} + \left(\frac{1}{k} \times \frac{k-1}{k} \right) \times 1 + \left(\frac{k-1}{k} \times \frac{k-1}{k} \right) \times \frac{2t}{k-1} + \dots \\
\Rightarrow E_{ij} &= \left(\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k^2} + \frac{(k-1)^2}{k^3} + \dots \right) \times 1 + \left(\frac{k-1}{k} + \frac{(k-1)^2}{k^2} + \frac{(k-1)^3}{k^3} + \dots \right) \times \frac{2t}{k-1} \\
\Rightarrow E_{ij} &= \left(\frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{k-1}{k}} \right) \times 1 + \left(\frac{\frac{k-1}{k}}{1 - \frac{k-1}{k}} \right) \times \frac{2t}{k-1} \Rightarrow E_{ij} = \left(\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} \right) \times 1 + \left(\frac{\frac{k-1}{k}}{\frac{1}{k}} \right) \times \frac{2t}{k-1} \\
\Rightarrow E_{ij} &= 1 \times 1 + (k-1) \times \frac{2t}{k-1} = 2t + 1
\end{aligned}$$

四、探討 $C_m \star C_n$ 上螞蟻從點 v_i 出發第一次到點 v_j 時經過邊數期望值

後續本研究也希望針對 $C_m \star C_n$ 進行探討， $C_m \star C_n$ 為兩個 cycle C_m 以及 C_n 連接（共用其中一個點）。其中將共用點以 v_1 命名，接著將 v_1 左上方連接的點命名為 v_2 ，後續以逆時針方向依序命名點座標。

(一) $C_3 \star C_3$

如圖 (五)，由於 $C_3 \star C_3$ 是一種以結構對稱的圖，因此計算各點到另外一點經過邊數期望值時會有許多重複的變

數，例如： $E_{12} = E_{14}$ ， $E_{23} = E_{45}$ ，因此需要列

出的期望值算式如下：

$$\begin{cases}
E_{12} = 1 + \frac{1}{4}E_{52} + \frac{1}{4}E_{42} + \frac{1}{4}E_{32} \\
E_{21} = 1 + \frac{1}{2}E_{31} \\
E_{23} = 1 + \frac{1}{2}E_{13} \\
E_{25} = 1 + \frac{1}{2}E_{15} + \frac{1}{2}E_{35}
\end{cases}$$

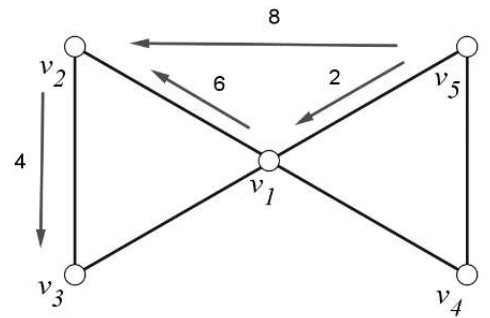


圖 (五)： $C_3 \star C_3$
圖片來源：研究者自製

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{12} = 1 + \frac{1}{4}E_{23} + \frac{1}{2}E_{52} \\ E_{51} = 1 + \frac{1}{2}E_{51} \\ E_{23} = 1 + \frac{1}{2}E_{12} \\ E_{52} = 1 + \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{52} \end{cases}$$

將計算後的期望值皆標示在圖 (五) 中。

(二) $C_m \star C_n$

在說明完 $C_3 \star C_3$ 後，透過解聯立的手段，將 m 與 n 分別為 3、4、5 時的情況列出，得到表 (一)。

透過表 (一) 可以發現將分母通分為 m 後，橫列的方向看分子皆為等差數列，令 $E_{12} = \frac{b_{m,n}}{m}$ ，當 $m=3$ 時可觀察到分子的公差為 4 且首項為 18，因此猜測 $b_{3,n} = 4n + 6$ 。以直行的方向觀察分子可發現，當 $n=3$ 時，分子之間的差呈等差數列，為 12, 14； $n=4$ 時，分子之間的差則為 14, 16； $n=5$ 時，分子之間的差則為 16, 18。因此猜測分子間的差為 $2n+6$ 、 $2n+8$ 、 $2n+10$ 、...。透過上述觀察，本研究對 E_{12} 有了表 (一) 中鄰近項

的遞迴關係式猜測： $b_{m,n} = b_{m-1,n} + 2n + (2m-2)$

$$\begin{cases} b_{3,n} = 4n + 6 \\ b_{4,n} = b_{3,n} + 2n + 6 \\ b_{5,n} = b_{4,n} + 2n + 8 \\ b_{6,n} = b_{5,n} + 2n + 10 \\ \vdots \\ (+)b_{m,n} = b_{m-1,n} + 2n + (2m-2) \end{cases}$$

$$b_{m,n} = (m-1) \times 2n + m \times (m-1)$$

$$\Rightarrow b_{m,n} = m^2 + 2mn - m - 2n$$

$$\Rightarrow E_{12} = \frac{m^2 + 2mn - m - 2n}{m}$$

表 (一)： $C_m \star C_n$ 中 E_{12}

$m \backslash n$	3	4	5
3	$\frac{18}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{26}{3}$
4	$\frac{30}{4}$	$\frac{36}{4}$	$\frac{42}{4}$
5	$\frac{44}{5}$	$\frac{52}{5}$	$\frac{60}{5}$

【定理三】兩個 cycle C_m 以及 C_n 連接 (共用其中一個點)，將共用點以

v_1 命名，接著將位於 C_m 且與 v_1 連接的點命名為 v_2 ，可得到

$$E_{12} = \frac{m^2 + 2mn - m - 2n}{m}$$

證明：

列出 $E_{m2}, E_{m-1,2}, \dots, E_{32}$ 的算式，如下

$$\begin{cases} E_{m2} = 1 + \frac{1}{2}E_{12} + \frac{1}{2}E_{m-1,2} \\ E_{m-1,2} = 1 + \frac{1}{2}E_{m-2,2} + \frac{1}{2}E_{m,2} \\ \vdots \\ E_{42} = 1 + \frac{1}{2}E_{32} + \frac{1}{2}E_{52} \\ E_{32} = 1 + \frac{1}{2}E_{42} \end{cases}$$

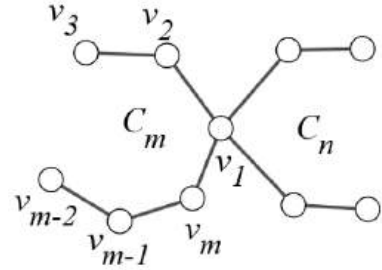


圖 (六)： $C_m \star C_n$
圖片來源：研究者自製

將 E_{32} 代入到 E_{42} 可得 $3E_{42} = 6 + 2E_{52}$

將 E_{42} 代入到 E_{52} 可得 $4E_{52} = 12 + 3E_{62}$

將 E_{52} 代入到 E_{62} 可得 $5E_{62} = 20 + 4E_{72}$

$\vdots$

透過反覆的迭代過程可猜測

$(a-1)E_{a2} = (a-1)(a-2) + (a-2)E_{a+1,2}$ ，接下來利用數學歸納法證明。

當 $a = 4$

$$3E_{42} = 6 + 2E_{52}$$

假設 $a = k, 4 \leq k \leq m-1$ 成立

$$\Rightarrow (k-1)E_{k2} = (k-1)(k-2) + (k-2)E_{k+1,2}$$

當 $a = k+1$

$$E_{k+1,2} = 1 + \frac{1}{2}E_{k2} + \frac{1}{2}E_{k+2,2}$$

$$\Rightarrow 2E_{k+1,2} = 2 + k - 2 + \frac{k-2}{k-1}E_{k+1,2} + E_{k+2,2}$$

$$\Rightarrow (2k - 2 - k + 2)E_{k+1,2} = k(k-1) + (k-1)E_{k+2,2}$$

$$\Rightarrow kE_{k+1,2} = k(k-1) + (k-1)E_{k+2,2}$$

$$\Rightarrow (m-1)E_{m2} = m^2 - 3m + 2 + (m-2)E_{12}$$

$$\Rightarrow (2m-2)E_{12} = (2m-2)(n+1) + m^2 - 3m + 2 + (m-2)E_{12}$$

$$\Rightarrow mE_{12} = 2mn + 2m - 2n - 2 - m^2 - 3m + 2$$

$$\Rightarrow E_{12} = \frac{m^2 - m - 2n + 2mn}{m}$$

五、探討 $K_m \star K_n$ 上螞蟻從點 v_i 出發第一次到點 v_j 時經過邊數期望值

接著本研究針對 $K_m \star K_n$ 進行探討， $K_m \star K_n$ 為兩個完全圖 K_m 以及 K_n

連接（共用其中一個點）。其中將共用點以 v_1 命名。

由於完全圖中任意一點到另外一點經過邊數期望值皆相同，因此需要探討的期望值變數僅有 K_m 中 v_1 到 K_m 中一點（以下以 v_2 代稱）以及考慮出發點為 v_3 （ v_3 為 K_m 中不同於 v_1 、 v_2 的一點），終點為 v_2 之情況。若終點為 v_1 則可透過完全圖的研究結果得知，且在此不考慮 K_m 到 K_n 的情況是因為此情況可拆分成走到 v_1 再走到終點。

【定理四】兩個完全圖 K_m 以及 K_n 連接（共用其中一個點）將共用點以 v_1 命名，其中 v_2 和 v_3 為 K_m 中不同於 v_1 的兩點，則 $E_{12} = \frac{2n^2 + m^2 - 2n + m}{m}$ 、
 $E_{32} = \frac{m^2 + n^2 - n}{m}$

證明：

由於螞蟻位在點 v_1 時有 $\frac{1}{m+n-2}$ 的機率走一步到 v_2 ， $\frac{m-2}{m+n-2}$ 的機率走到 K_m 中不為 v_2 的點，以及 $\frac{n-1}{m+n-2}$ 的機率走到 K_n 中的點，因此列式

如下：

$$E_{12} = \frac{1}{m+n-2} \times 1 + \frac{m-2}{m+n-2} \times (1+E_{32}) + \frac{n-1}{m+n-2} \times (n+E_{12}) \dots (1)$$

同理可列出 E_{32} ，如下：

$$\begin{aligned} E_{32} &= \frac{1}{m-1} \times 1 + \frac{m-3}{m-1} \times (1+E_{32}) + \frac{1}{m-1} \times (1+E_{12}) \\ \Rightarrow (m-1)E_{32} &= 1 + (m-3)(1+E_{32}) + 1 + E_{12} \\ \Rightarrow E_{32} &= \frac{m-1+E_{12}}{2} \dots (2) \end{aligned}$$

整理 (1) 後將 (2) 代入可得

$$\begin{aligned} (m+n-2)E_{12} &= 1 + m - 2 + (m-2)E_{32} + n^2 - n + (n-1)E_{12} \\ \Rightarrow (m-1)E_{12} &= n^2 - n + m - 1 + \frac{(n-2)(m-1+E_{12})}{2} \\ \Rightarrow (2m-2)E_{12} &= 2n^2 - 2n + 2m - 2 + m^2 - 2m - m + 2 + (m-2)E_{12} \\ \Rightarrow mE_{12} &= 2n^2 + m^2 - 2n + m \\ \Rightarrow E_{12} &= \frac{2n^2 + m^2 - 2n + m}{m} \end{aligned}$$

將其代入 (2) 可得

$$\begin{aligned} 2mE_{32} &= m^2 - m + 2n^2 + m^2 - 2n + m \\ E_{32} &= \frac{m^2 + n^2 - n}{m} \end{aligned}$$

六、比較點到點最短路徑經過邊數與點到點經過邊數期望值

在後續閱讀文獻的過程中，本研究發現一種任意連通圖中，點到點經過邊數期望值通式（詳情請見本作品說明書伍、討論）。雖然目前尚未證明了該期望值通式，但本研究希望能尋找不同於先前的研究方向。

為了找尋其它的延伸方向，我花費了不少時間在閱讀張鎮華老師的《演算法觀點的圖論》，學習到了以點到點最短路徑經過邊數定義下的距離、離心率、半徑、直徑、中心點等知識。由於我先前的研究領域是點到點經過邊數期望值，又因為在任意樹中點到點經過邊數期望值與點到點最短路徑經過邊數接滿足正定性及三角不等式，意思是對於圖上所有相異的三點 v_i, v_j, v_k ， $d(v_i, v_j) > 0$ ；

$$d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_k) \text{ (已知)}、d'(v_i, v_j) > 0；d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$$

(待證明)。首先圖上任兩點經過邊數期望值顯然大於 0，因此 $d'(v_i, v_j) > 0$ 成

立， $d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$ 證明過程如下。

(一) 證明任意樹中 $d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$

由於樹中任兩點必有唯一路徑，因此僅需考慮以下兩種情況

1. 點 v_i 到點 v_k 的路徑中包含點 v_j

在此情況下，由於要從點 v_i 走到點 v_k 必定要經過點 v_j ，因此

$$d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) = d'(v_i, v_k)$$

2. 點 v_i 到點 v_k 的路徑中不包含點 v_j

假設點 v_i 到點 v_k 的路徑中與點 v_j 的路徑經過邊數最少的點

v_m 連接至點 v_j ，則 $d'(v_i, v_k) = d'(v_i, v_m) + d'(v_m, v_k)$ ，又因為

$$d'(v_i, v_j) = d'(v_i, v_m) + d'(v_m, v_j)、d'(v_j, v_k) = d'(v_j, v_m) + d'(v_m, v_k)，$$

$$\text{因此 } d'(v_i, v_k) = d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) - d'(v_m, v_j) - d'(v_j, v_m)$$

$$\Rightarrow d'(v_i, v_k) < d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k)$$

綜合上述兩點討論，可得到 $d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$

(二) 樹中由 $d'(v_i, v_j)$ 定義的中心點數量

定義距離為點到點的最短路徑經過邊數時，一個已知的定理為任意樹的

中心點只有一個或是相鄰的兩點。由於在樹中， $d'(v_i, v_j) > 0$ 與 $d'(v_i, v_j)$

$+ d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$ 皆成立，因此我將點到點經過邊數期望值視為一種距

離，探討由 $d'(v_i, v_j)$ 定義的中心點數量是否會一樣。將每個點到各點的經

過邊數期望值最大者也就是由 $d'(v_i, v_j)$ 列出的離心率 $e'(v)$ 列出，觀察離心率與該圖的半徑相等的點後本研究發現中心點只可能有一點或是相鄰的兩點，因此開始了以下證明：

【定理四】任意樹由 $d'(v_i, v_j)$ 定義的中心點只有一個或是相鄰的兩點。

證明：

如圖 (七)，顯然任意樹中必定會存在中心點，因此令 v_0 為中心點，其相鄰的點為 $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，劃分

區域為 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，不失一般性假設 A_1 中存在一

點 v_m 使得 $E_{0m} = e'(v_0)$ ，由於 $A_2, A_3, \dots, A_n$ 中的

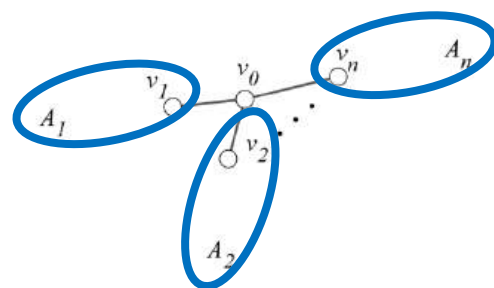


圖 (七)：定理四證明用
圖片來源：研究者自製

任何一點 v_n 到點 v_m 前都要經過 v_0 ，所以 $E_{nm} = E_{n0} + E_{0m} > e'(v_0)$ ，因此

$A_2, A_3, \dots, A_n$ 中不會存在中心點。假設 v_1 為中心點，不失一般性假設 v_a 位於

A_2 使 $E_{1a} = e'(v_0)$ ，所以 A_1 中的任意一點 v_b 都可以列出

$E_{ba} = E_{b1} + E_{1a} > e'(v_0)$ ，因此 A_1 中只有 v_1 可能為中心點。

肆、研究結果

一、探討以下圖中，螞蟻從點到點經過邊數期望值

(一) n 點完全圖 K_n 中，螞蟻從點 v_i 出發，第一次走到點 v_j ，其經過邊數之

$$\text{期望值為： } E_{ij} = \begin{cases} n, & i = j \\ n-1, & i \neq j \end{cases}, \quad E_{ij}^* = \begin{cases} n, & i = j \\ \frac{n^2 - 3n + 3}{n-1}, & i \neq j \end{cases}。$$

(二) 樹 (tree) 中一個邊上連接著點 v_i 與點 v_j ，若點 v_i 往點 v_j 以外的方向

延伸出的邊數為 t ，則 $E_{ij} = 2t + 1$ 。

(三) 兩個 cycle C_m 以及 C_n 連接 (共用其中一個點)，將共用點以 v_1 命名，將

C_m 中與 v_1 連接的點命名為 v_2 ，可得到 $E_{12} = \frac{m^2 + 2mn - m - 2n}{m}$ 。

(四) 兩個完全圖 K_m 以及 K_n 連接 (共用其中一個點) 將共用點以 v_1 命名，

$$\text{其中 } v_2 \text{ 和 } v_3 \text{ 為 } K_m \text{ 中的兩點，則 } E_{12} = \frac{2n^2 + m^2 - 2n + m}{m}、$$

$$E_{32} = \frac{m^2 + n^2 - n}{m}。$$

二、由於在樹中， $d'(v_i, v_j) > 0$ 與 $d'(v_i, v_j) + d'(v_j, v_k) \geq d'(v_i, v_k)$ 皆成立，因此將點到點經過邊數期望值視為距離，任意樹由 $d'(v_i, v_j)$ 定義的中心點只有一個或是相鄰的兩點。

伍、討論

一、另一個期望值通式

在研究的過程中，我閱讀到一篇有關連通圖上點 v_i 經過點 v_j 後回到點

v_i 時經過邊數期望值通式 [7] 如下：

令矩陣 L 為 Laplacian matrix，其中矩陣 L 的主對角線每個元素

$\ell_{ii} = \deg(v_i)$ ，其餘位置 ℓ_{ij} 放置點 v_i 與 v_j 相連邊數的負值。則可得到從點

v_i 經過點 v_j 後回到點 v_i 時經過邊數期望值為 $\frac{2 \times \text{邊數} \cdot \det(L[i, j | i, j])}{(-1)^{i+j} \det(L[i | j])}$ ，其中

分母代表的組合意義為 spanning tree 數量，分子則是 $2 \times \text{邊數}$ 乘上將點 v_i 與

v_j 分在兩個不同的 subtree，而這兩個 subtree 要包含到所有點的方法數。

由於點 v_i 經過點 v_j 後回到點 v_i 可以拆分成從點 v_i 到點 v_j 與從點

v_j 到點 v_i ，因此令矩陣 A 中每個元素 a_{ij} 為點 v_i 到 v_j 的經過邊數期望

值，則 $a_{ij} + a_{ji} = \frac{2 \times \text{邊數} \cdot \# \text{spanning forest}(v_i \text{ 和 } v_j \text{ 在不同的 tree})}{\# \text{spanning tree}}$ 。

由於 $2 \times \text{邊數}$ 即為圖中所有點的 degree 相加，因此本研究為了得到矩陣

A 中的元素 a_{ij} 之通式 (即為點到點經過邊數期望值通式) 開始思考，同樣地將 v_i 與 v_j 分在兩個不同的 tree 後，是否可將拆分手段是否能將 $2 \times$ 邊數 (所有點的 degree 相加) 之值分開，使其分別代表 a_{ij} 及 a_{ji} ，接著本研究有了以下猜想。

【猜想一】任意連通圖中

$$E_{ij} = \frac{1}{\# \text{spanning tree}} \left(\sum_{\substack{\text{含兩個 tree 之 spanning forest } F \\ \text{使 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 位在不同的 tree}}} \left(\sum_{\substack{\forall v_k \text{ 位在 } F \text{ 中} \\ \text{含有 } v_i \text{ 的 tree}}} \deg(v_k) \right) \right)。$$

舉例：

分母為生成樹數量，分子則是將圖切成兩個 tree，其中 v_i 和 v_j 在不同的 tree，將含有 v_j 的 tree 切除，計算剩下的圖每個點原本的 degree 和。以右圖為例，計算方法是按照以下步驟。

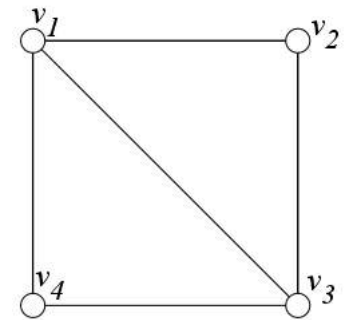


圖 (八)：猜想一說明用
圖片來源：研究者自製

先計算 spanning tree 數量 $(-1)^{i+j} \det(L[i|j]) = 8$

分子則是如下圖，將圖切成兩個 tree 其中點旁邊的數字代表該點原本的 degree。需要相加的數字為紅

色的數字，相加後會得到 32，因此 $E_{12} = \frac{32}{8} = 4$ (E_{12} 之值實際上就等於 4)。

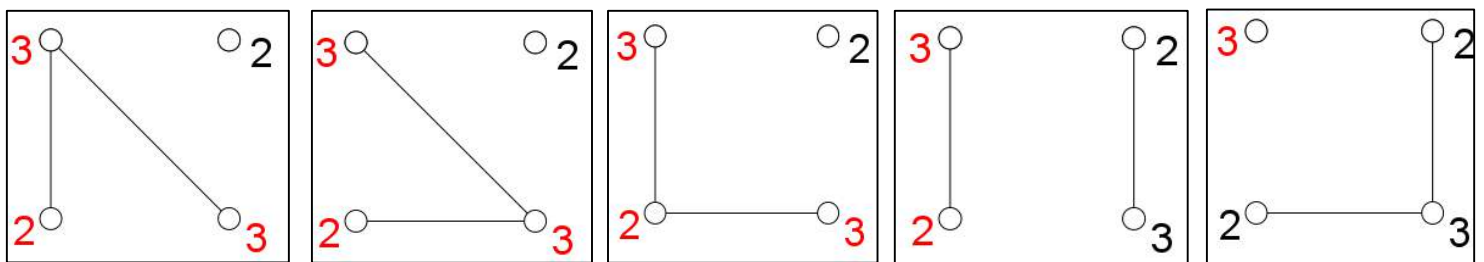


圖 (九)：分割後的圖
圖片來源：研究者自製

二、期望值通式之文獻 (HAO XU, SHING-TUNG YAU (2014))

後續在查找文獻的過程中本研究發現有一個已知的期望值通式如下 [8]，且此通式與上述討論中提到的期望值猜想有相同的分母，分子則都是點的 degree 在進行加總。

通式如下：

$$E_{ij} = \frac{1}{\tau(G)} \sum_{u \in V(G)} d_u \sum_{P \in \wp_G(v_i, u) \atop v_j \notin P} R(G - \{P, v_j\}, d_G)$$

其中 d_v 表點 v 的 degree， $\tau(G)$ 是圖 G 的生成樹數量， $\wp_G(v_i, v_j)$ 表所有 v_i 到 v_j 的路徑集合， $R(G - \{P, v_j\}, d_G) = \tau(G / \{P, v_j\})$ 代表圖 G 中收縮路徑 P 與點 v_j 後的圖的生成樹數量。

收縮 v_i 與 v_j ：將兩點視作同一個點後再畫出與其它點的關係。若是要收縮路徑 P 與點 v_j ，則是將路徑 P 每個點與點 v_j 視為同一個點，接著畫出與其它點的關係

以下說明此通式之計算流程，並和【猜想一】進行比較以圖 (十) 為例：

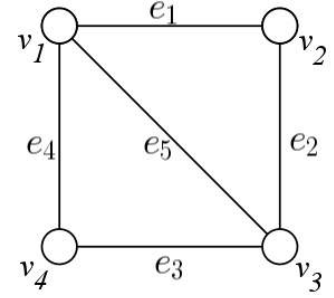


圖 (十)：期望值計算示範
圖片來源：研究者自製

$$E_{12} = \frac{1}{\tau(G)} \left[\begin{array}{l} d_{v_1} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_1) \atop v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G) + \\ d_{v_2} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_2) \atop v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G) + \\ d_{v_3} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_3) \atop v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G) + \\ d_{v_4} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_4) \atop v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G) \end{array} \right]$$

$$(-) d_{v_1} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_1) \atop v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G)$$

收縮路徑 P 與點 v_j 後的圖如圖 (十一)，其生成樹如圖 (十二)，且畫出的每個生成樹都可和前述提到的期望值猜想一一對應。

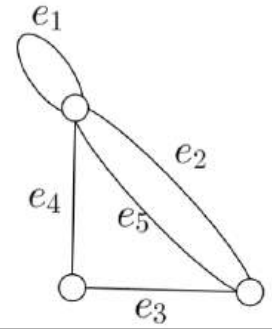


圖 (十一) 收縮後的圖
圖片來源：研究者自製

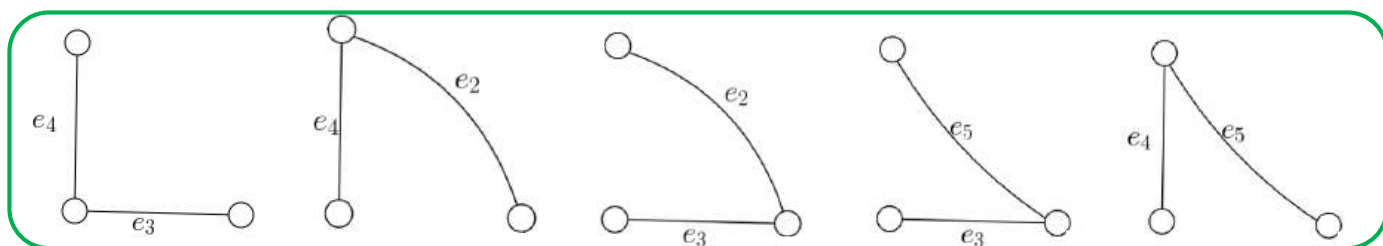


圖 (十二之一)：圖 (十一) 的所有生成樹
圖片來源：研究者自製

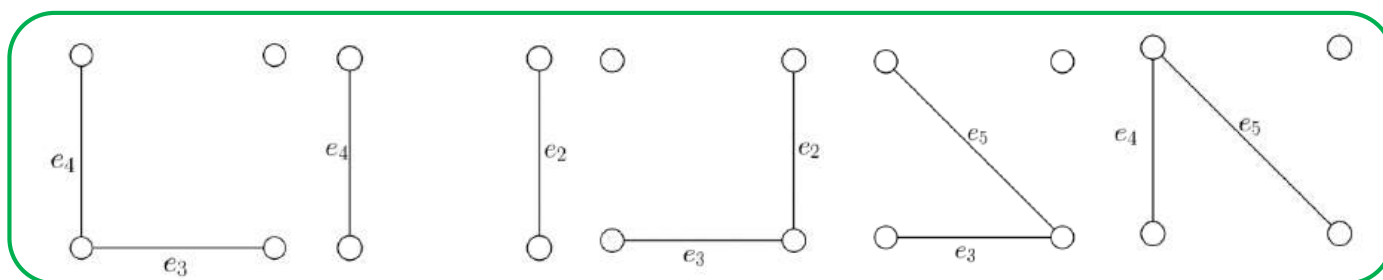


圖 (十二之二)：與圖 (十二之一) 對應圖 (九) 中的圖
圖片來源：研究者自製

在 $u = v_1$ 時，可以發現 d_{v_1} 被紀錄到的次數和原先期望值猜想一樣，如上

圖 (十二)，在原先的期望值猜想中，包含 v_1 的 tree 中能夠對應到利用此通式列出的 spanning tree。

$$(二) d_{v_2} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_2), v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G)$$

在此討論中，路徑 P 的起點和終點分別為 v_1 與 v_2 ，但是 v_2 在路徑 P 上是不能被算進去的，因此此情況下圖的生成樹數量為 0。

$$(三) d_{v_3} \sum_{P \in \wp_G(v_1, v_3), v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G)$$

v_1 到 v_3 且不經過 v_2 的路徑有 (v_1, v_3) 和 (v_1, v_4, v_3) ，分開討論後如下：

1. (v_1, v_3)

圖 (十三) 的生成樹有以下兩種，而這兩種樹補上 (v_1, v_3) 後也能和原本的期望值猜想進行比對。

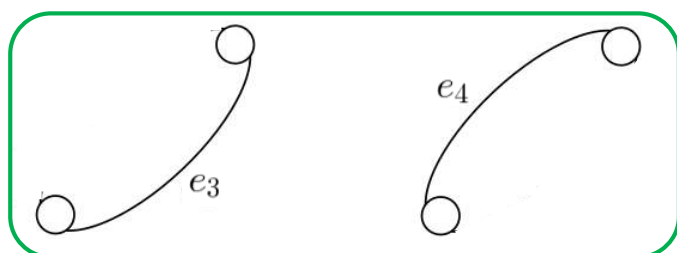


圖 (十四之一)：圖 (十三) 的所有生成樹

圖片來源：研究者自製

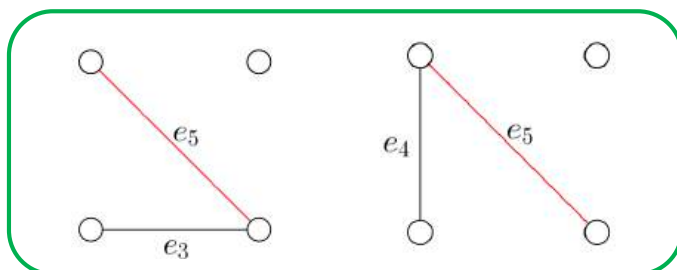


圖 (十四之二)：與圖 (十四之一) 對應圖 (九) 中的圖

圖片來源：研究者自製

2. (v_1, v_4, v_3)

圖 (十五) 的生成樹只有一種，而樹在補上 (v_1, v_4, v_3) 後也能和原本的期望值猜想進行比對。

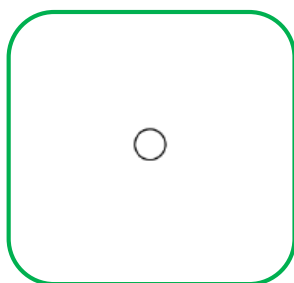


圖 (十六之一)：圖 (十五) 的所有生成樹

圖片來源：研究者自製

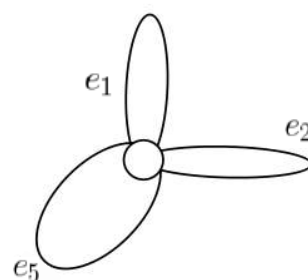


圖 (十五) 收縮後的圖
圖片來源：研究者自製

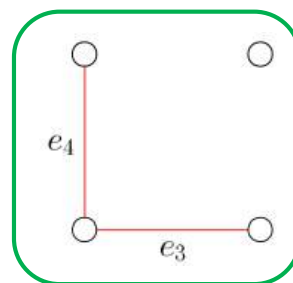


圖 (十六之二)：與圖 (十六之一) 對應圖 (九) 中的圖

圖片來源：研究者自製

在 $u = v_3$ 時，可以發現 d_{v_3} 被紀錄到的次數和原先期望值猜想一樣，

如上圖，在原先的期望值猜想中，包含 v_3 的 tree 中能夠對應到利用此通式列出的 spanning tree，因此點 v_3 的 degree 被計算到的次數與【猜想一】相同。

$$(四) d_{v_4} \sum_{P \in \mathcal{P}_G(v_1, v_4), v_2 \notin P} R(G - \{P, v_2\}, d_G)$$

v_1 到 v_4 且不經過 v_2 的路徑有 (v_1, v_4) 和 (v_1, v_3, v_4) ，分開討論後如下：

1. (v_1, v_4)

與先前討論方式相同，在生成樹中補上路徑 (v_1, v_4)

後與先前期望值猜想進行比較。

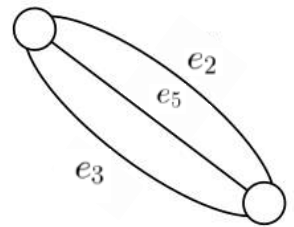


圖 (十七) 收縮後的圖
圖片來源：研究者自製

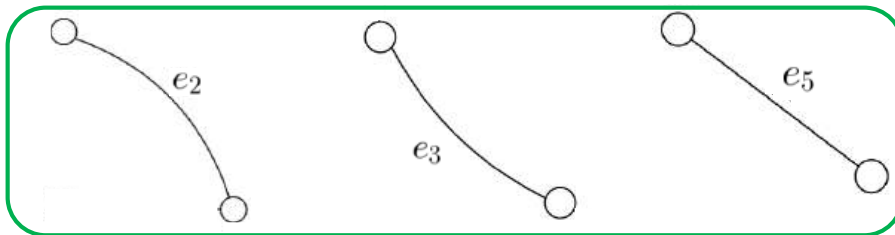


圖 (十八之一)：圖 (十七) 的所有生成樹
圖片來源：研究者自製

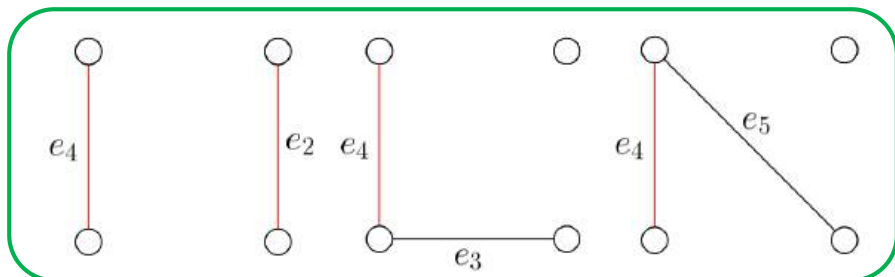


圖 (十八之二)：與圖 (十八之一) 對應圖 (九) 中的圖
圖片來源：研究者自製

2. (v_1, v_3, v_4)

在生成樹中補上路徑 (v_1, v_4) 後與先前期望值
猜想進行比較，如圖 (二十)。

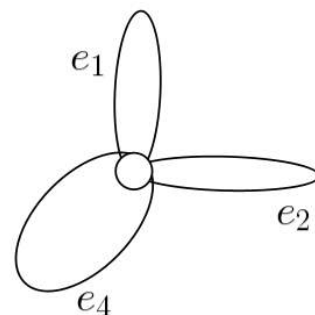


圖 (十九) 收縮後的圖
圖片來源：研究者自製

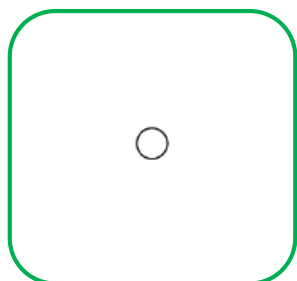


圖 (二十之一)：圖 (十九) 的所有生成樹
圖片來源：研究者自製

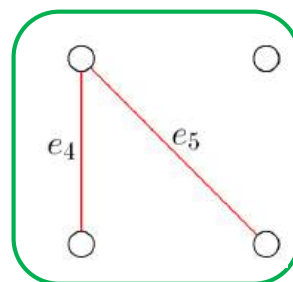


圖 (二十之二)：與圖 (二十之一) 對應圖 (九) 中的圖
圖片來源：研究者自製

在 $u = v_4$ 時，可以發現 d_{v_4} 被紀錄到的次數和原先期望值猜想一樣，

如上圖，在原先的期望值猜想中，包含 v_4 的 tree 中能夠對應到利用此通式列出的圖。觀察以下討論後會發現每個點的 degree 被算到的次數皆一樣。

透過上述討論可以發現，兩個通式中的分母為相同，分子則是可一一對應，由於討論二的通式為已知，因此能夠說明【猜想一】的正確性，不過兩個通式在計算同一個值時，利用討論一的方法只需切分為五種圖進行加總，討論二則需要切分為更多種圖，除此之外討論二的通式證明過程相當複雜，且需要利用較高階的知識，如特徵值。因此本研究希望在未來能夠利用較為簡單的手段證明討論一的通式，也是未來研究方向之一。除此之外，有些圖因為結構單一期望值通式可直接計算得到，例如完全圖，但是這種結構單一的圖若利用【猜想一】的計算方法反而會耗費大量心力。換言之，即便有了期望值通式，也不表示每一個不同的圖都需要利用通式計算。

陸、未來展望

- 一、證明【猜想一】的期望值通式。
- 二、找出 $rad'(G)$ 和 $diam'(G)$ 之間的關係。
- 三、探討中心點數量是否和半徑或直徑相關。

柒、參考文獻

- [1] 張仲辰 (2024)，連通圖上行走步數期望值之研究。「2024 臺灣國際科學展覽會」。
- [2] 張鎮華、蔡牧村 (2017)。演算法觀點的圖論 (修訂版)。國立臺灣大學：國立臺灣大學出版中心
- [3] 陳鵬安 (無日期)。圖論。國立台東大學應用數學系。取自 <https://reurl.cc/g4xYAN>
- [4] 游森棚 (2022)。向左轉向右轉。森棚教官的數學題，1，61-04
- [5] 劉以翔 (2023)。圖論 IV：樹。HackMD。取自 <https://reurl.cc/2zNQ1X>
- [6] A. K.Chandra, P. Raghavan, W. L. Ruzzo, R. Smolensky (1989) . The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times. From <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/73007.73062>
- [7] HAO XU, SHING-TUNG YAU (2014) . An Explicit Formula of Hitting Times for Random Walks on Graphs. From <https://reurl.cc/0drpk9>

【評語】 010036

針對樹圖、循環圖、完全圖等圖形及其結合圖形，計算從某點出發到某點所需花費步數的期望值，作者得到一些結果，尤其在充分利用圖的性質簡化計算過程，此構思值得肯定，未來可將此更加發展得到更一般性的結論。