

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010030

參展科別 數學

作品名稱 New Properties of Miquel Point

得獎獎項 四等獎

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 孟慶霖

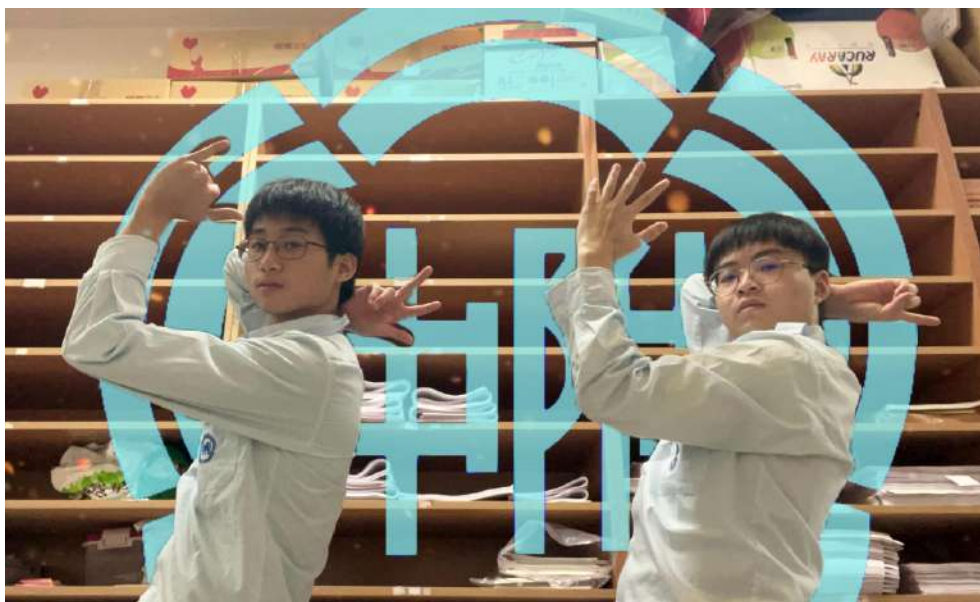
蕭偉智

作者姓名 呂昀廣

曾琮鈞

關鍵詞 Directed area、Kiepert hyperbola、Circumcircle

作者簡介



作者合照（左起：呂昀廣、曾琮鈞）

我是呂昀廣，就讀國立臺灣師範大學是附屬高級中學的數理資優班。我從小就發掘了在數理科學方面的興趣，喜歡自己一個人學習、研究數學，也能夠與人合作。自從高中考上數理資優班後，我更加精進自己的數理科學能力，資優教育使我在數學領域能不斷突破自己，不論是培訓、競賽、科展研究，又或是先修大學數學（線上課程）皆能展現出我的積極追求。謝謝老師們與家人們支持我追求興趣及發揮天賦。

我是曾琮鈞，從小便喜歡製作讓生活變方便的小機關，比如自動開關門的機械等，而隨年紀增長，想達成目標的條件也越發複雜，這使得我接觸資訊程式設計，透過程式偵測環境、控制硬體設備從而達成目標。此外，我也很喜歡數學學習，享受沉浸在由理想和邏輯所構建的完美世界中。每當我認識新的數學公式或找出有趣的性質時，猶如發現這個完美世界中的一幅風景。這樣的心流經驗讓我對數學研究產生很大的興趣！國中和高中我都選擇了數學作為專題研究領域，在這裡我想感謝蕭老師和孟老師給予我的啟蒙與指導，也很高興能夠透過科展競賽發表分享研究作品。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：北區

科別：數學科

作品名稱：New Properties of Miquel Point

關鍵詞：Directed area、Kiepert hyperbola、Circumcircle

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

New Properties of Miquel Point

摘要

本研究先觀察著名的密克定理 (Miquel theorem) 與密克點 (Miquel point)，我們創新給出了新的研究項目，關注密克點 P 與密克三角形的頂點所構成直線和原三角形 ABC 三邊直線的其餘六個交點，這是前人沒有觸及的研究項目，從而定義旁接三角形與衍伸三角形。

我們先針對特殊型 (直角) 的構圖，發現滿足兩個衍伸三角形的有向面積 $[A_1B_1C_1] = \pm[A_2B_2C_2]$ 時， P 點形成的軌跡為原三角形的 Kiepert hyperbola 與外接圓，這個是有趣且重要發現，我們也進一步給出其幾何必然性。進一步考慮 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$ 時，則刻劃出 P 點軌跡為圓錐曲線系。在前面的基礎下，再針對一般型 (任意角) 的構圖，若 P 點位於原三角形外接圓及 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合曲線上，此時兩個衍伸三角形 $A_1B_1C_1$ 與 $A_2B_2C_2$ 的有向面積比值為定值，且兩者恆為相反數。

Abstract

In this study, we observed the well-known Miquel Theorem and Miquel points. We innovatively proposed a new research project focusing on the line formed by the Miquel point P and the vertices of the Miquel triangle, along with the remaining six intersection points with the sides of the original triangle ABC . This aspect has not been addressed in previous research, allowing us to define the concepts of the ex-contact triangle and the derived triangle.

We gave a special case involving a right triangle and discovered that when the directed areas of the two derived triangles $[A_1B_1C_1] = \pm[A_2B_2C_2]$, the loci of point P is defined by the Kiepert hyperbola and the circumcircle. This is an intriguing and significant finding, and we further gave its geometric necessity. When considering the case where $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$, the loci of point P is depicted as a family of conics.

Building on this foundation, we then explored the general case (with arbitrary angles). If point P lay on the circumcircle, a linear combination curve of the Kiepert hyperbola and the Steiner circumellipse, the ratio of the directed areas of the two derived triangles $A_1B_1C_1$ and $A_2B_2C_2$ was invariable.

壹、前言

一、研究背景與文獻

1838 年，法國數學家 Auguste Miquel 提出著名的密克定理 (Miquel theorem)，即「對於任意三角形 $\triangle ABC$ 的三條邊 (或其延線) $\overrightarrow{BC}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 上分別選取三點 P_A 、 P_B 、 P_C ，若以每一頂點與其兩鄰邊上的兩點作圓，則這三個圓共點於 P 。」其逆定理亦成立。其中 P 點亦稱為密克點 (Miquel Point)，三點所圍成之三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 稱為密克三角形 (Miquel Triangle)。利用四點共圓性質，可以給出密克點與三角形的邊上選取三點的連線與對應邊所成的角相等 $\angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA$ 或互補。過去不少研究推廣到多邊形，並且給出多個圓的圓心也共圓的結果 [7]。

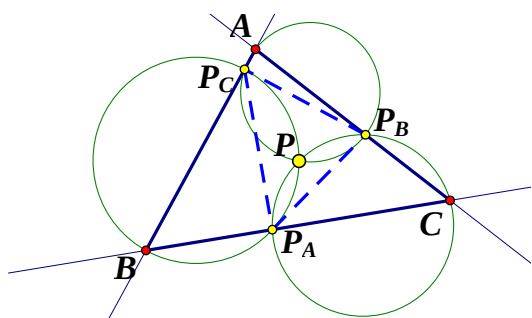


圖 1：密克定理 (P 在內部)

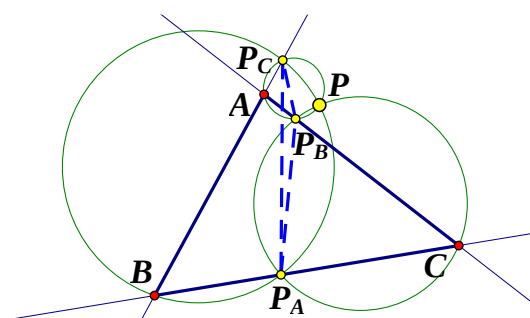


圖 2：密克定理 (P 在外部)

從特殊化的角度來看，當 $\angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA = \frac{\pi}{2}$ 時 (等價於以平面上任點 P 對三邊作垂線)，密克三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 則稱為垂足三角形 (Pedal Triangle)，過去大致有兩個研究方向：第一個方向是重複疊作，形成第一垂足三角形、第二垂足三角形、第三垂足三角形等等；第二個方向是將三角形推廣到封閉多邊形。主要研究項目是刻劃垂足三角形 (多邊形) 與原三角形 (多邊形) 的相似性與面積比 [9]。

當 P 點位於 $\triangle ABC$ 的外接圓上時，有趣的是，此時垂足三角形將退化為一直線， P_A 、 P_B 、 P_C 三點共線，即為幾何學中的西姆松線 (Simson Line)。

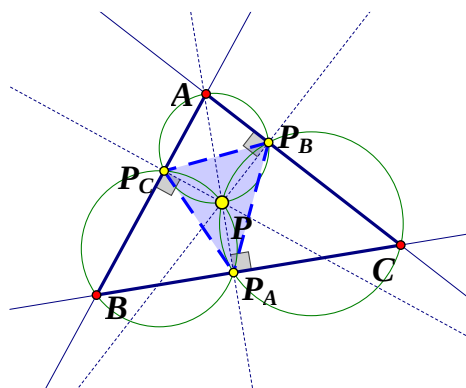


圖 3：垂足三角形

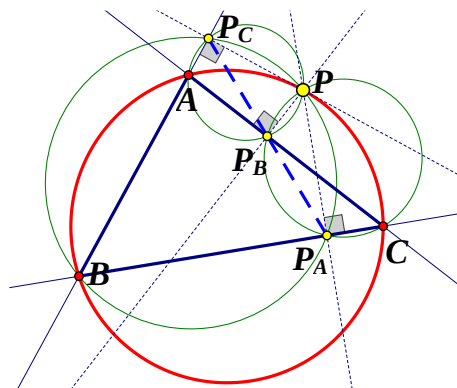


圖 4：西姆松定理

從上述的回顧，我們可以發現前人在密克定理、垂足三角形或西姆松定理上都給出許多豐富的成果，研究項目都是關注 $\triangle ABC$ 的三邊直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的三點 P_A 、 P_B 、 P_C 的構成的幾何量或性質。

難道這個著名且古老的幾何定理無法有突破了嗎？事實上不然，我們必須跳脫原本的思維，本研究不去重複觀察 P_A 、 P_B 、 P_C 三點，而是轉換觀點來看幾何構圖。

我們從垂足三角形的圖來看， $\overrightarrow{PP_A}$ 、 $\overrightarrow{PP_B}$ 、 $\overrightarrow{PP_C}$ 分別為三邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，且與三邊的交點分別為 P_A 、 P_B 、 P_C 。然而 $\overrightarrow{PP_A}$ 分別與 $\overleftrightarrow{CA}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 也有交點， $\overrightarrow{PP_B}$ 和 $\overrightarrow{PP_C}$ 亦同理，這樣一來垂線 $\overrightarrow{PP_A}$ 、 $\overrightarrow{PP_B}$ 、 $\overrightarrow{PP_C}$ 對於三邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 、 $\overleftrightarrow{AB}$ 就交於九個點。我們從此發想進行了一系列研究，並且異於前人，刻劃出多有趣豐富的性質。

為了後續推廣至多邊形的研究方便，本研究以多邊形的角的兩邊為作圖敘述：過 P 點作 $\angle A$ 的邊 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 A_1 點，作邊 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 A_2 點；過 P 點作 $\angle B$ 的邊 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 B_1 點，作邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 B_2 點；過 P 點作 $\angle C$ 的邊 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 C_1 點，作邊 $\overleftrightarrow{CA}$ 的垂線分別交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 C_2 點。

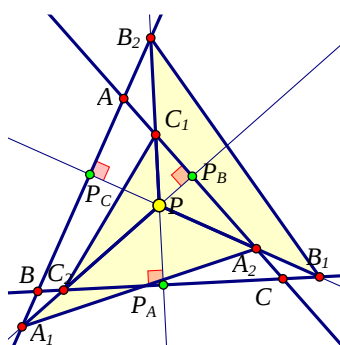


圖 5：旁接三角形

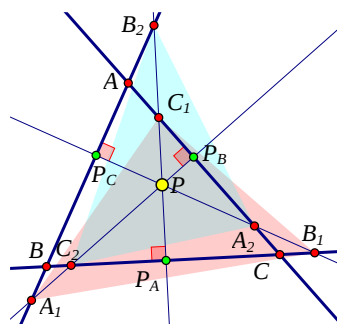


圖 6：衍伸三角形

本研究將 P 點與點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 構造出數個三角形，分別進行研究。

第一類定義為旁接三角形，有 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ 。

第二類定義為衍伸三角形，有 $\triangle A_1B_1C_1$ 、 $\triangle A_2B_2C_2$ 。

我們可以發現 $\triangle PA_1A_2$ 的垂心為 A 點，事實上，四點 A 、 P 、 A_1 、 A_2 構成一個垂心組。至於衍伸三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ 、 $\triangle A_2B_2C_2$ 則值得我們進一步去分析探究。本研究也企圖進行一般化將垂線 $\overrightarrow{PP_A}$ 、 $\overrightarrow{PP_B}$ 、 $\overrightarrow{PP_C}$ 以 P 點為旋轉中心，滿足 $\angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA = \theta$ ，其中 $0 < \theta \leq \pi$ 。本研究因為具有高度對稱輪換性，並且為了查詢國外網站的研究資料，我們選擇利用近代三角幾何學工具「重心坐標 (Barycentric Coordinates)」作為研究工具，企圖刻劃更多關於 P 點與六點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 的定性與定量性質。

二、研究目的

- (一) 探討在特殊化 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \frac{\pi}{2}$ 的構圖中
 - 1. 討論旁接三角形與原三角形頂點之關係。
 - 2. 刻劃 P 點在平面上位置與衍伸三角形之關係。
 - 3. 刻劃衍伸三角形的有向面積比值為 ± 1 與構圖中的不變量性質。
- (二) 刻劃衍伸三角形的有向面積比值為 ± 1 的幾何必然性。
- (三) 推廣 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \frac{\pi}{2}$ 中，衍伸三角形的有向面積比值為實數 r ，刻劃 P 點的軌跡。
- (四) 推廣在一般化 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta$ 的構圖中
 - 1. 劃 P 點在平面上位置與衍伸三角形之關係。
 - 2. 刻劃衍伸三角形的有向面積比值與構圖中的不變量性質。

貳、研究設備及器材

軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0

軟體：繪圖運算工具 Geogebra

軟體：數學計算軟體 Wolfram Mathematica

參、預備知識

一、符號及名詞定義

- (一) 本研究約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = c$ 、 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 。
- (二) 定義「旁接三角形」為原三角形三邊所在直線上點及任意 P 點為頂點的三角形，如下圖的 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ 。
- (三) 定義「衍伸三角形」為以旁接三角形在原三角形邊直線上的頂點所構造的三角形，如下圖的 $\triangle A_1B_1C_1$ 、 $\triangle A_2B_2C_2$ 。

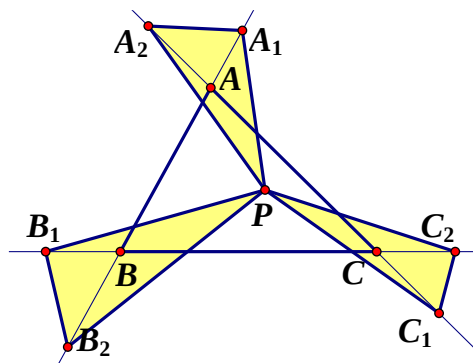


圖 7：旁接三角形

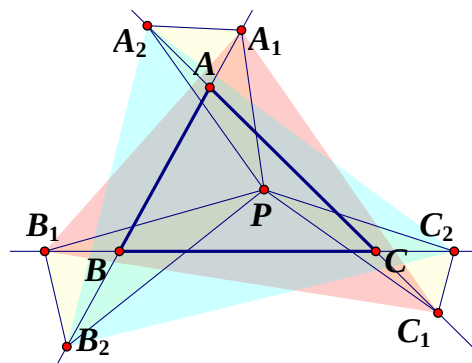


圖 8：衍伸三角形

- (四) 令 $[A_1A_2 \dots A_n]$ 表示任意凸多邊形 $A_1A_2 \dots A_n$ 之有向面積，且定義當頂點為逆時針排列時為正，反之則為負，並以 $|[A_1A_2 \dots A_n]|$ 表示凸多邊形面積。

二、重心坐標 (Barycentric Coordinates) [6]

平面上任一點 P 與 $\triangle ABC$ 三頂點形成三個子三角形 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 、 $\triangle PAB$ ，其中 $\triangle PBC$ 的頂點 P 、 B 、 C 為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。利用這些三角形的有向面積比來定義此點的位置，就稱為 P 點的重心坐標 (Barycentric Coordinates)，即 $P(x:y:z) = P([PBC]:[PCA]:[PAB])$ 。

若三個實數序對 (x,y,z) 滿足 $x+y+z=1$ 時，就用逗號表示 P 點的重心坐標之三個分量，此時稱 $P(x,y,z)$ 為正規化的重心坐標 (Normalized Barycentric Coordinates)。因此，我們有三個頂點的坐標 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ ，且有以下性質。

(一) 圓錐曲線方程式

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$$

則全體點 $(x:y:z)$ 稱為圓錐曲線，其中 $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

(二) 垂直的充要條件

平面上有兩向量 $\overrightarrow{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$ ，則當 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ}$ 時，可以得到

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0$$

可以將其簡記為循環輪換的型態

$$\sum_{cyc} a^2(z_1y_2 + y_1z_2) = 0$$

(三) 面積與距離公式

考慮平面上有點 $P(x_1, y_1, z_1)$ 、 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 、 $R(x_3, y_3, z_3)$ ，則其圍出的有向面積可用三階行列式表示

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

而考慮平面上有一向量 $\overrightarrow{PQ} = (x, y, z)$ ，則有距離公式

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = -a^2yz - b^2xz - c^2xy$$

(四) 直線方程式

連接兩點 $A(x_1: y_1: z_1)$ 、 $B(x_2: y_2: z_2)$ 的直線方程式 $\overleftrightarrow{AB}$ 為

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = 0$$

等價於收集平面上點 $L(x_l: y_l: z_l)$ 使得 $[ABL] = 0$

(五) 兩直線交點

兩直線 $L_1: p_1x_l + q_1y_l + r_1z_l = 0$ 、 $L_2: p_2x_l + q_2y_l + r_2z_l = 0$ ，則兩線交點為

$$(q_1r_2 - q_2r_1: r_1p_2 - r_2p_1: p_1q_2 - p_2q_1)$$

肆、研究結果

一、關於特殊化 ($\angle PP_A B = \frac{\pi}{2}$) 構圖中的幾何性質

此篇研究是一個非常龐大的主題，而我們決定從旁接三角形在構造下的性質開始研究，有趣的是，我們發現原三角形頂點分別為旁接三角形的垂心。

因分別過頂點作對邊垂線的交點即為垂心，而由作圖中可知 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PA_2}$ 、 $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{PA_1}$ ，且 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 交點為頂點 A ，即 A 為 $\triangle PA_1A_2$ 垂心，其餘兩個旁接三角形同理可證。

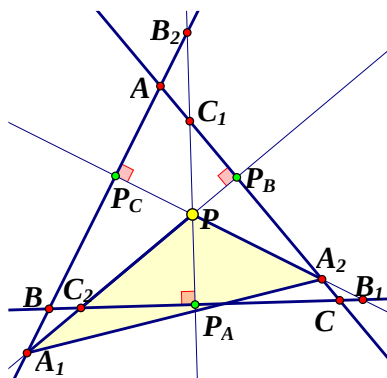


圖 9：旁接三角形的構造

性質 1：作任意三角形 $\triangle ABC$ 及一動點 P ，過 P 點分別作三角形三邊的垂線交其餘兩邊直線於 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 ，則旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ 的垂心分別為三角形頂點 A 、 B 、 C 。

證明：根據垂心的定義（兩高交於一點）即可得證。



旁接三角形的部分先討論到這裡，我們把研究聚焦在衍伸三角形間的關係，於是我們先由三角形面積著手處理。

我們由特殊化的正三角形和等腰三角形開始研究。透過軟體度量，我們發現 $\triangle ABC$ 為正三角形時，有 $|\triangle A_1B_1C_1| = |\triangle A_2B_2C_2|$ ；而若 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，需滿足 P 點位於對稱軸、底邊延長線或外接圓上才會有 $|\triangle A_1B_1C_1| = |\triangle A_2B_2C_2|$ 。

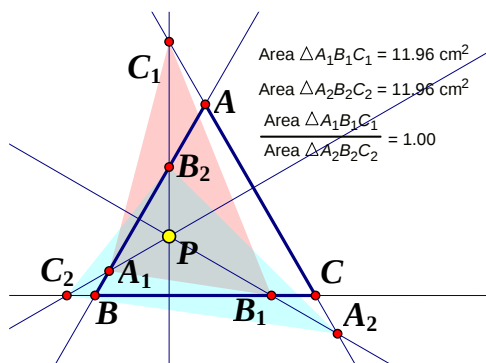


圖 10：正三角形下的衍伸三角形

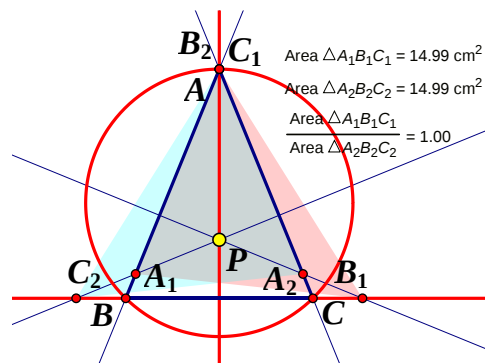


圖 11：等腰三角形下的衍伸三角形

接著深入探索一般化，任意三角形構造下的衍伸三角形面積僅在 P 點位於平面特定位置時才會相等，其中包括三角形的重心、垂心、第一二費馬點、第一二拿破崙點等特殊點。

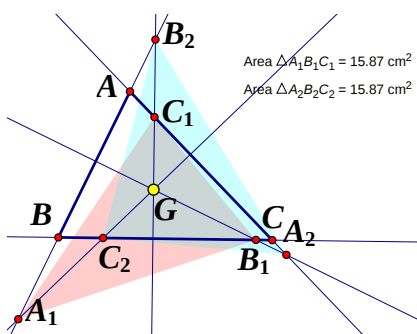


圖 12： P 點位於重心

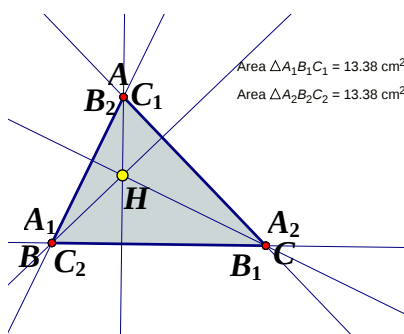


圖 13： P 點位於垂心

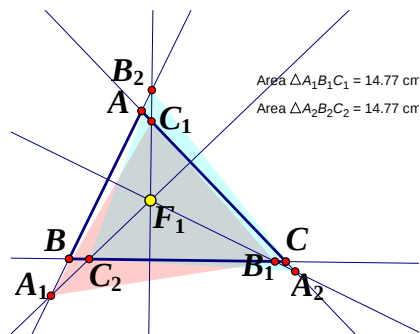


圖 14： P 點位於第一費馬點

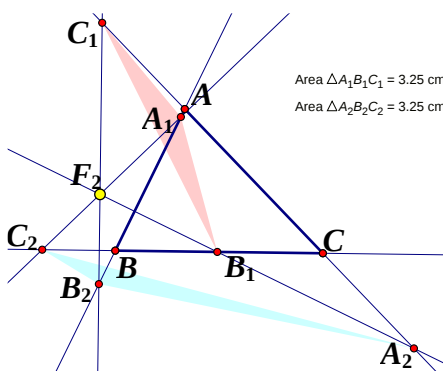


圖 15： P 點位於第二費馬點

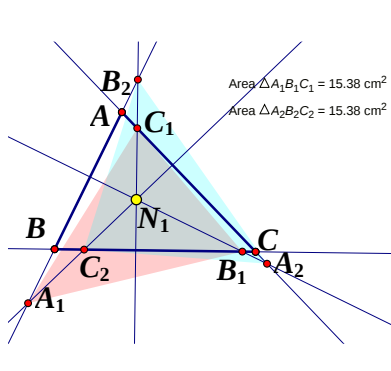


圖 16： P 點位於
第一拿破崙點

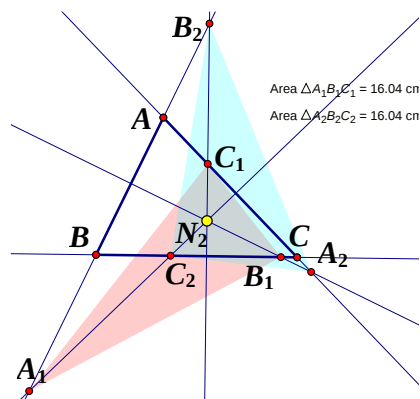


圖 17： P 點位於
第二拿破崙點

而我們好奇蒐集使衍伸三角形相等的 P 點是否會呈現出有趣的幾何意義呢？於是透過動態幾何軟體實驗發現使衍伸三角形面積相等的 P 點所構成的軌跡為 $\triangle ABC$ 的外接圓及一條曲線，於是我們求出衍伸三角形面積，再以 $\frac{||A_1B_1C_1||}{||A_2B_2C_2||} = 1$ 表示滿足面積相等的 P 點軌跡。

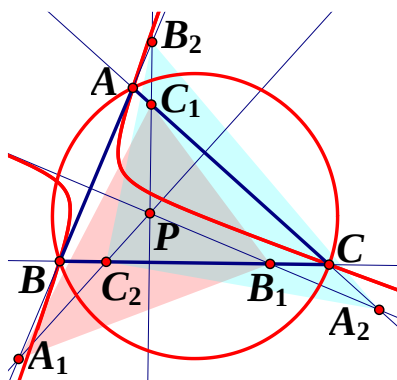


圖 18：任意三角形及曲線

我們首先想到利用三角函數嘗試化簡，卻在過程中發現其過於繁複，無法進一步且有效率的解決問題，因此我們決定改變作法，透過重心坐標系統及 Conway 符號幫助代換化簡，即用 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「 $S \cot \theta$ 」記為「 S_θ 」，且有以下引理。

引理 2 (Conway 符號) [3]：對於任意 $\triangle ABC$ 有

$$(1) S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}。$$

$$(2) S_A + S_B = c^2, S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2。$$

$$(3) S_A - S_B = b^2 - a^2, S_B - S_C = c^2 - b^2, S_C - S_A = a^2 - c^2。$$

$$(4) S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2。$$

接著，考慮到重心坐標下的有向面積，於是我們分別討論 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \pm 1$ ，並成功證明了

P 點軌跡即為外接圓及 hyperbola，還發現此曲線是著名的「Kiepert hyperbola」！

經過查詢相關網站 [5]，能夠確定這是 Kiepert hyperbola 的新性質。

我們首先給出 Kiepert hyperbola 和外接圓在重心坐標下的公式：

定義 3 (Kiepert hyperbola) [5]：以任意三角形 $\triangle ABC$ 邊作相似等腰三角形 $\triangle ABC'$ 、 $\triangle AB'C$ 、 $\triangle A'BC$ ，作 $\overrightarrow{AA'}$ 、 $\overrightarrow{BB'}$ 、 $\overrightarrow{CC'}$ 交於 P 點，則 P 點軌跡將構成 Kiepert hyperbola，並且其滿足

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0$$

定義 4 (外接圓) [2]：以任意三角形 $\triangle ABC$ 構造外接圓，則圓上的動點 P 滿足

$$(S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0$$

性質 5：作任意三角形 $\triangle ABC$ 及一動點 P ，以頂點 A 、 B 、 C 作垂心、 P 點和原三角形延長邊上的點為頂點，構造旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 、 $\triangle PB_1B_2$ 、 $\triangle PC_1C_2$ ，則滿足衍伸三角形有向面積

$$(1) \frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = 1, \text{ 若且唯若 } P \text{ 點軌跡為原三角形的 Kiepert hyperbola。}$$

$$(2) \frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -1, \text{ 若且唯若 } P \text{ 點軌跡為原三角形的外接圓。}$$

證明：

1. 在重心坐標下令點

$$A_1(1 - t_{A_1}, t_{A_1}, 0), A_2(1 - t_{A_2}, 0, t_{A_2})$$

$$B_1(0, 1 - t_{B_1}, t_{B_1}), B_2(t_{B_2}, 1 - t_{B_2}, 0)$$

$$C_1(t_{C_1}, 0, 1 - t_{C_1}), C_2(0, t_{C_2}, 1 - t_{C_2})$$

2. 因為 $\overrightarrow{PA_1} \perp \overrightarrow{AB}$ ，我們可以得到

$$b^2(z - x + 1 - t_{A_1}) + (y - t_{A_1})(c^2 - a^2) = 0$$

3. 整理上式並利用 Conway 代換，再以同理處理其餘部分可得

$$\begin{aligned} t_{A_1} &= \frac{S_A(y+z)+S_C \times z}{S_A}, t_{A_2} = \frac{S_A(y+z)+S_B \times y}{S_A} \\ t_{B_1} &= \frac{S_B(z+x)+S_A \times x}{S_B}, t_{B_2} = \frac{S_B(z+x)+S_C \times z}{S_B} \\ t_{C_1} &= \frac{S_C(x+y)+S_B \times y}{S_C}, t_{C_2} = \frac{S_C(x+y)+S_A \times x}{S_C} \end{aligned}$$

4. 將坐標代入有向面積公式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{[A_1 B_1 C_1]}{[ABC]} &= \begin{vmatrix} 1-t_{A_1} & t_{A_1} & 0 \\ 0 & 1-t_{B_1} & t_{B_1} \\ t_{C_1} & 0 & 1-t_{C_1} \end{vmatrix} = t_{A_1} t_{B_1} t_{C_1} + (1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) \\ \frac{[A_2 B_2 C_2]}{[ABC]} &= \begin{vmatrix} 1-t_{A_2} & 0 & t_{A_2} \\ t_{B_2} & 1-t_{B_2} & 0 \\ 0 & t_{C_2} & 1-t_{C_2} \end{vmatrix} = t_{A_2} t_{B_2} t_{C_2} + (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2}) \end{aligned}$$

5. 將兩塊面積相除得到 ± 1 ，化簡後分別可得

(1) 化簡 $\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[A_2 B_2 C_2]} = 1$

$$\begin{aligned} &(t_{A_1} t_{B_1} t_{C_1} - t_{A_2} t_{B_2} t_{C_2}) + [(1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) - (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2})] = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left\{ \frac{S_A^2 x(z+y)[(z-y)(S_B+S_C)+x(S_B-S_C)]}{S_A S_B S_C} + \frac{2S_A^2 x^2(S_C z - S_B y)}{S_A S_B S_C} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} S_A^2 x(z+y)(z-y)(S_B+S_C) + S_A^2 x^2(z+y)(S_B-S_C) + 2S_A^2 x^2(S_C z - S_B y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} S_A^2 x(z+y)(z-y)(S_B+S_C) + S_A^2 x^2(S_B+S_C)(z-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} S_A^2 x(S_B+S_C)(z-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy(-S_A^2 S_B - S_A^2 S_C + S_B^2 S_C + S_B^2 S_A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy[S_A S_B(-S_A + S_B) - S_C(S_A^2 - S_B^2)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy[(S_B - S_A)[S_A S_B + S_C(S_B + S_A)]] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy[(S_B - S_A)S^2] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (S_A - S_B)xy &= 0, \text{ 即為 Kiepert hyperbola 的方程式。} \end{aligned}$$

(2) 化簡 $\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[A_2 B_2 C_2]} = -1$

$$\begin{aligned} &(t_{A_1} t_{B_1} t_{C_1} + t_{A_2} t_{B_2} t_{C_2}) + [(1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) + (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2})] = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left(\frac{S_A^2 x(S_B+S_C)(z+y)}{S_A S_B S_C} \right) + 2(xy + yz + zx) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy(S_A^2 S_B + S_A^2 S_C + S_B^2 S_C + S_B^2 S_A + 2S_A S_B S_C) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy[S_A S_B(S_A + S_B) + S_C(S_A^2 + S_B^2 + 2S_A S_B)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} xy[(S_A + S_B)S^2] &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy = 0$ ，即為外接圓的方程式。

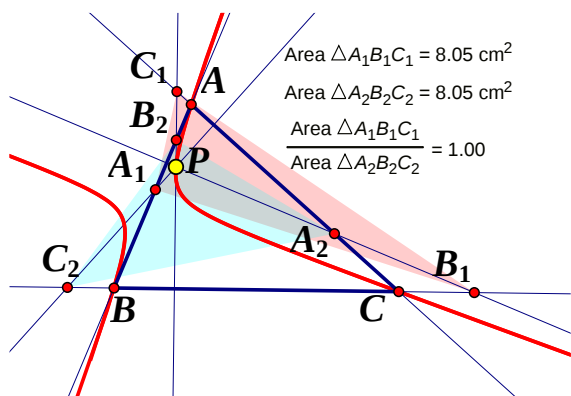


圖 19： $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -1$ 與 Kiepert hyperbola

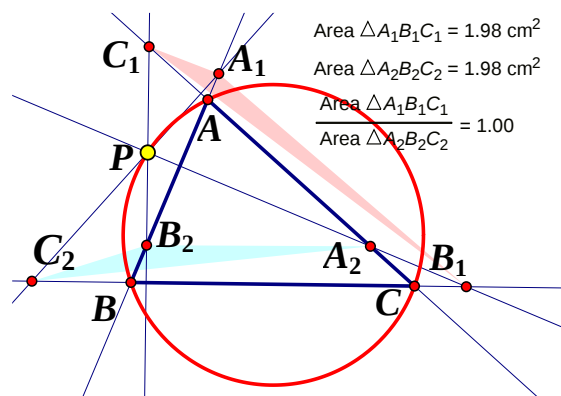


圖 20： $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -1$ 與外接圓

由上結論，我們可以往回證明特殊化三角形的性質。

性質 6：將特殊三角形以正三角形及等腰三角形分別整理得

- (1) 當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，皆有 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = 1$.
- (2) 當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，若 P 點位於其對稱軸、底邊直線時有 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = 1$.
- (3) 若滿足上述兩條件時 P 點也位於外接圓上，則 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$.

證明：

1. 令在等腰三角形中有 $a = b = k$
2. 化簡 Conway 符號得 $S_A = S_B = \frac{c^2}{2}$ 、 $S_C = \frac{2k^2 - c^2}{2}$
3. 代入有向面積差公式可以得到

$$(S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx + (S_A - S_B)xy = 0$$

$$\Rightarrow yz \left(\frac{c^2 - 2k^2 + c^2}{2} \right) + zx \left(\frac{2k^2 - c^2 - c^2}{2} \right) + xy(0) = 0$$

$$\Rightarrow yz(c^2 - k^2) + zx(k^2 - c^2) = 0$$

$$\Rightarrow z(y - x)(c^2 - k^2) = 0$$
4. 可知當 $x = y$ 或 $z = 0$ (P 點在 $\triangle ABC$ 對稱軸、底邊直線) 或 $c = k$ ($\triangle ABC$ 為正三角形) 時有 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = 1$ ，而若此時 P 點在外接圓上，則滿足 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]}$ ，即

$$[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$$

在數學中，不共線的三個點可以決定一個圓，於是四點共圓就有價值；推廣到圓錐曲線，五個點可以決定一個圓錐曲線，於是六點共圓錐曲線就有價值。我們好奇 $\triangle ABC$ 邊與其延長線上的六點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 共一個圓錐曲線的充要條件是什麼？

我們需要卡諾定理 Carnot's theorem 以幫助證明六點位於圓錐曲線。

引理 7 (Carnot's theorem) [8] :

若一圓錐曲線 Γ 交三角形三邊直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 、 $\overleftrightarrow{CA}$ 於 P 、 P' 、 Q 、 Q' 、 R 、 R' ，若且唯若有向線段比值乘積

$$\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \times \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \times \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}}\right) \times \left(\frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}} \times \frac{\overline{BQ'}}{\overline{Q'C}} \times \frac{\overline{CR'}}{\overline{R'A}}\right) = 1$$

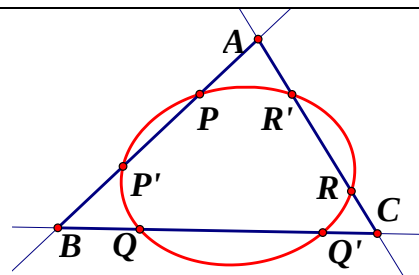


圖 21：Carnot's theorem

定理 8：若 P 點在 $\triangle ABC$ 外接圓上時，若且唯若衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 共一個圓錐曲線。

證明：

我們利用重心坐標的有向面積特性，可計算原三角形頂點與衍伸三角形頂點構成的有向線段比值，並代入卡諾定理而有

$$\left(\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1A}}\right) \times \left(\frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2B}} \times \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2C}} \times \frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2A}}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \prod_{\text{cyc}} \frac{\frac{S_A(y+z)+S_Cz}{S_A}-0}{1-\frac{S_A(y+z)+S_Cz}{S_A}} \times \prod_{\text{cyc}} \frac{\frac{S_B(z+x)+S_Cz}{S_B}-1}{0-\frac{S_B(z+x)+S_Cz}{S_B}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \prod_{\text{cyc}} \frac{S_A(y+z)+S_Cz}{S_Ax-S_Cz} \times \prod_{\text{cyc}} \frac{-S_By+S_Cz}{-S_B(z+x)-S_Cz} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{(S_A(y+z)+S_Cz)(S_B(z+x)+S_Ax)(S_C(x+y)+S_By)}{(S_B(z+x)+S_Cz)(S_C(x+y)+S_Ax)(S_A(y+z)+S_By)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A)(x + y + z)(S_A x(y + z) + S_B y(z + x) + S_C z(x + y)) = 0$$

又 $S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = S^2$ 且 $x + y + z = 1$ ，可得其充要條件為

$$(S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0$$

即為 $\triangle ABC$ 的外接圓。

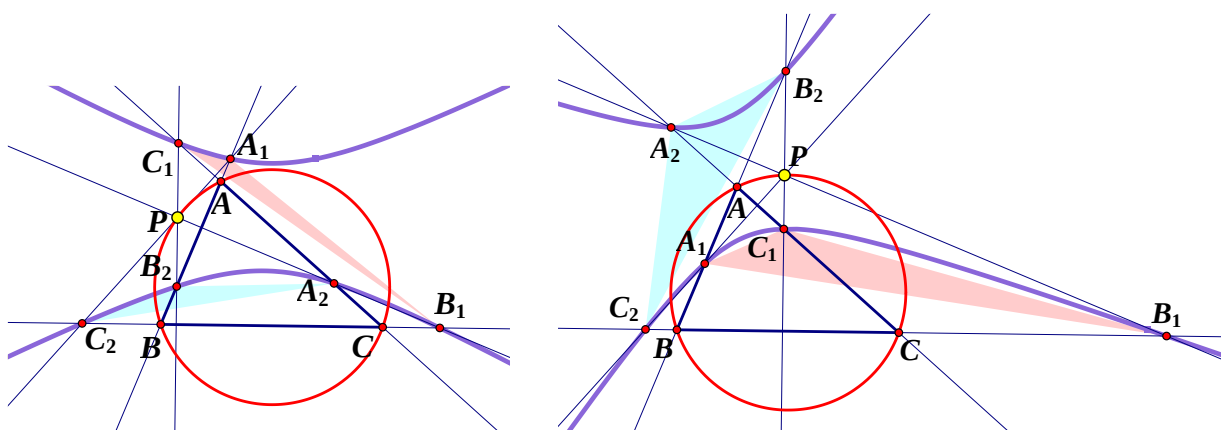


圖 22：衍伸三角形頂點在圓錐曲線上

二、刻劃衍伸三角形的有向面積比值為 ± 1 的幾何必然性

我們討論 Kiepert hyperbola 與外接圓為什麼會使得兩個衍伸三角形的有向面積比值分別為 1 與 -1 ？而不僅是止於發現其代數式吻合。

我們給出其幾何意義，發現其關聯為「垂足三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 」。

研究到這裡，我們驚喜將過 P 點分別作邊 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂線、邊 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線、邊 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂線，三條垂線與三邊直線的九個交點 $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, P_A, P_B, P_C$ 串聯起來，這是我們很重要的發現！

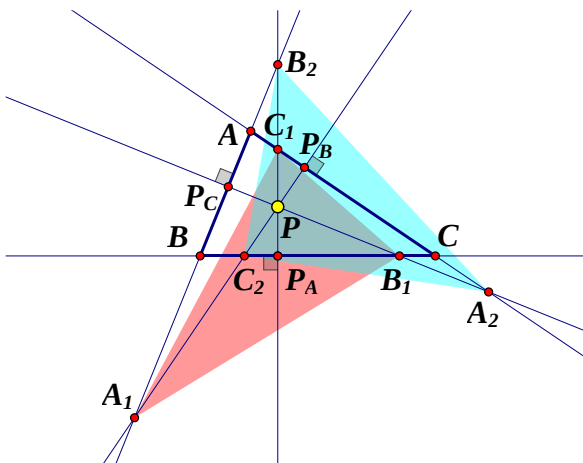


圖 23：衍伸三角形

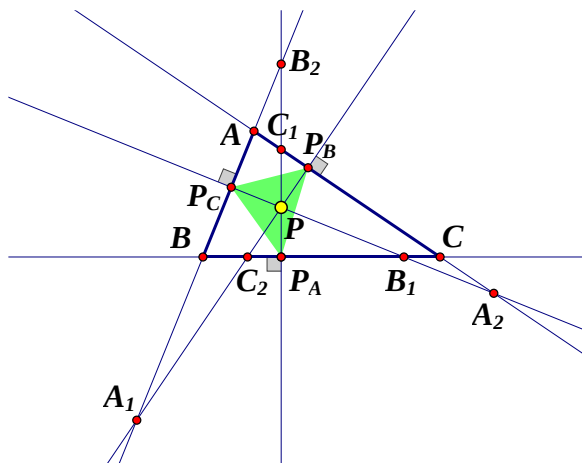


圖 24：垂足三角形

在性質 5 中，令 $P(x, y, z)$ 從而有

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \times \sum_{\text{cyc}} S_A xy \quad \text{且} \quad \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \times \sum_{\text{cyc}} S_B xy$$

利用重心坐標系統下的兩向量垂直的充要條件可以得出三個垂足點的坐標

$$P_A \left(0, y + \frac{S_C}{a^2} x, 1 - y - \frac{S_C}{a^2} x \right), P_B \left(1 - z - \frac{S_A}{b^2} y, 0, z + \frac{S_A}{b^2} y \right), P_C \left(x + \frac{S_B}{c^2} z, 1 - x - \frac{S_B}{c^2} z, 0 \right)$$

$$\text{再得出 } \frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y + \frac{S_C}{a^2} x & 1 - y - \frac{S_C}{a^2} x \\ 1 - z - \frac{S_A}{b^2} y & 0 & z + \frac{S_A}{b^2} y \\ x + \frac{S_B}{c^2} z & 1 - x - \frac{S_B}{c^2} z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \times \sum_{\text{cyc}} (S_A + S_B) xy.$$

當 P 點在 Kiepert hyperbola 上時，滿足 $\sum_{\text{cyc}} (S_A - S_B) xy = 0$ ，有趣的是，我們考慮

$$\begin{aligned} \frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \times \sum_{\text{cyc}} (S_A + S_B) xy \\ &= \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \times \left(\sum_{\text{cyc}} (S_A + S_B) xy + \sum_{\text{cyc}} (S_A - S_B) xy \right) \\ &= \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \times \left(2 \sum_{\text{cyc}} S_A xy \right) \\ &= \frac{S^2}{a^2 b^2 c^2} \times \left(2 \times \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} \times \frac{S_AS_BS_C}{S^2} \right), \text{ 即 } [A_1B_1C_1] = \frac{a^2 b^2 c^2}{2S_AS_BS_C} \times [P_AP_BP_C]. \end{aligned}$$

同樣的方式，我們再考慮

$$\begin{aligned}
\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{a^2b^2c^2} \times \sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy \\
&= \frac{S^2}{a^2b^2c^2} \times (\sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy - \sum_{\text{cyc}}(S_A - S_B)xy) \\
&= \frac{S^2}{a^2b^2c^2} \times (2 \sum_{\text{cyc}} S_B xy) \\
&= \frac{S^2}{a^2b^2c^2} \times \left(2 \times \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} \times \frac{S_AS_BS_C}{S^2}\right), \text{ 即 } [A_2B_2C_2] = \frac{a^2b^2c^2}{2S_AS_BS_C} \times [P_AP_BP_C]。
\end{aligned}$$

當 P 點在 Kiepert hyperbola 上時，衍伸三角形與垂足三角形的有向面積比值為定值，其比值恰好相同，因此 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = 1$ 。

我們繼續討論當 P 點在外接圓上時，滿足 $\sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy = 0$ ，此時 $\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \frac{S^2}{a^2b^2c^2} \times \sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy = 0$ ，也就是著名的西姆松線（Simson Line） P_A 、 P_B 、 P_C 三點共線，因此我們有

$$\begin{aligned}
\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} + \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} &= \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \times \sum_{\text{cyc}} S_A xy + \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \times \sum_{\text{cyc}} S_B xy = 0 \\
\text{即 } \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} \text{ 與 } \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} &\text{ 為相反數，因此 } \frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -1。
\end{aligned}$$

至此，我們給出當 P 點在 Kiepert hyperbola 與外接圓時，兩個衍伸三角形的有向面積比值分別為 1 與 -1 的幾何意義，其關聯為「垂足三角形 $\triangle P_AP_BP_C$ 」。

三、 衍伸三角形有向面積 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$

前兩節我們將 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 和 $[A_1B_1C_1] = -[A_2B_2C_2]$ 完整討論，那麼當兩者比值更換為其他實數， P 點軌跡是否仍構成圓錐曲線呢？

我們先討論兩個衍伸三角形個別的面積。

分析與討論

在研究開始時，我們首先求得了衍伸三角形各點的重心坐標，並化簡面積公式，因此，我們透過進一步的化簡，可以得到衍伸三角形面積在重心坐標下的公式：

$$\begin{aligned}\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} &= t_{A_1}t_{B_1}t_{C_1} + (1-t_{A_1})(1-t_{B_1})(1-t_{C_1}) \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{S_AS_BS_C + S_A^2S_B + S_A^2S_C}{S_AS_BS_C} xy = \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \sum_{\text{cyc}} (S_A xy)\end{aligned}$$

另一塊面積可同理得到：

$$\begin{aligned}\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} &= t_{A_2}t_{B_2}t_{C_2} + (1-t_{A_2})(1-t_{B_2})(1-t_{C_2}) \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{S_AS_BS_C + S_A^2S_B + S_A^2S_C}{S_AS_BS_C} zx = \frac{S^2}{S_AS_BS_C} \sum_{\text{cyc}} (S_A zx)\end{aligned}$$

而我們考慮滿足 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$ ， P 點構成軌跡集合為 $\Gamma_{P,r}$ ，其中 $r \in \mathbb{R}$

$$\Gamma_{P,r} \equiv \{P | [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$$

接著討論 $\Gamma_{P,r}$ 的型態判別式，而判別圓錐曲線型態的方法是討論其與無窮遠線 L_∞ 的相交情形，即當 $\Gamma_{P,r}$ 與 L_∞ 相離時，為 ellipse； $\Gamma_{P,r}$ 與 L_∞ 相切時，為 parabola； $\Gamma_{P,r}$ 與 L_∞ 相交兩點時，為 hyperbola [1]。

考慮無窮遠線 L_∞ 上的點滿足 $x + y + z = 0$ ，因此不失一般性令 L_∞ 上點 $(1, -t, t-1)$ 並代入曲線方程式計算 t 有無實根的判別式。

性質 9：在三角形中有曲線 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P | [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ ，並有以下型態判別：

$$\text{我們令 } r_1 = -\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}, \quad r_2 = -\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}$$

- (1) 當 $r_1 > r_2$ ，則若 r 在 (r_1, r_2) 區間， $\Gamma_{P,r}$ 為 hyperbola；若 r 不在 (r_1, r_2) 區間外， $\Gamma_{P,r}$ 為 ellipse。
- (2) 當 $r_1 < r_2$ ，則若 r 在 (r_1, r_2) 區間， $\Gamma_{P,r}$ 為 ellipse；若 r 不在 (r_1, r_2) 區間外， $\Gamma_{P,r}$ 為 hyperbola。
- (3) 當 $r = r_1$ 或 $r = r_2$ 時， $\Gamma_{P,r}$ 為 parabola。

證明：

1. 給出 $[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]$ 的代數方程式

$$S_A xy + S_B yz + S_C zx = r(S_A zx + S_B xy + S_C yz)$$

即為

$$\Gamma_{P,r} \equiv (S_A - rS_B)xy + (S_B - rS_C)yz + (S_C - rS_A)zx = 0$$

$\Gamma_{P,r}$ 是二次方程式，即為圓錐曲線。

再將無窮遠點 $(1, -t, t-1)$ 代入

$$\Rightarrow -S_A t - S_B(t^2 - t) + S_C(t-1) = rS_A(t-1) - rS_B t + rS_C(t^2 - t)$$

$$\Rightarrow (rS_C - S_B)t^2 + [(S_B - S_A)(1+r) + S_C(1-r)]t + (rS_A - S_C) = 0$$

2. 我們可以得到 t 的判別式

$$\Delta = [(S_B - S_A)(1+r) + S_C(1-r)]^2 - 4(rS_C - S_B)(rS_A - S_C) = 0$$

3. 即可整理得 $r = -\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}$ 、 $-\frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S\sqrt{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - S^2}}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S^2}$

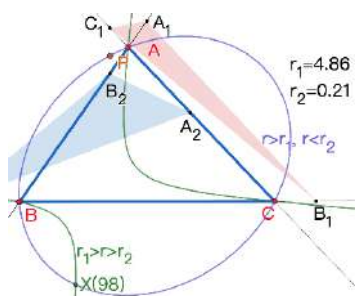


圖 25： $r_1 > r_2$ 的兩種曲線

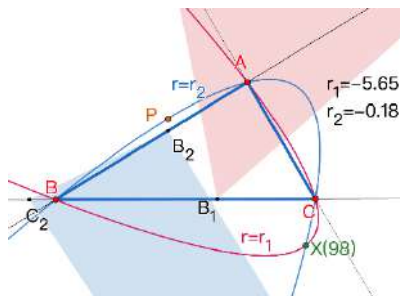


圖 26： $r = r_1, r = r_2$

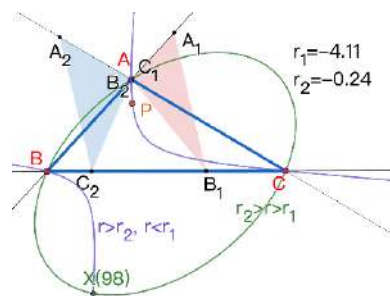


圖 27： $r_1 < r_2$ 的兩種曲線

parabola

有了圓錐曲線系，代表各曲線可能會有共同的交點，我們發現此圓錐曲線系交於四個交點，分別是頂點 A 、 B 、 C ，以及 Tarry Point（在 ETC 中為編號 X(98)）[3]。

性質 10： 圓錐曲線系 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P|[A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2]\}$ 交於頂點 A 、 B 、 C 及 Tarry Point

證明：

1. 考慮曲線交點滿足 $r \in \mathbb{R}$ ，可列得方程式 $\begin{cases} \sum_{cyc} S_A xy = 0 \\ \sum_{cyc} S_A zx = 0 \end{cases}$

2. 可以解得以下，即為三角形頂點與 Tarry Point。

$$(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{S_A^2 - S_B S_C}, \frac{1}{S_B^2 - S_C S_A}, \frac{1}{S_C^2 - S_A S_B}\right)$$

3. 也可由此得到：當 P 點位於此四點時，衍伸三角形將退化為直線，

$$\text{即 } [A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2] = 0$$

我們繼續觀察幾何構圖，在研究線段長度是否有規律時，發現以下性質。

定理 11（不變量）：平面上點 P 與衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 線段長比值為

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = 1$$

證明：

P 點及衍伸三角形頂點的重心坐標三個分量和相等，可由向量係數積得有向線段比。

1. 先計算得 P 點至各頂點的向量

$$\overrightarrow{PA_1} = \left(-\frac{S_C z}{S_A}, \frac{(S_A + S_C)z}{S_A}, -z \right), \overrightarrow{PA_2} = \left(-\frac{S_B y}{S_A}, -y, \frac{(S_A + S_B)y}{S_A} \right)$$

$$\overrightarrow{PB_1} = \left(-x, -\frac{S_A x}{S_B}, \frac{(S_A + S_B)x}{S_B} \right), \overrightarrow{PB_2} = \left(\frac{(S_B + S_C)z}{S_B}, -\frac{S_C z}{S_B}, -z \right)$$

$$\overrightarrow{PC_1} = \left(\frac{(S_B + S_C)y}{S_C}, -y, -\frac{S_B y}{S_C} \right), \overrightarrow{PC_2} = \left(-x, \frac{(S_A + S_C)x}{S_C}, -\frac{S_A x}{S_C} \right)$$

2. 因 P 、 A_1 、 C_2 共線、 P 、 A_1 、 C_2 共線、 P 、 A_1 、 C_2 共線，而有

$$\overrightarrow{PA_1} = n_1 \overrightarrow{PC_2}; \overrightarrow{PB_1} = n_2 \overrightarrow{PA_2}; \overrightarrow{PC_1} = n_3 \overrightarrow{PB_2},$$

$$\text{得到 } n_1 = \frac{S_C z}{S_A x}; n_2 = \frac{S_A x}{S_B y}; n_3 = \frac{S_B y}{S_C z}$$

3. 所以我們有

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = n_1 n_2 n_3 = \frac{S_C z}{S_A x} \times \frac{S_A x}{S_B y} \times \frac{S_B y}{S_C z} = 1$$

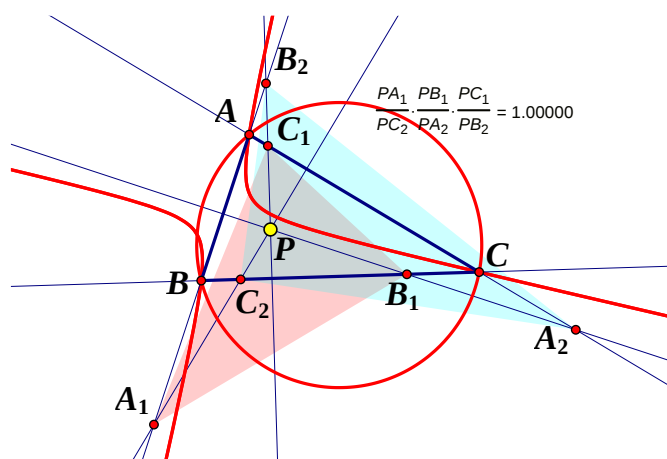


圖28：有向線段比

■

我們給出純幾何觀點。在旁接三角形 $\triangle PA_1A_2$ 中， C 為 $\triangle PA_1A_2$ 的垂心，從而有 P 也為 $\triangle CA_1A_2$ 的垂心，由圓幂定理可得 $\overrightarrow{PA_1} \times \overrightarrow{PH_B} = \overrightarrow{PA_2} \times \overrightarrow{PH_C}$ ，同理 $\overrightarrow{PB_1} \times \overrightarrow{PH_C} = \overrightarrow{PB_2} \times \overrightarrow{PH_A}$ 與 $\overrightarrow{PC_1} \times \overrightarrow{PH_A} = \overrightarrow{PC_2} \times \overrightarrow{PH_B}$ ，並考慮有向性即可得證。此方法可推廣至任意多邊形構圖中的線段比不變量。

四、一般化 ($\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta$) 構圖中的幾何性質

在前述特殊化中，我們過 P 點構造三邊垂直線，並以之與三角形邊直線的交點構造衍伸三角形，而若我們將之推廣，以 P 點為中心旋轉原本的垂線 $\overrightarrow{PP_A}$ 、 $\overrightarrow{PP_B}$ 、 $\overrightarrow{PP_C}$ ，使得 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta$ ，其中 $0 < \theta < \pi$ （當 P 點在 $\triangle ABC$ 外部， $\angle PP_A B$ 、 $\angle PP_B C$ 、 $\angle PP_C A$ 相等或互補，但不影響本研究結果）時，則可得到更為一般化的構造。

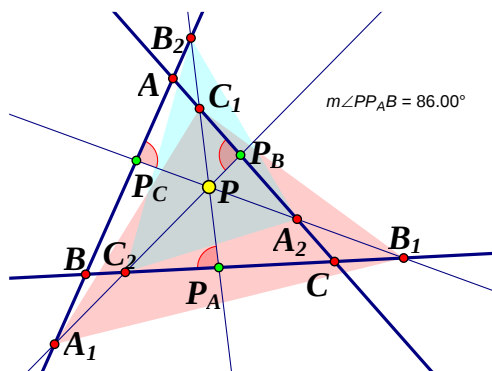


圖 29：P 在 $\triangle ABC$ 內部

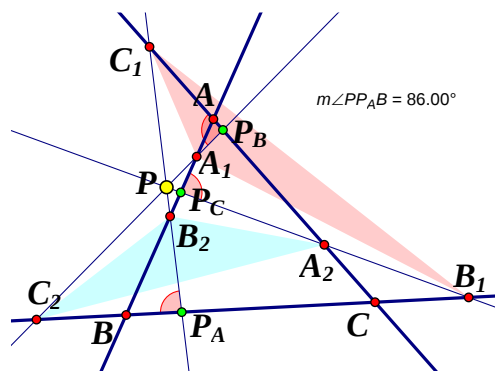


圖 30：P 在 $\triangle ABC$ 外部

我們持續關注兩個衍伸三角形的面積關係，好奇 P 點是否在特定曲線上時能保有衍伸三角形有向面積定比，而值得一提的是，我們發現當 P 點位於 $\triangle ABC$ 外接圓時， $[A_1B_1C_1]$ 與 $[A_2B_2C_2]$ 不僅存有固定比值，其比值更等於構造中的線段比的相反數。

首先，我們需要先求得衍伸三角形的有向面積。

性質 12： 衍伸三角形 $[A_1B_1C_1]$ 與 $[A_2B_2C_2]$ 之有向面積：

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \sum_{cyc} \frac{(S_A - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{(S_A - S_\theta)(S_B - S_\theta)(S_C - S_\theta)}; \quad \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \sum_{cyc} \frac{(S_A + S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)zx}{(S_A + S_\theta)(S_B + S_\theta)(S_C + S_\theta)}$$

證明：

- 我們令 $P(x, y, z)$ ，而有構圖中存在密克三角形的頂點坐標 [4]：

$$P_A \left(0: \frac{a^2 y + (S_C - S_\theta)x}{a^2}: \frac{a^2 z + (S_B + S_\theta)x}{a^2} \right)$$

$$P_B \left(\frac{b^2 x + (S_C + S_\theta)y}{b^2}: 0: \frac{b^2 z + (S_A - S_\theta)y}{b^2} \right)$$

$$P_C \left(\frac{c^2 x + (S_B - S_\theta)z}{c^2}: \frac{c^2 y + (S_A + S_\theta)z}{c^2}: 0 \right)$$

- $\overrightarrow{PP_A}$ 分別交 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CA}$ 於 B_2 、 C_1 ，於是我們有

$$\overrightarrow{PP_A}: \begin{vmatrix} 0 & \frac{a^2 y + (S_C - S_\theta)x}{a^2} & \frac{a^2 z + (S_B + S_\theta)x}{a^2} \\ x & y & z \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [(S_C - S_\theta)z - (S_B + S_\theta)y]x_l + [a^2z + (S_B + S_\theta)x]y_l - [a^2y + (S_C - S_\theta)x]z_l = 0$$

$$\overrightarrow{AB}: z = 0, \overrightarrow{CA}: y = 0$$

3. 由上直線方程式求得交點

$$C_1 \left(1 - z + \frac{S_B + S_\theta}{S_C - S_\theta} y, 0, z - \frac{S_B + S_\theta}{S_C - S_\theta} y \right) \cdot B_2 \left(1 - y + \frac{S_C - S_\theta}{S_B + S_\theta} z, y - \frac{S_C - S_\theta}{S_B + S_\theta} z, 0 \right)$$

其餘點同理可得：

$$A_1 \left(x - \frac{S_C + S_\theta}{S_A - S_\theta} z, 1 - x + \frac{S_C + S_\theta}{S_A - S_\theta} z, 0 \right) \cdot C_2 \left(0, 1 - z + \frac{S_A - S_\theta}{S_C + S_\theta} x, z - \frac{S_A - S_\theta}{S_C + S_\theta} x \right)$$

$$B_1 \left(0, y - \frac{S_A + S_\theta}{S_B - S_\theta} x, 1 - y + \frac{S_A + S_\theta}{S_B - S_\theta} x \right) \cdot A_2 \left(x - \frac{S_B - S_\theta}{S_A + S_\theta} y, 0, 1 - x + \frac{S_B - S_\theta}{S_A + S_\theta} y \right)$$

4. 將坐標代入面積公式化簡可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{[A_1 B_1 C_1]}{[ABC]} &= t_{A_1} t_{B_1} t_{C_1} + (1 - t_{A_1})(1 - t_{B_1})(1 - t_{C_1}) \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(S_A - S_\theta)(S_B - S_\theta)(S_C - S_\theta) + (S_A^2 - S_\theta^2)(S_C - S_\theta) + (S_A^2 - S_\theta^2)(S_B + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)(S_B - S_\theta)(S_C - S_\theta)} xy \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(S_A - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{(S_A - S_\theta)(S_B - S_\theta)(S_C - S_\theta)} \\ \frac{[A_2 B_2 C_2]}{[ABC]} &= t_{A_2} t_{B_2} t_{C_2} + (1 - t_{A_2})(1 - t_{B_2})(1 - t_{C_2}) \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)(S_B + S_\theta)(S_C + S_\theta) + (S_A^2 - S_\theta^2)(S_C - S_\theta) + (S_A^2 - S_\theta^2)(S_B + S_\theta)}{(S_A + S_\theta)(S_B + S_\theta)(S_C + S_\theta)} zx \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)zx}{(S_A + S_\theta)(S_B + S_\theta)(S_C + S_\theta)} \end{aligned}$$

■

透過兩式相除，再加上外接圓方程式，我們即可得到 P 點位於外接圓上時，衍伸三角形有向面積在原三角形中存有的固定比值。

定理 13：若 P 點位於原三角形外接圓，若且唯若

$$\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[A_2 B_2 C_2]} = - \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$$

證明：

1. 令 $P(x, y, z)$ ，我們將兩個衍伸三角形面積相除整理得到

$$\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[A_2 B_2 C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)} \times \frac{[\sum_{\text{cyc}} (S_A xy) - S_\theta \sum_{\text{cyc}} (xy)]}{[\sum_{\text{cyc}} (S_A zx) + S_\theta \sum_{\text{cyc}} (zx)]}$$

2. 考慮外接圓方程式可以整理為

$$(S_B + S_C)yz + (S_C + S_A)zx + (S_A + S_B)xy = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} (S_A xy) = - \sum_{\text{cyc}} (S_A zx)$$

3. 將外接圓方程式代入即可得到

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A+S_\theta)}{(S_A-S_\theta)} \cdot \frac{[-\sum_{\text{cyc}}(S_A z x) - S_\theta \sum_{\text{cyc}}(xy)]}{[\sum_{\text{cyc}}(S_A z x) + S_\theta \sum_{\text{cyc}}(zx)]} = -\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A+S_\theta)}{(S_A-S_\theta)}$$

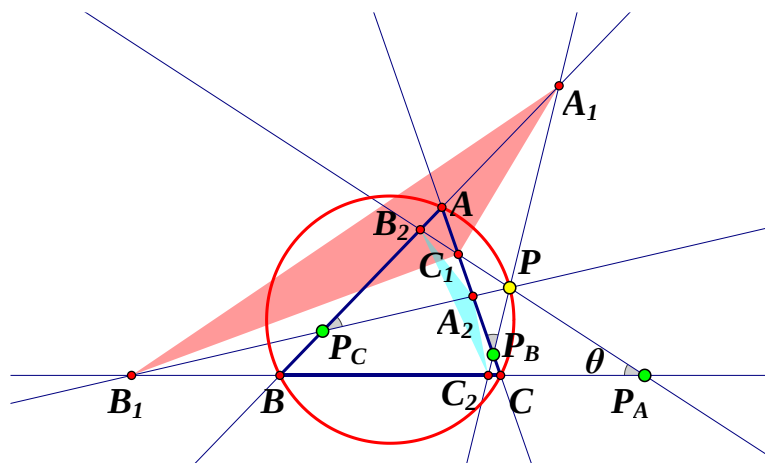


圖 31：P 在 $\triangle ABC$ 外接圓上

■

如同定理 8，證明方式類似，我們在此省略。我們發現在一般化角度下，若且唯若衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 皆在圓錐曲線上。

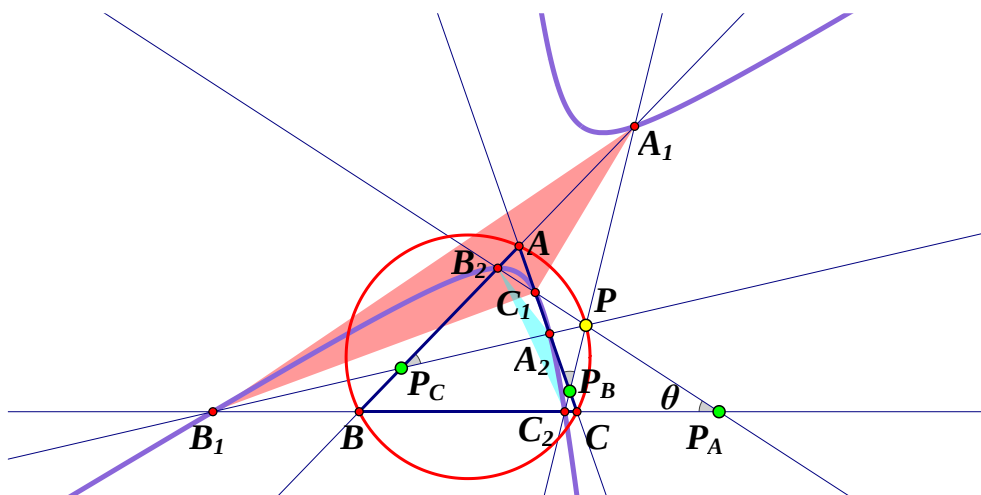


圖 32：衍伸三角形頂點在圓錐曲線上

若考慮 θ 為參數，固定 P 點在外接圓上時，衍伸三角形六個頂點所在的圓錐曲線形成一個圓錐曲線族，這個圓錐曲線族是 $\triangle ABC$ 旁切圓錐曲線。

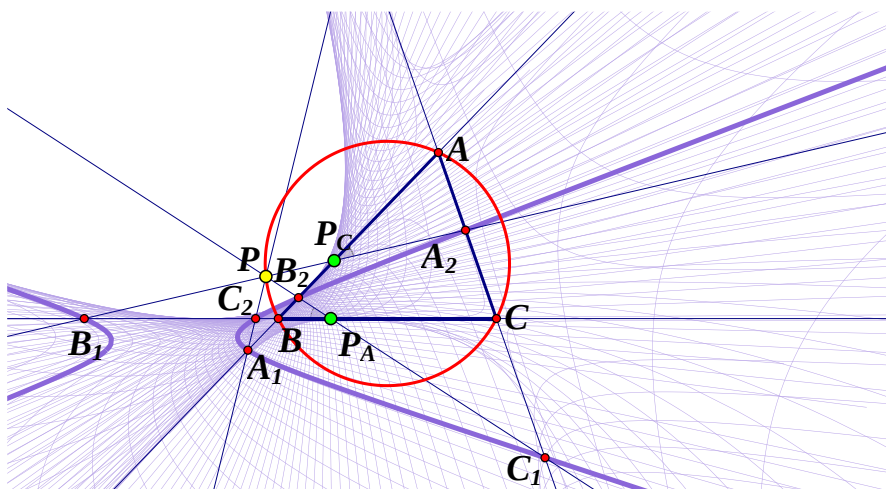
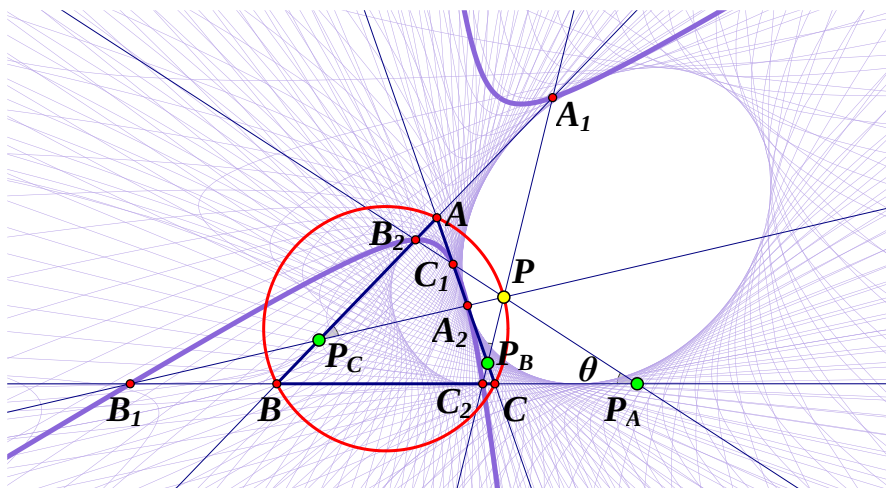


圖 33：圓錐曲線族

在定理 13 給出若 P 點位於原三角形外接圓，若且唯若 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ ，透過性質 5 的例子，我們很自然地想知道衍伸三角形有向面積比值如果是 $-\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 的相反數 $\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 時， P 點的軌跡是什麼？

定理 14：若 P 點位於 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合圓錐曲線系 $\sum_{\text{cyc}} [(S_A - S_B - 2S_\theta)xy] = 0$ 上，若且唯若有向面積比值為定值

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$$

證明：

令 $P(x, y, z)$ 且 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)} \times \frac{[\sum_{\text{cyc}} (S_A xy) - S_\theta \sum_{\text{cyc}} (xy)]}{[\sum_{\text{cyc}} (S_A zx) + S_\theta \sum_{\text{cyc}} (zx)]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ ，化簡可得出

$$\sum_{\text{cyc}} (S_A xy) - S_\theta \sum_{\text{cyc}} (xy) = \sum_{\text{cyc}} (S_A zx) + S_\theta \sum_{\text{cyc}} (zx).$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (S_A - S_B)xy - 2S_\theta \sum_{\text{cyc}} xy = 0.$$

注意到， $\sum_{cyc}(S_A - S_B)xy = 0$ 為 Kiepert hyperbola，

$\sum_{cyc} xy = 0$ 為 Steiner circumellipse [10]（Steiner circumellipse 是無窮遠線的等截共軛 isotomic conjugate 或萊莫恩線 Lemoine axis 的等角共軛 isogonal conjugate）。

因此， P 點位於 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合圓錐曲線系上。

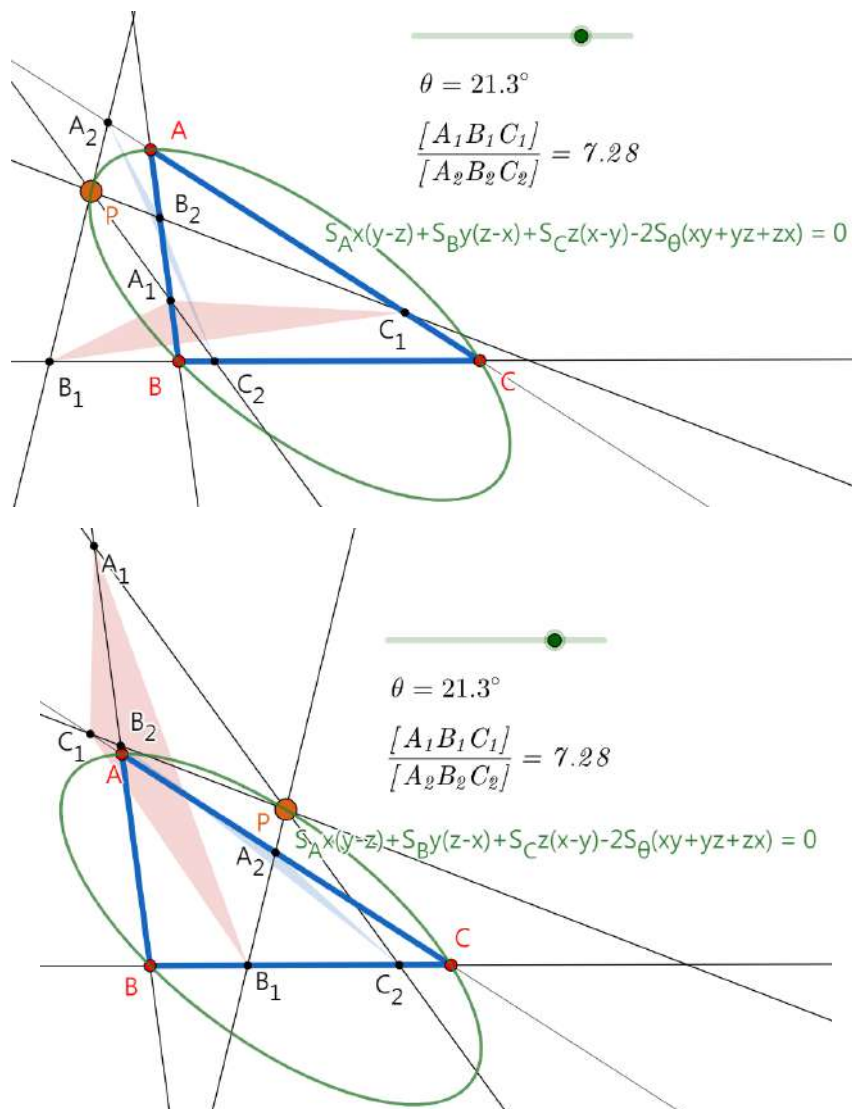


圖 34： P 在位於 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合

我們一樣繼續討論一般化角度下的衍伸三角形的有向面積比值為定值的幾何意義。

在垂心構造，我們以垂足三角形和衍伸三角形面積比，給出性質「 P 點在 Kiepert Hyperbola、外接圓時， $[A_1 B_1 C_1]$ 與 $[A_2 B_2 C_2]$ 比值分別為 1、 -1 」在幾何上的解釋。

因此我們好奇，在一般化構造下， P 點在線性組合圓錐曲線、外接圓上時，衍伸三角形面積比不變，是否也能給出幾何的觀點？

我們發現一般化角度下的衍伸三角形與「密克三角形」有關聯！

令平面上任意點 $P(x, y, z)$ ，可得密克三角形頂點坐標 $P_A(0, t_a, 1 - t_a)$ 、

$P_B(1 - t_b, 0, t_b)$ 、 $P_C(t_c, 1 - t_c, 0)$ ，其中， $t_a = y + \frac{S_C - S_\theta}{a^2}x$ 、 $t_b = z + \frac{S_A - S_\theta}{b^2}y$ 、 $t_c = x + \frac{S_B - S_\theta}{c^2}z$ 。

$$\begin{aligned}\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} &= 1 - t_a - t_b - t_c + t_at_b + t_bt_c + t_ct_a. \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left(-\frac{S_C - S_\theta}{a^2}x + \frac{S_C - S_\theta}{a^2}x^2 + \frac{S_C - S_\theta}{a^2}zx + \frac{(S_C - S_\theta)(S_A - S_\theta)}{a^2b^2}xy + xy \right). \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left[\left(-\frac{S_C - S_\theta}{a^2} + \frac{(S_C - S_\theta)(S_A - S_\theta)}{a^2b^2} + 1 \right) xy \right]. \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left[\left(\frac{-(S_C - S_\theta)(S_A + S_C) + (S_C - S_\theta)(S_A - S_\theta) + (S_B + S_C)(S_C + S_A)}{a^2b^2} \right) xy \right]. \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left[\left(\frac{-S_C^2 + S_\theta^2 + S_C^2 + S^2}{a^2b^2} \right) xy \right]. \\ &= \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{c^2(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right].\end{aligned}$$

第二，一般化角度構造下的兩個衍伸三角形有向面積為

$$\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(S_A - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{\prod_{\text{cyc}}(S_A - S_\theta)} \right], \quad \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(S_B + S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{\prod_{\text{cyc}}(S_A + S_\theta)} \right]$$

(一) P 點在 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合曲線上

我們接下來給出幾何意義，考慮 P 點在 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合曲線 $\sum_{\text{cyc}}[(S_A - S_B - 2S_\theta)xy] = 0$ 時，密克三角形有向面積

$$\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{c^2(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right] = \sum_{\text{cyc}} \left\{ \frac{[S_A + S_B \pm (S_A - S_B - 2S_\theta)](S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right\}$$

$$\text{即 } \frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{2(S_A - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right] = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{2(S_B + S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right].$$

化簡衍伸三角形與密克三角形的有向面積比值可得到

$$\begin{aligned}\frac{[A_1B_1C_1]}{[P_AP_BP_C]} &= \frac{a^2b^2c^2}{2(S_A - S_\theta)(S_B - S_\theta)(S_C - S_\theta)} \\ \frac{[A_2B_2C_2]}{[P_AP_BP_C]} &= \frac{a^2b^2c^2}{2(S_A + S_\theta)(S_B + S_\theta)(S_C + S_\theta)}\end{aligned}$$

因此給定 θ ， $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 為定值。

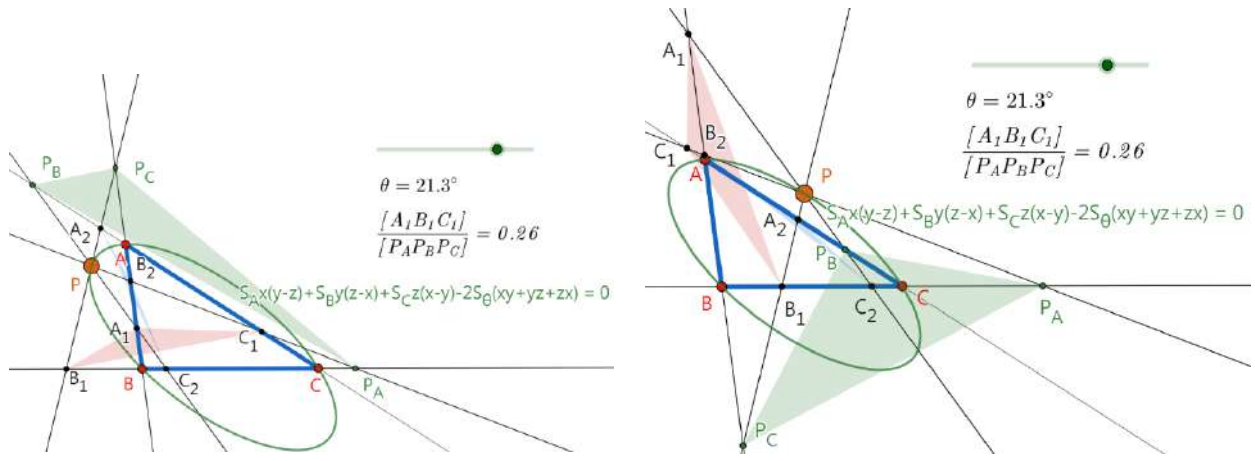


圖35：衍伸三角形與密克三角形的有向面積比值

(二) P 點在外接圓上

再考慮 P 點在外接圓 $\sum_{\text{cyc}}(S_A + S_B)xy = 0$ 時，密克三角形有向面積

$$\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{c^2(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right] = \sum_{\text{cyc}} \left\{ \frac{[S_A + S_B \pm (S_A + S_B)](S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right\}$$

即 $\frac{[P_AP_BP_C]}{[ABC]} = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{2(S_A + S_B)(S^2 + S_\theta^2)xy}{a^2b^2c^2} \right] = 0$ ，也就是 P_A 、 P_B 、 P_C 三點共線，我們再得出

$$S_A + S_B = 0。$$

化簡衍伸三角形與原三角形的有向面積比值可得到

$$\begin{aligned} \frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} &= \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(S_A - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{\prod_{\text{cyc}}(S_A - S_\theta)} \right] = \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(-S_B - S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{\prod_{\text{cyc}}(S_A - S_\theta)} \right] \\ \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} &= \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{(S_B + S_\theta)(S^2 + S_\theta^2)xy}{\prod_{\text{cyc}}(S_A + S_\theta)} \right] \end{aligned}$$

因此給定 θ ， $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 為定值。

我們再回顧特殊化時構造下的線段比，並用相同方式可以求得以下：

定理 15 (不變量)：平面上點 P 與衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 線段長比值為

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$$

證明：

參考特殊化的線段比值證明，先計算 P 點至各頂點的向量，再透過向量係數積解得

$$\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = \prod_{\text{cyc}} \left(\frac{x - \frac{(S_C + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}y - x}{-x} \right) = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}。$$

考慮一個比較有趣的角速度，當 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \pi$ 時（密克三角形的三個頂點都在無窮遠線上）， P 點在平面上任何位置，皆滿足 $[A_1 B_1 C_1] = [A_2 B_2 C_2]$ ，在這裡考慮到 $\cot \pi$ 不存在，因此我們回顧作圖，並找到更輕鬆的證明方法。

性質 16： 當 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \pi$ 時，無論 P 點位置，有 $[A_1 B_1 C_1] = [A_2 B_2 C_2]$ 。

證明：

我們令 $P(x:y:z)$ 並根據有向面積比例得出衍伸三角形頂點坐標

$$A_1(1-y, y, 0)、A_2(1-z, 0, z)$$

$$B_1(0, 1-z, z)、B_2(x, 1-x, 0)$$

$$C_1(x, 0, 1-x)、C_2(0, y, 1-y)$$

並代入面積公式得：

$$\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} 1-y & y & 0 \\ 0 & 1-z & z \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = xyz + (1-x)(1-y)(1-z)$$

$$\frac{[A_2 B_2 C_2]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} 1-z & 0 & z \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & y & 1-y \end{vmatrix} = xyz + (1-x)(1-y)(1-z)$$

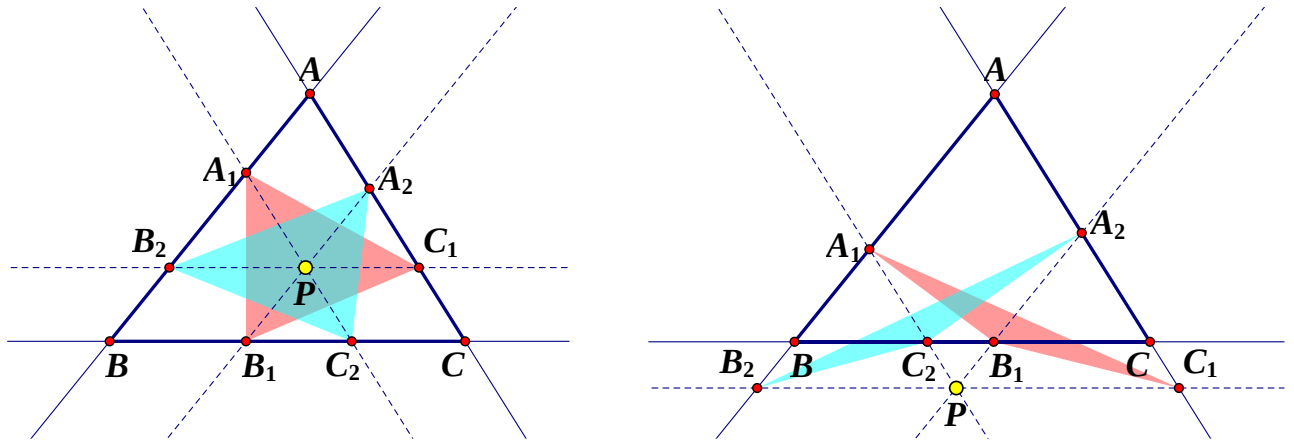


圖 36： $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \pi$

注意到，當 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C A = \theta = \pi$ 時， P 點在平面上任何位置，皆使得 $[A_1 B_1 C_1] = [A_2 B_2 C_2]$ ，這個構圖雖然比較容易，但是其中有趣的地方是，因為平行性質，我們可以將平行線平移（作 $\overline{BC}$ 的任意平行線交 $\overline{CA}$ 於 C_1 ，交 $\overline{AB}$ 於 B_2 ；作 $\overline{CA}$ 的任意平行線交 $\overline{AB}$ 於 A_1 ，交 $\overline{BC}$ 於 C_2 ；作 $\overline{AB}$ 的任意平行線交 $\overline{BC}$ 於 B_1 ，交 $\overline{CA}$ 於 A_2 ），如下圖。

我們可得出 $C_1(t_1x, 0, (1-t_1x))$ 、 $B_2(t_1x, (1-t_1x), 0)$ 、 $A_1((1-t_2y), t_2y, 0)$ 、 $C_2(0, t_2y, (1-t_2y))$ 、 $B_1(0, (1-t_3z), t_3z)$ 、 $A_2((1-t_3z), 0, t_3z)$ ，其中 t_1 、 t_2 、 t_3 為實數，從而有 $\frac{[A_1 B_1 C_1]}{[ABC]} = \frac{[A_2 B_2 C_2]}{[ABC]} = t_1 t_2 t_3 xyz + (1-t_1x)(1-t_2y)(1-t_3z)$ 。

有趣的是， $P(x, y, z)$ ， $t_1 = t_2 = t_3 = -1$ 時， A 點為 $\triangle PA_1A_2$ 的重心， B 點為 $\triangle PB_1B_2$ 的重心， C 點為 $\triangle PC_1C_2$ 的重心且 $[A_1B_1C_1] = [A_2B_2C_2]$ 。

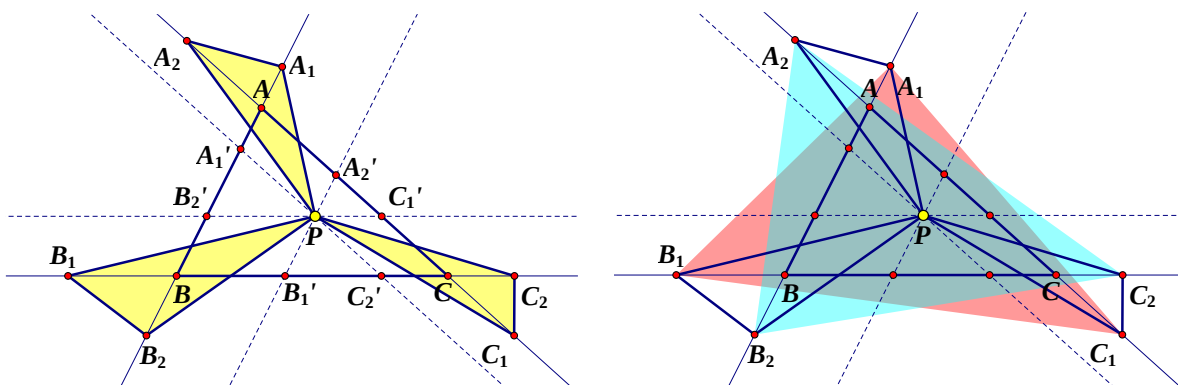


圖37：原三角形的三頂點為三個旁接三角形的重心

對於衍伸三角形的六個頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 是否共一個圓錐曲線？我們感到好奇，因為 $0 < \angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA < \pi$ 的時候，六點共圓錐曲線的充要條件是 P 點在外接圓上，那麼當 $\angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA = \pi$ 的時候呢？

當 $\angle PP_AB = \angle PP_BC = \angle PP_CA = \theta = \pi$ 且 $t_1 = t_2 = t_3 = -1$ ，我們可將「垂心條件變換成重心條件」，即 A 點為 $\triangle PA_1A_2$ 的重心， B 點為 $\triangle PB_1B_2$ 的重心， C 點為 $\triangle PC_1C_2$ 的重心。

性質 17 ($\theta = \pi$ 與重心條件)：若 P 點在平面上任何位置，若且唯若衍伸三角形頂點 A_1 、 B_1 、 C_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 皆共一個圓錐曲線上。

證明：

令 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，由前面討論可得衍伸三角形頂點坐標

$$A_1(1 + \mu_2, -\mu_2, 0)、A_2(1 + \mu_3, 0, -\mu_3)$$

$$B_1(0, 1 + \mu_3, -\mu_3)、B_2(-\mu_1, 1 + \mu_1, 0)$$

$$C_1(-\mu_1, 0, 1 + \mu_1)、C_2(0, -\mu_2, 1 + \mu_2)$$

注意到各點坐標分量和相等，可直接計算原三角形頂點與衍伸三角形頂點構成的有向線段比值為

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2B}} \times \frac{\overline{BC_2}}{\overline{C_2C}} \times \frac{\overline{CA_2}}{\overline{A_2A}} \right) \times \left(\frac{\overline{AA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{BB_1}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{CC_1}}{\overline{C_1A}} \right) \\ &= \left(\frac{1+\mu_1}{-\mu_1} \times \frac{1+\mu_2}{-\mu_2} \times \frac{1+\mu_3}{-\mu_3} \right) \times \left(\frac{-\mu_2}{1+\mu_2} \times \frac{-\mu_3}{1+\mu_3} \times \frac{-\mu_1}{1+\mu_1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

由引理 1 可得 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 共一個圓錐曲線。

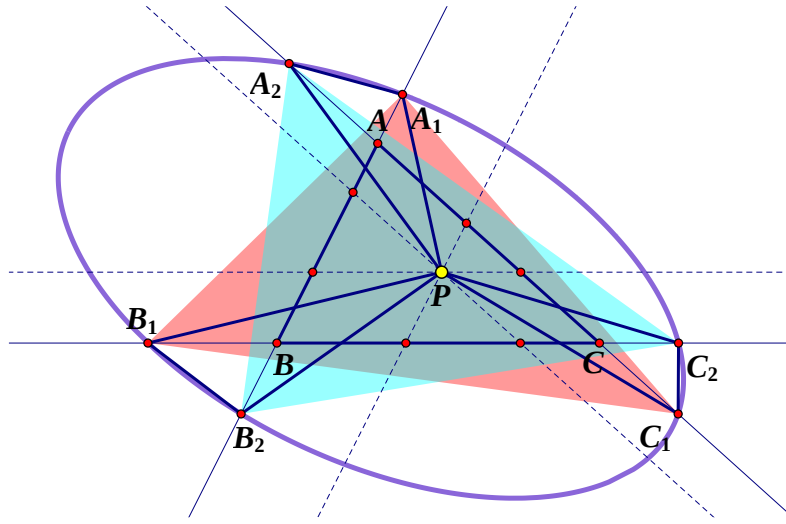


圖 38：衍伸三角形頂點在圓錐曲線上

性質 18 ($\theta = \pi$ 與重心條件)：過 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 的圓錐曲線有方程式

$$\sum_{\text{cyc}} [(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3xy] = 0$$

證明：

1. 令 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，並有衍伸三角形頂點坐標

$$A_1(1 + \mu_2, -\mu_2, 0), A_2(1 + \mu_3, 0, -\mu_3)$$

$$B_1(0, 1 + \mu_3, -\mu_3), B_2(-\mu_1, 1 + \mu_1, 0)$$

$$C_1(-\mu_1, 0, 1 + \mu_1), C_2(0, -\mu_2, 1 + \mu_2)$$

2. 依序代入圓錐曲線方程式

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$$

從而有

$$\begin{cases} A(1 + \mu_2)^2 + B\mu_2^2 = 2D\mu_2(1 + \mu_2) \\ B\mu_2^2 + C(1 + \mu_2)^2 = 2F\mu_2(1 + \mu_2) \\ B(1 + \mu_3)^2 + C\mu_3^2 = 2F\mu_3(1 + \mu_3) \\ C\mu_3^2 + A(1 + \mu_3)^2 = 2E\mu_3(1 + \mu_3) \\ C(1 + \mu_1)^2 + A\mu_1^2 = 2E\mu_1(1 + \mu_1) \\ A\mu_1^2 + B(1 + \mu_1)^2 = 2D\mu_1(1 + \mu_1) \end{cases}$$

3. 由克拉瑪公式可依序解得係數比

$$A:B:D = \begin{vmatrix} 2\mu_1(1 + \mu_1) & (1 + \mu_1)^2 \\ 2\mu_2(1 + \mu_2) & \mu_2^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_1^2 & 2\mu_1(1 + \mu_1) \\ (1 + \mu_2)^2 & 2\mu_2(1 + \mu_2) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_1^2 & (1 + \mu_1)^2 \\ (1 + \mu_2)^2 & \mu_2^2 \end{vmatrix}$$

$$B:C:F = \begin{vmatrix} 2\mu_2(1 + \mu_2) & (1 + \mu_2)^2 \\ 2\mu_3(1 + \mu_3) & \mu_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_2^2 & 2\mu_2(1 + \mu_2) \\ (1 + \mu_3)^2 & 2\mu_3(1 + \mu_3) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_2^2 & (1 + \mu_2)^2 \\ (1 + \mu_3)^2 & \mu_3^2 \end{vmatrix}$$

$$C:A:E = \begin{vmatrix} 2\mu_3(1 + \mu_3) & (1 + \mu_3)^2 \\ 2\mu_1(1 + \mu_1) & \mu_1^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_3^2 & 2\mu_3(1 + \mu_3) \\ (1 + \mu_1)^2 & 2\mu_1(1 + \mu_1) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \mu_3^2 & (1 + \mu_3)^2 \\ (1 + \mu_1)^2 & \mu_1^2 \end{vmatrix}$$

4. 化簡係數比得到

$$A:B:C:D:E:F$$

$$= 2(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3 : 2(\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3\mu_1 : 2(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)\mu_1\mu_2 :$$

$$(2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3 : (2\mu_3\mu_1 + 2\mu_3 + 2\mu_1 + \mu_2)\mu_2 : (2\mu_2\mu_3 + 2\mu_2 + 2\mu_3 + \mu_1)\mu_1$$

5. 將係數代入圓錐曲線方程式即可得

$$\Sigma_{cyc}[(2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)\mu_2\mu_3x^2 + (2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)\mu_3xy] = 0$$



考慮無窮遠線 L_∞ 上的點滿足 $x + y + z = 0$ ，因此不失一般性令 L_∞ 上點 $(1, -t, t - 1)$ 並代入曲線方程式計算 t 有無實根的判別式，我們可以得到一個漂亮的結果，也發現其對應的幾何意義，這個判別式不只是代數型態的判別式，還有具體的幾何刻劃。

性質 19 ($\theta = \pi$ 與重心條件)：

過 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 的圓錐曲線的型態判別式為

$$\delta = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3)$$

(1) $\delta < 0$ 時， Γ 為 ellipse。

(2) $\delta = 0$ 時， Γ 為 parabola。

(3) $\delta > 0$ 時， Γ 為 hyperbola。

證明：

1. 令無窮遠線 L_∞ 上點 $(1, -t, (t - 1))$ ，代入曲線方程式而有

$$(1 + \mu_1)\mu_2\mu_3 + (1 + \mu_2)\mu_3\mu_1 t^2 + (1 + \mu_3)\mu_1\mu_2 (t - 1)^2 - (2\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + 1)\mu_3 t + (2\mu_3\mu_1 + \mu_3 + \mu_1 + 1)\mu_2 (t - 1) - (2\mu_2\mu_3 + \mu_2 + \mu_3 + 1)\mu_1 t(t - 1) = 0$$

$$\text{整理化簡可得 } (-\mu_1)t^2 + (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)t - \mu_2 = 0$$

2. 我們可以得到 t 的判別式

$$\delta = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)^2 - 4\mu_1\mu_2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 - 2(\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3)$$



先討論 $\delta = 0$ 時， $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 0$ ，這條方程式是 Steiner Inellipse [11] 之方程式，如下圖中的內切三角形的曲線。因此我們給出判別式的具體的幾何刻劃：

1. P 點在 Steiner Inellipse 上，過六頂點的圓錐曲線為 parabola。

2. P 點在 Steiner Inellipse 內部，過六頂點的圓錐曲線為 ellipse。

3. P 點在 Steiner Inellipse 外部，過六頂點的圓錐曲線為 hyperbola。

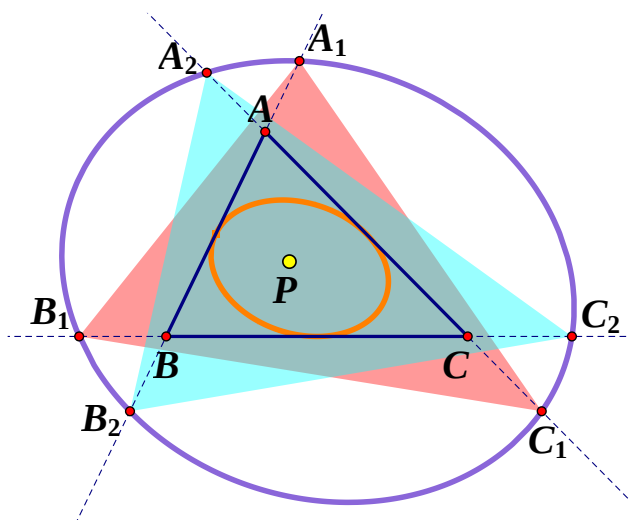


圖39：P 點在 Steiner Inellipse 內部

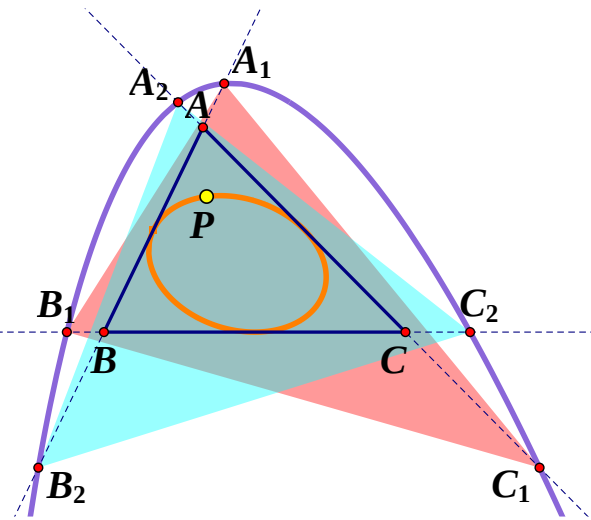


圖40：P 點在 Steiner Inellipse 上

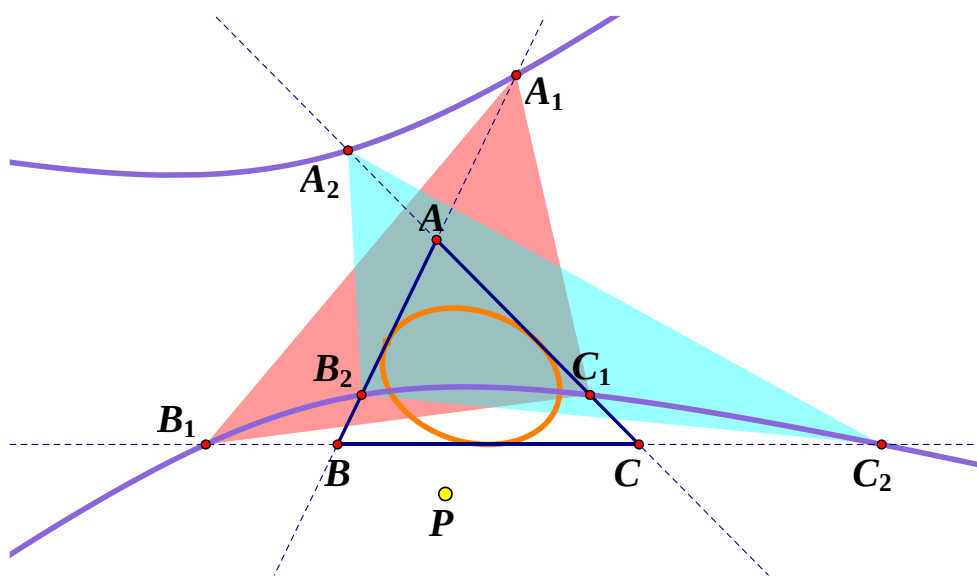


圖41：P 點在 Steiner Inellipse 外部

伍、結論

本研究先觀察幾何中著名的密克定理 (Miquel theorem)，創新給出了新的研究項目，關注密克點 P 與密克三角形的頂點所構成直線和原三角形 ABC 三邊直線的其餘六個交點，並定義了旁接三角形與衍伸三角形 $A_1B_1C_1$ 與 $A_2B_2C_2$ ，並有以下結論：

一、關於特殊化 ($\angle PP_A B = \frac{\pi}{2}$) 構圖中的幾何性質

- (一) 衍伸三角形的有向面積比值為 ± 1 ， P 點軌跡為原三角形的外接圓及 Kiepert hyperbola。
- (二) 刻劃衍伸三角形六個頂點共圓錐曲線的充要條件。
- (三) 給出衍伸三角形的有向面積比值為 ± 1 時，衍伸三角形與垂足三角形的關聯性，以及外接圓及 Kiepert hyperbola 的幾何必然性。
- (四) 討論衍伸三角形有向面積比值，令 $\Gamma_{P,r} \equiv \{P | [A_1B_1C_1] = r[A_2B_2C_2], r \in \mathbb{R}\}$ ，給出 $\Gamma_{P,r}$ 為圓錐曲線系，並進一步得到其型態判別式，以及此圓錐曲線系四個交點（原三角形頂點及 Tarry Point）。
- (五) 刻劃出有向線段比不變量 $\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = 1$ 。

二、關於一般化 ($\angle PP_A B = \theta$) 構圖中的幾何性質

- (一) P 點在原三角形的外接圓上時，衍伸三角形有向面積比值 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = -\prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 。
- (二) P 點在原三角形的 Kiepert hyperbola 與 Steiner circumellipse 的線性組合上時，衍伸三角形有向面積比值 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[A_2B_2C_2]} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 。
- (三) 給出衍伸三角形的有向面積比值為 $\pm \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 時，衍伸三角形與密克三角形的關聯性，以及對應的圓錐曲線的幾何必然性。
- (四) 刻劃出有向線段比不變量 $\frac{\overrightarrow{PA_1}}{\overrightarrow{PC_2}} \times \frac{\overrightarrow{PB_1}}{\overrightarrow{PA_2}} \times \frac{\overrightarrow{PC_1}}{\overrightarrow{PB_2}} = \prod_{\text{cyc}} \frac{(S_A + S_\theta)}{(S_A - S_\theta)}$ 。
- (六) 當 $\theta = \pi$ 時，有趣的是，我們將垂心條件轉化為重心條件，即原三角形 ABC 的頂點分別為三個旁接三角形的重心。在此條件下，我們給出刻劃三角形六個頂點共圓錐曲線的型態判別式的幾何表徵。

陸、未來展望與討論

完整研究完三角形後，我們企圖推廣到四邊形以上，利用繪圖軟體，發現以下猜想。

設定 P 點對多邊形的各邊作垂線的條件下，滿足衍伸多邊形面積相等時，猜想 P 點軌跡為一個圓及一條 hyperbola，下圖為四邊形的例子。

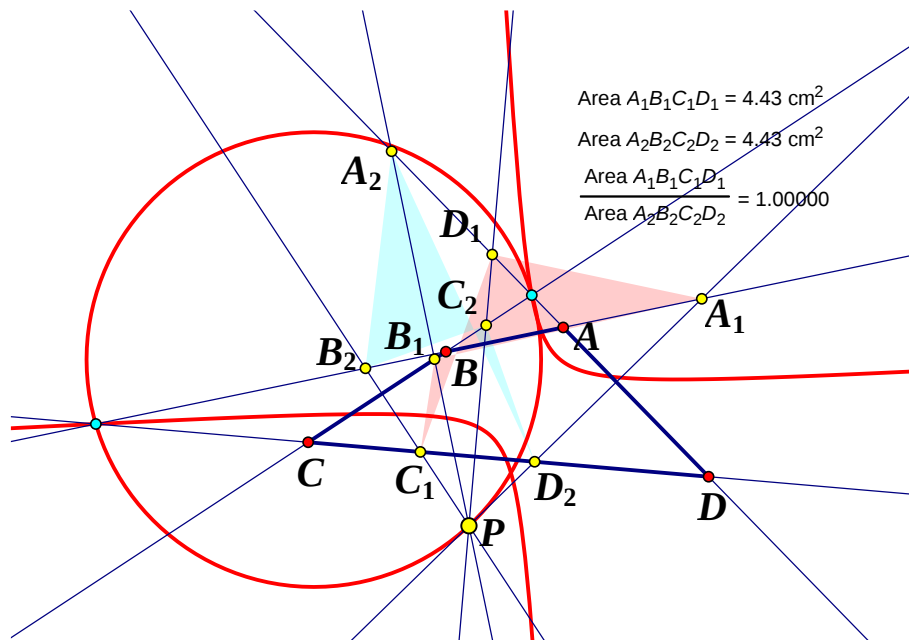


圖 42：滿足 $[A_1B_1C_1D_1] = \pm[A_2B_2C_2D_2]$ 的 P 點軌跡

推廣到四邊形（或以上），我們遇到的困難主要有兩個：

第一，本研究始使用的重心坐標系統（Barycentric Coordinates）僅適用於三角形，若處理四邊形僅能假設 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 為單位坐標，再給定 $D(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，構造一個任意四邊形。令動點 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，求出 A_1 、 B_1 、 C_1 、 D_1 、 A_2 、 B_2 、 C_2 、 D_2 八點坐標，再將四邊形有向面積拆解成 $[A_1B_1C_1D_1] = [A_1B_1C_1] + [C_1D_1A_1]$ 且 $[A_2B_2C_2D_2] = [A_2B_2C_2] + [C_2D_2A_2]$ ，考慮 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} + \frac{[C_1D_1A_1]}{[ABC]} = \frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} + \frac{[C_2D_2A_2]}{[ABC]}$ 或 $\frac{[A_1B_1C_1]}{[ABC]} + \frac{[C_1D_1A_1]}{[ABC]} = -\left(\frac{[A_2B_2C_2]}{[ABC]} + \frac{[C_2D_2A_2]}{[ABC]}\right)$ ，然而這樣處理的方式相對性來說計算繁雜，且某部來說喪失了重心坐標系統（Barycentric Coordinates）用於三角形的輪換對稱性。

第二，在三角形時，我們刻劃出延伸三角形與密克三角形具有關聯性，這一點讓我們給出不少簡潔的數學之美。然而，我們知道對於任意四邊形（或以上）不一定有密克定理（即四邊形的四邊或延長線上各任取一點，則四個外接圓會交於一點）或密克逆定理，因此密克四邊形（或以上）也不一定存在。然而，我們可以不限於密克定理來看，可以放寬來看，過 P 點作對各邊或延長線構造相同夾角的直線（即 $\angle PP_A B = \angle PP_B C = \angle PP_C D = \angle PP_D A$ ），再利用動態幾何軟體實驗，如下圖，我們設定衍伸四邊形 $[A_1B_1C_1D_1] = [A_2B_2C_2D_2]$ ，並觀察

衍伸四邊形與垂足四邊形的有向面積比值，當 P 點移動時， $\frac{[A_1B_1C_1D_1]}{[ABCD]}$ 並非定值，這一點與我們研究的定理 13 不同，這一點是比較奇怪，也是暗示我們衍伸四邊形的有向面積相等時，其幾何意義值得繼續深化探討（或許在三角形時恰好退化成垂足三角形）。

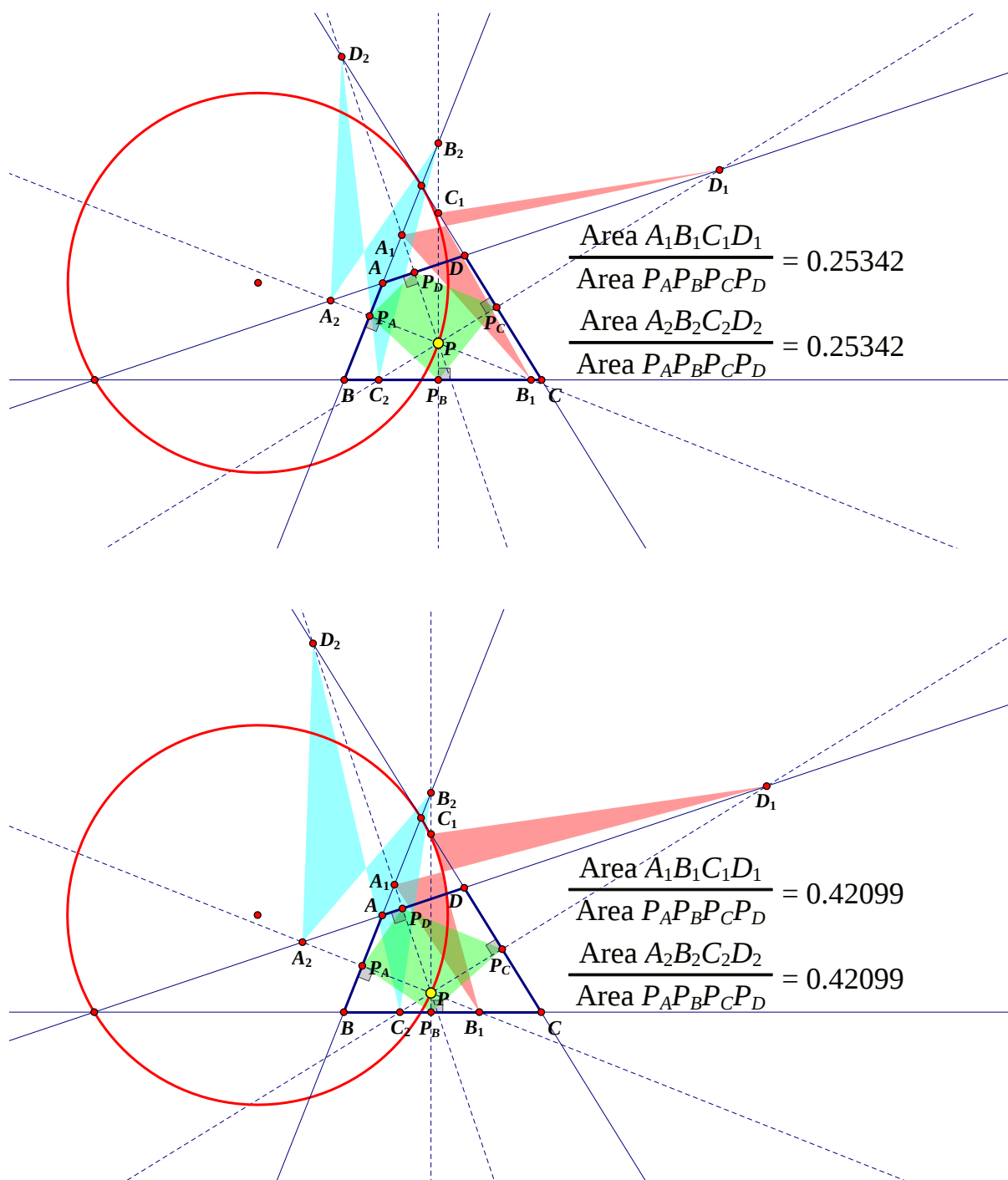


圖 43：衍伸四邊形與垂足四邊形有向面積非定值

柒、參考文獻

- [1] 黃武雄 (1981)。高中解析幾何後記。數學傳播季刊，5 (1)，37-46。
- [2] Circumcircle, available at <https://mathworld.wolfram.com/Circumcircle.html>
- [3] Clark Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, available at <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [4] Eckart Schmidt, *Miquel Points and Inscribed Triangles*, available at <http://eckartschmidt.de/Miquel.pdf>
- [5] Kiepert hyperbola, available at [https://mathworld.wolfram.com/Kiepert hyperbola.html](https://mathworld.wolfram.com/Kiepert%20hyperbola.html)
- [6] Max Schindler, Evan Chen (2012). *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*, available at <https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf>
- [7] Miquel's Theorem, available at <https://mathworld.wolfram.com/MiquelsTheorem.html>
- [8] Paris Pamfilos (2019). *Carnot's theorem*, available at <http://users.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/problems/CarnotConics.html>
- [9] Pedal Triangle, available at <https://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html>
- [10] Steiner Circumellipse, available at <https://mathworld.wolfram.com/SteinerCircumellipse.html>
- [11] Steiner Inellipse, available at <https://mathworld.wolfram.com/SteinerInellipse.html>

【評語】 010030

有別於以前的作品較關注於密克點與蜜克三角形的情形。在一個三角形內取一動點以該動點付三個頂點座旁接三角形及衍伸三角形，在不同的設定下，可以得到一些面積或長度等不變量。作者在此方面有不錯的做法及推導。