2025年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010024

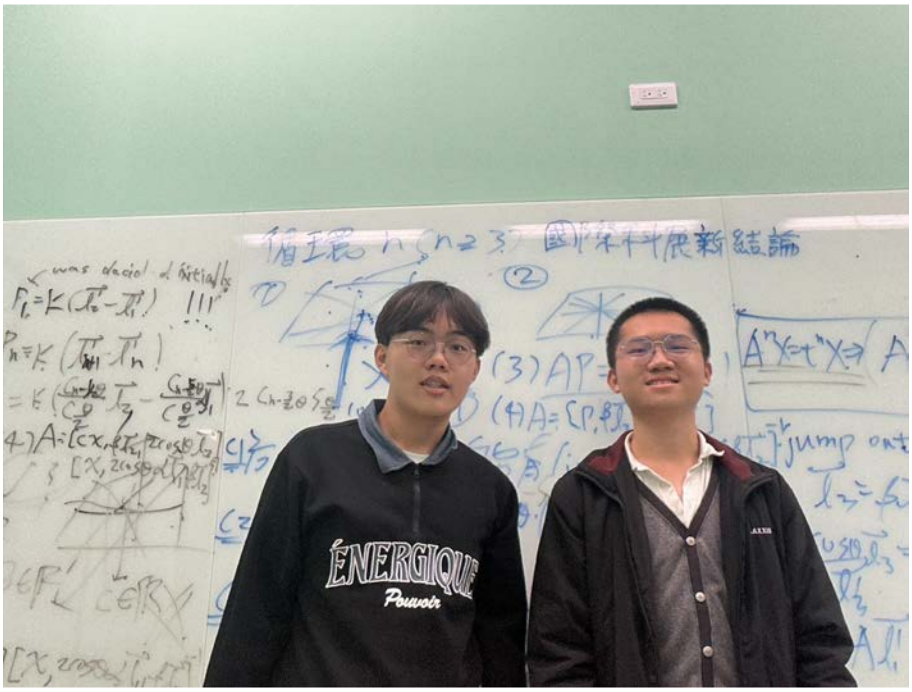
參展科別　數學

作品名稱　平面及空間中直線循環的矩陣變換

就讀學校　國立彰化高級中學
指導教師　蔡其南
作者姓名　趙湞揚
　　　　　龔書宏

關鍵詞　矩陣、平面變換、線性代數

作者簡介



我們目前就讀彰化高中三年級數理資優班。

我是趙湞揚，高一就進入數資班的數學專題。數學是我最大的興趣，我總是投入大量的熱情，並享受於解出問題的滿足感。高一暑假開始做研究，身為主要作者，我不但將創意的思維發揮得淋漓盡致，還將研究融入到生活中，不論是跑步還是與家人談天時，我總能迸出新的結果。最近，不管是國際科展通過初審或是特殊選材錄取台大數學系，對我而言都是很大的鼓舞，我會抱持對數學的熱沈，持續精進！

我是龔書宏，喜歡讀些數學、物理、有機這些有來由的科學或是跟人有關的生物或心理學，午休的桌球室常常能看到我的身影，這次科展研究的經驗，不僅成為高中亮眼回憶，更期盼在未來路途上，成為使我獨一無二的養分。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

科別：數學科

作品名稱：平面及空間中直線循環的矩陣變換

關鍵詞：矩陣、平面變換、線性代數

編號：

Abstract

This thesis makes thorough inquiries on topic：given a set of lines L_1、L_2、…、L_n, which are in plane or in space. In-depth discuss various cases based on the classifications of the relative positions of n lines, intersecting conditions, and n, to judge existence of matrix mapping T such that L_k can be mapped to L_{k+1} via matrix A, of which $k=1, 2,\ldots, n$ and $L_{n+1}=L_1$, additionally, discuss the uniqueness of matrix, meanwhile find out what these matrixes generally look like.

摘　　要

此份研究主要探討：給定一組平面中或空間中的 n 條直線 L_1、L_2、…、L_n，就這 n 條直線的相對位置、交點情形及 n，判斷是否存在矩陣變換 T 使得 L_k 可經由矩陣 A 映射到 L_{k+1}，其中 $k=1, 2,\ldots, n$ 且 $L_{n+1}=L_1$，並討論矩陣的唯一性與求出矩陣的一般模樣。

目　　錄

壹、研究動機

線性代數中多是給定矩陣並討論變換的特性，卻少有給定直線求變換矩陣的定理及問題，以一變換矩陣乘以 L_1 會映射到 L_2 為前提，那是否存在同一矩陣使得 L_2 映射到 L_1 為發想。起初給定兩條平面中不過原點不平行的兩條斜直線為出發點，以截距式與克拉瑪公式處理問題，得到存在唯一的矩陣，此時我們開始思考此類問題的其餘情況(平面及空間)，並展開一系列的探討。

貳、研究目的

給定 n 條直線，判斷是否存在循環長度為 n 的變換 T 滿足 $L_1 \xrightarrow{T} L_2 \xrightarrow{T} L_3 \cdots\cdots \xrightarrow{T} L_n \xrightarrow{T} L_1$，就 $n=1$、$n=2$、$n\geq 3$ 分別討論矩陣的唯一性並求出矩陣的一般模樣。

參、研究設備及器材

筆、紙、電腦、*GeoGeBra*

符號定義

(一) $\forall k, m, n\in \mathbf{N}$，$L_k$、$S_k$ 分別代表坐標平面上(或是空間中)的直線及點集合，$R^{m\times n}$則代表所有的 $m\times n$ 階實係數矩陣構成的集合，且 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in R^{2\times 2}$(用於平面中的矩陣變換)或 $R^{3\times 3}$(用於空間中的矩陣變換)。

(二) 對於一點 $P(x,y)$或一向量$\overrightarrow{V}=(x,y)$， P、$\overrightarrow{V}$也可以同時代表線性代數中定義的向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 簡記為 AP、$A\overrightarrow{V}$。此外，易知若 $AP=Q$、$AR=S$，則 $A\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QS}$。(此定義對於三維空間中的點或向量亦適用)

(三) 線性變換 $T：R^{2\times 1}\rightarrow R^{2\times 1}, T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})=A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $(x, y\in \mathbf{R})$為 A 的平面變換、$T：R^{3\times 1}\rightarrow R^{3\times 1}$, $T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix})=A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $(x,y,z\in \mathbf{R})$為 A 的空間變換，若 S_1 經由 T 變換後的像為 S_2，則記做 $S_1 \xrightarrow{A} S_2$。若 P 點滿足 $AP=P$，則 P 稱為固定點。

(四) 若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3$，則稱 L_1 和 L_2 相鄰、L_2 和 L_3 相鄰、L_1, L_2, L_3 為相鄰的三條直線。

(五) 若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$，且 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 皆相異，則稱這 n 條直線循環；

特別地，2 條直線循環可簡記為 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$。

舉例：若 $n \geq 3$，則 L_{n-1} 和 L_n 相鄰、L_n 和 L_1 相鄰、L_{n-1}, L_n, L_1 為相鄰的三條直線，其餘依此類推。

(六)若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$，則定義$\forall k=1 \sim n$，$L_k = L_{n+k}$。如此一來，就能把所有相鄰的直線都用 L_k、L_{k+1} 表示(因為當 $k=n$ 時，L_n、L_{n+1} 即為 L_n、L_1)

(七) A 的特徵值所構成的集合稱為 λ_A，並且若特徵值之幾何重數為幾次，特徵值就必須恰好重複列出幾次；特別地，A^n 的特徵值所構成的集合可簡記為$(\lambda_A)^n$。

(八) 當且 $L_1 \neq L_2$ 時，令 $L_1 \cap L_2$ 表示 L_1 與 L_2 的交點。只有當 L_1、L_2 交於一點時，$L_1 \cap L_2$ 才存在；當 L_1、L_2 平行或是在空間中互為歪斜線時，$L_1 \cap L_2$ 不存在

(九)我們用 $\boldsymbol{R}^3$ 代表三維空間中的所有向量構成的集合

舉例：$\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ 為三維空間中的非 0 向量，我們稱 $span(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}) = \boldsymbol{R}^3$ 若且唯若 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$ 可作為三維空間之基底(亦即 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$ 線性獨立)

肆、研究過程與方法

一、$L_1 \xrightarrow{A} L_2$ 的可行性與基本性質

這一小節中，我們證明直線的變換完全等價於點和方向向量的變換，並討論了在不同的循環長度下固定點的狀況及個數。

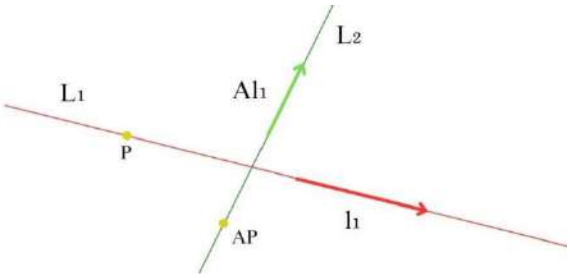
定理 1.1：矩陣 A 的平面變換為 T，則：

(1)① $detA \neq 0 \Leftrightarrow T$ 必單射且滿射；② $detA = 0 \Leftrightarrow T$ 必不單射且不滿射。

(2) 若 T 單射且 $\overrightarrow{V_1} \neq \overrightarrow{0}$、$\overrightarrow{V_2} = A\overrightarrow{V_1}$，則 $\overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{0}$。

(3) L_1 經由 T 變換後的像必為一直線或一點，特別地，若 $detA \neq 0$，則必為一直線

(4) 設 $\overrightarrow{l_1}$ 為 L_1 的方向向量且 $P \in L_1$，則 $L_1 \xrightarrow{A} L_2$ 若且唯若 $AP \in L_2$ 且 $A\overrightarrow{l_1}$ 為 L_2 的方向向量。



證明：

① $\lfloor\Rightarrow$ 因為 $detA\neq 0$，所以 A^{-1} 存在(亦即反函數存在)$\Rightarrow$ R_0 對射(也就是既單射又滿射)

$\lfloor\Leftarrow$ R_0 對射$\Rightarrow$ R_0 單射$\Rightarrow AP=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$之解只有 $P=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$(單射的定理)$\Rightarrow$由克拉瑪法則可知，

因為 $AP=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$具有唯一解，所以 $detA\neq 0$

②由①可知，$detA=0$ $\Leftrightarrow$ R_0 不單射

又 $detA=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$=向量$(a, b)$與$(c, d)$所張的平行四邊形面積為 0

＜$case1$＞：若$(a, b)=\overrightarrow{0}$或 $(c, d)=\overrightarrow{0}$，則 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\k\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}$

＜$case2$＞：若$(a, b)//(c, d)$，則 $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\tk\end{bmatrix}$ ($k, t\in\boldsymbol{R}$)

在上面兩種情況中，$A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$皆只能為單方向的向量，所以 R_0 不滿射

(2)由(1)得知，T 單射 $\Leftrightarrow$ $detA\neq 0$

假設 $\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{0}$，將 $\overrightarrow{V_2}=A\overrightarrow{V_1}$ 兩邊同乘 A^{-1}，得 $\overrightarrow{V_1}=A^{-1}\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{0}$(矛盾)，所以 $\overrightarrow{V_2}\neq\overrightarrow{0}$

(3)令 L_1：$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$ ($t\in\boldsymbol{R}$)，其中$(x_0, y_0)\in L_1$，且(a, b)為 L_1 的方向向量。

令 $A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0'\\y_0'\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}$

則 $A\begin{bmatrix}x_0+at\\y_0+bt\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}+tA\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0'\\y_o'\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}t=\begin{bmatrix}x_0'+a't\\y_0'+b't\end{bmatrix}$

① 若 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}=\overrightarrow{0}$，則 L_1 經由 T 變換後的像為(x_0',y_o')

② 若 $\begin{bmatrix}a'\\b'\end{bmatrix}\neq\overrightarrow{0}$，則$\begin{cases}x=x_0'+a't\\y=y_0'+b't\end{cases}$ 為另一直線 L_2 之參數式，代表 L_1 上的點經由 T 變換後，一一對應至 L_2，且 L_2 的方向向量為(a', b')、$(x_0', y_o')\in L_2$，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2$

③ 若 $detA \neq 0$，且$(a, b) \neq \overrightarrow{0}$，則 $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \overrightarrow{0}$，所以 $L_1 \xrightarrow{A} L_2$

(4) $\Rightarrow$ 若 $L_1 \to L_2$ 且 $P \in L_1$，則由矩陣變換之定義，顯然有 $AP \in L_2$

若$\overrightarrow{T_1}$為 L_1的方向向量，假設 $A\overrightarrow{T_1}$卻不是 L_2的方向向量，

則 $P + \overrightarrow{T_1}$經由矩陣變換後變為 $AP + A\overrightarrow{T_1} \notin L_2$(矛盾)，所以 $A\overrightarrow{T_1}$為 L_2的方向向量

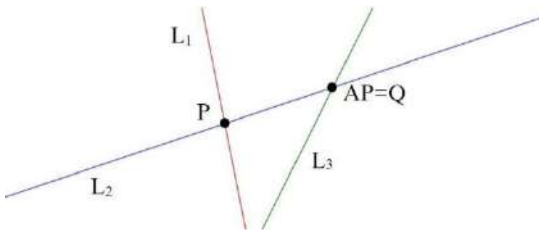
$\Leftarrow$ 可由(3)的證明過程中推知

註記 ：定理 1.1.(3)及 **1.1.(4)**非常重要，它為後續的矩陣運算賦予了正當性及完備性。

定理1.2：

若 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，則 (1) L_1、L_2必同時過(0, 0)或不過(0, 0)

(2) 若 $L_1 X\!\!/ L_2$ 且 $L_1 \neq L_2$，$L_1 \cap L_2 = P$，則 L_1、L_2上存在唯一固定點 P。



證明：

(1) 因為 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，所以：$(0, 0) \in L_1 \Leftrightarrow (0, 0) \in L_2$，意即：$(0, 0) \notin L_1 \Leftrightarrow (0, 0) \notin L_2$。

(2) 因為 $P \in L_1$ 且 $P \in L_2$，所以 $AP \in L_2$ 且 $AP \in L_1$

$\Rightarrow AP = L_2 \cap L_1 = P$，且易知 L_1、L_2上不可能有其他固定點

定理1.3：

若矩陣變換 T 滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3$，其中 $L_1 \cap L_2 = P$ 且 $L_2 \cap L_3 = Q$，則 $AP = Q$。

證明：

$\because P \in L_1$ 且 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \quad \therefore AP \in L_2$

$\because P \in L_2$ 且 $L_2 \xrightarrow{A} L_3 \quad \therefore AP \in L_3 \Rightarrow AP = L_2 \cap L_3 = Q$

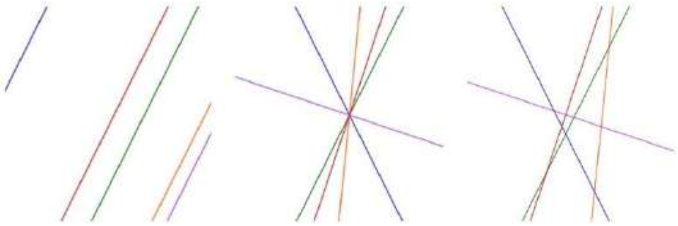
特別地，若取 $L_3 = L_1$ 可得**定理 1.2**

定理1.4：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 3$)，且 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 皆相異，則

(1) L_1、L_2、⋯、L_n 必同時過(0, 0)或不過(0, 0)。

(2) L_1、L_2、⋯、L_n 只有以下三種情形：$\begin{cases} \text{① } n \text{ 條直線皆平行、沒有交點；} \\ \text{② } n \text{ 條直線共交點；} \\ \text{③ 相鄰不平行且任相鄰三條不共點的相異直線} \end{cases}$ 。



證明：

(1) 同**定理 1.2** 的證明方法。

(2) 若有任相鄰直線平行，即 $A\vec{T}=t\vec{T}$ ($t\neq 0$)，由矩陣變換循環可得 n 條直線皆平行。

＜*case*1＞①n 條直線平行，再由 L_1、L_2、⋯、L_n 皆相異可知 n 條直線皆沒有交點。

＜*case*2＞n 條直線相鄰不平行：若有任相鄰三條直線共點 P，由引理 1 可得 $AP=P$

$\Rightarrow$ $P\in L_k$，其中 $k=1, 2,\cdots, n$ $\therefore$ ② n 條直線共交點；③ 相鄰不平行且任相鄰三條不共點的相異直線。

定理1.5：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$，令 $n(T)$表示 L_1 上的固定點個數，則：

(1) 若$(0, 0)\notin L_1$，則 $n(T)=0$ 或 1 或 ∞

(2) 若$(0, 0)\in L_1$，則 $n(T)=1$ 或 ∞

證明：

(1)設$\vec{T_1}$為 L_1 的方向向量，P、$Q\in L_1$ ($P,Q\neq(0, 0)$)且 $AP=Q$

＜*case*1＞：$A\vec{T_1}=\vec{T_1}$，則 $A(P+k\vec{T_1})=Q+k\vec{T_1}(k\in R)$

$\Rightarrow$ 當 $P\neq Q$ 時，$n(T)=0$；當 $P=Q$ 時，$n(T)=\infty$

＜*case*2＞：$A\vec{T_1}=t\vec{T_1}$ ($t\neq 0, 1$)，則 $A(P+k\vec{T_1})=Q+kt\vec{T_1}$

$\Rightarrow$ 當 $P=Q$ 時，$n(T)=1$；當 $P\neq Q$ 時，設 $P-Q=s\vec{T_1}$ ($s\neq 0$)

僅當 $k=\dfrac{s}{t-1}$ 時，$P+k\vec{T_1}=Q+kt\vec{T_1}$，所以 $n(T)=1$

(2) 證明同上，令 $P=(0, 0)$，則 $Q=AP=(0, 0)$，同理可得 $n(T)=1$ 或 ∞

二、使 2 條直線循環（$L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$）的矩陣變換

這一小節中，我們將處理滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$ 的線性變換，並利用 L_1 與 L_2 的相交情形，對平面變換 T 的變換矩陣 A 做討論。

討論方法

① 截距式與克拉瑪公式方法 (我們最初的切入點)

$$L_1：\frac{x}{m_1}+\frac{y}{n_1}=1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2：\frac{x}{m_2}+\frac{y}{n_2}=1 (\ L_1 \not\parallel L_2 \text{ 且 } L_1\neq L_2) \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & n_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} am_1 & bn_1 \\ cm_1 & dn_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & n_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} am_2 & bn_2 \\ cm_2 & dn_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

因為$(m_1, 0)$、$(0, n_1)\in L_1$，所以(am_1, cm_1)、$(bn_1, dn_1)\in L_2$；同理，(am_2, cm_2)、$(bn_2, dn_2)\in L_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} (am_1, cm_1)、(bn_1, dn_1) \text{ 代入} L_2 \\ (am_2, cm_2)、(bn_2, dn_2) \text{ 代入} L_1 \end{cases} \text{得} \begin{cases} \dfrac{am_1}{m_2}+\dfrac{cm_1}{n_2}=1 \\ \dfrac{bn_1}{m_2}+\dfrac{dn_1}{n_2}=1 \\ \dfrac{am_2}{m_1}+\dfrac{cm_2}{n_1}=1 \\ \dfrac{bn_2}{m_1}+\dfrac{dn_2}{n_1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_2a+m_2c=\dfrac{m_2n_2}{m_1}\cdots\cdots① \\ n_2b+m_2d=\dfrac{m_2n_2}{n_1}\cdots\cdots② \\ n_1a+m_1c=\dfrac{m_1n_1}{m_2}\cdots\cdots③ \\ n_1b+m_1d=\dfrac{m_1n_1}{n_2}\cdots\cdots④ \end{cases}$$

由①、③：$\begin{cases} n_2a+m_2c=\dfrac{m_2n_2}{m_1} \\ n_1a+m_1c=\dfrac{m_1n_1}{m_2} \end{cases}$ 由克拉瑪公式，$\triangle_1=\begin{vmatrix} n_2 & m_2 \\ n_1 & m_1 \end{vmatrix}=m_1n_2-m_2n_1$

因為 $L_1 \not\parallel L_2$ 且 $L_1\neq L_2$ $\Leftrightarrow$ $m_1n_2-m_2n_1\neq 0$ (即 $\dfrac{m_1}{m_2}\neq\dfrac{n_1}{n_2}$) $\Leftrightarrow$ $\triangle\neq 0$，亦即 a, c 存在且唯一

同理，由②、④：$\begin{cases} n_2b+m_2d=\dfrac{m_2n_2}{n_1} \\ n_1b+m_1d=\dfrac{m_1n_1}{n_2} \end{cases} \Rightarrow \triangle_2=\begin{vmatrix} n_2 & m_2 \\ n_1 & m_1 \end{vmatrix}=m_1n_2-m_2n_1=\triangle_1$ 且 b, d 存在且唯一

又$\triangle x_1=\begin{vmatrix} \dfrac{m_2n_2}{m_1} & m_2 \\ \dfrac{m_1n_1}{m_2} & m_1 \end{vmatrix}$，$\triangle y_1=\begin{vmatrix} n_2 & \dfrac{m_2n_2}{m_1} \\ n_1 & \dfrac{m_1n_1}{m_2} \end{vmatrix}$，$\triangle x_2=\begin{vmatrix} \dfrac{m_2n_2}{n_1} & m_2 \\ \dfrac{m_1n_1}{n_2} & m_1 \end{vmatrix}$，$\triangle y_2=\begin{vmatrix} n_2 & \dfrac{m_2n_2}{n_1} \\ n_1 & \dfrac{m_1n_1}{n_2} \end{vmatrix}$

$$\therefore\ A=\frac{1}{m_1n_2-m_2n_1}\begin{bmatrix}\triangle x_1 & \triangle x_2\\ \triangle y_1 & \triangle y_2\end{bmatrix}=\frac{1}{m_1n_2-m_2n_1}\begin{bmatrix}-(m_1n_1-m_2n_2) & \dfrac{m_1m_2(n_2^2-n_1^2)}{n_1n_2}\\ \dfrac{n_1n_2(m_1^2-m_2^2)}{m_1m_2} & m_1n_1-m_2n_2\end{bmatrix}$$

此種討論方法的優點在於，使用截距式會讓 L_1、L_2 分別都跑出兩個代數式很好看的點。但它局限於直線同時存在 x 截距、y 截距，不適用推廣到水平線、鉛垂線和過原點直線，並且難以化簡；再者，它單純是用「點變換」來解，不容易看出其代數式所代表之深層含義。

② 矩陣向量方法(建立在**定理 1.1.(4)**上的方法)

由**定理 1.1.(4)**我們知道，若 $P\in L_1$

則 $L_1\xrightarrow{A}L_2$ 完全等價於 $P\xrightarrow{A}Q$ 且 $A\times L_1$ 的方向向量＝L_2 的方向向量

所以我們可以把矩陣 A 滿足前者（$L_1\xrightarrow{A}L_2$）轉化為滿足後者

更貼切地說，所有滿足後者條件的矩陣 A，即為滿足前者條件的所有矩陣 A！

這個方法看似沒什麼厲害，但使用起來卻有異常神奇的效果！

詳細的過程請參見**定理 2.1** 及後續定理

定理 2.1 (不過原點不平行)：

給定不過原點不平行的兩條直線 $L_1：ax+by=1$、$L_2：cx+dy=1$，則存在在唯一的線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$，其中變換矩陣 $A=[-\vec{T_2},-\vec{T_1}][\vec{T_1},\vec{T_2}]^{-1}$，其中 $\vec{T_1}=(b,-a)$、$\vec{T_2}=(d,-c)$

(也就是行向量 $\begin{bmatrix}b\\-a\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}d\\-c\end{bmatrix}$)

證明：

取 $\vec{T_1}=(b,-a)$、$\vec{T_2}=(d,-c)$分別做為 L_1、L_2 的方向向量

令 $A\vec{T_1}=t\vec{T_2}$、$A\vec{T_2}=k\vec{T_1}$（$t,k\in\mathbf{R}-\{0\}$）(由**定理 1.1.(4)**)、$L_1\cap L_2=P=(x_0,y_0)$

則由定理 1.2 得知，$AP=P$

$$\Rightarrow\ A[\vec{T_1},\vec{T_2}]=A\begin{bmatrix}b & d\\ -a & -c\end{bmatrix}=[t\vec{T_2},k\vec{T_1}]=\begin{bmatrix}dt & bk\\ -ct & -ak\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ detA\times det(\begin{bmatrix}b & d\\ -a & -c\end{bmatrix})=det(\begin{bmatrix}dt & bk\\ -ct & -ak\end{bmatrix})\Rightarrow\ detA=-tk$$

又 $A[P,\overrightarrow{T_1}]=A\begin{bmatrix} x_0 & b \\ y_0 & -a \end{bmatrix}=[P,t\overrightarrow{T_2}]=\begin{bmatrix} x_0 & dt \\ y_0 & -ct \end{bmatrix}\Rightarrow detA\times det(\begin{bmatrix} x_0 & b \\ y_0 & -a \end{bmatrix})=det(\begin{bmatrix} x_0 & dt \\ y_0 & -ct \end{bmatrix})$

再由 $ax_0+by_0=1$、$cx_0+dy_0=1$ 帶入運算可得 $detA=t$

$\Rightarrow t=-tk\Rightarrow k=-1$

同理，取 $A[P,\overrightarrow{T_2}]=[P,k\overrightarrow{T_1}]$再進行一次運算可得 $t=-1$

$\therefore detA=t=-1$ 且 $A[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]=[t\overrightarrow{T_2},k\overrightarrow{T_1}]=[-\overrightarrow{T_2},-\overrightarrow{T_1}]$

又$[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$必存在（$\because \overrightarrow{T_1}$不平行$\overrightarrow{T_2}$）

$\therefore A=[-\overrightarrow{T_2},-\overrightarrow{T_1}][\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

給定兩直線 L_1：$2x+y=1$、L_2：$3x+4y=1$，$\overrightarrow{T_1}=(1,-2)$、$\overrightarrow{T_2}=(4,-3)$

$$A=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\times\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

驗證：

L_1 的參數式可設為$(x, 1-2x)$，經由矩陣 A 映射：$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-2x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4x+3 \\ 3x-2 \end{bmatrix}$，其軌跡即為直線 L_2；

L_2 的參數式可設為$(-4x+3, 3x-2)$，經由矩陣 A 映射：$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4x+3 \\ 3x-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-2x \end{bmatrix}$

其軌跡即為直線 L_1。

定理2.2 (過原點、不平行)：

給定過原點不平行的兩條直線 L_1、L_2，任取$\overrightarrow{T_1}$、$\overrightarrow{T_2}$分別做為 L_1、L_2 的方向向量，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$，其中變換矩陣 $A=[t\overrightarrow{T_2},k\overrightarrow{T_1}][\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$(受 t、k 兩獨立變數影響，其中 t、$k\in\boldsymbol{R}-\{0\}$)

證明：

$\because (0, 0)\in L_1$、L_2 且 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ 已經滿足點的變換，由**定理 1.1.(4)**，只需再滿足方向向量的變換即可

$\Rightarrow$ 令 $A[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]=[t\overrightarrow{T_2},k\overrightarrow{T_1}]$ (t、$k\in\mathbf{R}-\{0\}$)

又 $[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$必存在（ $\because$ $\overrightarrow{T_1}$不平行$\overrightarrow{T_2}$ ）

$\therefore$ $A=[t\overrightarrow{T_2},k\overrightarrow{T_1}][\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

給定兩直線 L_1：$y=-2x$、L_2：$y=3x$

此時 $A=\begin{bmatrix} t & k \\ 3t & -2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} t & k \\ 3t & -2k \end{bmatrix}\times\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2k+3t & k-t \\ -4k+9t & -2k-3t \end{bmatrix}$

(t、$k\in\mathbf{R}-\{0\}$)

定理2.3 (不過原點、平行)：

給定兩條不過原點的平行線：L_1：$ax+by=1$、L_2：$ax+by=\lambda$ ($\lambda\neq 0$)

僅當 $\lambda=-1$ 時，存在無限多個線性變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$ （ 受 t、k 兩獨立變數影響，其中 $t\in\mathbf{R}$、$k\in\mathbf{R}-\{0\}$)，其中變換矩陣 $A=[-P+r\overrightarrow{T},k\overrightarrow{T}][P,\overrightarrow{T}]^{-1}$($\overrightarrow{T}$為 L_1、L_2的方向向量且 $P\in L_1$)；當 $\lambda\neq-1$ 時，不存在平面變換 T 使得 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$

證明：

由**定理 1.1.(4)**，令 $A\overrightarrow{T}=k\overrightarrow{T}$ ($k\in\mathbf{R}-\{0\}$)

又 $\overrightarrow{OP}$ 必不平行$\overrightarrow{T}\Rightarrow$ 必可令 $AP=\alpha P+r\overrightarrow{T}$ ($\alpha, r\in\mathbf{R}$)

$\Rightarrow$ $A^2P=A(AP)=A(\alpha P+r\overrightarrow{T})=\alpha(AP)+rk\overrightarrow{T}=\alpha^2P+r(\alpha+k)\overrightarrow{T}$

又 $A^2P\in L_1$，所以 $\alpha^2=1\Rightarrow$ $\alpha=\pm1$ (若 $\alpha=1$，則代表 $L_2=L_1$，不合)

$\Rightarrow$ $\alpha=-1$，亦即 L_1、L_2對稱於原點，也就是 $\lambda=-1$

得 $A[P,\overrightarrow{T}]=[AP,k\overrightarrow{T}]=[-P+r\overrightarrow{T},k\overrightarrow{T}]$ (同理，$[P,\overrightarrow{T}]^{-1}$必存在)

$\Rightarrow$ $A=[-P+r\overrightarrow{T},k\overrightarrow{T}][P,\overrightarrow{T}]^{-1}$

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

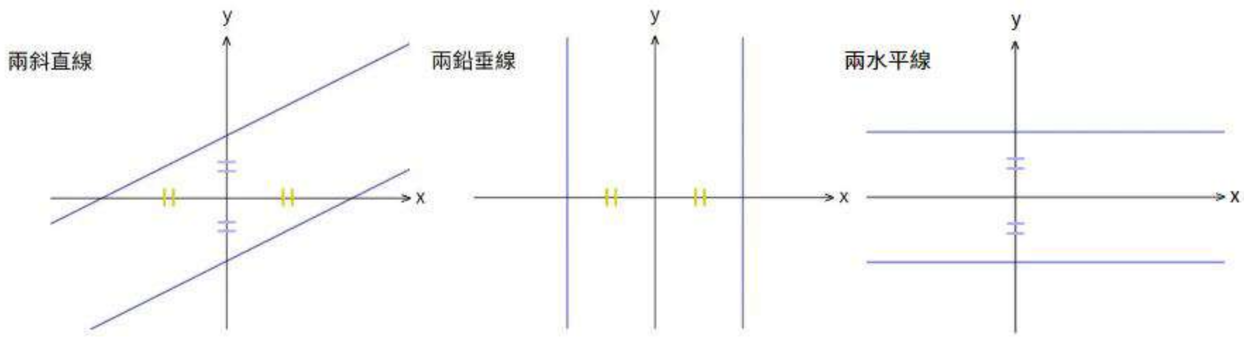
給定兩直線 L_1：$y=-2x+4$、L_2：$y=-2x-4$，取$\overrightarrow{T}=(1,-2)$、$P=(0, 4)\in L_1$

此時 $A=\begin{bmatrix} r & k \\ -4-2r & -2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} r & k \\ -4-2r & -2k \end{bmatrix}\times\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+\frac{r}{2} & \frac{r}{4} \\ -2k-2-r & -\frac{r}{2}-1 \end{bmatrix}$

註記：

將**定理 2.1** 中的矩陣 A 稍加運算，不難發現 $detA=-1$、$\lambda_A=\{1,-1\}$及 $A^2=I$ 的定理，以及**定理 2.2** 中的矩陣有 $\lambda_A=\{v,-v\}$、$A^2=tI$ ($t\neq 0$)的定理，這部分在第三章會再與 n 條直線循環的平面變換一併做說明。

由**定理 2.3** 得知：若兩條不過原點的平行線存在平面變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，則這兩條直線會對稱於原點，如圖(一)。



圖(一)

三、使 n 條直線循環（$L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$）的矩陣變換

在這一小節中，我們證明若存在平面變換 T 使得 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$，則 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 只有以下兩種關係：n 條直線相鄰三條皆不共點、n 條直線共在原點，並找出矩陣 A 的模樣。

引理1：

任何二階實方陣 A 若可對角化，則 A^n 可對角化；若 A 不可對角化且特徵值不為 0，則 A^n 不可對角化，其中 $n \geq 2$。

證明：

① 若 A 可對角化，則令 $A=PDP^{-1}$，其中 $D=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^n=(PDP^{-1})\times(PDP^{-1})\times(PDP^{-1})\times\cdots\cdots\times(PDP^{-1})=PD^nP^{-1}=P\begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}P^{-1}$ $\therefore$ A^n 可對角化

② 若 A 不可對角化，則 A 的特徵值重根，

由 *Jordan form*，令 $A= P\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}P^{-1}$ $(\lambda\neq 0)$，同理 $A^n=P\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n P^{-1}$

因為 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ($n \geq 2$)……(∗)

，已知 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (交換律成立)

$$\therefore \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n=\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n+n\times\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+C_2^n\times\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2+\cdots\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n+n\times\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

(由(∗)，後 $n-1$ 項皆為 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

$\because$ $n \geq 2$ 且 $\lambda\neq 0$ $\therefore$ $n\lambda^{n-1}\neq 0$ 且$(\lambda_A)^n=\{\lambda^n, \lambda^n\}$

$\Rightarrow$ $A^n-\lambda^n I=P\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n P^{-1}-P(\lambda^n I)P^{-1}=P\begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$

令 A^n的特徵向量為 X ($X\neq\overrightarrow{0}$)

解 $(A^n-\lambda^n I)X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow P\begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}X=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 0 & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}X=P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ 只能取 $P^{-1}X=\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ ($r\neq 0$) $\Rightarrow$ $X=P\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$(代表只有單方向的特徵向量)

$\therefore$ A^n 的特徵向量數不足，亦即 A^n 不可對角化。

定理 3.1：

若矩陣 A 所構成的線性變換使得 n 條（ $n \geq 2$ ）相鄰不平行的直線循環，則 $A^n=tI$ $(t\neq 0)$ 且$(\lambda_A)^n=\{t\}$；此外，A 必可對角化。

證明：

1° 令 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$ 且 $A^n\overrightarrow{T_1}=t\overrightarrow{T_1}$ $(t\neq 0)$，其中$\overrightarrow{T_1}$為 L_1 的方向向量

則 $A\overrightarrow{T_1}=k\overrightarrow{T_2}\,(k\neq0)$為 L_2 的方向向量$\Rightarrow A^n\overrightarrow{T_2}=A^n(\frac{1}{k}\times A\overrightarrow{T_1})=A^{n+1}(\frac{1}{k}\overrightarrow{T_1})=\frac{1}{k}A(A^n\overrightarrow{T_1})=\frac{1}{k}A\,(t\overrightarrow{T_1})=t\overrightarrow{T_2}$

$\Rightarrow$ $A^n[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]=t[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]$，又由$\overrightarrow{T_1}\nparallel\overrightarrow{T_2}$可知$[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$存在

∴ 兩邊同乘$[\overrightarrow{T_1},\overrightarrow{T_2}]^{-1}$可得 $A^n=tI\ (t\neq0)$且$(\lambda_A)^n=\{t\}$

2° 若 $0\in\lambda_A$，則由特徵理論得知，$0\in(\lambda_A)^n$(矛盾) ∴ $0\notin\lambda_A$

又若 A 不可對角化，且 $0\notin\lambda_A$，則由**引理 1** 可推得 A^n 不可對角化（ 與 $A^n=tI$ 矛盾 ）

∴ A 必可對角化

引理2：承**定理 3.1**，若再加上這 n 條相鄰不平行的直線皆不過原點，則 $t=1$，亦即 $A^n=I$。

證明：

由這 n 條直線相鄰不平行得知，任意相鄰的直線必存在交點

引理 1 告訴我們：$L_1\cap L_2 \xrightarrow{A} L_2\cap L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A} L_1\cap L_2$

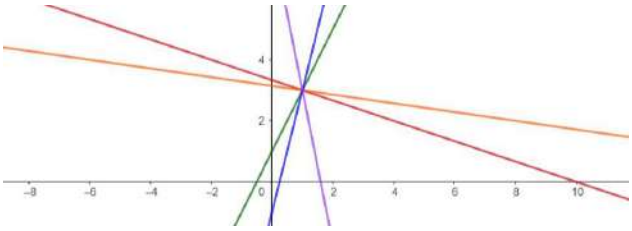
$\Rightarrow$ 設 $L_1\cap L_2=P\neq(0,0)$，則 $A^nP=P$

又 $A^n=tI\Rightarrow$ $A^nP=tP=P$

∴ $t=1$，亦即 $A^n=I$

定理3.2 (共交點，此點非原點)：

不存在任何的平面變換，使得 n 條（ $n\geq3$ ）共交點 $P(x_0, y_0)\neq(0, 0)$的相異直線 L_1、L_2、L_3、⋯、L_n 循環，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。



證明：

由**引理 2**，$A^n=I$ 且$(\lambda_A)^n=\{1, 1\}$，再由**定理 3.1** 得知，A 可對角化

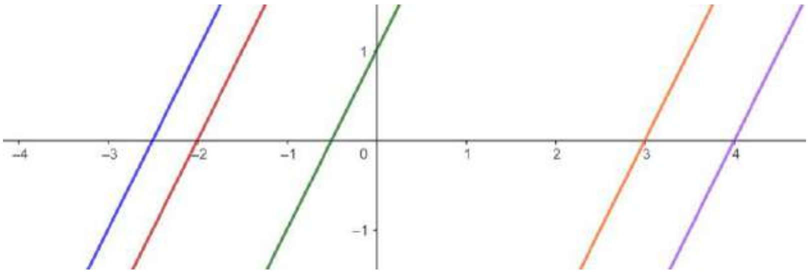
由 $AP=P$，令 $\lambda_A=\{1, \lambda\}$，則 $\lambda^n=1$ 且 $detA=\lambda\in\boldsymbol{R}$

$\Rightarrow$ $\lambda=\pm1\Rightarrow$ $A=I$ 或 $A^2=I$，亦即 $n=1$ 或 2（ 與 $n\geq3$ 矛盾 ），所以不存在此種平面變換。

定理3.3 (平行皆不過原點)：

不存在任何的平面變換，使得 n 條（$n\geq 3$）平行的相異直線 L_1、L_2、L_3、⋯、L_n 循環，

亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。



證明：

＜$Case1$＞L_1 有斜率

令 L_1：$y=mx+k_1\ (k_1\neq 0)$、L_2：$y=mx+k_2\ (k_2\neq 0)$、⋯⋯、L_n：$y=mx+k_n\ (k_n\neq 0)$

$P_1(0, k_1)\in L_1$，$P_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} bk_1 \\ dk_1 \end{bmatrix}\in L_2$，$P_2$ 代入 L_2 得 $dk_1=m(bk_1)+k_2\Rightarrow\ k_2=(d-mb)k_1$

同理 $k_3=(d-mb)k_2=(d-mb)^2k_1$、⋯⋯、$k_n=(d-mb)k_{n-1}=(d-mb)^{n\text{-}1}k_1$

$\Rightarrow\ k_1=(d-mb)^nk_1\Rightarrow\ (d-mb)^n=1$，即 $|\,d-mb\,|=1$

$d-mb=1\Rightarrow\ k_2=(d-mb)k_1=k_1$ (矛盾)；$d-mb=-1\Rightarrow\ k_3=(d-mb)^2k_1=k_1$ (矛盾)

∴ 變換矩陣 A 不存在。

＜$Case2$＞L_1 是鉛垂線

令 L_1：$x=k_1\ (k_1\neq 0)$、L_2：$x=k_2\ (k_2\neq 0)$、⋯⋯、L_n：$x=k_n\ (k_n\neq 0)$

$P_1(k_1, 0)\in L_1$，$P_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ak_1 \\ ck_1 \end{bmatrix}\in L_2$，$P_2$ 代入 L_2 得 $ck_1=m(ak_1)+k_2\Rightarrow\ k_2=(c-ma)k_1$

證明同＜$Case1$＞，變換矩陣 A 不存在。

引理3：

若二階實方陣 A 滿足 $A^{2n}=I$ ($n\in\mathbf{N}, n\geq 2$)、$A^k\neq I$ ($k=1, 2, \cdots, 2n-1$)，

則 $detA=1$ 且 $A^n=-I$。

證明：

1° 由**定理 3.1**，A 可對角化，又$(\lambda_A)^{2n}=\{1, 1\}\Rightarrow$ 令 $\lambda_A=\{\cos\vartheta+i\sin\vartheta, y\}$

$(detA)^{2n}=det(A^{2n})=det(I)=1\Rightarrow\ detA=\pm 1$

若 $detA = -1 = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)y \Rightarrow y = -\dfrac{1}{\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = -\cos\vartheta + i\sin\vartheta$

又 $traceA = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta) + (-\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = 2i\sin\vartheta \in \boldsymbol{R}$

所以 $\sin\vartheta = 0 \Rightarrow \cos\vartheta = \pm 1$，亦即 $\lambda_A = \{1, -1\} \Rightarrow A^2 = I$ (矛盾)

$\therefore\ detA = 1$

2° 由 $detA^n = 1$，對 A^n 做 *Cayley-Hamilton* 定理

得 $(A^n)^2 - (traceA^n)A^n + I = 0 = (A^n)^2 - I$ ($\because\ A^{2n} = I$)

$\Rightarrow A^n = (\dfrac{2}{traceA^n})I$

又 $detA^n = 1 \Rightarrow (\dfrac{2}{traceA^n})^2 = 1 \Rightarrow traceA^n = \pm 2$ (正不合)

$\therefore\ A^n = -I$

定理3.4：

若矩陣 A 的平面變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 3$)，其中 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 為相鄰不平行且不過原點的相異直線，則：

①若 n 為偶數，令 $\dfrac{n}{2} = r$，則 L_k 與 L_{k+r} 對稱於原點（$k = 1, 2, \cdots, \dfrac{n}{2} - 1$)，且 $L_1, L_2, \cdots, L_{r-1}$ 中，任意兩條直線皆不平行。

②若 n 為奇數，則 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 中，任意兩條直線皆不平行。

證明：

①1° 由**引理 2** 得知 $A^n = I$，再由**引理 3** 得知 $A^r = -I$

令 $P \in L_1$，則 $A^rP = -P$，所以 L_1 上的每一個點經由矩陣 A 變換 r 次後皆會與原本的點對稱於原點，亦即 L_1 與 L_{r+1} 對稱於原點

同理可知，L_k 與 L_{k+r} 對稱於原點（$k = 1, 2, \cdots, \dfrac{n}{2} - 1$)

2° 由 1°得知，$L_1 \sim L_n$ 經由矩陣 A 變換 r 次後，都會變成一條與原本直線平行的新直線

若 $L_1, L_2, \cdots, L_{r-1}$ 中有兩條直線平行，也就是存在 $t < r$

使得 $L_1 \sim L_n$ 經由矩陣 A 變換 t 次後，都會變成一條與原本直線平行的新直線

我們令 k 為所有 t 的可能值中最小者，則 k 必為 r 的因數

($\because$ 若不是，則會導出 k 不是最小者，矛盾)

此時，L_1～L_r 及 L_{r+1}～L_n 中，必定分別都存在一條以上與 L_1、L_{r+1} 平行且相異的直線

在 A^k 的變換下循環，這與**定理 3.3** 的結論矛盾

②若 n 為奇數，仿照①的方式去定義 k，則 k 必為 n 的因數

但是 k 必不等於 $\frac{n}{2}$ ($\because$ $\frac{n}{2}$ 不是整數) $\Rightarrow$ k 最大可能為 $\frac{n}{3}$

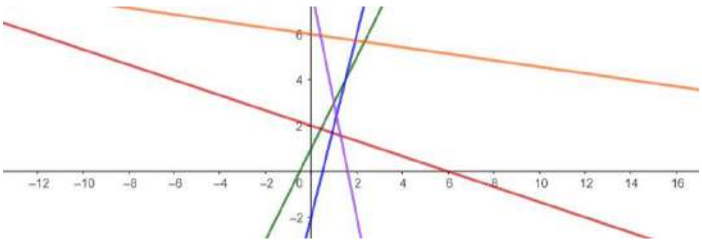
$\Rightarrow$ L_1～L_n 中，必定存在兩條以上與 L_1 平行且相異的直線

在 A^k 的變換下循環，這與**定理 3.3** 的結論矛盾

定理3.5 (不平行、不共點)：

對於任兩條不平行且不過原點之直線 L_1, L_2，存在一組以上，$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 L_3, ……, L_n

($n \geq 3$ 且 $L_1, L_2,\cdots\cdots, L_n$ 皆相異)，每一組直線分別都存在唯一的線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A}$ $L_n \xrightarrow{A} L_1$。



證明:

1° 由**定理 1.3**，$L_1, L_2,\cdots\cdots, L_n$ 相鄰不平行

所以**引理 2** 告訴我們 $A^n = I$，再由**定理 3.1** 得知，A 可對角化

仿照**引理 3** 中的證法，可以得到不論 n 為奇數還是偶數，都有 $detA = 1$

及 $\lambda_A = \{\cos\vartheta + i\sin\vartheta, \cos\vartheta - i\sin\vartheta\}$，其中 $\vartheta = \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2,\cdots\cdots, n-1$)

($\because$ $k = n$ 時，$\lambda_A = \{1, 1\}$，亦即 $A = I$，不合)

注意到當 ϑ 變成 $2\pi-\vartheta$ 時，λ_1 與 λ_2 的值其實只是對調而已，所以 $k=1, 2,\cdots\cdots, [\frac{n-1}{2}]$，

又因為循環長度必須為 n (不能縮短成 $\frac{n}{2}$ 或更短)，所以 $gcd(k,n)=1$。

2°令 L_1：$ex+fy=1$、L_2：$gx+hy=1$、L_3：$ix+jy=1$，其中 $L_1\cap L_2=(x_0, y_0)$且 $L_2\cap L_3=(x_1, y_1)$

取$\overrightarrow{l_1}=(-b, a)$、$\overrightarrow{l_2}=(-d, c)$、$\overrightarrow{l_3}=(-f, e)$

令$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 & -f \\ y_0 & e \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 & -ht \\ y_1 & gt \end{bmatrix}$ ($t\neq 0$)，其中 A 需滿足 $detA=1$

$\Rightarrow\ detA\times(ex_0+fy_0)=t(gx_1+hy_1)\Rightarrow\ detA\times 1=t\times 1\Rightarrow t=1$

$\therefore\ A\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_2}$，同理可得 $A\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_3}$

$\Rightarrow$ 令 L_4：$mx+ny=1$，$\overrightarrow{l_4}=(-n, m)$，一樣有 $A\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_4}$

炮製以上方法，我們假設 $L_4\sim L_n$，並得到對應的$\overrightarrow{l_4}\sim\overrightarrow{l_n}$

3° 令$\overrightarrow{l_3}=\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}$ $(\alpha,\beta\in\boldsymbol{R})$

$A[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_2}, \beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}]\Rightarrow\ A=[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

$\Rightarrow\begin{cases} detA=\alpha=1 \\ traceA=\beta=2\cos\vartheta \end{cases}\Rightarrow\ \overrightarrow{l_3}=2\cos\vartheta\overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1}$

我們特別把$\overrightarrow{l_3}$改寫成$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$，則由三角函數的積化合差可以得到：

$$\overrightarrow{l_4}=A\overrightarrow{l_3}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}(2\cos\vartheta\overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1})-\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}=\frac{2\sin 2\theta\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$$

$$=\frac{\sin 3\theta+\sin\theta-\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$$

同理，亦可得$\overrightarrow{l_5}=\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$，依此類推，也就是$\overrightarrow{l_r}=\frac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}-\frac{\sin(r-2)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$

其中 $r=3\sim n$，將$\overrightarrow{l_r}$帶回 L_r 整理後，得到 L_r：$\sin(r-1)\theta(gx+hy)-\sin(r-2)\theta(ex+fy)=\sin\theta$

而矩陣 A 則是透過 $A[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}]\Rightarrow\ A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$來求得

5° 解法統整如下：

①將 L_1、L_2 寫成 $ex+fy=1$、$gx+hy=1$ 之形式，並取$(-f, e)$、$(-h, g)$分別作為$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$

②判斷 ϑ 的可能值：$\vartheta=\dfrac{2k\pi}{n}$($k=1, 2,\cdots\cdots, [\dfrac{n-1}{2}]$)且 $gcd(k,n)=1$

③L_r：$\sin(r-1)\theta(gx+hy)-\sin(r-2)\theta(ex+fy)=\sin\theta$，其中 $r=3\sim n$

④依照通式寫出 L_3 後，仿照 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 求出 $\overrightarrow{l_3}$，然後 $A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

註記：若給定兩相交直線 L_1、L_2 及任意數正整數 n ($n\geq 3$)，我們就可以決定 L_3、L_4、……、L_n 及矩陣 A 使得他們循環，更進一步來說，給定 n 條直線 L_1、L_2、L_3、……、L_n ($n\geq 3$)，我們即可判斷這 n 條直線是否會循環。

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下：

給定 2 條直線 L_1：$y=2x+1$、L_2：$y=-\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}$

求 $L_3\sim L_6$ 及矩陣 A 使得 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_6\xrightarrow{A}L_1$。

① 移向整理成 L_1：$-2x+y=1$、L_2：$5x+4y=1$

② $[\dfrac{6-1}{2}]=2\Rightarrow\ \vartheta=\dfrac{2k\pi}{6}$($k=1, 2$)

但 $k=2$ 不合，所以 $\vartheta=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$

③ L_3：$2\cos\dfrac{\pi}{3}(5x+4y)-(-2x+y)=1\Rightarrow\ L_3$：$7x+3y=1$

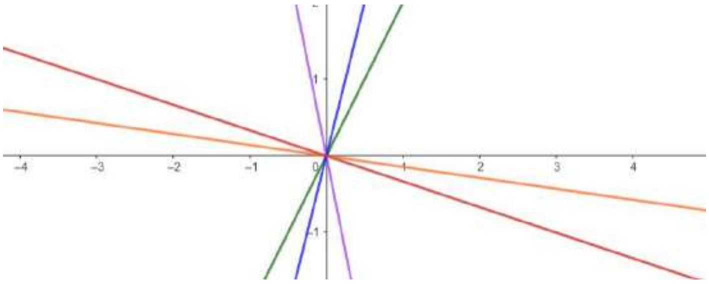
再由定理 3.4 得知，L_4、L_5、L_6 分別與 L_1、L_2、L_3 對稱

$\therefore\ L_4$：$-2x+y=-1$、L_5：$5x+4y=-1$、L_6：$7x+3y=-1$

此時，$A=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ -2 & 5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\dfrac{1}{-13}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

定理3.6 (不平行、共原點)：

對於任三條過原點的相異直線 L_1、L_2、L_3，存在 1 組以上、$[\dfrac{n-1}{2}]$組以下的過原點直線 $L_4, \cdots\cdots, L_n$ ($n\geq 3$ 且 $L_1, L_2,\cdots\cdots, L_n$ 皆相異)及矩陣 A，每一組直線分別都存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。



證明：

1° 由**定理 1.3**，$L_1, L_2,\cdots\cdots, L_n$ 相鄰不平行，所以**定理 3.1** 告訴我們 $A^n = \mu I$ ($\mu \in \boldsymbol{R} - \{0\}$)

令 $v > 0$ 滿足 $v^n = \mu$，

仿照**引理 3** 中的證法假設 $\lambda_A = \{v(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), y\}$以及去討論 $detA = \pm v^2$

最後證得 $\lambda_A = \{v(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), v(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)\}$以及 $detA = v^2$

同理，$\vartheta = \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2,\cdots\cdots,[\dfrac{n-1}{2}])$且 $gcd(k,n) = 1$

但要注意的是，當 $n = 2s$ ($s \in \boldsymbol{N}$ 且 $s \geq 2$) 時，$A^s = -v^2 I$

⇒ 這會讓過原點直線 $L_1, L_2,\cdots\cdots, L_s$ 循環

∴ 當 n 為偶數時，必須令 $\vartheta = \dfrac{2k\pi}{n} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{k\pi}{n}$

2° 令 $\overrightarrow{l_3} = \beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}$ $(\alpha,\beta \in \boldsymbol{R}) \Rightarrow 2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3} = 2\cos\vartheta(\beta\overrightarrow{l_2}) - (2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1})$ (仿照**定理 3.5**)

⇒ 以構造法令 $A[2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1}, \beta\overrightarrow{l_2}] = [t\beta\overrightarrow{l_2}, k \times 2\cos\theta(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1})]$

$$\Rightarrow A = [\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 0 & -2\alpha k\cos\theta \\ t\beta & 2\beta k\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\cos\vartheta\alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}^{-1}[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1} = [\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{-2\alpha k\cos\theta}{\beta} \\ \dfrac{t\beta}{2\cos\theta\alpha} & 2k\cos\theta \end{bmatrix}[\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} detA = tk = v^2 \\ traceA = 2k\cos\theta = 2v\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow k = t = v$$

$\Rightarrow A(2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}) = A[2\cos\vartheta(\beta\overrightarrow{l_2}) - (2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1})] = 2\cos\vartheta v \times 2\cos\theta(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}) - \beta v\overrightarrow{l_2} = v[4\cos^2\theta(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}) - \beta\overrightarrow{l_2}] = v[(2\cos2\theta + 2)(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}) - \beta\overrightarrow{l_2}] = v[(2\cos2\theta + 1)(\beta\overrightarrow{l_2} - \alpha\overrightarrow{l_1}) - \alpha\overrightarrow{l_1}]$

$= v[(2\cos2\theta + 1)\overrightarrow{l_3} - \alpha\overrightarrow{l_1}] = v[\dfrac{\sin3\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3} - \alpha\overrightarrow{l_1}]$(令此式為$\overrightarrow{l_4}$) $v[\dfrac{\sin3\theta}{\sin\theta}A(2\cos\theta\overrightarrow{l_3}) - \alpha A(2\cos\theta\overrightarrow{l_1})]$

⇒ $A(2\cos\vartheta\overrightarrow{l_4}) = (2\cos2\theta + 1)A(2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}) - \alpha A(2\cos\vartheta\overrightarrow{l_1}) =$

且$\overrightarrow{l_r'}=\dfrac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}(\beta\overrightarrow{l_2})-\dfrac{\sin(r-2)\theta}{\sin\theta}(2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1})$

3°再次使用積化和差：

$$\overrightarrow{l_r'}=\frac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}(\beta\overrightarrow{l_2})-\frac{\sin(r-2)\theta}{\sin\theta}(2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1})=\frac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}(\beta\overrightarrow{l_2})-\frac{\sin(r-1)\theta+\sin(r-3)\theta}{\sin\theta}(\alpha\overrightarrow{l_1})$$

$$=\frac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}(\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1})-\frac{\sin(r-3)\theta}{\sin\theta}(\alpha\overrightarrow{l_1})=\frac{\sin(r-1)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin(r-3)\theta}{\sin\theta}(\alpha\overrightarrow{l_1})$$

$\overrightarrow{l_r}$代回 L_r 整理，再加上**定理 3.6** 的這 n 條直線共點

得到 L_r 寫成直線族的形式為 $\sin(r-1)\theta L_3-\sin(r-3)\theta L_1$

而矩陣 A 則是透過 $A[2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1},\beta\overrightarrow{l_2}]=[\beta\overrightarrow{l_2},2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}]$

$\Rightarrow A=[\beta\overrightarrow{l_2},2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}]\,[2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1},\beta\overrightarrow{l_2}]^{-1}$來求得，但要加上 v 的係數倍

3° 解法統整如下：

① 任取$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$分別做為 L_1、L_2、L_3 的方向向量，再找 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}-\{0\}$使得$\overrightarrow{l_3}=\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}$

②判斷 ϑ 的可能值：$\vartheta=\dfrac{2k\pi}{n}$ ($k=1, 2,\cdots\cdots, [\dfrac{n-1}{2}]$)且 $gcd(k,n)=1$ 但是當 n 為偶數時，$\vartheta=\dfrac{k\pi}{n}$

③使用新的方向向量 $\alpha\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_3}$，利用「方向向量交換加負號」的方式寫出 L_1、L_3

(舉例：$\alpha\overrightarrow{l_1}=(2,3)\Rightarrow L_1：3x-2y=0$)

④ $L_r：\sin(r-1)\theta L_3-\sin(r-3)\theta L_1$，其中 $r=3\sim n$

⑤ $A=v\,[\beta\overrightarrow{l_2},2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}]\,[2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1},\beta\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ ($v\in\boldsymbol{R}-\{0\}$)

註記：若給定三直線 L_1、L_2、L_3 及任意數正整數 n($n\geq 3$)，我們就可以決定 L_4、⋯⋯、L_n 及矩陣 A 使得他們循環，更進一步來說，給定 n 條直線 L_1、L_2、L_3、⋯⋯、L_n ($n\geq 3$)，我們即可判斷這 n 條直線是否會循環。

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

給定 3 條直線 $L_1：y=3x$、$L_2：y=4x$、$L_3：y=8x$

求 $L_3\sim L_6$ 及矩陣 A 使得 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_6\xrightarrow{A}L_1$。

① 取$\overrightarrow{l_1}=(1, 3)$、$\overrightarrow{l_2}=(1, 4)$，再取$\overrightarrow{l_3}=(1, 8)=5\overrightarrow{l_2}-4\overrightarrow{l_1}$

② $[\frac{6-1}{2}]=2 \Rightarrow \vartheta=\frac{k\pi}{6}(k=1, 2)$

但 $k=2$ 不合，所以 $\vartheta=\frac{\pi}{6}$

③ $4\overrightarrow{l_1}=(4, 12)$、$\overrightarrow{l_3}=(1, 8) \Rightarrow L_1：12x-4y=0$、$L_3：8x-y=0$

④ $L_4：\sin 90°(8x-y)-\sin 30°(12x-4y)=0 \Rightarrow L_4：y=-2x$

$L_5：\sin 120°(8x-y)-\sin 60°(12x-4y)=0 \Rightarrow L_5：y=\frac{4}{3}x$

$L_6：\sin 150°(8x-y)-\sin 90°(12x-4y)=0 \Rightarrow L_6：y=\frac{16}{7}x$

⑤ $A=v\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ 20 & 8\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & 5 \\ 12\sqrt{3} & 20 \end{bmatrix}^{-1}=v\begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ 20 & 8\sqrt{3} \end{bmatrix}\times\frac{1}{20\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -12\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \end{bmatrix} (v\in \boldsymbol{R}-\{0\})$

$$=v\times\frac{1}{20\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 64 & -13 \\ 112 & -4 \end{bmatrix}$$

可經由同乘，簡化為 $A=v\begin{bmatrix} 64 & -13 \\ 112 & -4 \end{bmatrix} (v\in \boldsymbol{R}-\{0\})$

四、使 1 條直線循環（$L_1 \xrightarrow{A} L_1$）的矩陣變換

這一小節中，我們將處理滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$ 的線性變換，並利用 L_1 與 L_2 的相交情形，對平面變換 T 的變換矩陣 A 做討論。

定理4.1：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$，且 L_1 上有無限多個固定點，其中$(0, 0)\notin L_1$，則座標平面上的每一個點都是固定點，以及 $A=I$。

證明：

令其中兩個固定點為 P、Q，則 $AP=P$、$AQ=Q \Rightarrow A(\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP}$、$A(\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{OQ}$

$\because$ L_1 不過$(0, 0)$　$\therefore$ $\overrightarrow{OP}$ 不平行 $\overrightarrow{OQ} \Rightarrow [\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}]^{-1}$存在

$A[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}]=[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}]$兩邊同乘$[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}]^{-1} \Rightarrow A=I$，亦即座標平面上的每一個點都是固定點。

註記：定理 4.1 結合**定理 1.4** 可以得知，若不過原點的直線 L_1 滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$，則其平面變換 T 可分為 3 種類型:

① $A=I$、② A 將 L_1 上的每一個點皆沿著 L_1 的方向平移固定長度、③ L_1 上存在唯一固定點 P，其他點以 P 為縮放中心，沿著 L_1 的方向來進行特定比例的縮放。

定理4.2：

給定不過原點的直線：L_1：$ax+by=1$，任取 L_1 的方向向量$\overrightarrow{l_1}$、$P\in L_1$

，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_1$，其中變換矩陣 $A=[P+r\overrightarrow{l_1},k\overrightarrow{l_1}][P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$(受 r、k 兩變數影響，其中 $r\in\boldsymbol{R}$、$k\in\boldsymbol{R}-\{0\}$)。

證明：

$\because A[P,\overrightarrow{l_1}]=[P+r\overrightarrow{l_1},k\overrightarrow{l_1}]$且

$[P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$存在（$\because$ $\overrightarrow{OP}$ 不平行 $\overrightarrow{l_1}$ ）

$\therefore$ $A=[P+r\overrightarrow{l_1},k\overrightarrow{l_1}][P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

給定一直線 L_1：$y=-2x+4$，取 $P(0,4)$、$\overrightarrow{l_1}=(1,-2)$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} r & k \\ 4-2r & -2k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} r & k \\ 4-2r & -2k \end{bmatrix}\times\frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k+\frac{1}{2}r & \frac{1}{4}r \\ 2-r-2k & 1-\frac{1}{2}r \end{bmatrix}。$$

註記：由定理 4.2 得

定理4.3：

給定過原點的直線 L_1，任取 L_1 的方向向量$\overrightarrow{l_1}$，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_1$，其中變換矩陣 A 的通解為滿足$(A-\lambda I)\overrightarrow{l_1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($\lambda\neq 0$) 的所有矩陣 A

證明：

同**定理 2.2**，已滿足 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，只需再滿足 $A\overrightarrow{l_1}=\lambda\overrightarrow{l_1}$ ($\lambda\neq 0$)

$\therefore$ $A\overrightarrow{l_1}=\lambda\overrightarrow{l_1}\Leftrightarrow(A-\lambda I)\overrightarrow{l_1}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

有了上述公式後，對於此類問題我們可以快速的解決，舉例如下

給定一直線 L_1：$y=-2x$，此時$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=\lambda+2b \\ c=2d-2\lambda \end{cases}$

$\therefore\ A=\begin{bmatrix} \lambda+2b & b \\ -2\lambda+2d & d \end{bmatrix}$。

註記：由定理 4.3 得知，滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_1$ 的平面變換 T，其功用為將 L_1 上的點，以原點為縮放中心縮放 λ 倍（$\lambda\neq 0$）

至此我們已將平面中直線循環的矩陣變換討論完整。

五、三維空間中兩條直線循環的矩陣變換

在這一小節中，我們正式進入空間中的直線，處理 n＝2 時直線循環的線性變換。同樣地，直線變換完全等價於點和方向向量的變換

符號定義(只在此章節適用)：

1. $\overrightarrow{N}$ 為平面 E 的法向量
2. $\overrightarrow{l_3}$、$\overrightarrow{l_4}$ 為空間中任意非零向量(寫在矩陣中須以代數式表示)
3. $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 分別為 L_1、L_2 的方向向量

備註：定理 1.1、1.2 在三維空間中亦適用，在此直接引用

定理 5.1：

給定兩條交於一點 P 的直線 L_1、L_2，且兩直線所在的平面 E 不過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$，其中變換矩陣 $A=[P,\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k][P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ $(t,k\neq 0)$

證明：

由 $L_1\overset{T}{\Leftrightarrow}L_2$ 可知 $A[P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[P,\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k]$ ($t,k\neq 0$)，又兩直線所在的平面 E 不過(0, 0, 0)

所以 $P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$ 必不共平面$\Rightarrow[P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 存在　$\therefore\ A=[P,\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k][P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

定理 5.2：

給定兩條交於一點 $P\neq(0,0,0)$的直線 L_1、L_2，且兩直線所在的平面 E 通過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$。

若 $P=\alpha\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}$，則變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}\times\frac{\alpha}{\beta},\overrightarrow{l_1}\times\frac{\beta}{\alpha}][\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

證明：

同定理 5.1，$A[P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[P,\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k]$ $(tk\neq0)$，但 $[P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$不存在

因為 L_1不平行 L_2且$(0,0,0)\notin L_1$，所以存在唯一的 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}-\{0\}$使得 $P=\alpha\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}$

$\Rightarrow AP=A(\alpha\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2})=\alpha t\overrightarrow{l_2}+\beta k\overrightarrow{l_1}=P=\alpha\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}\Rightarrow t=\frac{\beta}{\alpha}$，$k=\frac{\alpha}{\beta}$

取 E 的法向量$\overrightarrow{N}$，令 $A[\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}\times\frac{\alpha}{\beta},\overrightarrow{l_1}\times\frac{\beta}{\alpha}]$

由於$\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$必不共面，所以$[\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$存在

$\Rightarrow A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}\times\frac{\alpha}{\beta},\overrightarrow{l_1}\times\frac{\beta}{\alpha}][\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

定理 5.3：

給定兩條交於原點(0, 0, 0)的直線 L_1、L_2，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k][\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ $(t,k\neq0)$

證明：

設 L_1、L_2所在的平面為 E，其法向量為$\overrightarrow{N}$，

因為(0,0,0)必為定點，所以 A 只需滿足方向向量的變換即可

令 $A[\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k]$ $(tk\neq0)$

同定理 5.2 可得 $A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_2}t,\overrightarrow{l_1}k][\overrightarrow{N},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

定理 5.4：

給定兩平行線 L_1、L_2(方向向量為$\overrightarrow{l}$)，取定點 $P\in L_1$且 $Q\in L_2$，且 R,S 分別為 L_1、L_2上的任意點，若兩直線所在的平面 E 不過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，其中變換

矩陣 $A=[S,R,t\vec{l}\,][P,Q,\vec{l}\,]^{-1}(\,t\neq 0\,)$

證明：

$A[P,Q,\vec{l}\,]=[S+k\vec{l},R+r\vec{l},t\vec{l}\,](ktr\neq 0)$

因為$\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\vec{l}$ 必不共面，所以$[P,Q,\vec{l}\,]^{-1}$存在

$\Rightarrow A=[S+k\vec{l},R+r\vec{l},t\vec{l}\,][P,Q,\vec{l}\,]^{-1}$

定理 5.5：

給定兩平行線 L_1、L_2(方向向量為$\vec{l}$)共平面 E(E 過(0, 0, 0))，取定點 $P\in L_1$，Q 為 L_2 上的任意點。僅當 L_1、L_2 對稱(0, 0, 0)時，才存在變換矩陣 A，與 L_1、L_2 構成無限多組矩陣變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_2$，其中變換矩陣

$A=[t\vec{l},Q,\vec{l_3}\,][\vec{l},P,\vec{N}\,]^{-1}(\,t\neq 0\,)$

當 L_1、L_2 不對稱(0, 0, 0)時，不存在變換矩陣 A

證明：

同定理 5.4，$A[P,Q,\vec{l}\,]=[S+k\vec{l},R+r\vec{l},t\vec{l}\,](ktr\neq 0)$，但$[P,Q,\vec{l}\,]^{-1}$不存在

因為 L_1、L_2 所在的平面 E 通過(0,0,0)且$\overrightarrow{OP}$不平行$\vec{l}$

所以存在唯一的 α,β 使得 $AP=\alpha P+\beta\vec{l}\in L_2$

$\Rightarrow A^2P=\alpha AP+\beta t\vec{l}=\alpha(\alpha P+\beta\vec{l}\,)+\beta t\vec{l}=\alpha^2P+\beta\times(\alpha+t)\vec{l}\in L_1$

$\Rightarrow\ \alpha^2=1\Rightarrow\alpha=\pm 1$(若 $\alpha=1$，則代表 L_1與 L_2重合)，所以 $\alpha=-1\Rightarrow$代表 L_1、L_2 對稱於(0, 0, 0)

此時，若 A 滿足 $AP=-P+k\vec{l}\in L_2$，則必有 $A^2P\in L_1$，此外，A 還需滿足方向向量的變換

$\Rightarrow\ A[\vec{l},P,\vec{N}\,]=[t\vec{l},-P+k\vec{l},\vec{l_3}\,](kt\neq 0)$

又$[\vec{l},P,\vec{N}\,]^{-1}$存在，所以 $A=[t\vec{l},-P+k\vec{l},\vec{l_3}\,][\vec{l},P,\vec{N}\,]^{-1}$

定理 5.6：

兩歪斜線 L_1、L_2，作 L_1、L_2的平行面 E_1、E_2($L_1\in E_1$ 且 $L_2//E_1$，$L_2\in E_2$ 且 $L_1//E_2$)，若(0, 0, 0)$\notin$ E_1、E_2，則必存在唯一的 P,Q 兩點($P\in L_1$ 且 $Q\in L_2$)滿足(0, 0, 0)$\in$PQ 直線

證明：

因為(0,0,0)$\notin E_1$、E_2且 L_1、L_2歪斜，所以過 L_1及(0,0,0)作一平面 E_3，必交 L_2於唯一一點 Q，

而且顯然地，所求的直線必包含於 E_3

所以，過(0,0,0)及 Q 作一直線，交 L_1 於唯一一點 P，則 PQ 直線即為所求

註記： L_1、L_2 互為歪斜線時，$L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$ 之矩陣 A 及 L_1、L_2 之限制尚未解決

六、三維空間中的矩陣變換性質

在這個章節中，我們將證明滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$($n \ge 3$)的矩陣 A 將具有的性質，並適時化用三角恆等式來化簡代數式，本章的定理將於下一章節中被廣泛應用。

定理 6.1：

對於任何不可對角化的 n 階方陣 A，A^k ($k \in \mathbf{N}$)亦不可對角化若且唯若 A 存在至少一個對應特徵向量數不足的非 0 特徵值。

證明：

$\Rightarrow$ 用反證法，設 A 的所有非 0 特徵值階對應充足的特徵向量，但 A 不可對角化，所以 A 有至少 2 重根的特徵值 0，且其對應不足的特徵向量。

令 A 有 m 重根的特徵值 0 ($2 \le m \le k$)

由 *Jordan form* 必存在共 m 個線性獨立之特徵向量或廣義特徵向量 $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ 且 $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1} \in N(A-0I)^m = N(A^m) \subset N(A^k) \Rightarrow A^kX_0 = A^kX_1 = A^kX_2 = \cdots = AX_{m-1} = 0$

(N代表*Null Space*)

所以 A^k 的特徵值 0 及其餘特徵值階對應充足的特徵向量

A^k 可對角化(矛盾)，得證

$\Leftarrow$ 設其中一個擁有廣義特徵向量的特徵值為 λ($\lambda \neq 0$)

由 *Jordan form*，

令$(A-\lambda I)X_0 = 0$，$(A-\lambda I)X_1 = X_0$，$(A-\lambda I)X_2 = X_1$，$\cdots$，$(A-\lambda I)X_{m-1} = X_{m-2}$ ($2 \le m \le k$)

考慮 $A^k - \lambda^k I = [A^{k-1} + A^{k-2}(\lambda I) + \cdots\cdots + A(\lambda I)^{k-2} + (\lambda I)^{k-1}](A-\lambda I)$

$\Rightarrow (A^k - \lambda^k I)X_1 = [A^{k-1} + A^{k-2}(\lambda I) + \cdots + A(\lambda I)^{k-2} + (\lambda I)^{k-1}]X_0 = A^{k-1}X_0 + A^{k-2}(\lambda X_0) + \cdots + A\lambda^{k-2}X_0 + \lambda^{k-1}X_0$

$\lambda^{k-1}X_0 + (\lambda^{k-2}X_0)\lambda + \ldots\ldots + (\lambda X_0)\lambda^{k-2} + (X_0)\lambda^{k-1} = n\lambda^{k-1}X_0 \neq 0$

又由原型分解定理可知，

若特徵向量數充足且其中一個向量為 $n\lambda^{k-1}X_0$ 不可能存在 X_1 使得$(A^k - \lambda^k I)X_1 = n\lambda^{k-1}X_0$

所以 A^k 的特徵值 λ^k 對應不足的特徵向量，亦即 A^k 不可對角化。

定理 6.2：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 3$)且任相鄰三條直線之方向向量可做為 3 維空間的基底，則 $A^n = tI$ ($t \neq 0$)且 A 可對角化。

證明：

1°令 $A^n\overrightarrow{l_1} = t\overrightarrow{l_1}$，$A\overrightarrow{l_1} = k\overrightarrow{l_2}$，$A\overrightarrow{l_2} = r\overrightarrow{l_3}$ ($t,k,r \in \boldsymbol{R} - \{0\}$)

$\Rightarrow$ $A^n\overrightarrow{l_2} = A^n(\frac{1}{k}A\overrightarrow{l_1}) = A(\frac{1}{k}A^n\overrightarrow{l_1}) = A(\frac{1}{k}t\overrightarrow{l_1}) = \frac{1}{k}(tk\overrightarrow{l_2}) = t\overrightarrow{l_2}$

同理 $A^n\overrightarrow{l_3} = t\overrightarrow{l_3} \Rightarrow A^n[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}] = t[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}]$

又$\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}$可做為 3 維空間的基底$\Rightarrow$ $[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}]^{-1}$存在，兩邊同乘$[\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}]^{-1}$得 $A^n = tI$

2°若 $0 \in \lambda_A$，則 $0^n = 0 \in \lambda_A$ (矛盾)$\Rightarrow$ $0 \notin \lambda_A$

又若 A 不可對角化及 $0 \notin \lambda_A$，由**定理 5.1** 得知 A^n 不可對角化 (矛盾)

所以 A 可對角化。

引理 1：

承**定理 6.2**，若再加上這 n 條直線不過原點(包含歪斜線)，則 $A^n = I$。

證明：

由定理 5.2 有 $A^n = tI$

設 $P \in L_1$，則 $A^nP \in L_1 \Rightarrow A^nP = tP = P + k\overrightarrow{l_1}$ ($k \in R$)$\Rightarrow$ $(t-1)P = k\overrightarrow{l_1}$

又 L_1 不過 $O(0, 0, 0) \Rightarrow$ $\overrightarrow{OP} \nparallel \overrightarrow{l_1} \Rightarrow t-1 = k = 0 \Rightarrow t = 1$，所以 $A^n = I$。

定理 6.3：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 2$)則空間中直線 $L_1 \sim L_n$ 必可經以下四種二分法分類為兩種中的一種：①$L_1 \sim L_n \begin{cases} \text{都過原點} \\ \text{都不過原點} \end{cases}$、②任相鄰的直線$\begin{cases} \text{有交點} \\ \text{沒有交點} \end{cases}$、 ③任相鄰三條直線的方向向量$\begin{cases} \text{共面(亦即全部共面)} \\ \text{不共面} \end{cases}$、④任相鄰直線$\begin{cases} \text{平行(亦即全部平行)} \\ \text{不平行} \end{cases}$。

證明：

1°若存在 L_k 滿足$(0, 0, 0) \in L_k$由 $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$以及 $L_1 \sim L_n$ 循環得知 $L_1 \sim L_n$ 皆過原點。

2°若存在 L_k、L_{k+1} 相鄰∩使得 $L_k \cap L_{k+1}$ 存在

$\because\ L_k \cap L_{k+1} \in L_k, L_{k+1}$ $\therefore\ A(L_k \cap L_{k+1}) \in L_{k+1}, L_{k+2}$ 、$A^2(L_k \cap L_{k+1}) \in L_{k+2}, L_{k+3}$......⇒任相鄰有交點

3°若存在 L_k、 L_{k+1} 、L_{k+2} 相鄰且其方向向量$\overrightarrow{l_k}, \overrightarrow{l_{k+1}}, \overrightarrow{l_{k+2}}$共面

⇒ 設$\overrightarrow{l_{k+2}} = \alpha \overrightarrow{l_{k+1}} + \beta \overrightarrow{l_k}$ ($\alpha, \beta \in R$) ⇒ $A\overrightarrow{l_{k+2}} = \alpha t \overrightarrow{l_{k+1}} + \beta r \overrightarrow{l_k}$ ($t, r \in R - \{0\}$)

⇒ $A\overrightarrow{l_{k+2}}$為 L_{k+3} 上的方向向量且 $A\overrightarrow{l_{k+2}}$、$\overrightarrow{l_{k+2}}$、$\overrightarrow{l_{k+1}}$共面

同理可知，任相鄰 3 條方向向量共面，亦即全部共面。

4°若存在 $L_k // L_{k+1}$ 且方向向量為$\overrightarrow{l}$ ，又 $A\overrightarrow{l} = t\overrightarrow{l}$ 為下一條的方向向量，所以全部平行。

引理 **2**：

若 $L_1 \sim L_n$ 滿足 $span(\overrightarrow{l_k}, \overrightarrow{l_{k+1}} \overrightarrow{l_{k+2}}) = \boldsymbol{R}^3$ 且 L_k、L_{k+1} 均有交點($k = 1 \sim n$)。令 $L_1 \cap L_2 = P$，
則 $span(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}) = \boldsymbol{R}^3$。

證明：

若$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}$線性相依，令$\overrightarrow{l_2} = \alpha \overrightarrow{OP} + \beta \overrightarrow{l_1}$ ($\alpha, \beta \in \boldsymbol{R} - \{0\}$)

⇒ $A\overrightarrow{l_2} = \alpha A\overrightarrow{OP} + \beta A\overrightarrow{l_1} = \alpha L_2 \cap L_3 + \beta t \overrightarrow{l_2} = r\overrightarrow{l_3}$ ($t, r \in \boldsymbol{R} - \{0\}$)

⇒ $\overrightarrow{l_3}$與$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}$線性相依(矛盾) $\therefore\ span(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}) = \boldsymbol{R}^3$

定理 6.4：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 3$)且對於所有 t ($t \in N$，$1 \leq t \leq n$)都有 $span(\overrightarrow{l_t},\overrightarrow{l_{t+1}},\overrightarrow{l_{t+2}})=R^3$ 且 $(0, 0, 0) \notin L_k$，$\lambda_A=\{1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$或$\{-1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$，

其中 $\vartheta=\dfrac{2k\pi}{n}$($k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$) 且 $gcd(k,n)=1$。

證明：

注意到 $A \in R^{3\times3} \Rightarrow A$ 的特徵方程式為實係數三次方程式，所以必為 3 實根或 1 實根 2 虛根

<*case*1>3 實根：因為 $span(\overrightarrow{l_t},\overrightarrow{l_{t+1}},\overrightarrow{l_{t+2}})=\boldsymbol{R}^3$ 且$(0, 0, 0) \notin L_k$

所以**引理 1** 告訴我們 $A^n=I$，亦即$(\lambda_A)^n=\{1,1,1\}$

又考慮到 $\lambda \in R$，若 $\lambda \in \lambda_A$ 則 $\lambda^n \in (\lambda_A)^n=\{1,1,1\}$

$\Rightarrow \lambda=\pm1 \Rightarrow$ λ_A 內部元素皆為 1,－1

$\Rightarrow (\lambda_A)^2=\{1,1,1\}$且由引理 1 得知 A 可對角化

$$\Rightarrow A^2=P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}=PIP^{-1}=I \Rightarrow n \leq 2(\text{矛盾})$$

<*case*2>1 實根 2 虛根：一樣須滿足 $\lambda \in \lambda_A$ $\lambda^n \in (\lambda_A)^n$ 再由虛根必共軛得知 $_A=\{1,\cos\theta+i\sin\theta,\cos\theta-i\sin\theta\}$或$\{-1,\cos\theta+i\sin\theta,\cos\theta-i\sin\theta\}$，其中 $\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=1,2,\ldots,n-1$($k=n$ 時，$\cos\theta+i\sin\theta \in R$ 不合)，又注意到 $\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$ 及 $\theta=\dfrac{2(n-k)\pi}{n}$帶入 λ_A 化簡後結果相同

$\Rightarrow n$ 為奇數時：$\{1,n-1\}\{2,n-2\},\ldots,\{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\}$集合內部僅需 2 擇 1($k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$)

n 為偶數時：$\{1,n-1\}\{2,n-2\},\ldots,\{\frac{n-2}{2},\frac{n+2}{2}\}$亦同($k=\frac{n}{2}$時，$\theta=\pi$，$\cos\pi+i\sin\pi \in R$ 不合)

又注意到 n 為偶數時$\frac{n-2}{2}=[\frac{n-1}{2}]$所以 $k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$。

但要注意的是，若 $gcd(k,n)\neq1$，則$\dfrac{2k\pi}{n}$會上下約分使分子變小，間接造成

在存在 $t<n$ 使得 $A^k=I$(亦即 $L_1 \sim L_n$ 提早循環) $\therefore$ $gcd(k,n)=1$

推論 1：

若 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ ($n \geq 3$)且對於所有 t ($t \in N$，$1 \leq t \leq n$)都有 $span(\overrightarrow{l_t}, \overrightarrow{l_{t+1}}, \overrightarrow{l_{t+2}}) = R^3$ 且 $(0,0,0) \in L_k$，則 $\lambda_A=\{\lambda, \lambda(\cos\theta+i\sin\vartheta), \lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}$或$\{-\lambda, \lambda(\cos\theta+i\sin\theta), \lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}$，其中

$$\theta=\begin{cases} \dfrac{2k\pi}{n}，n\text{為奇數} \\ \dfrac{k\pi}{n}，n\text{為偶數} \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]\text{且 } gcd(k,n)=1)。$$

證明：

由**定理 6.2** 有 $A^n = tI$、令 $B=\dfrac{A}{\lambda}$ 滿足 $detB=1 \Rightarrow B^n=I$ 且 $L_1 \xrightarrow{B} L_2 \xrightarrow{B} L_3 \xrightarrow{B} \cdots\cdots \xrightarrow{B} L_n \xrightarrow{B} L_1$($\because L_1 \sim L_n$ 皆過(0, 0, 0)，只須滿足方向向量的變換)

則由**定理 6.4** 有 $\lambda_B=\{1, \cos\theta+i\sin\vartheta, \cos\theta-i\sin\theta\}$或$\{-1, \cos\theta+i\sin\theta, \cos\theta-i\sin\theta\}$

$\Rightarrow \lambda_A=\{\lambda, \lambda(\cos\theta+i\sin\vartheta), \lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}$或$\{-\lambda, \lambda(\cos\theta+i\sin\theta), \lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}$

其中 $\vartheta=\dfrac{2k\pi}{n}$ ($k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$)

可是，當 n 為偶數時，$A^{\frac{n}{2}}=\mu I \Rightarrow$需令 $\vartheta=\dfrac{k\pi}{n}$。

引理 3：

若 $A\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_2}$、$A\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_3}$、$A\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_4}$ 且①$\lambda_A=\{1, \cos\vartheta+i\sin\vartheta, \cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$ ($detA=1$)或②$\lambda_A=\{-1, \cos\vartheta+i\sin\vartheta, \cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$($detA=-1$)

，則① $\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}$ ($detA=1$)或② $\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta-1)\overrightarrow{l_3}+(2\cos\vartheta-1)\overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1}$ ($detA=-1$)

證明：

①$\lambda_A=\{1, \cos\vartheta+i\sin\vartheta, \cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$：

特徵方程式 $x^3-(2\cos\vartheta+1)x^2+(2\cos\vartheta+1)x-1=0$

由 *Cayley－Hamilton* 定理：$A^3-(2\cos\vartheta+1)A^2+(2\cos\vartheta+1)A-I=0$

$\Rightarrow$左右兩邊同乘$\overrightarrow{l_1}$，得 $A^3\overrightarrow{l_1}-(2\cos\vartheta+1)A^2\overrightarrow{l_1}+(2\cos\vartheta+1)A\overrightarrow{l_1}-\overrightarrow{l_1}=0$

我們再回來看 $A\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_2}$、$A\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_3}$、$A\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_4}$

$\Rightarrow A^2\overrightarrow{l_1}=A(A\overrightarrow{l_1})=A\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_3}$、$A^3\overrightarrow{l_1}=A(A^2\overrightarrow{l_1})=A\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_4}$

∴上式改寫為$\overrightarrow{l_4}-(2\cos\vartheta+1)\ \overrightarrow{l_3}+(2\cos\vartheta+1)\ \overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1}=0$

移向得到$\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}$

②$\lambda_A=\{-1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$：

特徵方程式 $x^3-(2\cos\vartheta-1)x^2-(2\cos\vartheta-1)x+1=0$

由 *Cayley*－*Hamilton* 定理：$A^3-(2\cos\vartheta-1)A^2-(2\cos\vartheta-1)A+I=0$

⇒左右兩邊同乘$\overrightarrow{l_1}$，得 $A^3\overrightarrow{l_1}-(2\cos\vartheta-1)A^2\overrightarrow{l_1}-(2\cos\vartheta-1)A\overrightarrow{l_1}+\overrightarrow{l_1}=0$

同理，最後得$\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta-1)\overrightarrow{l_3}+(2\cos\vartheta-1)\overrightarrow{l_2}-\overrightarrow{l_1}$

定理 6.5：

若 $A^{k-1}\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_k}\,(k=2\sim n)$ 且 $\lambda_A=\{1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}(\det A=1)$。令$\overrightarrow{l_k}=C_k\overrightarrow{l_3}-B_k\overrightarrow{l_2}+A_k\overrightarrow{l_1}$，則對於每一個 $k\geq4$ 都有 $B_k=A_k+C_k-1$，

且 $C_k=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}$、$A_k=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}$

證明：

①我們嘗試使用數學歸納法來證明 $B_k=A_k+C_k-1$

1°$n=4$ 時，由**引理 3** 有$\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}$，顯然成立

2°設 $n=k$ 時成立⇒$\overrightarrow{l_k}=C_k\overrightarrow{l_3}-(A_k+C_k-1)\ \overrightarrow{l_2}+A_k\overrightarrow{l_1}$

　則 $n=k+1$ 時，$\overrightarrow{l_{k+1}}=A\overrightarrow{l_k}=C_k\overrightarrow{l_4}-(A_k+C_k-1)\ \overrightarrow{l_3}+A_k\overrightarrow{l_2}$

$$=C_k[(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}]-(A_k+C_k-1)\overrightarrow{l_3}+A_k\overrightarrow{l_2}$$

$$=(2\cos\vartheta C_k-A_k+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta C_k+C_k-A_k)\overrightarrow{l_2}+C_k\overrightarrow{l_1}$$

　其中 $2\cos\vartheta C_k+C_k-A_k=(2\cos\vartheta C_k-A_k+1)+(C_k)-1$　成立

3°由數學歸納法，上式得證

②繼續使用數學歸納法證明 C_k、A_k 的一般式

1°$n=4$ 時，由**引理 3** 有

$\overrightarrow{l_4}=(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}=\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}+\frac{\sin\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$，顯然成立

2°設 $n=k$ 時成立 $\Rightarrow \overrightarrow{l_k}=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3}-(\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}+$
$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}-1)\overrightarrow{l_2}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$ (使用 $B_k=A_k+C_k-1$ 來寫出 B_k)

則 $n=k+1$ 時，$\overrightarrow{l_{k+1}}=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_4}-(\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}+$
$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}-1)\ \overrightarrow{l_3}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_2}$

$=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}[(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_3}-(2\cos\vartheta+1)\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_1}]-$

$(\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}-1)\overrightarrow{l_3}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}\ \overrightarrow{l_2}$

化簡得$(\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\times 2\cos\vartheta-\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}+1)\ \overrightarrow{l_3}$

$-(\ldots\ldots)\ \overrightarrow{l_2}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$

其中$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\times 2\cos\vartheta=[\sin 2\vartheta+(\sin 3\vartheta+\sin\vartheta)+(\sin 4\vartheta+\sin 2\vartheta)+\ldots+(\sin(k-1)\vartheta+\sin(k-3)\vartheta)]\div\sin\vartheta$

(每一項都用積化和差，如 $\sin 2\vartheta\times 2\cos\vartheta=2\sin 2\vartheta\cos\vartheta=\sin 3\vartheta+\sin\vartheta$)

$\Rightarrow\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\times 2\cos\vartheta-\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}+1$

$=[\sin 2\vartheta+(\sin 3\vartheta+\sin\vartheta)+(\sin 4\vartheta+\sin 2\vartheta)+\ldots+(\sin(k-1)\vartheta+\sin(k-3)\vartheta)]\div\sin\vartheta$

$-\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}+1=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$

代回得 $\overrightarrow{l_{k+1}}=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_3}-(\ldots)\ \overrightarrow{l_2}+\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{l_1}$

成立，故由數學歸納法得證

引理 4：

$$\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots\ldots+\sin(k\vartheta)\,(\,k\in\boldsymbol{N}\,)=\frac{\sin(\frac{k}{2})\theta\times\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

證明：

使用積化和差

$$-2\sin\vartheta\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{3}{2}\vartheta-\cos\frac{\theta}{2}$$

$$-2\sin 2\vartheta\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{5}{2}\vartheta-\cos\frac{3}{2}\vartheta$$

$$-2\sin 3\vartheta\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{7}{2}\vartheta-\cos\frac{5}{2}\vartheta$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$-2\sin k\vartheta\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{2k+1}{2}\vartheta-\cos\frac{2k-1}{2}\vartheta$$

上式全部相加，等號右邊可以對消

得 $-2[\sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots\ldots+\sin(k\vartheta)]\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{2k+1}{2}\vartheta-\cos\frac{\theta}{2}=-2\sin\frac{k+1}{2}\vartheta\times\sin\frac{k}{2}\vartheta$

（再做和差化積）

左右兩邊同除 $\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\ \sin\vartheta+\sin 2\vartheta+\ldots\ldots+\sin(k\vartheta)=\dfrac{\sin(\frac{k}{2})\theta\times\sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

定理 6.6：

承**定理 6.5**，

$$\overrightarrow{l_k}=\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\,\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\,\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\,\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\,\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2}+\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\,\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\,\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$$

證明：

由**定理 6.5**，$\overrightarrow{l_k}=C_k\overrightarrow{l_3}-B_k\overrightarrow{l_2}+A_k\overrightarrow{l_1}\ (k\geq 4)$

其中 $C_k=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}$、$A_k=\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}$

我們借助**引理 4** 來化簡：

$$C_k=\frac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin\frac{k-1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$A_k=\frac{\sin\theta+\sin2\theta+\ldots+\sin(k-3)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{k-3}{2})\theta\times\sin\frac{k-2}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}$$

再回到**定理 6.5** 的恆等式 $B_k=A_k+C_k-1$

$$B_k=\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}-1$$

$$=\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times[\sin(\frac{k-3}{2})\theta+\sin(\frac{k-1}{2})\theta]}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}-1=\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times[2\sin(\frac{k-2}{2})\theta\cos\frac{\theta}{2}]}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}-1$$

(中括號內做和差化積)

$\sin\vartheta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$代入化簡，得 $B_k=\dfrac{\sin^2(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}-1=\dfrac{\sin^2(\frac{k-2}{2})\theta-\sin^2(\frac{\theta}{2})}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$

再由 $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$，得 $B_k=\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}$

定理 6.7：

若 $\lambda_A=\{-1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}(detA=-1)$且$(-A)^{k-1}\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_k}\ (k=2\sim n)$，則，

$$\overrightarrow{l_k}=\frac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2}+$$

$$\frac{\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$$

證明：

令 $B=-A$，則 $\lambda_B=\{1,-\cos\vartheta-i\sin\vartheta,-\cos\vartheta+i\sin\vartheta\}=$

$$\{1,\cos(\pi-\vartheta)+i\sin(\pi-\vartheta),\cos(\pi-\vartheta)-i\sin(\pi-\vartheta)\}$$

令 $\pi-\vartheta=\varphi\Rightarrow\lambda_B=\{1,\cos\varphi+i\sin\varphi,\cos\varphi-i\sin\varphi\}$

注意到 $detB=1$ 且 λ_B 滿足**定理 6.5** 及**定理 6.6** 中之定義(只是 ϑ 角變成 φ 角)

注意到 $B^{k-1}\overrightarrow{l_1}=(-A)^{k-1}\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_k}$ ($k=2\sim n$)，**定理 6.6** 告訴我們

$$\overrightarrow{l_k}=\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\varphi\times\sin(\frac{k-2}{2})\varphi}{\sin\varphi\times\sin\frac{\varphi}{2}}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin(\frac{k-1}{2})\varphi\times\sin(\frac{k-3}{2})\varphi}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})}\overrightarrow{l_2}+\frac{\sin(\frac{k-2}{2})\varphi\times\sin(\frac{k-3}{2})\varphi}{\sin\varphi\times\sin\frac{\varphi}{2}}\overrightarrow{l_1}$$

$\varphi=\pi-\vartheta$ 代回整理，最後得證下式

$$\overrightarrow{l_k}=\frac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3}-\frac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2}+$$

$$\frac{\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$$

七、空間中 *n* 條直線循環的矩陣變換($n\geq 3$)

在這一小節中，我們藉由**定理 6.3** 來幫滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$($n\geq 3$)的直線們作嚴謹的分類與討論，以下定義 $1\leq k\leq n$ 且直線的表示法滿足定義(七)之論述，還有$\overrightarrow{l_k}$代表 L_k 之方向向量

① $span(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=R^3$ 且 n 條直線共點：依照(0, 0, 0)是否屬於 L_k 分為**定理 7.1** 及**定理 7.2**。

定理 7.1 (共點，此點非原點)：

給定滿足 $span(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3})=R^3$、不過(0, 0, 0)之共點直線 L_1,L_2,L_3，必存在一組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 $L_1,L_2,L_3,\cdots,L_n(n\geq3)$，每組直線皆對應唯一一組線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$，其中 L_1～L_n 必然全部共點且 $span(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=R^3$ (特別地，當 $n=3$ 時，必存在$[\frac{n-1}{2}]=1$ 組，代表滿足以上要求之 L_1、L_2、L_3，必存在唯一的線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}L_1$)。

證明：

1°任取$\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$，設 $L_1\cap L_2=L_2\cap L_3=P\neq(0, 0, 0)$

引理 **2** 告訴我們：$span(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2})=R^3\Rightarrow$嘗試取$\overrightarrow{l_3}=\alpha P-\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}\,(\alpha,\beta\in R-\{0\})$

$\Rightarrow(\overrightarrow{l_2}\times\overrightarrow{l_3})\bullet P=[\overrightarrow{l_2}\times(\alpha P-\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2})]\bullet P=[\overrightarrow{l_2}\times(\alpha P-\overrightarrow{l_1})]\bullet P=[\overrightarrow{l_2}\times(-\overrightarrow{l_1})]\bullet P=(\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_2})\bullet P$

$\Rightarrow(\overrightarrow{l_2}\times\overrightarrow{l_3})\bullet P=det([P,\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}])=\ det([P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}])=\ (\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_2})\bullet P$

又 $A\,(L_1\cap L_2)=L_2\cap L_3\Rightarrow AP=P\Rightarrow A$ 有特徵值 1

所以由**定理 5.4** 有 $\lambda_A=\{1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}\Rightarrow detA=1(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)(\cos\vartheta-i\sin\vartheta)$

2°令 $A[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[P,t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_3}](t, k\in\mathbf{R}-\{0\})$

左右兩邊同取 $det\Rightarrow detA\times det([P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}])=tk([P,\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}])=1$

$\Rightarrow detA=t\times k=1\Rightarrow k=\frac{1}{t}$

所以$[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[\,P,t\overrightarrow{l_2},\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}]=[\,P,t\overrightarrow{l_2},\frac{1}{t}\alpha(P-\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2})]=[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix}1&0&\frac{\alpha}{t}\\0&0&-\frac{1}{t}\\0&t&\frac{\beta}{t}\end{bmatrix}$

又 $span(P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2})=R^3\Rightarrow[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ 存在

$\Rightarrow A=[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]$矩陣$[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

由對角化性質，我們有 $traceA = trace\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\alpha}{t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{t} \\ 0 & t & \frac{\beta}{t} \end{bmatrix}\right) = +1 =$ 特徵值總和 $= 2\cos\theta + 1$

$\Rightarrow \frac{\beta}{t} = 2\cos\theta \Rightarrow t = \frac{\beta}{2\cos\theta}$

3°令 $t\overrightarrow{l_2} = \frac{\beta}{2\cos\theta}\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{l_2'}$，則 $A\overrightarrow{l_1} = t\overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{l_2'}$ $A\ \overrightarrow{l_2'} = A(t\overrightarrow{l_2}) = t(A\overrightarrow{l_2}) = t(\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}) = \overrightarrow{l_3}$

因為 $\lambda_A = \{1, \cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta\}$

引理 5 告訴我們，令 $\overrightarrow{l_k} = A^{k-1}\overrightarrow{l_1}$ ($k \geq 4$)

則 $\overrightarrow{l_k} = \dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta \times \sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta \times \sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3} - \dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta \times \sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'} + \dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta \times \sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta \times \sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$

統整解法如下：

1°任取 $\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$ 做為 L_1、L_2 之方向向量，並找出 L_1、L_2、L_3 的共同交點 P 座標

2°取 $\overrightarrow{l_3} = \alpha P - \overrightarrow{l_1} + \beta\overrightarrow{l_2}$，解出 α、β

3°令 $t = \frac{\beta}{2\cos\theta}$ ($\theta = \frac{2k\pi}{n}$，$k = 1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$ 且 $gcd(k,n) = 1$)、$\overrightarrow{l_2'} = t\overrightarrow{l_2}$，

則 $\overrightarrow{l_k} = \dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta \times \sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta \times \sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3} - \dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta \times \sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'} + \dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta \times \sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta \times \sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$ ($k = 4 \sim n$，若設定 $n = 3$，則直接跳過此步)

4°$A = [P, t\overrightarrow{l_2}, \frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}][P, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$

5°可由 3°再由參數式寫出 L_k($k = 4 \sim n$) 之容貌

定理 7.2 (共原點)：

給定 $span(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3})=R^3$、全過原點的直線 L_1,L_2,L_3,L_4，則存在一組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 $L_5,\ldots,L_n(n\geq 5)$，每組直線皆對應無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$，其中$(0,0,0)\in L_k(k=1\sim n)$。(若 $n=4$，則每一組滿足上述定義的 $L_1\sim L_4$，都存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}L_4\xrightarrow{A}L_1$)

證明：

1°由**推論 1** 得知，$\lambda_A=\{\lambda,\lambda(\cos\theta+i\sin\theta),\lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}$或 $\lambda_A=\{-\lambda,\lambda(\cos\theta+i\sin\theta),\lambda(\cos\theta-i\sin\theta)\}(\lambda\in R$ 且 $\lambda>0)$

$\Rightarrow A$ 的特徵方程式：$x^3-\lambda(2\cos\theta\pm1)x^2+\lambda^2(1\pm2\cos\theta)x\pm\lambda^3=0$

由 *Cayley Hamilton* 定理：$A^3-\lambda(2\cos\theta\pm1)A^2+\lambda^2(1\pm2\cos\theta)A\pm\lambda^3I=0$

同除 λ^3：$(\frac{A}{\lambda})^3-(2\cos\theta\pm1)(\frac{A}{\lambda})^2+(1\pm2\cos\theta)(\frac{A}{\lambda})\pm I=0$

令 $B=\frac{A}{\lambda}$，注意到 $\lambda_B=\{\pm1,\cos\theta+i\sin\theta,\cos\theta-i\sin\theta\}$且 $B^n=I$

2°由 $span(\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3})=R^3$，令$\overrightarrow{l_4}=r\overrightarrow{l_3}-\beta\overrightarrow{l_2}+\alpha\overrightarrow{l_1}$

以下分為 $detB=1 or -1$ 討論

<Case1> $detB=1$

$\Rightarrow$兩邊同乘 $2\cos\theta+1\Rightarrow(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_4}=(2\cos\theta+1)(r\overrightarrow{l_3})-(2\cos\theta+1)(\beta\overrightarrow{l_2})+[(2\cos\theta+1)\alpha\overrightarrow{l_1}]$

令$(2\cos\theta+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

上式改寫為$\overrightarrow{l_4'}=(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_3'}-(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_2'}+\overrightarrow{l_1'}$—①

又 $B^3-(2\cos\theta+1)B^2+(2\cos\theta+1)B-I=0$

兩邊同乘$\overrightarrow{l_1'}\Rightarrow B^3\overrightarrow{l_1'}-(2\cos\theta+1)B^2\overrightarrow{l_1'}+(2\cos\theta+1)B\overrightarrow{l_1'}-\overrightarrow{l_1'}=0$—②

①、②式移項後得$\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_4'}-(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_3'}+(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_2'}$

$$=B^3\overrightarrow{l_1'}-(2\cos\theta+1)B^2\overrightarrow{l_1'}+(2\cos\theta+1)B\overrightarrow{l_1'}$$

又 $B\overrightarrow{l_1'}//\overrightarrow{l_2'}$、$B^2\overrightarrow{l_1'}//\overrightarrow{l_3'}$、$B^3\overrightarrow{l_1'}//\overrightarrow{l_4'}$且 $span(\overrightarrow{l_2'},\overrightarrow{l_3'},\overrightarrow{l_4'})=R^3$

所以線性組合告訴我們 $B\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_2'}$、$B^2\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_3'}$、$B^3\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_4'}$

最後令 $B^{k-1}\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_k'}$ ($k=4\sim n$)

由**定理 5.6**，$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3}-\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$

<*Case*2>$detB=-1$

令 $-B=C$，則 $\lambda_C=\{1,-\cos\theta+i\sin\theta,-\cos\theta-i\sin\theta\}=\{1,\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta),\cos(\pi-\theta)-i\sin(\pi-\theta)\}$

令 $\varphi=\pi-\theta$，則 $\lambda_C=\{1,\cos\varphi+i\sin\varphi,\cos\varphi-i\sin\varphi\}$且 $detC=1$

同<*Case*1>之方法，兩邊同乘 $2\cos\varphi+1\Rightarrow(2\cos\varphi+1)\overrightarrow{l_4}=(2\cos\varphi+1)(r\overrightarrow{l_3})-(2\cos\varphi+1)(\beta\overrightarrow{l_2})+[(2\cos\varphi+1)\alpha\overrightarrow{l_1}]$

接著一樣令$(2\cos\varphi+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\varphi+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

同理可得 $C\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_2'}$、$C^2\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_3'}$、$C^3\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_4'}$

最後令 $B^{k-1}\overrightarrow{l_1'}=\overrightarrow{l_k}$ ($k=5\sim n$)

由**定理 6.7**，$\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3'}-\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1'}$

統整解法如下：

1°任取$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$、$\overrightarrow{l_4}$做為 L_1、L_2、L_3、L_4之方向向量，解滿足$\overrightarrow{l_4}=r\overrightarrow{l_3}-\beta\overrightarrow{l_2}+\alpha\overrightarrow{l_1}$之 α、β、γ

2°$\vartheta=\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=1,2,\ldots,$ 【$\dfrac{n-1}{2}$】，且 n 為偶數時，需改為 $\vartheta=\dfrac{k\pi}{n}$

3°若 $detA=1$，令$(2\cos\theta+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

若 $detA=-1$，令$(2\cos\varphi+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\varphi+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

4°若 $detA=1$，$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3'}-\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1'}$

若 $detA=-1$，$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3'}-\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1'}$

5°可經由參數式，寫出 $L_1\sim L_n$ 之容貌

②$span(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=R^3$ 且 n 條直線不共點：由定理 6.3 得知其任相鄰 3 條直線不共點且(0,0,0) $\notin L_k$

定理 7.3 (不過原點，不共點)：

不存在任何的空間變換，使得 n 條不共點且 $span(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=\boldsymbol{R}^3$($k=1\sim n$)的直線 $L_1\sim L_n$ 循環，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_{12}$

證明：

1°任取$\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$且令 $L_1\cap L_2=P$，由**引理 3** 得知 $span(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2})=\boldsymbol{R}^3$

所以必可取$\overrightarrow{l_3}=\alpha P+\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}$，$(\alpha、\beta\in R-\{0\})$

同**定理 7.1**，經由運算可得 $(\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_2})\bullet P=-(\overrightarrow{l_2}\times\overrightarrow{l_3})\bullet P$

$\Rightarrow det([P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}])=-\ det([P,\ \overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}])-$①

令 $A[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[P+r\overrightarrow{l_2},\ t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_3}](\ r,t,k\in R-\{0\})$

$\Rightarrow detA\times det([P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}])=det([P+r\overrightarrow{l_2},\ t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_3}])=\ det([P,\ t\overrightarrow{l_2},k\overrightarrow{l_3}])$

$\Rightarrow(-1)\times det([P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}])=tk\times det([P,\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}])$

①式帶入得 $t\times k=\Rightarrow k=\frac{1}{t}$

代回得 $A[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[P+r\overrightarrow{l_2},\ t\overrightarrow{l_2},\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}](\overrightarrow{l_3}=\alpha P+\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2})$

$$=[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ r & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}\Rightarrow A=[P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ r & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}[\ P,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$$

2°由特徵值之性質，A 的特徵方程式即為$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ r & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}$的特徵方程式

$$det(\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ r & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & -\lambda & \frac{1}{t}\\ r & t & \frac{\beta}{t}-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-\frac{\beta}{t}\lambda-1)+r\times\lambda\times\frac{\alpha}{t}=0$$

若 $\lambda_A\ =\{1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$，則 $\lambda=1$ 須滿足上式

$\Rightarrow\ r\times1\times\frac{\alpha}{t}=0$ 且 $\alpha\neq0$(由 1°)$\Rightarrow r=0$，也就是 $AP=P$(共點)，矛盾

若 $\lambda_A\ =\{-1,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$，令特徵向量 X 滿足 $AX=-X$

$\Rightarrow A[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]=[-X,\ t\overrightarrow{l_2},\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}]$(將 P 換成 X)

$$\Rightarrow\ A[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\ ]=[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\ ]\begin{bmatrix}-1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ 0 & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}$$

又$\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$顯然不會滿足 $AX=-X$，若 $X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$線性相依

令$\overrightarrow{l_2}=\gamma X+\delta\overrightarrow{l_1}\Rightarrow A\overrightarrow{l_2}=-\gamma X+\delta A\overrightarrow{l_1}=-\gamma X+\delta t\overrightarrow{l_2}=\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}$

這與定理描述的 $span(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=\boldsymbol{R}^3$ 矛盾

$\Rightarrow X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}$線性獨立，亦即$[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\ ]^{-1}$存在

$$\Rightarrow A=[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\ ]\begin{bmatrix}-1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ 0 & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix}[X,\ \overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}\ ]^{-1}$$

$$\therefore detA=det(\begin{bmatrix}-1 & 0 & \frac{\alpha}{t}\\ 0 & 0 & \frac{1}{t}\\ 0 & t & \frac{\beta}{t}\end{bmatrix})=1(\text{ 與上面的假設矛盾 })$$

∴不存在這樣的空間變換

定理 7.4 (皆平行)：

給定兩平行線 L_1、L_2，其中 L_1、L_2 共於平面 E 且$(0, 0, 0)\notin E$，則存在 1 組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的直線 $L_3,\ldots,L_n(\ n\geq 3\ )$，每組直線對應無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$ 。並且 $L_1\sim L_n$ 必然全部平行 L_k、L_{k+1} 所共之平面必不過原點($k=1\sim n$)。

證明：

1°因為 $L_1//L_2$，所以由定理 6.3 得知 $L_1\sim L_n$ 全部平行且不過(0, 0, 0)

接著，若存在 k 滿足 L_k、L_{k+1} 所共之平面過原點(0, 0, 0)，令 $A\overrightarrow{l}=t\overrightarrow{l}\ (\ t\in R-\{0\})$

取 $P\in L_k$、$Q\in L_{k+1}$，令 $AP=Q+x\overrightarrow{l}\ (\ x\in R\ )$

因為$\overrightarrow{OP}\nparallel\overrightarrow{l}$，所以可令 $Q=P+y\overrightarrow{l}\ (\ y\in R\ )$

$\Rightarrow AQ=AP+yA\overrightarrow{l}=Q+x\overrightarrow{l}+yt\overrightarrow{l}\in L_k$、$L_{k+1}$ 所在之平面

所以 L_{k+2} 亦在此平面上

同理可得 L_1～L_n 皆在這個過(0, 0, 0)之平面上，與(0, 0, 0) $\notin E$ 矛盾

2°設 $P\in L_1$、$Q\in L_2$，令 $A^nP=P+z\overrightarrow{l}\in L_1$、$A^nQ=Q+w\overrightarrow{l}\in L_2$($z,w\in R$)

由 1°得知 $A^n\overrightarrow{l}=t^n\overrightarrow{l}$

$$\Rightarrow A^n[P,Q,\overrightarrow{l}]=[P+z\overrightarrow{l},\ Q+w\overrightarrow{l},\ t^n\overrightarrow{l}]=[P,Q,\overrightarrow{l}]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\z&w&t\end{bmatrix}$$

又由(0, 0, 0) $\notin E$ 得知 $span(P,Q,\overrightarrow{l})=R^3\Rightarrow[P,Q,\overrightarrow{l}]^{-1}$ 存在

$$A^n=[P,Q,\overrightarrow{l}]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\z&w&t\end{bmatrix}[P,Q,\overrightarrow{l}]^{-1}$$特徵值$\Rightarrow 1,1,t^n$

再由特徵值之性質得知，A 的特徵值之絕對值必為 1,1,｜t｜或

｜t｜ ,$\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta$

若為 1,1,｜t｜$\Rightarrow$ $(\lambda_A)^2=\{1,1,t^2\}$必存在特徵向量 X,Y 滿足

$$A^2=[X,Y,\overrightarrow{l}]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&t^2\end{bmatrix}[X,Y,\overrightarrow{l}]^{-1}\text{或}[X,Y,\overrightarrow{l}]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&t^2\end{bmatrix}[X,Y,\overrightarrow{l}]^{-1}$$

$\Rightarrow AX=X$ 且 $AY=Y$ 或 $AX=X+Y$ 且 $AY=Y$

$\because X,Y,\overrightarrow{l}$ 線性獨立　$\therefore L_1$ 上必然存在一點 P 滿足 $P=\varepsilon X+\mu Y$

<*case*1>：$AX=X$ 且 $AY=Y\Rightarrow AP=P$，與 $L_1\xrightarrow{A}L_2$ 且 $L_1//L_2$ 矛盾

<*case*2>：$AX=X+Y$ 且 $AY=Y\Rightarrow$ $AP=P+\varepsilon Y\Rightarrow A^2P=AP+\varepsilon Y=P+2\varepsilon Y$

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow$ $A^nP=P+n\varepsilon Y$

注意到 Y 不平行$\overrightarrow{l}$，所以 A^nP 根本不可能會到 L_1 上(矛盾)

$\therefore\lambda_A=\{t,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$或$\{-t,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$

3°A 的特徵方程式：$(\lambda\pm t)(\lambda^2-2\cos\vartheta\lambda+1)=0$

$\Rightarrow$*Cayley-Hamilton* 定理：$(A\pm t)(A^2-2\cos\vartheta A+I)=0$

嘗試兩邊同乘 $P\Rightarrow(A\pm t)(A^2P-2\cos\vartheta AP+P)=0$

考慮到 $P\in L_1$、$AP\in L_2$、$A^2P\in L_3$ 且 L_1、L_2，L_2、L_3 所共之平面皆不過(0, 0, 0)

$\therefore A^2P-2\cos\vartheta AP+P$ 不平行 $\overrightarrow{l}$，亦即 $A\pm t$ 多了一個方向的特徵向量(矛盾)

$\Rightarrow A^2P-2\cos\vartheta AP+P=0\Rightarrow A^2P=2\cos\vartheta AP-P$

令 $A^{k-1}P=P_k(k\geq 2)$，則 $P_3=2\cos\vartheta P_2-P$

同定理 3.5 之過程，得通式：$P_k=\dfrac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}P_2-\dfrac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}P$

特別地，雖然在過程中，我們嚴謹地令 $AP=P_2$

但其實 P_2 若改為 L_2 上之任意點，只是差了 $\overrightarrow{l}$ 的係數倍

代入通式中 P_k 仍然在直線 L_k 上

最後再回來求矩陣：令 $Q\in L_2$

$A[P,Q,\overrightarrow{l}\,]=[Q+r\overrightarrow{l},2\cos\vartheta Q-P+s\overrightarrow{l},t\overrightarrow{l}\,](\,r,s\in\mathbf{R}$、$t\in\mathbf{R}-\{0\})$

$\Rightarrow\ A=[Q+r\overrightarrow{l},2\cos\vartheta Q-P+s\overrightarrow{l},t\overrightarrow{l}\,][P,Q,\overrightarrow{l}\,]^{-1}$

統整解法如下：

1°任取 L_1、L_2 上之 P、Q 兩點

2°$\vartheta=[\dfrac{2k\pi}{n}]$，其中 $k=1,2,\cdots,[\dfrac{n-1}{2}]$且 $gcd(k,n)=1$

3°L_k 上的其中一點通式為$\dfrac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}Q-\dfrac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}P$，可再藉由參數式寫出 $L_1\sim L_n$ 之容貌

4°$A=[Q+r\overrightarrow{l},2\cos\vartheta Q-P+s\overrightarrow{l},t\overrightarrow{l}\,][P,Q,\overrightarrow{l}\,]^{-1}$ $(\,r,s\in\mathbf{R}$、$t\in\mathbf{R}-\{0\})$

推論 2：

不存在任何的空間變換，使得全部共於平面 $E[(0,0,0)\notin E]$的平行直線 $L_1\sim L_n$ 循環，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$

證明：

由於$(0,0,0)\notin E$，故 $L_1\sim L_n$ 滿足定理 6.4 之狀況

$\Rightarrow\lambda_A=\{t,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$或$\{-t,\cos\vartheta+i\sin\vartheta,\cos\vartheta-i\sin\vartheta\}$

取 $P\in L_1$、$Q\in L_2$，**定理 6.4** 告訴我們 L_3 上一點可表示為 $2\cos\vartheta Q-P$

又 P、Q、$2\cos\vartheta Q-P$ 在同一個面上，必然三點共線

$\Rightarrow$由線性組合，$2\cos\vartheta-1=1\Rightarrow\cos\vartheta=1\Rightarrow\vartheta=2k\pi$

這顯然與 $\vartheta=[\dfrac{2k\pi}{n}](k=1,2,\cdots,[\dfrac{n-1}{2}])$矛盾

註記：$L_1\sim L_n$ 任意相鄰皆互為歪斜線之狀況尚未解決

八、空間中一條直線循環的矩陣變換

在這一小節中，我們處理滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_1$ 的矩陣變換並求出矩陣的樣子

定理 8.1：

給定一條不過原點的直線 L_1，取一點 $P\in L_1$ 及任意點 $Q\in L_2$，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_1$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},Q,t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}(t\neq0)$

證明：

取$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$，令 $A[\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}]=[\overrightarrow{l_3},Q+k\overrightarrow{l_1},t\overrightarrow{l_1}](tk\neq0)$

因為$\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}$ 必不共面，所以$[\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$ 存在

$\Rightarrow A=[\overrightarrow{l_3},Q+k\overrightarrow{l_1},t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$

定理 8.2：

給定一條過原點的直線 L_1，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1\overset{A}{\Leftrightarrow}L_1$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_4},t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}]^{-1}$，其中$\overrightarrow{l_5}$為不平行$\overrightarrow{l_1}$的任意向量

$(t\neq0)$

證明：

因為(0,0,0)必為定點，所以 A 只需滿足方向向量的變換即可

取$\overrightarrow{l_5}$，令 $A[\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}]=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_4},t\overrightarrow{l_1}](t\neq0)$

因為$\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}$ 必不共面，所以$[\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}]^{-1}$ 存在

$\Rightarrow A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_4},t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}]^{-1}$

定理 8.3：

兩歪斜線 L_1、L_2，作 L_1、L_2 的平行面 E_1、E_2($L_1 \in E_1$ 且 $L_2 // E_1$，$L_2 \in E_2$ 且 $L_1 // E_2$)，若(0, 0, 0)$\notin$ E_1、E_2，則必存在唯一的 P,Q 兩點($P \in L_1$ 且 $Q \in L_2$)滿足(0, 0, 0)$\in PQ$ 直線

證明：

因為(0,0,0)$\notin$ E_1、E_2 且 L_1、L_2 歪斜，所以過 L_1 及(0,0,0)作一平面 E_3，必交 L_2 於唯一一點 Q，而且顯然地，所求的直線必包含於 E_3

所以，過(0,0,0)及 Q 作一直線，交 L_1 於唯一一點 P，則 PQ 直線即為所求

伍、研究結果

平面中直線

n＝2

(1) 給定不過原點不平行的兩條直線 L_1：$ax+by=1$、L_2：$cx+dy=1$，則存在在唯一的線性變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[-\vec{T_2},-\vec{T_1}][\vec{T_1},\vec{T_2}]^{-1}$，其中 $\vec{T_1}=(b,-a)$、$\vec{T_2}=(d,-c)$

(也就是行向量 $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} d \\ -c \end{bmatrix}$)

(2) 給定過原點不平行的兩條直線 L_1、L_2，任取 $\vec{T_1}$、$\vec{T_2}$ 分別做為 L_1、L_2 的方向向量，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[t\vec{T_2},k\vec{T_1}][\vec{T_1},\vec{T_2}]^{-1}$(受 t、k 兩獨立變數影響，其中 t、$k \in \mathbf{R}-\{0\}$)

(3) 給定兩條不過原點的平行線：L_1：$y=ax+by=1$、L_2: $ax+by=\lambda(\lambda \neq 0)$

僅當 $\lambda=-1$ 時，存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$ (受 t、k 兩獨立變數影響，其中 $t \in \mathbf{R}$、$k \in \mathbf{R}-\{0\}$)，其中變換矩陣 $A=[-P+t\vec{T},k\vec{T}][P,\vec{T}]^{-1}$($\vec{T}$ 為 L_1、L_2 的方向向量且 $P \in L_1$)；

當 $\lambda \neq -1$ 時，不存在平面變換 T 使得 $L_1 \overset{A}{\Leftrightarrow} L_2$。

***n* ≥ 3**

(4) 不存在任何的平面變換，使得 n 條（$n \geq 3$）共交點 $P(x_0, y_0) \neq (0,0)$的相異直線 L_1、L_2、L_3、⋯、L_n 循環，亦即 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$。

(5) 不存在任何的平面變換，使得 n 條（$n\ge 3$）平行的相異直線 L_1、L_2、L_3、⋯、L_n 循環，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。

(6)對於任兩條不平行且不過原點之直線 L_1, L_2，存在一組以上，$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 $L_3,\cdots\cdots, L_n$ ($n\ge 3$ 且 $L_1, L_2,\cdots\cdots, L_n$ 皆相異)，每一組直線分別都存在唯一的線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。

解法統整如下：

①將 L_1、L_2 寫成 $ex+fy=1$、$gx+hy=1$ 之形式，並取$(-f, e)$、$(-h, g)$分別作為$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$

②判斷 ϑ 的可能值：$\vartheta=\frac{2k\pi}{n}$($k=1, 2,\cdots\cdots, [\frac{n-1}{2}]$)且 $gcd(k,n)=1$

③L_r：$\sin(r-1)\theta(gx+hy)-\sin(r-2)\theta(ex+fy)=\sin\theta$，其中 $r=3\sim n$

④依照通式寫出 L_3 後，仿照$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$求出$\overrightarrow{l_3}$，然後 $A=[\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

(7) 對於任三條過原點的相異直線 L_1、L_2、L_3，存在 1 組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的過原點直線 $L_4,\cdots\cdots, L_n$ ($n\ge 3$ 且 $L_1, L_2, \cdots\cdots, L_n$ 皆相異)及矩陣 A，每一組直線分別都存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$。

解法統整如下：

① 任取$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$分別做為 L_1、L_2、L_3 的方向向量，再找 $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}-\{0\}$使得$\overrightarrow{l_3}=\beta\overrightarrow{l_2}-\alpha\overrightarrow{l_1}$

②判斷 ϑ 的可能值：$\vartheta=\frac{2k\pi}{n}$ ($k=1, 2,\cdots\cdots, [\frac{n-1}{2}]$)且 $gcd(k,n)=1$ 但是當 n 為偶數時，$\vartheta=\frac{k\pi}{n}$

③使用新的方向向量 $\alpha\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_3}$，利用「方向向量交換加負號」的方式寫出 L_1、L_3

(舉例：$\alpha\overrightarrow{l_1}=(2,3)\Rightarrow L_1：3x-2y=0$)

④ L_r：$\sin(r-1)\theta L_3-\sin(r-3)\theta L_1$，其中 $r=3\sim n$

⑤ $A=v\,[\beta\overrightarrow{l_2},2\cos\vartheta\overrightarrow{l_3}]\,[2\cos\vartheta\alpha\overrightarrow{l_1},\beta\overrightarrow{l_2}]^{-1}$ ($v\in\boldsymbol{R}-\{0\}$)

---

n＝1

(8) 給定不過原點的直線：L_1：$ax+by=1$，任取 L_1 的方向向量$\overrightarrow{l_1}$、$P\in L_1$

，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_1$ (受 t、k 兩變數影響，其中 $r\in\boldsymbol{R}$、$k\in\boldsymbol{R}-\{0\}$)

，其中變換矩陣 $A=[P+r\overrightarrow{l_1},k\overrightarrow{l_1}][P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$。

(9) 給定過原點的直線 L_1，任取 L_1 的方向向量$\overrightarrow{l_1}$，則存在無限多個線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_1$，其中變換矩陣 A 的通解為滿足$(A-\lambda I)\overrightarrow{l_1}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ($\lambda\neq 0$) 的所有矩陣 A。

至此，我們將平面中直線循環的矩陣變換討論完整。

空間中直線

n＝2

(10) 給定兩條交於一點 P 的直線 L_1、L_2，且兩直線所在的平面 E 不過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{T}{\leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[P, \overrightarrow{l_2}t, \overrightarrow{l_1}k][P, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$ ($t,k\neq 0$)

(11) 給定兩條交於一點 P≠(0, 0, 0)的直線 L_1、L_2，且兩直線所在的平面 E 通過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{T}{\leftrightarrow} L_2$。若 $P=\alpha\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}$，則變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3}, \overrightarrow{l_2}\times\frac{\alpha}{\beta}, \overrightarrow{l_1}\times\frac{\beta}{\alpha}][\overrightarrow{N}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$

(12) 給定兩條交於原點(0, 0, 0)的直線 L_1、L_2，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{T}{\leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3}, \overrightarrow{l_2}t, \overrightarrow{l_1}k][\overrightarrow{N}, \overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}]^{-1}$ ($t,k\neq 0$)

(13) 給定兩平行線 L_1、L_2(方向向量為$\overrightarrow{l}$)，取定點 $P\in L_1$ 且 $Q\in L_2$，且 R,S 分別為 L_1、L_2 上的任意點，若兩直線所在的平面 E 不過(0, 0, 0)，則存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{T}{\leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣 $A=[S,R,t\overrightarrow{l}][P,Q,\overrightarrow{l}]^{-1}$($t\neq 0$)

(14) 給定兩平行線 L_1、L_2(方向向量為$\overrightarrow{l}$)共平面 E(E 過(0, 0, 0))，取定點 $P\in L_1$，Q 為 L_2 上的任意點。僅當 L_1、L_2 對稱(0, 0, 0)時，才存在變換矩陣 A，與 L_1、L_2 構成無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \overset{T}{\leftrightarrow} L_2$，其中變換矩陣

$A=[t\overrightarrow{l},Q,\overrightarrow{l_3}][\overrightarrow{l},P,\overrightarrow{N}]^{-1}$($t\neq 0$)

當 L_1、L_2 不對稱(0, 0, 0)時，不存在變換矩陣 A。

n ≥ 3

(15) 給定滿足 $\mathrm{span}(\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3})=R^3$、不過(0, 0, 0)之共點直線 L_1,L_2,L_3，必存在一組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 $L_1,L_2, L_3,\cdots,L_n$($n\geq 3$)，每組直線皆對應唯一一組線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$，其中 L_1～L_n 必然全部共點且 $\mathrm{span}(\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}})=R^3$ (特別地，當 n=3 時，必存在$[\frac{n-1}{2}]=1$組，代表滿足以上要求之 L_1、L_2、L_3，必存在唯一的線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} L_1$)，統整解法如下：

1°任取$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$做為 L_1、L_2 之方向向量，並找出 L_1、L_2、L_3 的共同交點 P 座標

2°取$\overrightarrow{l_3}=\alpha P-\overrightarrow{l_1}+\beta\overrightarrow{l_2}$，解出 α、β

3°令 $t=\dfrac{\beta}{2\cos\theta}$ ($\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$，$k=1,2,\ldots,[\frac{n-1}{2}]$且 $\gcd(k,n)=1$)、$\overrightarrow{l_2}'=t\overrightarrow{l_2}$，

則$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3}-\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2}+\dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1}$ (k＝4～n，若設定 n＝3，則直接跳過此步)

4°$A=[P,t\overrightarrow{l_2},\frac{1}{t}\overrightarrow{l_3}][P,\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2}]^{-1}$

5°可由 3°再由參數式寫出 L_k(k＝4～n) 之容貌。

(16) 給定 span($\overrightarrow{l_1},\overrightarrow{l_2},\overrightarrow{l_3}$)＝$R^3$、全過原點的直線 L_1,L_2,L_3,L_4，則存在一組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組以下的 $L_5,\dots,L_n$($n\geq 5$)，每組直線皆對應無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$，其中(0, 0, 0) ∈$L_k$ (k＝1～n)。(若 n＝4，則每一組滿足上述定義的 L_1～L_4，都存在無限多個線性變換滿足 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}L_4\xrightarrow{A}L_1$)，統整解法如下：

1°任取$\overrightarrow{l_1}$、$\overrightarrow{l_2}$、$\overrightarrow{l_3}$、$\overrightarrow{l_4}$做為 L_1、L_2、L_3、L_4 之方向向量，解滿足$\overrightarrow{l_4}=r\overrightarrow{l_3}-\beta\overrightarrow{l_2}+\alpha\overrightarrow{l_1}$之 α、β、r

2°$\theta=\frac{2k\pi}{n}$，k=1,2,…, 【$\frac{n-1}{2}$】，且 n 為偶數時，需改為 $\theta=\frac{k\pi}{n}$

3°若 detA＝1，令$(2\cos\theta+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\theta+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

若 detA＝－1，令$(2\cos\varphi+1)\alpha\overrightarrow{l_1}=\overrightarrow{l_1'}$、$\beta\overrightarrow{l_2}=\overrightarrow{l_2'}$、$r\overrightarrow{l_3}=\overrightarrow{l_3'}$、$(2\cos\varphi+1)\overrightarrow{l_4}=\overrightarrow{l_4'}$

4°若 detA＝1，$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-2}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3'}-\dfrac{\sin(\frac{k-1}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin(\frac{k-2}{2})\theta\times\sin(\frac{k-3}{2})\theta}{\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1'}$

若 detA＝－1，$\overrightarrow{l_k}=\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_3'}-\dfrac{\sin\frac{k-1}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\cos^2(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{l_2'}+$

$\dfrac{\sin\frac{k-2}{2}(\pi-\theta)\times\sin\frac{k-3}{2}(\pi-\theta)}{\sin\theta\times\cos\frac{\theta}{2}}\overrightarrow{l_1'}$

5°可經由參數式，寫出 L_1～L_n 之容貌。

(17) 不存在任何的空間變換，使得 n 條不共點且 span($\overrightarrow{l_k},\overrightarrow{l_{k+1}},\overrightarrow{l_{k+2}}$)＝$\mathbf{R}^3$(k＝1～n)的直線 L_1～L_n 循環，亦即 $L_1\xrightarrow{A}L_2\xrightarrow{A}L_3\xrightarrow{A}\cdots\cdots\xrightarrow{A}L_n\xrightarrow{A}L_1$

(18) 給定兩平行線 L_1、L_2，其中 L_1、L_2 共於平面 E 且(0, 0, 0) ∉E，則存在 1 組以上、$[\frac{n-1}{2}]$組

以下的直線 $L_3,\ldots,L_n$($n \geq 3$)，每組直線對應無限多個線性變換滿足 $L_1 \xrightarrow{A} L_2 \xrightarrow{A} L_3 \xrightarrow{A} \cdots\cdots \xrightarrow{A} L_n \xrightarrow{A} L_1$ 。並且 L_1～L_n 必然全部平行 L_k、L_{k+1} 所共之平面必不過原點(k＝1～n)。

統整解法如下：

1°任取 L_1、L_2 上之 P、Q 兩點

2°$\theta=[\frac{2k\pi}{n}]$，其中 $k=1,2,\cdots,[\frac{n-1}{2}]$且 $\gcd(k,n)=1$

3°L_k 上的其中一點通式為$\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}Q-\frac{\sin(k-2)\theta}{\sin\theta}P$，可再藉由參數式寫出 L_1～L_n 之容貌

4°$A=[Q+r\overrightarrow{l},2\cos\theta Q-P+s\overrightarrow{l},t\overrightarrow{l}][P,Q,\overrightarrow{l}]^{-1}$ ($r,s\in\mathbf{R}$、$t\in\mathbf{R}-\{0\}$)

---

n＝1

(19) 給定一條不過原點的直線 L_1，取一點 $P\in L_1$ 及任意點 $Q\in L_2$，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \xleftrightarrow{T} L_1$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},Q,t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ},P,\overrightarrow{l_1}]^{-1}$ ($t\neq0$)

(20) 給定一條過原點的直線 L_1，存在無限多組矩陣變換滿足 $L_1 \xleftrightarrow{T} L_1$，其中變換矩陣 $A=[\overrightarrow{l_3},\overrightarrow{l_4},t\overrightarrow{l_1}][\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_5},\overrightarrow{l_1}]^{-1}$，其中$\overrightarrow{l_5}$為不平行$\overrightarrow{l_1}$的任意向量（$t\neq0$)

陸、討論

起初，我們在二維空間中給定 2 條直線，討論各種情形矩陣的存在性與唯一性並求出矩陣的一般模樣，往後若遇到此類問題，皆可以輕易地得出矩陣的上述特性，後續又再擴展到循環長度為 *n* 的變換。起初，我們都是以「求矩陣」為主軸，也就是先求出矩陣再利用矩陣變換去帶出直線，乃至我們分區科展時也都是採用此法。後來在準備投數學傳播時，我們意識到此法需要花費大量的時間才能求出直線的通式，於是積極地尋找更好的方法。這段時間，我們精熟了線性代數中的特徵方程式、對角化、*Jordan Form*，並利用矩陣的跡以及行列式進行矩陣運算，真的有辦法在求出矩陣 *A* 前率先求出直線的樣子，再反求矩陣！藉著平面中直線循環的矩陣變換投稿於數學傳播後，我們立馬著眼於把這些直線拉到空間中會如何。剛開始時，我們便遭遇了挫折。於是，我們試著回到原點，站在原型分解定理的引理上，展開一系列的論述。在這之中，我們展現了嶄新的思維，巧妙地化用三角恆等式及 *Cayley-Hamilton* 定理乘上向量來快速求出$\overrightarrow{l_k}$的樣子，研究因此出現大幅度的進展。此外，我們也會適時靈活用線性組合的性質，縮減掉大篇幅的代數論證，以更漂亮的手法處理空間中循環長度為 *n* 的種種情形。

柒、結論

在這份研究前，未有人探討過這個題目，我們將二維空間中給定 *n* 條直線滿足循環長度

為 *n* 的矩陣變換討論完整，而三維空間中僅剩 2 條及 *n* 條歪斜線循環的變換尚未解決，其餘狀況皆已討論完整。期待未來能在處理三維的歪斜線變換以及三維平面的線性變換上有所進展，但可能會遇到幾個問題，像是三維的歪斜線較難掌握點變換、三維平面的變換要同時處理一個平面上兩個向量及一個點的映射、法向量的通式並沒有方向向量好求(因為矩陣變換不保角)等等，都是推廣到三維平面的困難之處，有待我們進行後續的探討。

捌、參考文獻

程雋(民國 111 年)。線性代數論。新北市：文笙書局

【評語】010024

本作品給定平面上的直線 $L_1, \cdots, L_r$，作者通過一系列線性代數的技巧來判斷是否存在一個線性變換將可同時將所有的 L_i 映射至 L_{i+1}，其中 $i=1, \cdots, r$，$L_{r+1}=L_1$。首先，當只有兩條直線時，作者用兩直線相交、平行、以及是否通過原點的性質，刻畫出此線性變換。但由於題目條件設定得太強，使得只要確定 L_1、 L_2 的線性變換，其他的線性變換基本上就跟著被確定，因此作品的結果就被大大限制。接著，本作品把二維的結論轉移至三維的情況，但是儘管推廣到三維空間，問題的核心本質並未改變，因此實際上並未得到太多新的結果。整體而言，作者有一定的數學能力，但是本題目設定過於嚴格使得變化就少了。