2025年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010021

參展科別　數學

作品名稱　「飛到西飛到東」對應異頻穩定三角訊號之波形分析

就讀學校　臺北市私立東山高級中學
指導教師　李哲文
作者姓名　郭仁瑋

關鍵詞　三角波、傅立葉級數、數系封閉性

作者簡介

大家好，我是郭仁瑋，目前就讀於臺北市東山高中三年級。自小以來，我對科學研究一直有著很強烈的興趣，也很榮幸擁有這次參加國際科展的資格，完成升上高中時給自己訂下的目標。這段研究與學習並進的日子，時光雖走得匆忙，卻也伴隨了許多人事物，格外令我難以忘懷，過程中難免遇到了許多阻礙與困境，或許迎刃而解，或許繞道而行，也終算是挺了過來，同時也非常感謝一路上提供我支持與鼓勵的同學、家人與師長們。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區　　別：

科　　別：數學科

作品名稱：「飛到西飛到東」對應異頻穩定三角訊號之波形分析

關 鍵 詞：三角波、傅立葉級數、數系封閉性

編　號：

摘要

本篇研究以探討多重訊號同時輸入時的訊號干擾問題出發，類比至國立臺灣師範大學數學系游森棚教授所提出的數學問題：「飛到西飛到東」，希望藉由導出多質點移動速率與其距原點間的位置關係，找出訊號重疊程度之峰值條件，藉此有望應用於硬體接收器的訊號輸出處理，或類比至電路設計與物流規劃等，達到避免相互干擾與提升傳輸效率的功用。

在內文中我們先以分段討論的方式解決期刊問題，並導出在任意系統中可快速辨別物體運動狀態之高斯函數。隨後以參數化曲線路徑與向量式的質點位置，拓展主題可適用範圍的自由度，再以高斯函數法和傅立葉級數法得出解型式之聯立組，最後利用數系之封閉性，將主題進一步約化處理。

Abstract

This research explores signal interference when multiple signals are inputted simultaneously. Analogous to a mathematical problem: "Fly to the west to fly to the east" raised by Professor Yu Senpeng of the Department of Mathematics at the National Taiwan Normal University, we hope to find the peak condition of signal overlaps by analyzing the signal overlap of multiple particles at different speeds and the positional relationship between the origins. This may have applications in improving transmission efficiency in the signal output of hardware receivers, circuitry design or logistics by avoiding mutual signal interference.

We first derive the ability to quickly identify objects in any system by solving the journal problem through piecewise functions. Subsequently, we increase the number of degrees of freedom through parameterized curved equations and vector particle positions. Afterward, we use Gaussian functions and Fourier series to express the solution in simultaneous equations, and finally discuss the closedness of the system.

壹、前言

一、研究動機

這次的研究展開[1]來源於一篇有關 FPS29.97 的網路文章，內容提及在黑白電視轉換彩色電視的那個年代，工程師面臨到在原有的黑白畫面亮度訊號（Luminance）、聲音廣播之輸出訊號間再加入色彩訊號（Chrominance）時接收器的解析問題。後透過幀率壓縮與配合訊號峰值錯置（輸出時間差）與壓縮波形寬度等方式，避免訊號間干擾與讀值逆分解的不可行性，並產生一系列高度獨立的連續訊號，使硬體解碼能夠順利進行。

值得慶幸的是，上述訊號的頻率皆固定且相同，才使得該手法順利地進行。藉此我們好奇，如果今天訊號的頻率不同，導致隨著時間遞進而使訊號重疊所造成的影響程度及其與時間之關係為何，並藉此有利於未來分析相關應用時所用。隨著資料的不斷學習與檢索下，我們發現在[2]游森棚教授於 2022 年 02 月撰寫在國立臺灣科學教育館科學研習期刊中的「飛到西飛到東」這項數學問題有很意外的相似性。不過因為題目整體的複雜性，在我們這篇研究中，將動機中的目的調整為討論重疊程度最嚴重之處的時間與訊號位置，並類比為期刊中的問題，以簡化問題的可行性。

二、研究目的

（一）解決期刊問題

（二）高斯函數聯立解

（三）傅立葉級數三角波聯立解

（四）數系的封閉性與頻率的約化處理

三、文獻回顧

經資料查詢後，我們找到兩篇基於森棚教官數學題——飛到西飛到東的延伸性研究，希望藉由探討前人的研究結果，能對這項主題做出不同的觀點與產出。

（一）[3]小蜜蜂相逢總有時

此篇研究源自於臺南市 111 年度國中學生獨立研究競賽之作品，該作品先以兩質點速度比 $a:b$ 之運動情形，條列出不同速度比下兩質點相遇的位置，接著再以數學歸納法做統整。首先討論兩質點同向相遇與異向相遇時，兩質點之移動距離與相遇的位置是否具有重複性，最後加入第三與第四個質點的相遇情形並討論相遇位置。

最後在該篇研究中，歸納出當速度比 $a:b$ 為最簡整數比時，$a+b$ 之和的奇偶性會如何影響其相遇位置，比較可惜的是作者導出之結論複雜性相當高，未能將結果有效簡化，同時複雜度隨運動質點數遽增。以及窮舉條列的方式較難以說明是否能夠將變數產生之所有可能的影響皆納入考量。此為我們能夠嘗試加以改進之處。

（二）[4]「飛到西，飛到東」之延伸與研究

屏東縣第 63 屆中小學科學展覽會之作品，該篇以圖解搭配窮舉法，討論出速度比為等比數列、等差數列、費氏數列等經典數列之比例形式，並分別以五種速度比之相遇位置做變數分析，將其位置關係以數學歸納法化為一般式。

此篇研究結論同樣借鑑前項研究之內容加以延伸，不過簡化至僅三隻蜜蜂的情況，並捨棄相向性之分析方向，將題目衍伸至各種不同數列的「初次相遇」時間和位置聯立解，其結論之簡潔性與推導的嚴謹性較前者來的更完善，只是應用上的限制顯著縮小了許多。同時此主題的困難性在於系統持續運動時的各種聯立解，若僅討論「初次相遇」則變得有些離題。

我們可以發現文獻中前人的研究過程通常是先訂定待討論之實際速度比，接著透過窮舉法列出所有相遇的時間與相遇座標，再以數學歸納法加以導出一般式。雖說這些方法在特定速度比例下有解答，但其嚴謹性與通用性尚有不足，因此本研究希望能以不同的觀點切入，增加較為完備的系統與變數定義過程，同時盡可能使討論的主題能在減少變數範圍限制與較多變數自由度的前提下，找出此問題的通用解法，提供一種更全面的方法來解決蜜蜂相遇的問題。

貳、研究設備與器材

筆記型電腦、計算紙、原子筆、GeoGebra、Wolfram Alpha、Excel、Word、Canva。

參、研究過程與方法

一、研究流程圖

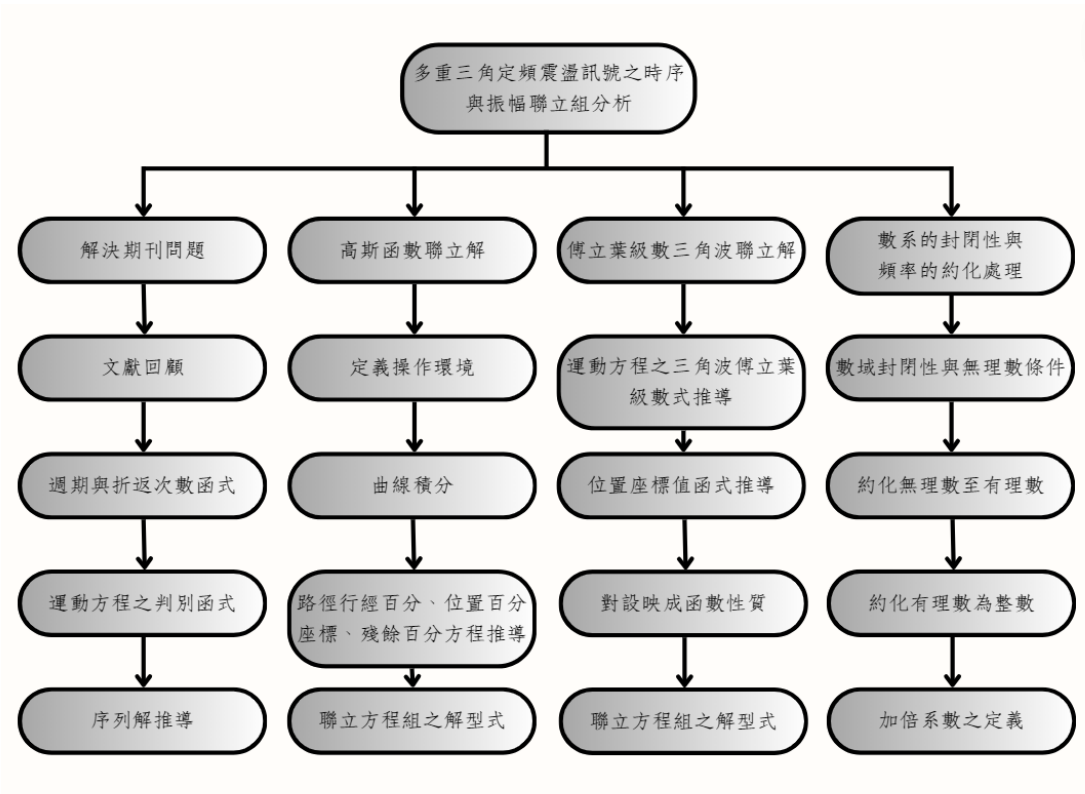

圖 01：研究流程圖，研究者以 Canva 自製。

二、研究原理

[5]數系封閉性

給定任一集合 S，且若在此集合中的元素間給定一個運算「$*$」，使得 $a,b \in S \wedge a*b \in S$，則該性質即稱為封閉性（closed）。

肆、研究結果

一、解決期刊問題

文/游森棚

三隻速度不同的蜜蜂同時從蜂巢出發，在蜂巢與一朵花之間來回等速直線飛行，蜂巢與花的距離為1單位，一旦飛到大花馬上回頭再往蜂巢飛，碰到蜂巢又回頭往大花飛，如此周而復始。只考慮理想的狀態，不考慮加速度等等因素，飛得最慢的蜜蜂從蜂巢到花飛一趟要1分鐘。

Q1. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：2：4 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？
Q2. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：3：9 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？
Q3. 如果三隻蜜蜂的速度比是1：3/2：9/4 時，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

圖 02：[2]森棚教官數學題——飛到西飛到東。

根據科學研習期刊中的命題，我們在一維歐式空間中的座標軸上，假設一段長度為 D 之線段 L，其端點分別定義為 e_i、e_f，並稱之為始端點（即蜂巢）與終端點（即花朵）。因為在等速率往返運動中蜜蜂的速度方向會依照其「速率」量值之不同，而在不同時間點做運動方向的切換，故令三隻蜜蜂的速度分別為 $V_1(t)$、$V_2(t)$、$V_3(t)$，速率分別為 v_1、v_2、v_3。最後再令編號 n 且速率為 v_n 之蜜蜂，完成一次端點來回所花費時間為 T_n，即 $T_n = \frac{2D}{v_n}$。

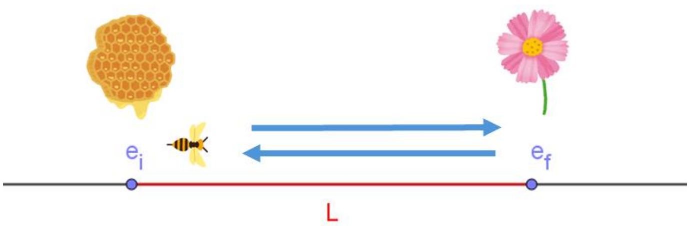

圖 03：期刊命題與變數定義示意圖，研究者以 GeoGebra 自製。

Question 01：如果三隻蜜蜂的速度比為 $1\!:\!2\!:\!4$，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

已知：

$$v_1 : v_2 : v_3 = 1 : 2 : 4 = \frac{2D}{T_1} : \frac{2D}{T_2} : \frac{2D}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_1 : T_2 : T_3 = \frac{2D}{v_1} : \frac{2D}{v_2} : \frac{2D}{v_3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 4 : 2 : 1$$

$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 4r \\ T_2 = 2r\,, (r \in \mathbb{R}^+) \\ T_3 = 1r \end{cases}$，此處以所討論之完全系統之各蜜蜂週期最簡整數比做為比例常數 r 之設立基準。

定義 $\tau_{\{1,2\}}$ 為編號 1、2 之蜜蜂所組成之運動系統的週期，其中 $\tau_{\{1,2\}} = lcm(T_1, T_2) = lcm(4r, 2r) = 4r$。藉此可推得編號 1、2 之蜜蜂在任意起始時間 t'所經歷的一個週期中（即 $\forall\, t' \in \mathbb{R}^+$，$t \in \left(t', t' + \tau_{\{1,2\}}\right]$）共會切換方向 $ȶ_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \frac{\tau_{\{1,2\}}}{T_1} = 2$ 次，及 $ȶ_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \frac{\tau_{\{1,2\}}}{T_2} = 4$ 次，即 $ȶ_n(\tau_A) = 2 \times \frac{\tau_A}{T_n} = \frac{v_n}{D}\tau_A = 2f_n\tau_A$。

又因為每次切換方向後到下次切換方向所需行經之距離、運動速率不變，因此各蜜蜂逐次切換方向所經過的時間間隔等距，藉此我們不失一般性（WLOG）地假設 $t' = 0$，使編號為 1、2 之蜜蜂皆共同於始端點開始運動。緊接著我們透過蜜蜂切換方向（即運動方程式改變瞬間）的時間點做切割，分段討論以先處理編號 1、2 之蜜蜂的相遇情形，並定義 $d_n(t)$ 為編號 n 之蜜蜂與始端點 e_i 之間的距離，可得以下聯立方程組：

$$\Rightarrow\begin{cases} t\in\left(0,\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4}\right], \begin{cases} d_1(t)=v_1t=\frac{D}{2r}t \\ d_2(t)=v_2t=\frac{D}{r}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=0, when\ t=0\notin\left(0,\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4}\right] \\ t\in\left(\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4},\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2}\right], \begin{cases} d_1(t)=\frac{D}{2}+v_1\left(t-\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4}\right)=\frac{D}{2r}t \\ d_2(t)=D-v_2\left(t-\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4}\right)=-\frac{D}{r}t+2D \end{cases} \Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{2D}{3}, when\ t=\frac{4}{3}r\in\left(\frac{\tau_{\{1,2\}}}{4},\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2}\right] \\ t\in\left(\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2},\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4}\right], \begin{cases} d_1(t)=D-v_1\left(t-\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2}\right)=-\frac{D}{2r}t+2D \\ d_2(t)=v_2\left(t-\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2}\right)=\frac{D}{r}t-2D \end{cases} \Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{2D}{3}, when\ t=\frac{8}{3}r\in\left(\frac{\tau_{\{1,2\}}}{2},\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4}\right] \\ t\in\left(\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4},\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t)=\frac{D}{2}-v_1\left(t-\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4}\right)=-\frac{D}{2r}t+2D \\ d_2(t)=D-v_2\left(t-\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4}\right)=-\frac{D}{r}t+4D \end{cases} \Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=0, when\ t=4r\in\left(\frac{3\tau_{\{1,2\}}}{4},\tau_{\{1,2\}}\right] \end{cases}$$

故可得編號 1、2 之蜜蜂相遇位置與時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{2D}{3},\frac{4r}{3}+4kr\right)$、$\left(\frac{2D}{3},\frac{8r}{3}+4kr\right)$、$(0,4r+4kr)$，等同於 $\left(\frac{2D}{3},\frac{\tau_{\{1,2\}}}{3}+k\tau_{\{1,2\}}\right)$、$\left(\frac{2D}{3},\frac{2\tau_{\{1,2\}}}{3}+k\tau_{\{1,2\}}\right)$、$\left(0,\tau_{\{1,2\}}+k\tau_{\{1,2\}}\right)$。

接著我們先導出以下變數供後續做使用：

$$\tau_{\{1,2,3\}}=lcm(T_1,T_2,T_3)=lcm(4r,2r,r)=4r$$

$$\Rightarrow t_3\left(\tau_{\{1,2,3\}}\right)=2\times\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{T_3}=8\ (次)$$

定義 $T_n=\tau_{\{n\}}$，則 $\forall\ A\subseteq S\wedge A\neq\Phi$ 可得出 $\tau_A\leq\tau_S=m\tau_A,(m\in\mathbb{N})$。

再由此處 $m=\frac{\tau_S}{\tau_A}=\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{\tau_{\{1,2\}}}=\frac{4r}{4r}=1$ 得出，在整個系統（由編號 1、2、3 之蜜蜂所組成）的單個運動週期中，編號 1、2 蜜蜂所組成之小系統週期共完整運行 1 次。接著將上述三組可行解執行 $m=1$ 次週期之時序列解代入編號 3 蜜蜂的運動方程中，亦即討論 $k=0$ 至 $(m-1)$ 之所有情形：

$$\Rightarrow \begin{cases} t \in \left(0, \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right], d_3(t) = v_3 t = \frac{2D}{r} t \\ t \in \left(\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{8}, \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{4}\right], d_3(t) = D - v_3\left(t - \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right) = -\frac{2D}{r} t + 2D \\ t \in \left(\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{4}, \frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right], d_3(t) = v_3\left(t - \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{4}\right) = \frac{2D}{r} t - 2D \\ t \in \left(\frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{8}, \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{2}\right], d_3(t) = D - v_3\left(t - \frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right) = -\frac{2D}{r} t + 4D \\ t \in \left(\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{2}, \frac{5\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right], d_3(t) = v_3\left(t - \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{2}\right) = \frac{2D}{r} t - 4D \\ t \in \left(\frac{5\tau_{\{1,2,3\}}}{8}, \frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{4}\right], d_3(t) = D - v_3\left(t - \frac{5\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right) = -\frac{2D}{r} t + 6D \\ t \in \left(\frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{4}, \frac{7\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right], d_3(t) = v_3\left(t - \frac{3\tau_{\{1,2,3\}}}{4}\right) = \frac{2D}{r} t - 6D \\ t \in \left(\frac{7\tau_{\{1,2,3\}}}{8}, \tau_{\{1,2,3\}}\right], d_3(t) = D - v_3\left(t - \frac{7\tau_{\{1,2,3\}}}{8}\right) = -\frac{2D}{r} t + 8D \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = 1, k = 0, \begin{cases} d_3\left(\frac{4r}{3}\right) = d_3\left(\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{3}\right) = \frac{2D}{3} = d_1\left(\frac{4r}{3}\right) = d_2\left(\frac{4r}{3}\right) \\ d_3\left(\frac{8r}{3}\right) = d_3\left(\frac{2\tau_{\{1,2,3\}}}{3}\right) = \frac{2D}{3} = d_1\left(\frac{8r}{3}\right) = d_2\left(\frac{8r}{3}\right) \\ d_3(4r) = d_3\left(\tau_{\{1,2,3\}}\right) = 0 = d_1(4r) = d_2(4r) \end{cases}$$

故可得編號 1、2、3 之蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{2D}{3}, \frac{4r}{3} + 4kr\right)$、$\left(\frac{2D}{3}, \frac{8r}{3} + 4kr\right)$、$(0, 4r + 4kr)$，等同於 $\left(\frac{2D}{3}, \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{3} + k\tau_{\{1,2,3\}}\right)$、$\left(\frac{2D}{3}, \frac{2\tau_{\{1,2,3\}}}{3} + k\tau_{\{1,2,3\}}\right)$、$\left(0, \tau_{\{1,2,3\}} + k\tau_{\{1,2,3\}}\right)$，其中 $k \in \mathbb{Z}^+$。

Question 02：如果三隻蜜蜂的速度比為 1：3：9，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

已知：

$$v_1 : v_2 : v_3 = 1 : 3 : 9 = \frac{2D}{T_1} : \frac{2D}{T_2} : \frac{2D}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_1 : T_2 : T_3 = \frac{2D}{v_1} : \frac{2D}{v_2} : \frac{2D}{v_3} = \frac{1}{1} : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} = 9 : 3 : 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 9p, v_1 = \frac{2D}{9p} \\ T_2 = 3p, v_2 = \frac{2D}{3p} \\ T_3 = p, v_3 = \frac{2D}{p} \end{cases}$$

，$(p \in \mathbb{R}^+)$，此處以所討論之完全系統之各蜜蜂週期最簡整數比做為比例常數 p 之設立基準。

$$\Rightarrow \tau_{\{1,2\}} = lcm(T_1, T_2) = lcm(9p, 3p) = 9p$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \dfrac{\tau_{\{1,2\}}}{T_1} = 2 \\ t_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \dfrac{\tau_{\{1,2\}}}{T_2} = 6 \\ f_1 = \dfrac{t_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right)}{2\tau_{\{1,2\}}} = \dfrac{1}{9p} \\ f_2 = \dfrac{t_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right)}{2\tau_{\{1,2\}}} = \dfrac{1}{3p} \end{cases} ,\quad \forall\, t' \in \mathbb{R}^+, t \in \left(t', t' + \tau_{\{1,2\}}\right]$$

$$\because v_1, v_2, v_3, D \in const.$$

WLOG 假設 $t' = 0$，則可列出下列聯立式：

$$\Rightarrow \begin{cases} t \in \left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_1\left(t - \frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 0 + \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_2\left(t - \frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 0 + \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = 0, when\ t = 0 \notin \left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \\ t \in \left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_1\left(t - \frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 0 + \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_2\left(t - \frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 2D - \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = \frac{D}{2}, when\ t = \frac{9p}{4} \in \left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \\ t \in \left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_1\left(t - \frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 0 + \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_2\left(t - \frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = -2D + \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = D, when\ t = \frac{9p}{2} \in \left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \\ t \in \left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_1\left(t - \frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 2D - \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_2\left(t - \frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 4D - \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = D, when\ t = \frac{9p}{2} \notin \left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \\ t \in \left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_1\left(t - \frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 2D - \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) + v_2\left(t - \frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = -4D + \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = \frac{D}{2}, when\ t = \frac{27p}{4} \in \left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \\ t \in \left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{6}{6}\tau_{\{1,2\}}\right], \begin{cases} d_1(t) = d_1\left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_1\left(t - \frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 2D - \frac{2D}{9p}t \\ d_2(t) = d_2\left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) - v_2\left(t - \frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right) = 6D - \frac{2D}{3p}t \end{cases} \Rightarrow d_1(t) = d_2(t) = 0, when\ t = 9p \in \left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}, \frac{6}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \end{cases}$$

故可得編號 1、2 之蜜蜂相遇位置與時間關係 (d, t) 依序為 $\left(\frac{D}{2}, \frac{9p}{4} + 9pk\right)$、$\left(D, \frac{9p}{2} + 9pk\right)$、$\left(\frac{D}{2}, \frac{27p}{4} + 9pk\right)$、$(0, 9p + 9pk)$ 四組。

此處 $m = \frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{\tau_{\{1,2\}}} = \frac{lcm(T_1,T_2,T_3)}{9p} = \frac{lcm(9p,3p,p)}{9p} = 1$ 可得出，在整個系統（由編號 1、2、3 之

蜜蜂所組成）的單個運動週期中，編號 1、2 蜜蜂所組成之小系統週期共完整運行 1 次。接著將上述三組可行解執行 $m=1$ 次週期之時序列解代入編號 3 蜜蜂的運動方程中，亦即討論 $k=0\sim m-1$ 之所有情形。

首先根據 Mathematical Induction 我們可推得 $\forall\, t\in\left(\frac{a}{t_n(\tau_A)}\tau_A,\frac{a+1}{t_n(\tau_A)}\tau_A\right]\Rightarrow d_n(t)=(-1)^a\left(v_nt-2D\left[\frac{a+1}{2}\right]\right),(a\in\mathbb{Z}^+)$。又 $t_3(\tau_{\{1,2,3\}})=2\times\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{T_3}=18$，故當 $m=1,k=0$ 時可推導出下聯立式：

$$\Rightarrow\begin{cases} t=\dfrac{9p}{4}=\dfrac{4.5}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow\ d_3(t)=(-1)^4\left(v_3t-2D\left[\dfrac{4+1}{2}\right]\right)=\dfrac{2D}{p}t-4D \\ t=\dfrac{9p}{2}=\dfrac{9}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow\ d_3(t)=(-1)^8\left(v_3t-2D\left[\dfrac{8+1}{2}\right]\right)=\dfrac{2D}{p}t-8D \\ t=\dfrac{27p}{4}=\dfrac{13.5}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3(t)=(-1)^{13}\left(v_3t-2D\left[\dfrac{13+1}{2}\right]\right)=-\dfrac{2D}{p}t+14D \\ t=9p=\dfrac{18}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow\ d_3(t)=(-1)^{17}\left(v_3t-2D\left[\dfrac{17+1}{2}\right]\right)=-\dfrac{2D}{p}t+18D \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} d_3\left(\dfrac{9p}{4}\right)=\dfrac{2D}{p}\times\dfrac{9p}{4}-4D=\dfrac{D}{2}=d_1\left(\dfrac{9p}{4}\right)=d_2\left(\dfrac{9p}{4}\right) \\ d_3\left(\dfrac{9p}{2}\right)=\dfrac{2D}{p}\times\dfrac{9p}{2}-8D=D=d_1\left(\dfrac{9p}{2}\right)=d_2\left(\dfrac{9p}{2}\right) \\ d_3\left(\dfrac{27p}{4}\right)=-\dfrac{2D}{p}\times\dfrac{27p}{4}+14D=\dfrac{D}{2}=d_1\left(\dfrac{27p}{4}\right)=d_2\left(\dfrac{27p}{4}\right) \\ d_3(9p)-\dfrac{2D}{p}\times 9p+18D=0=d_1(9p)=d_2(9p) \end{cases}$$

故可得編號 1、2、3 之蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{D}{2},\frac{9p}{4}+9pk\right)$、$\left(D,\frac{9p}{2}+9pk\right)$、$\left(\frac{D}{2},\frac{27p}{4}+9pk\right)$、$(0,9p+9pk)$。

Question 03：如果三隻蜜蜂的速度比為 $1:\frac{3}{2}:\frac{9}{4}$，有沒有可能在某個時刻，三隻蜜蜂剛好飛到介於蜂巢與花之間的同一點？

$$v_1:v_2:v_3=1:\frac{3}{2}:\frac{9}{4}=\frac{2D}{T_1}:\frac{2D}{T_2}:\frac{2D}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_1:T_2:T_3=\frac{2D}{v_1}:\frac{2D}{v_2}:\frac{2D}{v_3}=\frac{1}{1}:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=9:6:4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 9q, v_1 = \frac{2D}{9q} \\ T_2 = 6q, v_2 = \frac{2D}{6q} \\ T_3 = 4q, v_3 = \frac{2D}{4q} \end{cases}$$ ，$(q \in \mathbb{R}^+)$，此處以所討論之完全系統之各蜜蜂週期最簡整數比做為比例常數 q 之設立基準。

$$\Rightarrow \tau_{\{1,2\}} = lcm(T_1, T_2) = lcm(9q, 6q) = 18q$$

$$\Rightarrow \tau_{\{1,2,3\}} = lcm(T_1, T_2, T_3) = lcm(9q, 6q, 4q) = 36q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ŧ}_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \dfrac{\tau_{\{1,2\}}}{T_1} = 4 \\ \text{ŧ}_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right) = 2 \times \dfrac{\tau_{\{1,2\}}}{T_2} = 6 \\ f_1 = \dfrac{\text{ŧ}_1\left(\tau_{\{1,2\}}\right)}{2\tau_{\{1,2\}}} = \dfrac{1}{9q} \\ f_2 = \dfrac{\text{ŧ}_2\left(\tau_{\{1,2\}}\right)}{2\tau_{\{1,2\}}} = \dfrac{1}{6q} \end{cases} , \ \forall\, t' \in \mathbb{R}^+, t \in \left(t', t' + \tau_{\{1,2\}}\right]$$

$\because v_1, v_2, v_3, D \in const.$

WLOG 假設 $t' = 0$，則可由式 $\forall\, t \in \left(\frac{a}{\text{ŧ}_n(\tau_A)}\tau_A, \frac{a+1}{\text{ŧ}_n(\tau_A)}\tau_A\right] \Rightarrow d_n(t) = (-1)^a \left(v_n t - 2D\left[\frac{a+1}{2}\right]\right), (a \in \mathbb{Z}^+)$ 列出下方聯立式：

$$\Rightarrow\begin{cases} t\in\left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=0+\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=0+\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=0, when\ t=0\notin\left(\frac{0}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{1}{4}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=0+\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=2D-\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{4D}{5}, when\ t=\frac{18q}{5}\in\left(\frac{1}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{1}{4}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{1}{4}\tau_{\{1,2\}},\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=2D-\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=2D-\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=2D, when\ t=0\notin\left(\frac{1}{4}\tau_{\{1,2\}},\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=2D-\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=-2D+\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{2D}{5}, when\ t=\frac{36q}{5}\in\left(\frac{2}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=-2D+\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=4D-\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{2D}{5}, when\ t=\frac{54q}{5}\in\left(\frac{3}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{3}{4}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=-2D+\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=-4D+\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=2D, when\ t=18q\notin\left(\frac{4}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{3}{4}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{3}{4}\tau_{\{1,2\}},\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=4D-\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=-4D+\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=\frac{4D}{5}, when\ t=\frac{72q}{5}\notin\left(\frac{3}{4}\tau_{\{1,2\}},\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]\\ t\in\left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{6}{6}\tau_{\{1,2\}}\right]=\begin{cases}d_1(t)=4D-\frac{2D}{9q}t\\ d_2(t)=6D-\frac{2D}{6q}t\end{cases}\Rightarrow d_1(t)=d_2(t)=0, when\ t=18q\in\left(\frac{5}{6}\tau_{\{1,2\}},\frac{6}{6}\tau_{\{1,2\}}\right] \end{cases}$$

故可得編號 1、2 之蜜蜂相遇位置與時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{4D}{5},\frac{18q}{5}+18qk\right)$、$\left(\frac{2D}{5},\frac{36q}{5}+18qk\right)$、$\left(\frac{2D}{5},\frac{54q}{5}+18qk\right)$、$\left(\frac{4D}{5},\frac{72q}{5}+18qk\right)$、$(0,18q+18qk)$ 五組。

此處 $m=\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{\tau_{\{1,2\}}}=\frac{lcm(T_1,T_2,T_3)}{18q}=\frac{lcm(9q,6q,4q)}{18q}=2$ 可得出，在整個系統（由編號 1、2、3 之蜜蜂所組成）的單個運動週期中，編號 1、2 蜜蜂所組成之小系統週期共完整運行 2 次。接著將上述三組可行解執行 $m=2$ 次週期之時序列解代入編號 3 蜜蜂的運動方程中，亦即討論 $k=0$ 至 $m-1$ 之所有情形，其中 $t_3(\tau_{\{1,2,3\}})=2\times\frac{\tau_{\{1,2,3\}}}{T_3}=18$ 且 $f_3=\frac{t_3(\tau_{\{1,2,3\}})}{2\tau_{\{1,2,3\}}}=\frac{1}{4q}$，將 $d_3(t)$ 代入上式中，即可推得以下聯立式：

$$\Rightarrow m=2,k=0,\begin{cases} t=\frac{18q}{5}=\frac{1.8}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{1.8}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^1\left(v_3t-2D\left[\frac{1+1}{2}\right]\right)=-\frac{2D}{4q}t+2D=\frac{D}{5}\neq d_1,d_2 \\ t=\frac{36q}{5}=\frac{3.6}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{3.6}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^3\left(v_3t-2D\left[\frac{3+1}{2}\right]\right)=-\frac{2D}{4q}t+4D=\frac{2D}{5}=d_1=d_2 \\ t=\frac{54q}{5}=\frac{5.4}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{5.4}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^5\left(v_3t-2D\left[\frac{5+1}{2}\right]\right)=-\frac{2D}{4q}t+6D=\frac{3D}{5}\neq d_1,d_2 \\ t=\frac{72q}{5}=\frac{7.2}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{7.2}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^7\left(v_3t-2D\left[\frac{7+1}{2}\right]\right)=-\frac{2D}{4q}t+8D=\frac{4D}{5}=d_1=d_2 \\ t=18q=\frac{9}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{9}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^8\left(v_3t-2D\left[\frac{8+1}{2}\right]\right)=\frac{2D}{4q}t-8D=D\neq d_1,d_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m=2,k=1,\begin{cases} t=\frac{18q}{5}+18q=\frac{10.8}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{10.8}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^{10}\left(v_3t-2D\left[\frac{10+1}{2}\right]\right)=\frac{2D}{4q}t-10D=\frac{4D}{5}=d_1=d_2 \\ t=\frac{36q}{5}+18q=\frac{12.6}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{12.6}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^{12}\left(v_3t-2D\left[\frac{12+1}{2}\right]\right)=\frac{2D}{4q}t-12D=\frac{3D}{5}\neq d_1,d_2 \\ t=\frac{54q}{5}+18q=\frac{14.4}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{14.4}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^{14}\left(v_3t-2D\left[\frac{14+1}{2}\right]\right)=\frac{2D}{4q}t-14D=\frac{2D}{5}=d_1=d_2 \\ t=\frac{72q}{5}+18q=\frac{16.2}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{16.2}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^{16}\left(v_3t-2D\left[\frac{16+1}{2}\right]\right)=\frac{2D}{4q}t-16D=\frac{D}{5}\neq d_1,d_2 \\ t=18q+18q=\frac{18}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\Rightarrow d_3\left(\frac{18}{18}\tau_{\{1,2,3\}}\right)=(-1)^{17}\left(v_3t-2D\left[\frac{17+1}{2}\right]\right)=-\frac{2D}{4q}t+18D=0=d_1=d_2 \end{cases}$$

故可得編號 1、2、3 之蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{2D}{5},\frac{36q}{5}+36qk\right)$ 、 $\left(\frac{4D}{5},\frac{72q}{5}+36qk\right)$ 、 $\left(\frac{4D}{5},\frac{108q}{5}+36qk\right)$ 、 $\left(\frac{2D}{5},\frac{144q}{5}+36qk\right)$ 、 $(0,36q+36qk)$ 五組。

二、高斯函數聯立解

對任意實數 x，其高斯函數表示為 $[x]$ 並滿足 $[x]=min\{a\in\mathbb{Z}|x\leq a\}$。舉例來說，我們假設今天有 n 隻蜜蜂，在[6]虧格數 $g=0$ 的線段路徑 $\mathcal{C}$ 上進行往返運動，其中 $\mathcal{C}:(x,y,z)=\left(\mathcal{X}(u),\mathcal{Y}(u),\mathcal{Z}(u)\right)$，並定義 $\mathcal{C}$ 之兩端點為 e_i、e_f，其中 WLOG 令 $e_i=(0,0,0)$ 為路徑起點，且 $e_f=(x_f,y_f,z_f)$ 為路徑終點，並將位置向量分別定義為由 e_i 為起點之向量 $\overrightarrow{r_1}(t)$、$\overrightarrow{r_2}(t)$、$\overrightarrow{r_3}(t)$、…、$\overrightarrow{r_n}(t)$，則我們能夠以參數化表示蜜蜂之位置向量式為 $\overrightarrow{r_n(t)}=\mathcal{C}(f_nt)=\mathcal{X}(f_nt)\ \hat{\imath}+\mathcal{Y}(f_nt)\ \hat{\jmath}+\mathcal{Z}(f_nt)\ \hat{k}$。[7]其中曲線 $\mathcal{C}$ 之線段長度計算如下：

$$s(\mathcal{C})=\left|\int_{e_i=(0,0,0)}^{e_f=(x_f,y_f,z_f)}\sqrt{\left(\frac{d\mathcal{X}(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{Y}(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{Z}(u)}{du}\right)^2}\,du\right|$$

接著我們歸一化 $s(\mathcal{C})$ 為一單位長之路徑，將蜜蜂運動路徑長以百分制表示，來回一趟

為 200%，兩趟則為 400%，依此類推。則蜜蜂之「運動路徑行徑百分」可表示為 $p_n(t) = \frac{v_n t}{\left|\int_{e_i}^{e_f} \sqrt{\left(\frac{dX(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dY(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dZ(u)}{du}\right)^2} du\right|}$。

接著我們知道，蜜蜂每經過 200% 之移動路徑後，位移值與運動規律就會重置。而對於 n 隻蜜蜂所組成的系統而言，我們假設 τ_A 為此 n 隻蜜蜂往返運動系統之循環週期，則系統狀態 $S(t+\tau_A) = S(t)$，即所有蜜蜂會回歸到 τ_A 時刻前相同的運動狀態。因此我們使用高斯地板函數與定義「位置百分座標值 $d_n'(t)$」來以數學式描述此運動過程。其中 $d_n'(t) = \frac{\left|\int_{e_i}^{\overline{r_n\left(\frac{u}{f_n}\right)}} \sqrt{\left(\frac{dX(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dY(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dZ(u)}{du}\right)^2} du\right|}{s(C)} = (-1)^{\left[p_n(t)-2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right]\right]} \times \left(p_n(t) - 2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right]\right) + 2\left(p_n(t) - 2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right]\right) \in [0, 100\%]$。

其中我們定義「殘餘百分值」$\ell_n(t) = p_n(t) - 2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right] \in [0,200\%)$，表示當蜜蜂在 t 時刻內未能完成的最後一趟往返運動中已完成的運動路徑行經百分值。則上式可改寫為 $d_n'(t) = 2[\ell_n(t)] + \ell_n(t) \times (-1)^{[\ell_n(t)]}$，並且 $d_n(t) = D \times d_n'(t)$。如此一來原題即可等價為尋找該 n 隻蜜蜂所對應的 t、$d_n(t)$ 相同時之解，亦即找出某些時刻 t_e 使滿足 $\forall\, i,j \in \mathbb{N} \cap [1,n]\ \ s.t.\ d_i(t_e) = d_j(t_e)$。並且得出以下推導：

$$d_i(t_e) = D\left(2[\ell_i(t_e)] + \ell_i(t_e) \times (-1)^{[\ell_i(t_e)]}\right) = D\left(2\left[\ell_j(t_e)\right] + \ell_j(t_e) \times (-1)^{\left[\ell_j(t_e)\right]}\right) = d_j(t_e)$$

$$\Rightarrow 2\left([\ell_i(t_e)] - \left[\ell_j(t_e)\right]\right) = \left(\ell_j(t_e) \times (-1)^{\left[\ell_j(t_e)\right]}\right) - \left(\ell_i(t_e) \times (-1)^{[\ell_i(t_e)]}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ell_i(t_e) - \ell_j(t_e) = 2\left([\ell_i(t_e)] - \left[\ell_j(t_e)\right]\right) \\ \qquad\qquad or \\ \ell_i(t_e) + \ell_j(t_e) = 2\left([\ell_i(t_e)] + \left[\ell_j(t_e)\right]\right) \end{cases}, \qquad \forall\, i,j \in \mathbb{N} \cap [1,n]$$

最後將該聯立解代入題目給定之 n 隻蜜蜂速率條件 $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ 以及路徑長度 D，即可推得相遇時間 t_e 與位置 $d_n(t_e)$ 序列。

三、傅立葉級數三角波聯立解

根據蜜蜂運動狀態之位置與時間關係圖之呈現（$d \in [0, D]$ 之等速率端點折返運動），我們可知該圖形為一種斜率為 $\pm v_n$ 之三角波，藉此我們引入 Fourier series 來使得每隻蜜蜂的運動軌跡函數可以連續的形式呈現，避免三角波在結果一中大量分段討論之情形。

[8]首先我們考慮一般三角波圖形，設其振幅值為 1，週期為 $2L$，並且為一奇函數。藉此可推得下述聯立條件：

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{L}\left(\displaystyle\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2x}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \left(1 - \frac{2}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right) = \dfrac{32}{n^2\pi^2} \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \sin^3\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_n = \dfrac{8}{n^2\pi^2} \times (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & for\ n \in odd \\ b_n = 0, & for\ n \in even \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right)$$

藉此我們將此結果調換變數成 $x - t$ 圖所用，並將函數向上調整 1 單位，函數絕對值調整為 $\frac{1}{2}$ 倍，相位角向前調整 $90°$ 得出以下符合此研究之蜜蜂運動過程之三角波函數：

$$d_n'(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi\left(t - \frac{T_n}{4}\right)}{T_n/2}\right)$$

又因 $T_n = \frac{2D}{V_n} = \frac{1}{f_n}$，結合路徑長度 D 之條件與上式做統整，我們改寫為下述表示式：

$$\Rightarrow \begin{cases} d_n(t) = \dfrac{D}{2} + \dfrac{4D}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{2V_n t}{D}-1\right)\right) \\ d_n(t) = \dfrac{D}{2} + \dfrac{4D}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi(4f_n t-1)\right) \\ d_n(t) = \dfrac{D}{2} + \dfrac{4D}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{4t}{T_n}-1\right)\right) \end{cases}$$

同樣，我們的目標即是找出在哪些時刻 t_e 與位移值能夠滿足 $\forall\, i,j \in \mathbb{N} \cap [1,n]\ s.t.\ d_i(t_e) = d_j(t_e)$。此處，我們利用蜜蜂位移值與正弦函數相位角能夠一一對應的特性（[9]對射映成函數），如 $f_n t = k_n(t) + \frac{\phi_n(t)}{2\pi}$（$k_n(t)$ 為滿足該式之最大整數，解析解不會用到故先在此忽略）等表示式，將問題等價為：

$$\phi_i = \phi_j\ , \forall\, i,j \in \mathbb{N} \cap [1,n]$$

$$\Rightarrow d_i(t_e) = d_j(t_e)$$

$$\Rightarrow d_i\left(\frac{k_i(t_e) + \frac{\phi_i(t_e)}{2\pi}}{f_i}\right) = d_j\left(\frac{k_j(t_e) + \frac{\phi_j(t_e)}{2\pi}}{f_j}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\phi_i(t_e)}{2\pi} + \dfrac{\phi_j(t_e)}{2\pi} = 1 \\ \qquad or \\ \dfrac{\phi_i(t_e)}{2\pi} - \dfrac{\phi_j(t_e)}{2\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_e\left(f_i - f_j\right) = m(t_e) \\ \qquad or \\ t_e\left(f_i + f_j\right) = m(t_e) \end{cases}, \quad (m(t_e) \in \mathbb{Z}^+)$$

最後將該聯立解代入題目給定之 n 隻蜜蜂速率條件 $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ 以及路徑長度 D，即可推得相遇時間 t_e 與位置 $d(t_e)$ 序列。

四、數系的封閉性與頻率的約化處理

自先前在研究結果中的討論，我們其實不難發現影響蜜蜂是否同時交會的條件皆為 $d'_n(t)$，尤其移動路徑總長度 D 僅為解方程中的比例常數，也就是說該問題之變數將可減化至 $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$。故先將條件轉換為 f_n（$v_n = 2Df_n$）再來處理，將能夠更直覺且快速地解決問題。

接著我們討論 f_n 所處數系的性質，首先已知 $\tau_{\{1,2,3,\ldots,n\}} = \frac{k_1}{f_1} = \frac{k_2}{f_2} = \frac{k_3}{f_3} = \cdots = \frac{k_n}{f_n}$（$\forall\, i \in \mathbb{N} \cap [1, n],\ k_i \in \mathbb{Z}^+, f_n \in \mathbb{R}^+$），由於數系封閉性之性質，且 k_i 皆為整數，則所有的 f_i 、$\tau_{\{1,2,3,\ldots,n\}}$需同時皆為無理數，且為如 π、$\sqrt{3}$、e^2 …… 之同類方根，才能使得該式成立。但若今天所有的 f_i 皆屬某同類方根 ξ（$\xi > 0$），則可將該系統之運動模式等價為 $f_i{}'$ 皆為有理數之運動模式加快 ξ 倍進行，其中有理數部分由前者各項 f_i 之係數而定，如 $f_i = \frac{8}{5}\xi$，則 $f_i' = \frac{8}{5}$，依此類推。接著將其代回結果一至結果三中的各式解法，皆可得出若 f_i' 系統之解依序為 $\left(d'^{(1)}, t^{(1)}\right),\ \left(d'^{(2)}, t^{(2)}\right), \left(d'^{(3)}, t^{(3)}\right), \ldots, \left(d'^{(p)}, t^{(p)}\right)$，可推得 f_i 系統之解依序為 $\left(d'^{(1)}, \frac{t^{(1)}}{\xi}\right)$, $\left(d'^{(2)}, \frac{t^{(2)}}{\xi}\right), \left(d'^{(3)}, \frac{t^{(3)}}{\xi}\right), \ldots, \left(d'^{(p)}, \frac{t^{(p)}}{\xi}\right)$。

再進一步限縮條件，我們也可將全屬有理數之 f_i' 系統，視為全屬整數之 f_i'' 系統進行倍速處理。同樣代回前述結果聯立式做檢驗，我們令某個能透過一次相乘來將 f_i' 中全數頻率通分為整數之最小常數定為 ρ（$\rho > 0$），則若 f_i' 系統之解依序為 $\left(d'^{(1)}, t^{(1)}\right)$, $\left(d'^{(2)}, t^{(2)}\right), \left(d'^{(3)}, t^{(3)}\right), \ldots, \left(d'^{(p)}, t^{(p)}\right)$，可推得 f_i'' 系統之解依序為 $\left(d'^{(1)}, \frac{t^{(1)}}{\rho}\right)$, $\left(d'^{(2)}, \frac{t^{(2)}}{\rho}\right), \left(d'^{(3)}, \frac{t^{(3)}}{\rho}\right), \ldots, \left(d'^{(p)}, \frac{t^{(p)}}{\rho}\right)$。

根據上述的論證過程，我們得出只需提供初始條件 $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$，即可推導出該系統之運動型態，再配合常數 D、加倍係數 $\zeta = \rho\xi$ 即可處理所有可行解。

伍、討論

在這次的研究之中我們成功利用三種方式解決蜜蜂相遇之時間與位置間的關係序列聯立解之關係函式，包含用於分段判別蜜蜂運動方程之通用函式、高斯函數解、傅立葉三角波型解。同時論證與導出該題目可行解之數域，以及變數與聯立解間的約化處理過程。

在此份研究目前的規劃中，由於目前僅討論完全影響之交會情形的緣故，使得我們仍需進一步討論該現象用於訊號間的影響程度之連續關係，藉此才得以解決動機中的疑問。同時我們也將持續尋找是否能夠以更高維度之觀點，如循環數、環狀排列等規則來更加減化聯立組的應用與複雜性。

此外，以目前著手嘗試的方向中大略已知，若三隻以上蜜蜂之初始條件 $\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$ 處於非同類方根時，後續訊號間的影響程度能透過調整參數，從而呈現出類似於物理中常見的幾種混沌型態，這是一項值得未來延伸討論的進階研究方向。

陸、結論

一、解決期刊問題

（一）Question 01：當速率比為 $1:2:4$ 時，三隻蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{2D}{3},\frac{4r}{3}+4kr\right)$、$\left(\frac{2D}{3},\frac{8r}{3}+4kr\right)$、$(0,4r+4kr)$，其中 $k\in\mathbb{Z}^+$。

（二）Question 02：當速率比為 $1:3:9$ 時，三隻蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{D}{2},\frac{9p}{4}+9pk\right)$、$\left(D,\frac{9p}{2}+9pk\right)$、$\left(\frac{D}{2},\frac{27p}{4}+9pk\right)$、$(0,9p+9pk)$，其中 $k\in\mathbb{Z}^+$。

（三）Question 03：當速率比為 $1:3/2:9/4$ 時，三隻蜜蜂相遇位置（與 e_i 點之距離）和時間關係 (d,t) 依序為 $\left(\frac{2D}{5},\frac{36q}{5}+36qk\right)$、$\left(\frac{4D}{5},\frac{72q}{5}+36qk\right)$、$\left(\frac{4D}{5},\frac{108q}{5}+36qk\right)$、$\left(\frac{2D}{5},\frac{144q}{5}+36qk\right)$、$(0,36q+36qk)$ 五組。

（四）用於分段判別蜜蜂運動方程之通用函式：$\forall\, t\in\left(\frac{a}{t_n(\tau_A)}\tau_A,\frac{a+1}{t_n(\tau_A)}\tau_A\right]\Rightarrow d_n(t)=(-1)^a\left(v_nt-2D\left[\frac{a+1}{2}\right]\right),(a\in\mathbb{Z}^+)$。

二、高斯函數聯立解

（一）「運動路徑行徑百分 $p_n(t)$」$=\frac{v_nt}{\left|\int_{e_i}^{e_f}\sqrt{\left(\frac{dX(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dY(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dZ(u)}{du}\right)^2}du\right|}$。

（二）「殘餘百分值 $\ell_n(t)$」：$\ell_n(t)=p_n(t)-2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right]\in[0,200\%)$。

（三）「位置百分座標值 $d_n'(t)$」$=\frac{\left|\int_{e_i}^{\overline{r_n\left(\frac{u}{f_n}\right)}}\sqrt{\left(\frac{dX(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dY(u)}{du}\right)^2+\left(\frac{dZ(u)}{du}\right)^2}du\right|}{s(\mathcal{C})}=\frac{d_n(t)}{D}$

$$= \left((-1)^{\left[p_n(t)-2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right]\right]} \times \left(p_n(t) - 2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right] \right) + 2\left(p_n(t) - 2\left[\frac{p_n(t)}{2}\right] \right) \right)$$

$$= 2[\ell_n(t)] + \ell_n(t) \times (-1)^{[\ell_n(t)]} \in [0, 100\%] \text{。}$$

（四）聯立方程組之解型式：$\begin{cases} \ell_i(t_e) - \ell_j(t_e) = 2\big([\ell_i(t_e)] - [\ell_j(t_e)]\big) \\ \quad or \\ \ell_i(t_e) + \ell_j(t_e) = 2\big([\ell_i(t_e)] + [\ell_j(t_e)]\big) \end{cases}$, $\forall\, i, j \in \mathbb{N} \cap [1, n]$。

三、傅立葉級數三角波聯立解

（一）「位置座標值 $d_n(t)$」 $= \begin{cases} d_n(t) = \frac{D}{2} + \frac{4D}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{2V_n t}{D} - 1\right)\right) \\ d_n(t) = \frac{D}{2} + \frac{4D}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(4f_n t - 1)\right) \\ d_n(t) = \frac{D}{2} + \frac{4D}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\left(\frac{4t}{T_n} - 1\right)\right) \end{cases}$。

（二）聯立方程組之解型式：$\begin{cases} t_e\big(f_i - f_j\big) = m(t_e) \\ \quad or \\ t_e\big(f_i + f_j\big) = m(t_e) \end{cases}$, $\quad (m(t_e) \in \mathbb{Z}^+)$。

四、數系的封閉性與頻率的約化處理

對於所有可行解問題，即 $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ 僅能皆屬同類方根（含有理數），此時我們得以約化解題複雜度，將同類方根系條件 $\{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ 約化為整數系條件 $\{f_1'', f_2'', f_3'', \dots f_n''\}$ 配合常數 D、加倍係數 $\zeta = \rho\xi$ 即可處理所有應用條件。

柒、參考資料及其他

[1] 熾（2021 年 06 月 25 日）。【影音競技場】23.976p vs. 24p：兩者原來相差 0.1%？奇特小數幀率的由來。SPILL HK。取自：https://www.spill.hk/audiovisual/23-976-fps-vs-24-fps/。

[2] 游森棚（2022 年 06 月）。森棚教官數學題——飛到西飛到東。國立臺灣科學教育館科學研習期刊第 61 卷第 1 期。取自：https://www.ntsec.gov.tw/article/detail.aspx?a=5132。

[3] 台南市德光高中，佚名（2022 年）。小蜜蜂相逢總有時。台南市政府教育局特殊教育資源中心。取自：https://serc.tn.edu.tw/111 年度獨立研究競賽得獎作品/。

[4] 屏東縣立中正國中，佚名（2023 年）。「飛到西，飛到東」之延伸與研究。2023 屏東縣第 63 屆國民中小學科學展覽。取自：
https://sci.ptc.edu.tw/Pthsci63/Upfile/Works/1677557188_154226_31.pdf。

[5] 李華介（2005 年 03 月 21 日）。大學基礎代數：「初級 Group 的性質」。國立臺灣師範大學數學系。取自：https://math.ntnu.edu.tw/~li/algebra-html/chap1.pdf。

[6] 陳星谷（2012 年）。虧格數和非正則數均為二的一般形曲面的研究。Airiti Library。取自：https://www.airitilibrary.com/Article/Detail/U0001-1507201220520900。

[7] Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S.（2020 年）。Stewart: Calculus, 9/e （Metric Version）。Cengage Learning。頁 1169-1179。

[8] Weisstein, Eric W。Fourier Series--Triangle Wave。MathWorld--A Wolfram Web Resource。取自：https://mathworld.wolfram.com/FourierSeriesTriangleWave.html。

[9] 張志鴻（2017 年 11 月 21 日）。4-3 一對一映成函數。國立高雄大學。取自：
https://luciuschang.wordpress.com/%e5%9f%ba%e7%a4%8e%e6%95%b8%e5%ad%b8/。

【評語】010021

本作品探討 n 隻蜜蜂以不同速度等速在蜂巢和花之間直線飛行，問 n 隻蜜蜂何時會恰好同時在同一點。對此，作者對於幾個特定的蜜蜂飛行速度比，以直接求解聯立方程式的方法得到解答。由於蜜蜂相遇時，每隻蜜蜂可能在去程或返程，因此作者分成許多小區間去討論，並創造一些簡便符號，讓解較為清晰。作者又將直線飛行沿空間曲線飛行，但似乎沒有辦法確定問題的基本設定, 比如是沿著同一個曲線還是不同曲線等等問題設定都無法講清楚，導致計算出來的結果難以解釋。又將蜜蜂的運動方程式以三角波的傅立葉級數做展開，嘗試對解給出另外一種詮釋。同樣的這是處理直線還是曲線還是空間上的問題也說明不清，並且用傅立葉級數定義過程的描述則不夠清楚。整體而言雖然動機的問題相當有趣，但是作品開展中處理的問題未能解釋清楚, 是不足的地方。