

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010017

參展科別 數學

作品名稱 三角形分割與內切圓半徑之延伸研究

就讀學校 臺北市立永春高級中學

指導教師 高晟鈞

作者姓名 周博元

關鍵詞 Japanese Temple Geometry Problem、解析幾何、算額(Sangaku)

作者簡介



我是周博元，目前就讀於永春高中數理資優班。我非常熱愛數學，透過數學競賽與專題研究我深化了對幾何的熱忱，另外我也很享受探索未知與解決難題的成就感，這段經歷讓我的高中生活更加充實。

最後很幸運能來到國際科展的舞台，除了可以分享、暢談自己研究出來的成果，也希望這篇研究的內容未來能為學術界做出貢獻。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：三角形分割與內切圓半徑之延伸研究

關鍵詞：Japanese Temple Geometry Problem、解析幾何、算額
(Sangaku)

編號：

中文摘要

本研究延伸自作者前一年的研究「多『圓』文化的延伸——Japanese Temple Geometry Problem」，本作品靈感來自於其中一題日本算額問題。該題將正三角形透過特定的分割方式，將其分割為四個三角形。本研究改變其分割方式：在任意 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，若 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 之內切圓半徑相等，則 $\triangle ABC$ 內切圓半徑等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑加三等圓半徑。此外，本研究刻劃出 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置，並說明三點的相對位置是能夠利用尺規作圖實現的。最後也計算當 $\triangle LMN$ 存在時，三等圓半徑 (r) 的上界。此外，本研究將上述三角形的分割手法推廣至正 n 邊形和正四面體並探討內切圓與內切球的相關性質。另外也針對三角形內部的三圓半徑從原先的 r 改為 r, gr, r ，探討 r 的上界為何，最後也將研究內切圓延伸至外接圓，並觀察出三外接圓心與 L 、 M 、 N 六點共橢圓。

英文摘要

This research question extends from the author's previous year's research, 'The Extension of Multi-Circle Culture—Japanese Temple Geometry Problem.' The inspiration for this research comes from a particular Sangaku. The problem takes a square triangle and divides it into four triangles by a specific partition. This research modifies the division method: In $\triangle ABC$, let L , M , and N be points on sides $\overline{BC}$, $\overline{AB}$, and $\overline{AC}$, respectively. If the inradius of $\triangle AMN$, $\triangle BML$, and $\triangle CLN$ are equal, then the inradius of $\triangle ABC$ equals the sum of the inradius of $\triangle LMN$ and the radius of those three equal circles. In addition, the relative positions of L , M , and N on the three sides are delineated, and it is shown that the relative positions of the three points can be realized by using ruler diagrams. Finally, the upper bound of the radius (r) of those three equal circles is calculated when the $\triangle LMN$ exists. In addition, this research extends the above triangular segmentation technique to the n -square and the tetrahedron, and investigates the related properties of the tangent circle and the tangent sphere. The upper bound of r is also investigated by changing the radius of those three circles inside the triangle from r to r, gr, r . Finally, the research of the tangent circle is extended to the outer circle, and it is observed that the three outer centers of the three outer centers share the ellipse with the six points L , M , and N . The research of the incircle and the outer center of the outer circle is also extended to the outer center of the outer circle.

壹、前言

一、研究發想

本篇研究問題延伸至作者前一年的研究「多『圓』文化的延伸——Japanese Temple Geometry Problem」[2]，題目如下：如圖 1，在任意 $\triangle ABC$ 中，作三個與兩個邊相切的等圓 O_1 、 O_2 、 O_3 ，並且在任意 $\triangle ABC$ 三邊上各找一點 L 、 M 、 N ，使得 $\triangle LMN$ 三邊皆為三等圓的切線。在 $\triangle LMN$ 存在的前提下，找尋 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑 $r_{\triangle ABC}$ 、 $\triangle LMN$ 之內切圓半徑 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 三者之間的關係。

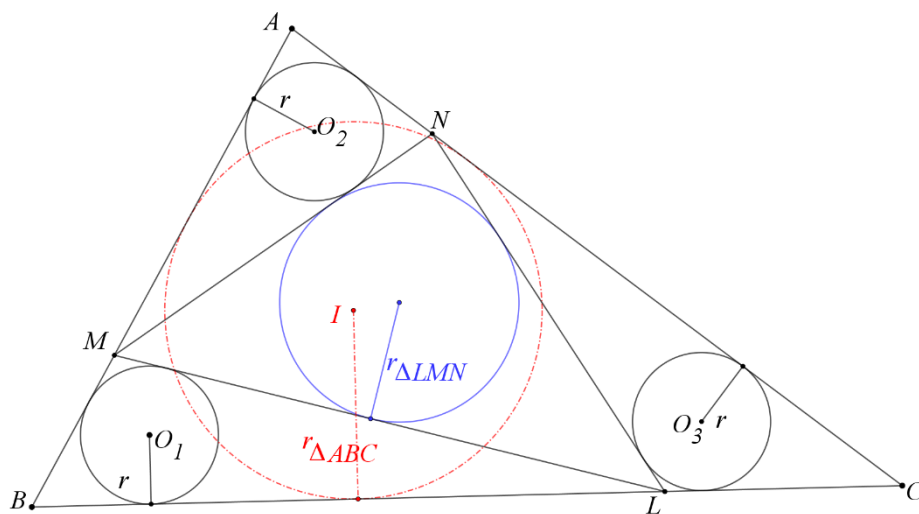


圖 1：參考文獻資料 [2]。研究者重製

二、前篇研究結果

由於前篇研究的大部份內容皆在討論三角形的情況，本篇研究因有將探討範疇推廣至多邊形，因此名詞定義的方式也稍與前篇作品不同。

(一) 名詞解釋

1. $a_{\text{多邊形}}$ 表示多邊形的面積，例如： $a_{\triangle ABC}$ 是 $\triangle ABC$ 的面積。
2. $s_{\text{多邊形}}$ 表示多邊形周長的一半(半周長)，例如： $s_{\triangle ABC}$ 是 $\triangle ABC$ 的半周長。
3. $r_{\text{多邊形}}$ 多邊形的內切圓半徑，例如： $r_{\triangle ABC}$ 是 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。
4. 當 L 、 M 、 N 為分別為 $\triangle ABC$ 三邊之中點時， $\triangle LMN$ 即稱為 $\triangle ABC$ 之中點三角形。
5. $\{A_{n,i}\}$ 是正 n 邊形，並且 i 是在正 n 邊形中內接 i 層正 n 邊形，並且 $n \geq 3$ 且

$\forall i \in N$ 。

例如：如圖 2， $\{A_{5,3}\}$ 的圖形是正 5 邊形的內部內接 3 層正 5 邊形。

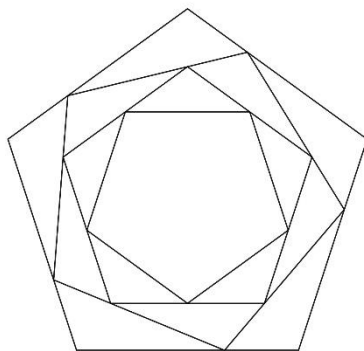


圖 2： $\{A_{5,3}\}$ 的名詞定義示意圖。研究者自製

6. $\{B_n\}$ 是正 n 面體， $\{B_n^*\}$ 是正 n 面體的 n 個稜角都分割相同大小的正 n 面體後的剩餘體，並且 $n \geq 4$ 。

例如：如圖 3， $\{B_4^*\}$ 的圖形是正 4 面體的 4 個稜角都分割相同大小的正 4 面體後，內部剩餘體是一個正 8 面體。

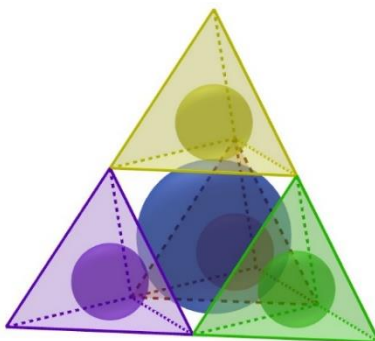


圖 3： $\{B_{4,1}\}$ 的名詞定義示意圖。研究者自製

7. $\{O_{n,i}\}$ 是與 $\{A_{n,i}\}$ 和 $\{A_{n,i+1}\}$ 相切的 n 個等圓圓心連線所形成之正多邊形。
8. 同時與 $\{A_{n,i}\}$ 和 $\{A_{n,i+1}\}$ 相切的 n 個等圓的半徑表示為 $r_{\{A_{n,i}\}-\{A_{n,i+1}\}}$ 。

(二) 前篇研究結論

在前篇研究中，討論了以下三點研究目的。

1. 欲證明 $\triangle ABC$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$) 等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。
2. 承一，已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。給定正 $\triangle ABC$ 邊長與指定三等圓 (r) 半徑時，畫出 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。

3. 承一，已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。

前篇研究針對上述研究目的有以下的結果。

1. 本研究證明出 $\triangle ABC$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$) 等於 $\triangle LMN$ ($r_{\triangle LMN}$) 內切圓半徑加三等圓內切圓半徑 (r)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。
2. 透過 Lemma1 (若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，則其內切圓半徑 $r_{\triangle ABC} = \frac{a_{\triangle ABC}}{s_{\triangle ABC}}$) 和 Lemma3 (當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，則 $\triangle LMN$ 為正三角形) 計算出正 $\triangle ABC$ 邊長 (a) 與三等圓內切圓半徑 (r) 的關係，找到三等圓內切圓半徑 r 的上界，即 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，也得出當 $r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， $\triangle LMN$ 將存在兩個。並製成 $\triangle LMN$ 之生成器，畫出三點 L 、 M 、 N 的相對位置。
3. 若 $\triangle LMN$ 存在以及當 $\frac{ar}{r_{\triangle ABC}} = a - n - z$ (符號的設定可參考本研究圖 9) 成立時，本研究計算出任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置以及三等圓半徑 (r) 之最大值，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。

(三) 前篇研究中未盡完善之處

除了上述的三點研究結果，仍有以下兩點是作者認為可以繼續往下延伸的。

1. 在前篇研究中，針對 $\triangle LMN$ 的生成主要都是透過解析幾何的手法，代數計算生成，但並未針對幾何結構進行討論，並且也沒有實現純幾何畫出 $\triangle LMN$ 的目標。
2. 前篇研究的探索過程與結果皆過於狹隘，整篇研究作品僅談到了與內切圓相關的性質，並且也僅提及了平面上的性質，並未針對立體圖形著手嘗試。

除了以上兩點前篇研究未盡完善之處，本篇研究也好奇若是將三角形的分割方式推廣至多邊形時，原先得到的主定理 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 是否有類似的性質；另外，將原先任意三角形內固定的三等圓半徑改為三圓半徑是某種特定比例時，會有什麼發現。

貳、研究目的及研究問題

- 一、如圖 1， $\triangle ABC$ 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\triangle ABC}$ ，在 $\triangle ABC$ 內有三個半徑為 r 的等圓與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 $\triangle ABC$ 三邊上，且 $\triangle LMN$ 的三邊與三等圓相切。若 $\triangle LMN$ 存在，則其內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓

半徑 (r)，等於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。

二、承一，已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。給定正 $\triangle ABC$ 邊長與指定三等圓 (r) 半徑時，刻劃出 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。以及討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。

三、證明正 n 邊形 $\{A_{n,1}\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{A_{n,2}\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_{n,2}\}}$) 加「與 $\{A_{n,1}\}$ 和 $\{A_{n,2}\}$ 相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$)」，即

$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$ 。若 $\{A_{n,2}\}$ 再內接一層正 n 邊形 $\{A_{n,3}\}$ ，則上式可推廣為

$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,2}\}-\{A_{n,3}\}} + r_{\{A_{n,3}\}} \dots$ 。

四、在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，將三圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑從原先的 r 改為 r ，

gr ， r ，求出其 r 的上界，並探討 $r_{\triangle ABC}$ 、 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 之間的關係。

參、研究設備及器材

紙、筆、筆電、Geogebra 5.0、MAGMA、Microsoft Word

肆、研究過程或方法及進行步驟

一、研究過程

以純幾何作圖作出 $\triangle ABC$ 內的三等圓。

首先在任意 $\triangle ABC$ 三頂點 A 、 B 、 C 上各作一條內角平分線，接著在角 B 的角平分線上任取一點 O_1 ，以 O_1 點為圓心， O_1 點到 $\overline{BC}$ 的垂直距離為半徑 (r)，決定圓心和半徑後即可作一個圓 O_1 。接著以 O_1 對 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 作平行線且與另兩頂點之內角

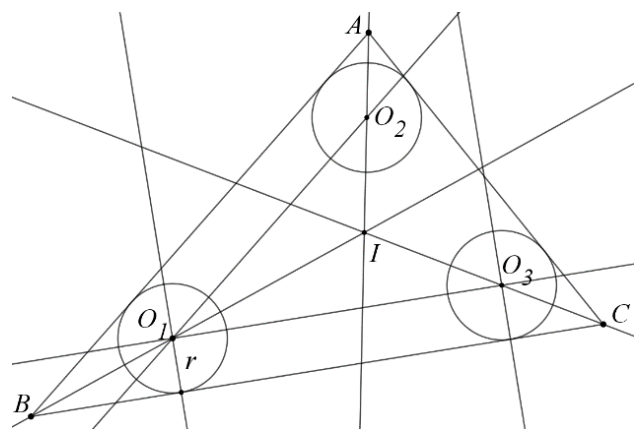


圖 4： $\triangle ABC$ 內的三等圓之尺規作圖。研究者自製

平分線交於 O_2 、 O_3 ，最後以 O_2 、 O_3 為圓心， r 為半徑即可以作出三個等圓，如圖 4。

(一) 主定理： $\triangle ABC$ 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\triangle ABC}$ ，在 $\triangle ABC$ 內有三個半徑為 r 的等圓與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 $\triangle ABC$ 三邊上，且 $\triangle LMN$ 的三邊與三等圓相切。若 $\triangle LMN$ 存在，則其內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，等於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。

證明主定理。

圖 1 的三個小圓是半徑相等的等圓， $\triangle ABC$ 的內切圓半徑是 $r_{\triangle ABC}$ ， $\triangle LMN$ 的內切圓半徑是 $r_{\triangle LMN}$ ，三個等圓的半徑是 r ，求證 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。由於證明過程中，需要以下兩個引理 *Lemma1* 及 *Lemma2*

Lemma1：若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，則其內切圓半徑 $r_{\triangle ABC} = \frac{a_{\triangle ABC}}{s_{\triangle ABC}}$

Lemma2：若 $\triangle ABC$ 為任意三角形，則其面積 $a_{\triangle ABC} = r_{\triangle ABC}^2 \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$

如圖 5，因為 A 、 O_2 、 I ， B 、 O_1 、 I ， C 、 O_3 、 I 均三點共線，

$r_{\triangle ABC} = r + \overline{KI} = r + r_{\triangle O_1O_2O_3}$ ，所以若是能夠證明 $r_{\triangle O_1O_2O_3} = r_{\triangle LMN}$ ，則主定理

$r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 即證明完畢，後續透過 *Lemma2* 計算出 $a_{\triangle LMN} = a_{\triangle O_1O_2O_3}$ 和

$s_{\triangle LMN} = s_{\triangle O_1O_2O_3}$ ，又透過 *Lemma1* 得知

$r_{\triangle O_1O_2O_3} = r_{\triangle LMN}$ ，至此主定理證明

$r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。且顯然此關係式為 $\triangle LMN$ 存在之必要條件。且此關係式 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 為貫穿本研究最重要的主定理。

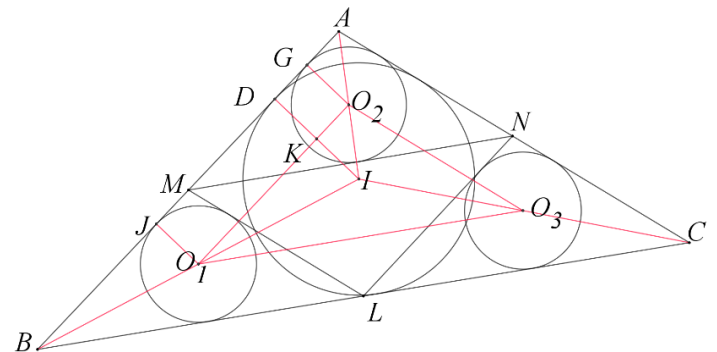


圖 5：研究目的一之示意圖。研究者自製

(二) 承研究目的一，已知

$r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。給定正 $\triangle ABC$ 邊長與指定三等圓 (r) 半徑時，刻劃出 $\triangle ABC$ 三邊

上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。以及討論任意 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置與求出 r 的上界。

1. 當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，討論 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的位置與求出 r 的上界。

由於在後續證明的過程中需要使用到 *Lemma1* 及 *Lemma3*。

Lemma3：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，則 $\triangle LMN$ 為正三角形

計算在 $\triangle ABC$ 為正三角形時，三等圓半徑 (r) 的上界。

令 $\overline{LM} = t$ ，根據 *Lemma1* 和 *Lemma3*，

$$\Rightarrow \triangle LMN \text{ 的內切圓半徑 } r_{\triangle LMN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}t^2}{\frac{3t}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}t$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}a - r = \frac{\sqrt{3}}{6}t \Rightarrow t = a - 2\sqrt{3}r > 0 \Rightarrow r < \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

令 $\overline{BL} = \overline{AM} = \overline{CN} = x$

在 $\triangle BML$ 中，由餘弦定理可知

$$\cos 60^\circ = \frac{x^2 + (a-x)^2 - (a-2\sqrt{3}r)^2}{2x(a-x)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - (a^2 - 4\sqrt{3}ar + 12r^2) = ax - x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3ax + 4\sqrt{3}ar - 12r^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$$

其中，將判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2$ 分成以下三個情況討論：

第一個情況：若判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 > 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a - 12r)(3\sqrt{3}a - 12r) > 0$$

$$\Rightarrow r < \frac{\sqrt{3}}{12}a \text{ 或 } r > \frac{\sqrt{3}}{4}a \text{ (不合, 因為 } r < \frac{\sqrt{3}}{6}a \text{)}$$

可以得知在 $r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時, $\triangle LMN$ 有兩解,

即 $\triangle LMN$ 和 $\triangle L'M'N'$, 如圖 6。

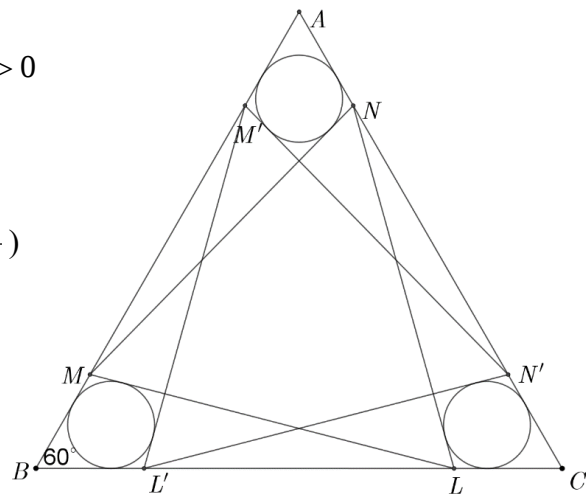


圖 6：第一個情況時， $\triangle LMN$ 之位置示意圖。研究者自製

第二個情況：若判別式 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 = 0$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}a - 12r)(3\sqrt{3}a - 12r) = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{12}a \text{ 或 } r = \frac{\sqrt{3}}{4}a \text{ (不合, 因為 } r < \frac{\sqrt{3}}{6}a \text{)}$$

即 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$, 此時 $x = \frac{a}{2}$ (重根), 可發現當

$r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時, L 、 M 、 N 位於 $\triangle ABC$ 三邊的中點。且此時 L 、 M 、 N 三點的位置恰只有一處,

即 $\triangle LMN$ 。如圖 7。

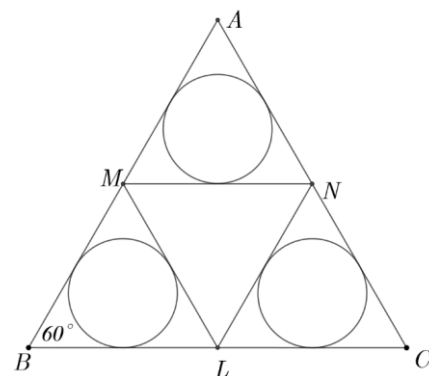


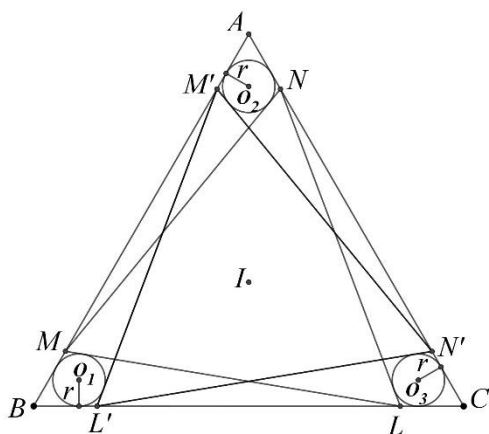
圖 7：第二種情況時， $\triangle LMN$ 之位置示意圖。研究者自製

第三個情況：若是判別式

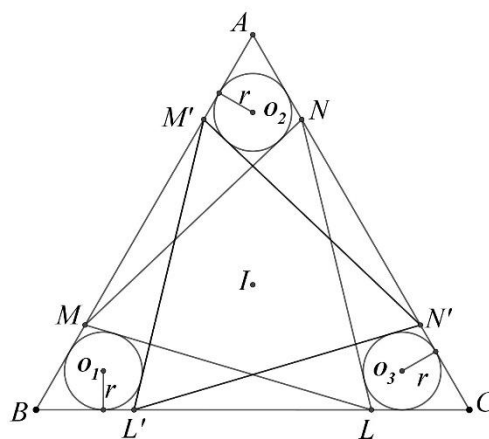
$9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2 < 0$, 則此時 x 不為實數。

綜合上述三種情況可以得知 $r \leq \frac{\sqrt{3}}{12}a$, 故 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 為 r 的上界。

根據 r 數值的改變, 探討 $\triangle LMN$ 的存在性。



r 變大



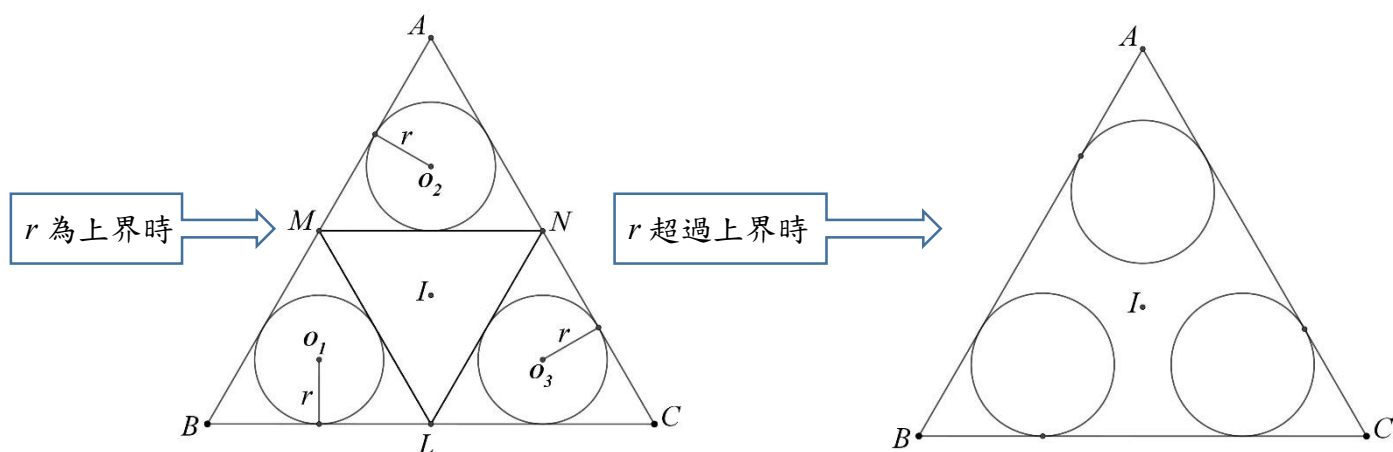


圖 8：當 r 由小至大時， L 、 M 、 N 之位置示意圖。研究者自製

透過圖 8，可以發現 r 在變大過程中且尚未達到上界時 ($r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$)，

$\triangle LMN$ 存在且 L 、 M 、 N 的位置有兩解；當 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， L 的位置會與 L' 重

合，此時 $\triangle LMN$ 唯一；當 $r > \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時，則 $\triangle LMN$ 不存在。

至此本研究說明了正 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置至多兩解，以及

三等圓內切圓半徑之上界與正 $\triangle ABC$ 的邊長 a 之間的關係為 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 。

在 $\triangle ABC$ 正三角形時，刻畫出 L 、 M 、 N 三點的相對位置。

在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，上述的計算過程可以得知

$\overline{BL} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$ 。在得到了 $\overline{BL}$ 的長度後，就能夠透過尺規作

圖找到 L 、 M 、 N 三點的相對位置，進而能利用 *Geogebra* 繪圖軟體作出一個 $\triangle LMN$ 的生成器。具體步驟如下：

Step 1：在給定一單位長、正 $\triangle ABC$ 邊長 a 及三等圓半徑 r 後，透過比例線段作出 a^2 和 r^2 ，因此即可作出 $9a^2$ 和 $144r^2$ 的線段長度。

Step 2：透過子母相似性質作出 $\sqrt{3}$ ，因此可以作出 $48\sqrt{3}$ ，再透過比例線段即可作出 $48\sqrt{3}ar$ 的線段長度。

Step 3：結合前兩個步驟後即可作出 $9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2$ ，再透過子母相似性質即可作出 $\sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}$ 。

Step 4：透過 Step 3 就可以作出 $\overline{BL}$ ，即 $\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}$ ，透過此線段長即可作出如圖 6 的 L 和 L' 點，再透過圓外點作圓的切線，進而就能夠作出 $\triangle LMN$ 和 $\triangle L'M'N'$ 。

2. 討論任意 $\triangle ABC$ 中， L 、 M 、 N 的三點相對位置。

計算在 $\triangle ABC$ 為任意三角形時， L 、 M 、 N 的三點相對位置。

如圖 9。假設點 B 為原點， $\overrightarrow{BC}$ 為 x 軸正向。假設 $\overline{MK} = m$ ， $\overline{LK} = n$ ，在 $\triangle BML$ 中，根據海龍公式及三角形面積公式

$$a_{\triangle BML} = \sqrt{\left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m + n\right) \times m \times n \times \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}\right)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{r(a+c-b)}{r_{\triangle ABC}} + 2(m+n)\right) \times r$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m + n\right) \times m \times n \times \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}\right) = r^2 \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m + n\right)^2$$

$$\Rightarrow m \times n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} = r \left(\frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + m + n\right)$$

$$\Rightarrow m \times n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} = \frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + mr + nr$$

$$\Rightarrow m \times \left(n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} - r\right) = \frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr\right) \times \left(\frac{1}{n \times \frac{a+c-b}{2r_{\triangle ABC}} - r}\right)$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{r^2(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}} + nr\right) \times \frac{2r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2rr_{\triangle ABC}} \Rightarrow m = \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}}$$

由圖 9 顯然 $\triangle BO_1J \sim \triangle BIE$ ，故 $\overline{BJ} = \frac{r(a+c-b)}{2r_{\triangle ABC}}$ ，同理 $\overline{CO} = \frac{r(a+b-c)}{2r_{\triangle ABC}}$ ，

$$\overline{AG} = \frac{r(b+c-a)}{2r_{\triangle ABC}}。$$

如圖 9 令 $\overline{MQ} = u = \overline{MG}$ ， $\overline{QN} = w$ ， $\overline{NS} = v$ ， $\overline{SL'} = z = \overline{OL'}$

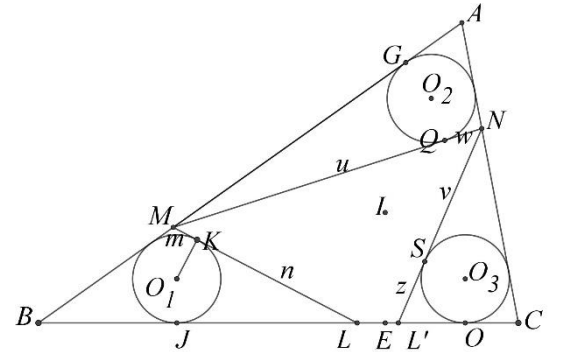


圖 9：研究目的二之示意圖。研究者自製

v 可以用 u 代換，將兩者同時代入上式，可使得上式形成一個 u 的式子：

$$\Rightarrow \frac{ar}{r_{\triangle ABC}} = a - n - \frac{r(a+b-c) + b - \frac{br}{r_{\triangle ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2ur \cdot r_{\triangle ABC}}{u(b+c-a) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}}}{a+b-c-2r_{\triangle ABC}}$$

接著將 $u = c - \frac{cr}{r_{\triangle ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}}$ 代入上式，可得：

$$\frac{ar}{r_{\triangle ABC}} = a - n - \frac{r(a+b-c) + b - \frac{br}{r_{\triangle ABC}} - \frac{r^2(b+c-a) + 2r \cdot r_{\triangle ABC} \left(c - \frac{cr}{r_{\triangle ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}} \right)}{\left(c - \frac{cr}{r_{\triangle ABC}} - \frac{r^2(a+c-b) + 2nr \cdot r_{\triangle ABC}}{n \times (a+c-b) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}} \right) (b+c-a) - 2r \cdot r_{\triangle ABC}}}{a+b-c-2r_{\triangle ABC}}$$

由上式可見，為了使得 $L = L'$ ，即 $\frac{ar}{r_{\triangle ABC}} = a - n - z$ 等式成立，整體式子可化簡

為關於 n 的式子，但由於算式較為複雜，本研究決定換個方式處理上式的計算與化簡，利用 *MAGMA* 程式輔以計算。然而 *MAGMA* 程式無法直接表達多項式除法，因此在操作程式時，先將前面提及的變量 v 與 u 之等式化成無分母型態，在 *MAGMA* 程式中定義，其程式碼如圖 11：

```
P1 := (n*R + a*(r-R))*(v*(a+b-c)-2*r*R) + R*(r^2*(a+b-c)+ v*2*r*R);
P2 := (u*R + c*(r-R))*(n*(a+c-b)-2*r*R) + R*(r^2*(a+c-b)+ n*2*r*R);
P3 := (v*R + b*(r-R))*(u*(b+c-a)-2*r*R) + R*(r^2*(b+c-a)+ u*2*r*R);
```

圖 11：P1、P2 和 P3 的定義。研究者自製

為了將 P1、P3 中的 v 的變量消除，將 P3 中的 v 變量乘上 P1 再減掉 P1 中的 v 變量乘上 P3，如此一來就可以寫出一個變量僅有 a 、 b 、 c 、 r 、 $r_{\triangle ABC}$ 、 n 、 u 的式子，並且本人將其定義成 P4，再透過一樣的方法，將 P4 中的 u 變量乘上 P2 再減掉 P2 中的 u 變量乘上 P4，這樣就可以寫出一個變量僅有 a 、 b 、 c 、 r 、 $r_{\triangle ABC}$ 、 n 的式子，其程式碼如圖 12：

```
P4:= P1 * Coefficient(P3,v,1) - P3 * Coefficient(P1,v,1);
P5:= P2 * Coefficient(P4,u,1) - P4 * Coefficient(P2,u,1);
```

圖 12：P4 和 P5 的定義。研究者自製

為了理解 L 的位置是否可以使用尺規作圖的方式找到，應確認 L 點在坐標平面上的 x 坐標（因 L 點在 x 軸上，故其 y 坐標為 0），若將其表達為 n 的多項式時，次方數是否不大於二次。此時透過 *MAGMA* 程式將 P5 中 n 的多項式中 2 次項係數單獨抽離出來計算，並將其定義為 Q2，其程式碼如圖 13：

$$Q2 := \text{Coefficient}(P5, n, 2);$$

圖 13：Q2 的定義。研究者自製

由於在程式輸出的結果中，發現其 n 的二次項係數中各項皆有 $r_{\triangle ABC}$ (程式中的 R)，因此將其提出，其結果如下：

$$\begin{aligned} & \leq r^2 R^4 a + r^2 R^4 b + r^2 R^4 c + 1/4 r^2 R^2 a^3 - 1/4 r^2 R^2 a^2 b - \\ & 1/4 r^2 R^2 a^2 c - 1/4 r^2 R^2 a^2 b^2 + 5/2 r^2 R^2 a^2 b^2 c - 1/4 r^2 R^2 a^2 c^2 + \\ & 1/4 r^2 R^2 b^3 - 1/4 r^2 R^2 b^2 c - 1/4 r^2 R^2 b^2 c^2 + 1/4 r^2 R^2 c^3 - 1/4 r^2 a^3 b^2 c \\ & + 1/4 r^2 a^2 b^2 c^2 + 1/4 r^2 a^2 b^2 c^2 + 1/4 r^2 a^2 b^3 c - 1/2 r^2 a^2 b^2 c^2 + \\ & 1/4 r^2 a^2 b^2 c^3 - 1/4 r^2 b^4 c + 1/4 r^2 b^3 c^2 + 1/4 r^2 b^2 c^3 - 1/4 r^2 b^2 c^4 - \\ & 2 r^2 R^3 a^2 b^2 c + 1/2 r^2 R^3 a^3 b^2 c - 1/2 r^2 R^3 a^2 b^2 c^2 - 1/2 r^2 R^3 a^2 b^2 c^2 - 1/2 r^2 R^3 a^2 b^3 c + \\ & r^2 R^3 a^2 b^2 c^2 - 1/2 r^2 R^3 a^2 b^2 c^3 + 1/2 r^2 R^3 b^4 c - 1/2 r^2 R^3 b^3 c^2 - 1/2 r^2 R^3 b^2 c^3 \\ & + 1/2 r^2 R^3 b^2 c^4 - 1/4 R^2 a^3 b^2 c + 1/4 R^2 a^2 b^2 c^2 + 1/4 R^2 a^2 b^2 c^2 + \\ & 1/4 R^2 a^2 b^3 c - 1/2 R^2 a^2 b^2 c^2 + 1/4 R^2 a^2 b^2 c^3 - 1/4 R^2 b^4 c + 1/4 R^2 b^3 c^2 + \\ & 1/4 R^2 b^2 c^3 - 1/4 R^2 b^2 c^4, 1 > \end{aligned}$$

圖 14：將 $r_{\triangle ABC}$ 提出後的程式碼。研究者自製

從中可發現若減去 $4rr_{\triangle ABC}^2(2abc(r_{\triangle ABC} - r) - rr_{\triangle ABC}^2(a+b+c))$ ，就可以再提出 $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$ ，本人定義其方程式為 $Q22$ ，並且其程式碼如圖 15：

$$Q20 := Q2 \text{ div } R;$$

$$Q21 := Q20 - (4r^2 R^2 (2a^2 b^2 c^2 (R-r) - r^2 R^2 (a+b+c)));$$

$$Q22 := Q21 \text{ div } ((b+c-a)(a+c-b)(a+b-c));$$

圖 15：Q22 的定義。研究者自製

透過上述的計算，被因式分解後的算式，即

$Q22 = r^2(r_{\triangle ABC}^2 - bc) + 2bcrr_{\triangle ABC} - bcr_{\triangle ABC}^2$ ，因此 $Q2$ (n 的二次項係數) 的式子就會成為 $Q22$ 乘上 $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) + 4rr_{\triangle ABC}^2(2abc(r_{\triangle ABC} - r) - rr_{\triangle ABC}^2(a+b+c))$ ，最後再乘上 $r_{\triangle ABC}$ 。至此可以發現此式當中在 a 、 b 、 c 、 r 給定時， $r_{\triangle ABC}$ 也會是定值，自然可以得知上述 n 次方程式的次方數顯然不大於 2 次。一個數是否可以被尺規作圖，可參考張海潮教授曾經發表過的文章，即參考文獻 [4]。文章中指出，如欲使用尺規作出的數只涉及一元二次方程式的

解，則該數必可尺規作圖。透過上述的說明，得以顯見 $\overline{BL}$ 的長度必然會是一

個 n 的二次方程式的解，故 $\overline{BL}$ 的長度必然可以透過計算方程式的解的方法將

其數值計算出來，因此將 $\overline{BL}$ 的長度透過尺規進行作圖必然可以被實現。然

而，只要 $\overline{BL}$ 能夠被尺規作圖，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作切線的作圖方法，即可將 M 、 N 作出來，意即 $\triangle LMN$ 能透過尺規作圖實現。

在 $\triangle ABC$ 為任意三角形時，探討 r 的上界為何。

由圖 8 的討論可知，當 $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形時，三等圓半徑 (r) 有其上界。此時， $s_{\triangle LMN} = \frac{a+b+c}{4}$ 。

由海龍公式，

$$\begin{aligned} a_{\triangle LMN} &= \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - \frac{a}{2})(s_{\triangle ABC} - \frac{b}{2})(s_{\triangle ABC} - \frac{c}{2})} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)} \end{aligned}$$

根據 Lemma1，

$$r = r_{\triangle LMN} = \frac{2 \times \frac{1}{4} \sqrt{s_{\triangle ABC} (s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}}{s_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow r_{\triangle LMN} = r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}{s_{\triangle ABC}}}$$

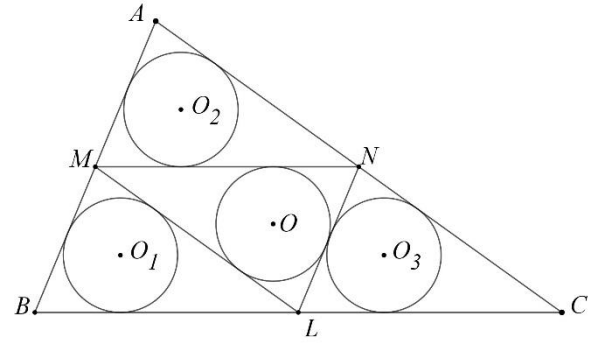


圖 16： $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形。研究者自製

(三) 證明正 n 邊形 $\{A_{n,1}\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{A_{n,2}\}$ 內切圓半徑

($r_{\{A_{n,2}\}}$) 加「與 $\{A_{n,1}\}$ 和 $\{A_{n,2}\}$ 相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$)」，即

$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$ 。若 $\{A_{n,2}\}$ 再內接一層正 n 邊形 $\{A_{n,3}\}$ ，則上式可推廣為

$$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,2}\}-\{A_{n,3}\}} + r_{\{A_{n,3}\}} \dots$$

證明 $r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$ 。

在證明 $r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r$ 過程中，需使用 Lemma4 及 Lemma5。

Lemma4：當多邊形為正多邊形時，則必有內切圓。

Lemma5：當 n 邊形為正 n 邊形時，則其內切圓半徑 $r_{\{A_{n,1}\}} = \frac{a_{\{A_{n,1}\}}}{s_{\{A_{n,1}\}}}$ 。

如圖 17.1，透過證明
 $\{A_{n,2}\} \cong \{O_{n,1}\}$ ，故 $\{A_{n,2}\}$ 和
 $\{O_{n,1}\}$ 的半周長與面積都相同，

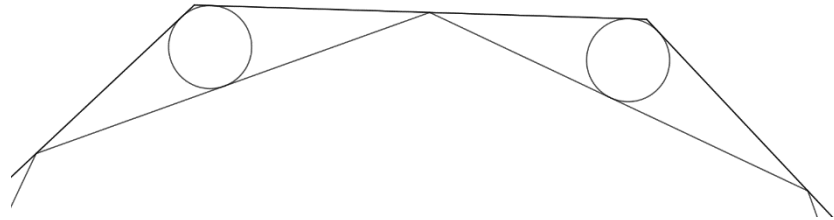


圖 17.1： n 邊形的部份圖。研究者自製

透過 Lemma5，即可知

$$r_{\{A_{n,2}\}} = r_{\{O_{n,1}\}}。$$

$$\therefore r_{\{A_{n,2}\}} = r_{\{O_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,1}\}} - r_{\{A_{n,1}\} - \{A_{n,2}\}}，即 r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\} - \{A_{n,2}\}}。$$

至此，本研究將研究目的三的等式 $r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\} - \{A_{n,2}\}}$ 證明完畢。

說明 $r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,1}\} - \{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,2}\} - \{A_{n,3}\}} + r_{\{A_{n,3}\}} \dots$ 。

若是在 $\{A_{n,2}\}$ 再內接一層正 n 邊形 $\{A_{n,3}\}$ 時，參考圖 17.2，利用上式得知

$$r_{\{B_n\}} = r_{\{C_n\}} + r_{\{B_n\} - \{C_n\}}，$$

$$又 r_{\{A_n\}} = r_{\{B_n\}} + r_{\{A_n\} - \{B_n\}}，$$

$$故 r_{\{A_n\}} = r_{\{A_n\} - \{B_n\}} + r_{\{B_n\} - \{C_n\}} + r_{\{C_n\}}。$$

透過上述的說明可知，形如這樣的推論過程可以透過一層層的內接正 n 邊形繼續推廣。

(四) 在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，將三

圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑從原先的 r 改為

r, gr, r ，求出其 r 的上界，並探討

$r_{\triangle ABC}$ 、 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 之間的關係。

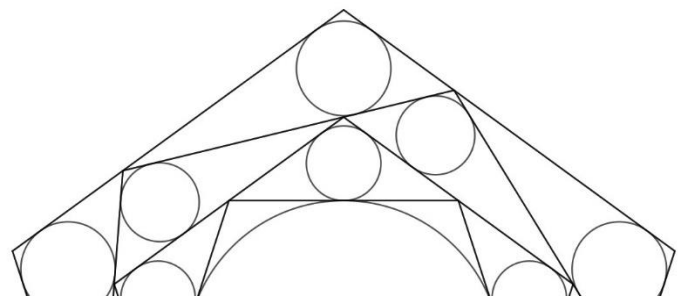


圖 17.2： n 邊形的部分圖。研究者自製

當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，計算其 r 的上界。

$$\Delta AMN \text{ 的內切圓半徑 } \frac{\sqrt{3}}{6} \overline{AM} = gr \Rightarrow \overline{AM} = 2\sqrt{3}gr$$

設正 $\triangle ABC$ 邊長為 a ，故 $\overline{PM} = a - (2g+1)\sqrt{3}r$ 、 $\overline{JL} = \frac{a}{2} - \sqrt{3}r$

$$\Rightarrow \overline{ML} = \overline{MK} + \overline{KL} = \frac{3a}{2} - (2g + 2)\sqrt{3}r$$

在 $\triangle BML$ 中，由餘弦定理可知

$$\cos 60^\circ = \frac{(a - 2\sqrt{3}gr)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2} - (2g + 2)\sqrt{3}r\right)^2}{2 \times (a - 2\sqrt{3}gr) \times \left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2 - 4\sqrt{3}agr + 12g^2r^2 + \frac{a^2}{4} - \left(\frac{9a^2}{4} - 3(2g+2)\sqrt{3}ar + (12g^2 + 24g + 12)r^2 \right)}{a(a - 2\sqrt{3}gr)}$$

$$\Rightarrow a(a - 2\sqrt{3}gr) = 2(-a^2 + (2g + 6)\sqrt{3}ar - (24g + 12)r^2)$$

$$\Rightarrow (48g + 24)r^2 - (12 + 6g)\sqrt{3}ar + 3a^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{(2g+4)\sqrt{3}a \pm \sqrt{((2g+4)\sqrt{3}a)^2 - 4(16g+8)a^2}}{2(16g+8)} = \frac{(\sqrt{3}(m+2) \pm \sqrt{3g^2 - 4g + 4})a}{16g+8}$$

$$\because \overline{PM} = a - (2g + 1)\sqrt{3}r > 0 \Rightarrow r < \frac{a}{(2g + 1)\sqrt{3}}$$

$$\therefore r = \frac{(\sqrt{3}(g+2) - \sqrt{3g^2 - 4g + 4})a}{16g + 8}, \quad 0 < g < \frac{\sqrt{3}a}{6r}$$

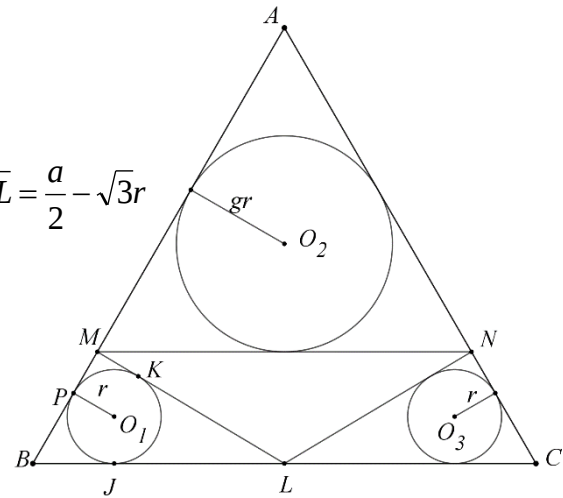


圖 18：當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，
三圓半徑為 r, gr, r

伍、研究結果與討論

一、 $\triangle ABC$ 為任意三角形，其內切圓半徑為 $r_{\triangle ABC}$ ，在 $\triangle ABC$ 內有三個半徑為 r 的等圓與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切， L 、 M 、 N 三點分別在 $\triangle ABC$ 三邊上，且 $\triangle LMN$ 的三邊與三等圓相切。若 $\triangle LMN$ 存在，則其內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r)，等

於 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$)，即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 。此等式證明完成。

二、(一) 已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ ，在 $\triangle ABC$ 是正三角形時，三等圓內切圓半徑 r 的上

界發生在 $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形時，且 $r = \frac{\sqrt{3}}{12}a$ ，此時 $\triangle LMN$ 唯一；當

$r < \frac{\sqrt{3}}{12}a$ 時， $\triangle LMN$ 存在兩個。若 B 為原點， $\overrightarrow{BC}$ 為 x 軸正向，則 L 的坐標為

$\left(\frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 48\sqrt{3}ar + 144r^2}}{6}, 0 \right)$ 。在有了 L 的坐標後，即可透過圓外點作切線的尺

規作圖過程，分別畫出 M 、 N 兩點的相對位置。

(二) 已知 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ ，在 $\triangle ABC$ 是任意三角形時，三等圓內切圓半徑 r 的上界發生在 $\triangle LMN$ 為 $\triangle ABC$ 之中點三角形時，且

$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}{s_{\triangle ABC}}}$ ，此時 $\triangle LMN$ 唯一；而當

$r < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(s_{\triangle ABC} - a)(s_{\triangle ABC} - b)(s_{\triangle ABC} - c)}{s_{\triangle ABC}}}$ 時， $\triangle LMN$ 存在兩個。若 B 為原點， $\overrightarrow{BC}$

為 x 軸正向，則 $\overline{BL}$ 的長度必然可以透過計算方程式的解的方法將其數值計算出

來，由於該方程式的次方數不大於二次，故 $\overline{BL}$ 的長度透過尺規作圖必然可被實

現。然而，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作圓之切線的作圖方法，即可分別畫出 M 、 N 兩點的相對位置，意即 $\triangle LMN$ 能透過尺規作圖實現。

三、證明正 n 邊形 $\{A_{n,1}\}$ 內切圓半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}}$) 等於其內接正 n 邊形 $\{A_{n,2}\}$ 內切圓半徑

($r_{\{A_{n,2}\}}$) 加「與 $\{A_{n,1}\}$ 和 $\{A_{n,2}\}$ 同時相切的 n 個等圓的半徑 ($r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$)」，即

$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}}$ 。若 $\{A_{n,2}\}$ 再內接一層正 n 邊形 $\{A_{n,3}\}$ ，則上式可推廣為

$r_{\{A_{n,1}\}} = r_{\{A_{n,1}\}-\{A_{n,2}\}} + r_{\{A_{n,2}\}-\{A_{n,3}\}} + r_{\{A_{n,3}\}}$ 。且上式顯然可透過一層層的內接正 n 邊形繼續推廣。

四、在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，將三圓 O_1 、 O_2 、 O_3 的半徑從原先的 r 改為 r ，

gr, r ，求出其 r 的上界，即 $r = \frac{(\sqrt{3}(m+2) - \sqrt{3g^2 - 4g + 4})a}{16g + 8}$ ， $0 < g < \frac{\sqrt{3}a}{6r}$ 。

陸、討論

一、近期的新發現

在查找與本研究相關文章時，意外發現在 2018 年以色列國內的數學奧林匹亞的第六題，即參考文獻 [9]，該問題提及的圖與本研究之圖 1 相同，都是在 $\triangle ABC$ 內有三個等圓與 $\triangle ABC$ 的其中兩邊相切，在 $\triangle ABC$ 三邊上各找到一點，使得三點形成的三角形各邊與三等圓分別相切，這樣的三角形有兩個 (即右圖中的 $\triangle MNK$ 與 $\triangle PQR$)，試證此兩個三角形的內切圓半徑相等。其實這個競賽試題透過本研究的主定理就可以自然的發現。

In the corners of triangle ABC there are three circles with the same radius. Each of them is tangent to two of the triangle's sides. The vertices of triangle MNK lie on different sides of triangle ABC , and each edge of MNK is also tangent to one of the three circles. Likewise, the vertices of triangle PQR lie on different sides of triangle ABC , and each edge of PQR is also tangent to one of the three circles (see picture below). Prove that triangles MNK, PQR have the same inradius.

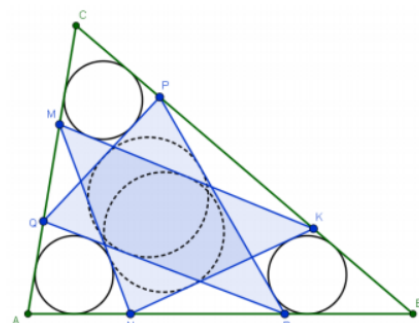


圖 19：Israel 2018 Q6。參考文獻 [9]

改變圖形的分割方式之嘗試。

在本篇研究中，將類似的分割方式從 $\triangle ABC$ 推廣至正 n 邊形時，發現仍然有類似於主定理的性質後，本研究嘗試不同的分割方式試圖尋找是否有相關或類似的性質時，進行了如下的嘗試：在正六邊形上，每隔一個頂點連線，所連成之「正三角形內切圓半徑」與「原正六邊形各邊和內部形成的正三角形相切之三等圓半徑」相加其實並不等於原正六邊形的內切圓半徑。

將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體，探討在立體圖形中，是否依然擁有類似於主定理的性質。

除了在平面上嘗試不同的分割方式，本研究其實也有嘗試過從平面改為立體圖形，並以相同的分割方式將其分割，如圖 20，令正四面體 $\{B_4\}$ 邊長為 $2\sqrt{3}a$ ，並且 A_2 為原點， $\overrightarrow{A_2A_3}$ 為 x 軸正向。令 $A_3(2\sqrt{3}a, 0, 0)$ 、 $A_4(\sqrt{3}a, 3a, 0)$

$\Rightarrow \triangle A_2A_3A_4$ 之重心坐標為 $(\sqrt{3}a, a, 0)$ 。令 $A_1(\sqrt{3}a, a, 2\sqrt{2}a)$ 。

$\Rightarrow$ 正四面體 $\{B_4\}$ 之內切球半徑為 $\frac{1}{4} \times \text{高} = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 。

接著討論當 $\{B_4^*\}$ 的六個點皆為正四面體 $\{B_4\}$ 六個邊上之中點時，即

$$B_1\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \sqrt{2}a\right), B_2(\sqrt{3}a, 3a, \sqrt{2}a),$$

$$B_3\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \sqrt{2}a\right), B_4\left(\frac{3\sqrt{3}a}{2}, \frac{3a}{2}, 0\right),$$

$$B_5\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{3a}{2}, 0\right), B_6(\sqrt{3}a, 0, 0)。$$

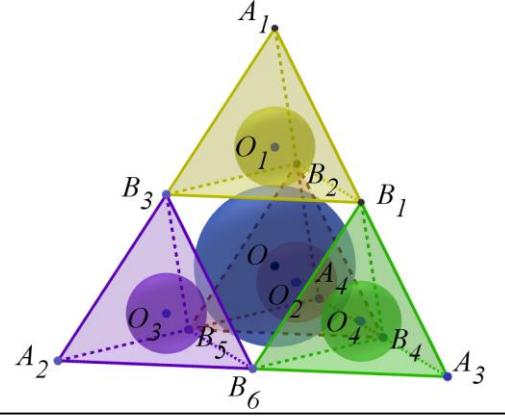


圖 20：將正 $\triangle ABC$ 延伸至正四面體時之示意圖

在繪製出如圖 20 之圖形後，其內接八面

體 $\{B_4^*\}$ 為了確認是否會有一顆與八個面相切的球，本研究先將此八面可被分為兩組，

其中一組是由黃、綠、紅、紫色的面所組成的，另一組則是由剩下沒有顏色的四個面所組成的。首先由黃、綠、紅、紫色的面所組成的內切球球心應與 $\triangle B_3B_5B_6$ 、 $\triangle B_1B_4B_6$ 、 $\triangle B_2B_4B_5$ 、 $\triangle B_4B_5B_6$ 之四個重心所形成之新的正四面體之外接球球心共點。

$$\triangle B_3B_5B_6 \text{ 之重心坐標為 } \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right), \triangle B_1B_4B_6 \text{ 之重心坐標為 } \left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right),$$

$$\triangle B_2B_4B_5 \text{ 之重心坐標為 } \left(\sqrt{3}a, \frac{5a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3}\right), \triangle B_1B_2B_3 \text{ 之重心坐標為 } (\sqrt{3}a, a, \sqrt{2}a), \text{ 故此}$$

四個重心所形成之正四面體的外接球球心坐標為

$$\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} + \frac{4\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a + \sqrt{3}a, \frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{5a}{3} + a, \frac{\sqrt{2}a}{3} + \frac{\sqrt{2}a}{3} + \frac{\sqrt{2}a}{3} + \sqrt{2}a\right) = \left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right),$$

由於四個重心所形成的正四面體的外接球球心與四個重心所在平面之內切球球心共點。

因此，黃、綠、紅、紫色四面所組成的內切球球心坐標為 $\left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$ ，且其半徑為

$$\frac{\sqrt{2}a}{2}。$$

同理，剩下沒有顏色的四個面所組成的內切球球心應與 $\triangle B_2B_3B_5$ 、 $\triangle B_1B_3B_6$ 、 $\triangle B_1B_2B_4$ 、 $\triangle B_4B_5B_6$ 之四個重心所形成之新的正四面體之外接球球心共點。

$$\triangle B_2B_3B_5 \text{ 之重心坐標為 } \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}, \frac{4a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right), \triangle B_1B_3B_6 \text{ 之重心坐標為 } \left(\sqrt{3}a, \frac{a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right),$$

$\Delta B_1B_2B_4$ 之重心坐標為 $\left(\frac{4\sqrt{3}a}{3}, \frac{4a}{3}, \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)$ ， $\Delta B_4B_5B_6$ 之重心坐標為 $(\sqrt{3}a, a, 0)$ ，故此

四個重心所形成之正四面體的外接球球心坐標為

$$\left(\frac{2\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a + \frac{4\sqrt{3}a}{3} + \sqrt{3}a, \frac{4a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4a}{3} + a, \frac{2\sqrt{2}a}{3} + \frac{2\sqrt{2}a}{3} + \frac{2\sqrt{2}a}{3} + 0\right) = \left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right),$$

由於四個重心的正四面體的外接球球心與四個重心所在平面之內切球球心共點，因此，

四個沒有顏色的面所組成之內切球球心坐標為 $\left(\sqrt{3}a, a, \frac{\sqrt{2}a}{2}\right)$ ，且其半徑為 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。

由上述計算發現黃、綠、紅、紫色四面所組成之內切球與四個沒有顏色的面所組成之內切球是同一顆，故內接八面體 $\{B_4^*\}$ 有一顆內切球，且其半徑為 $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ 。與原正四面體的內切球半徑相同，故延伸到立體圖形後並沒有類似於平面的性質，因此立體圖形沒有與主定理類似的性質。

探討 ΔLMN 與橢圓的關聯。

在本篇研究中，偶然地發現當 ΔLMN 為 ΔABC 的中點三角形時， L 、 M 、 N 、 O_1 、 O_2 、 O_3 會有六點共橢圓的性質，如圖 21。於是本研究便開始思考，若 ΔLMN 不是 ΔABC 的中點三角形，是否仍具有六點共橢圓的性質？但是透過 Pascal 定理 (圓錐曲線的內接六邊形其三組對邊之交點必共線) 驗證後，發現

L 、 M 、 N 、 O_1 、 O_2 、 O_3 六點不會共橢圓。

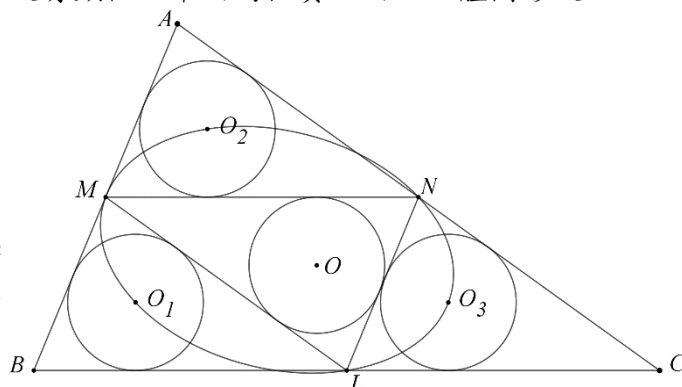


圖 21：當 ΔLMN 為 ΔABC 的中點三角形時，六點共橢圓

將本研究原先探討的內切圓延伸至外接圓，探討 ΔLMN 與橢圓的關聯。

密克點：在 ΔABC 中，在三邊上任意地各取一點 P 、 Q 、 R ，如圖 22，則 ΔAQR 、 ΔBQP 、 ΔCPR 必交於一點 O ， O 即稱為密克點。

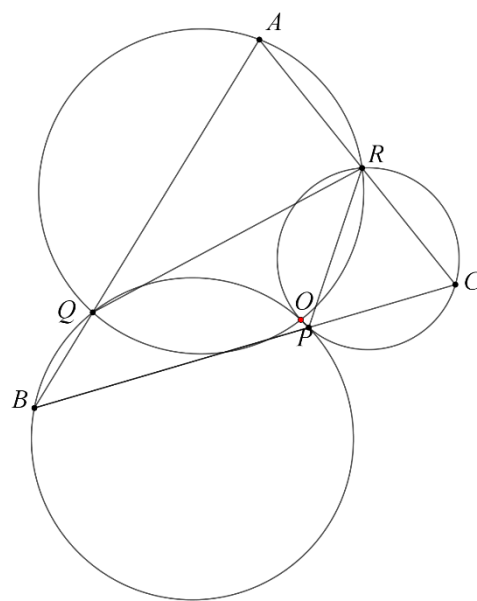


圖 22：密克點定義之示意圖

另外，本研究也發現當 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 三個三角形的外接圓一樣大時，三個三角形的外接圓必有一交點，此交點即密克點，且此時密克點恰好會是 $\triangle LMN$ 的垂心，並且此時 L 、 M 、 N 及三個外接圓圓心也會有共橢圓的性質，即圖 23.1、23.2。

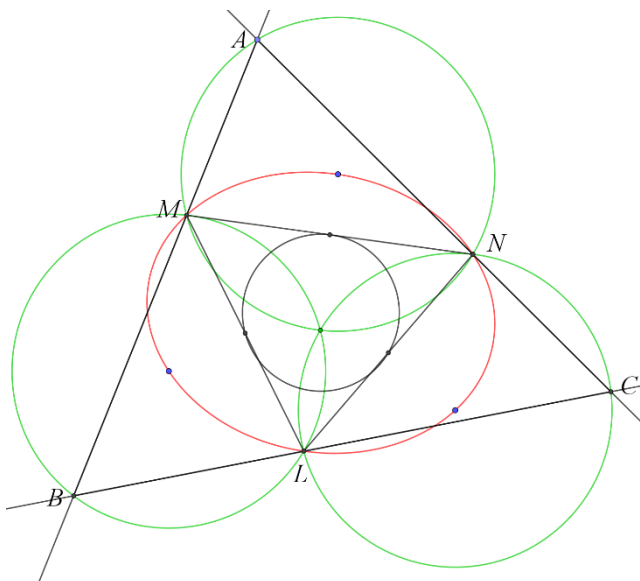


圖 23.1：當 $\triangle LMN$ 在 $\triangle ABC$ 內部時，密克點與 $\triangle LMN$ 的垂心共點，且外面三個三角形之外接圓的圓心與 L 、 M 、 N 六點共橢圓。

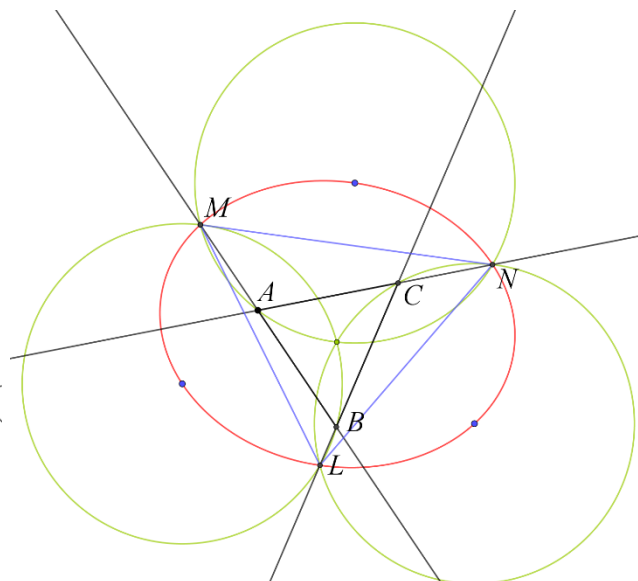


圖 23.2：當 $\triangle LMN$ 在 $\triangle ABC$ 外部時，密克點與 $\triangle LMN$ 的垂心共點，且外面三個三角形之外接圓的圓心與 L 、 M 、 N 六點共橢圓。

當 $\triangle ABC$ 為正三角形時，探討三個等圓與 $\triangle LMN$ 切點的軌跡。

本研究也偶然發現在 $\triangle ABC$ 為正三角形的前提下，三個等圓與 $\triangle LMN$ 三個邊的交點軌跡，類似於三葉線的軌跡，如圖 24。在圖中三等圓與 $\triangle LMN$ 、 $\triangle L'M'N'$ 三邊的切點，最終會聚合在當 r 是最大值時， $\triangle LMN$ 僅有一個的情況，但目前透過軌跡的比照，認為這個軌跡雖然是與三葉線接近，但並不恰是三葉線的軌跡，目前的猜想是這個軌跡可能會是將三葉線的軌跡方程式的係數經過一點修改後而得，由於尚未對此有一個完整的結果，未來也會持續往這個方向去探討，並試圖找出此軌跡正確的方程式。

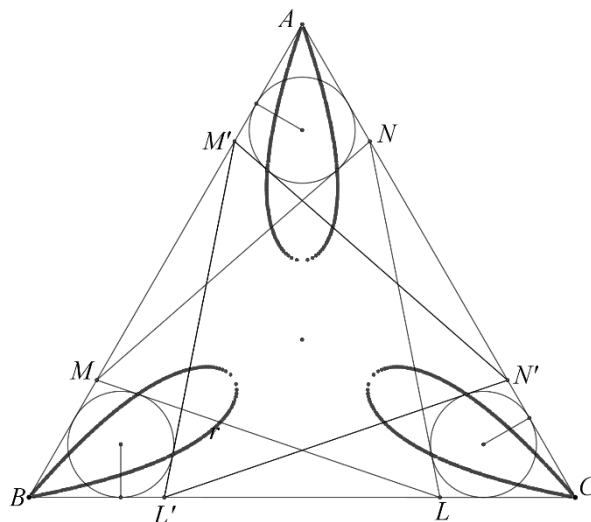


圖 24：三等圓與 $\triangle LMN$ 之切點軌跡

二、未來展望

在研究目的二中，本研究對正 $\triangle ABC$ 三邊上 L 、 M 、 N 的相對位置是透過解析幾何的方法，計算 L 的坐標位置，進而透過圓外一點作切線的尺規作圖過程，完成透過尺規作圖找到 L 、 M 、 N 的目標。換言之，若沒有計算出 L 的坐標位置，後續的作圖仍無法

完成。未來本研究想透過純幾何作圖的方法找出 L 、 M 、 N 三點的相對位置。另外，本研究在尋找其他作圖方式時，有做過如下的嘗試：先計算 $\overline{LM}$ 和圓 O_1 的切點，此切點會依三等圓之內切圓半徑 r 的變大與縮小，產生不同的切點位置，在觀察其不同位置所造成的軌跡時，與三葉線十分雷同，雖尚未確定該軌跡方程式為何，未來或許可以嘗試朝切點軌跡方程式的研究方向努力。

在研究目的四中，本研究原想探討 $r_{\triangle ABC}$ 、 $r_{\triangle LMN}$ 和 r 三個變量之間的關係，但目前還未找到其關聯，未來將會持續探索之。

在前面的討論中，有提到「當 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 三個三角形的外接圓一樣大時， L 、 M 、 N 及三個外接圓圓心也會有共橢圓的性質」，目前尚未有想法去完成這個發現的證明，但未來將會著手證明這個性質。

柒、結論

在尋找研究題目時，看到了一篇網路貼文(如圖 1)，文中提及圓 O_1 、 O_2 、 O_3 為等圓， $\triangle ABC$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle ABC}$) 等於 $\triangle LMN$ 內切圓半徑 ($r_{\triangle LMN}$) 加三等圓半徑 (r) 時 (即 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$)。因為該篇文章僅提供了此等式但並未提及證明或任何說明文字，這使我好奇該等式的正確性，也好奇若該等式正確，應如何進行該等式的證明。研究初期，我使用 *Geogebra* 數學軟體嘗試去繪製此圖形。一開始因為不了解該圖形的作圖要領，也不清楚具備該等式時應有的性質為何，只能透過軟體不斷嘗試，在 $\triangle ABC$ 三邊上各取一點 L 、 M 、 N ，此時光是要控制 $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 三個三角形的內切圓半徑並使之相等就花了一番努力。顯然，在移動 L 、 M 、 N 三點的過程中，不但 $\triangle LMN$ 的內切圓半徑 $r_{\triangle LMN}$ 會有所改變， $\triangle AMN$ 、 $\triangle BML$ 、 $\triangle CLN$ 三個三角形也會隨著 L 、 M 、 N 三點的位置變化導致 r 可能不盡相同。但透過不斷地嘗試，我發現在 r 近似相等 (因為縱使透過肉眼看起來是一樣的，但總會在小數點後的某一位就看出差異) 且 $\triangle LMN$ 存在的前提下， $r_{\triangle ABC}$ 的數值確實幾乎等於 $r + r_{\triangle LMN}$ 。透過 *Geogebra* 繪圖的實驗過程也讓我有理由相信該等式 $r_{\triangle ABC} = r_{\triangle LMN} + r$ 是對的、可以被證明的，因而開啟了本研究的證明過程。

然而在研究過程中，我並不是利用純幾何作圖的方式，而是使用解析幾何的方法，計算出所需的點坐標，進而完成本篇的研究目的。計算的過程中，時常因為變量過多使得算式過於繁雜且無法簡潔地化簡，花了相當多的時間在思考該透過什麼手段減少本篇研究的變量。本研究一開始先是討論特殊三角形的相關性質後再延伸討論至任意三角形，本研究最終也透過 *MAGMA* 程式計算 $\overline{BL}$ 的長度，在把 $\overline{BL}$ 的長度表示成 n 的多項

式後，確認了其次方數不大於二次，故 $\overline{BL}$ 的長度可被尺規作圖。然而，在找到了 L 點的位置以後，透過圓外點作切線的作圖方法，即可將 M 、 N 作出來，意即 $\triangle LMN$ 能透過尺規作圖實現。

在本研究的研究目的三中，將三角形推廣至多邊形，但由於不是每一個多邊形都會有內切圓，所以本研究目前只有針對正 n 邊形討論，未來將會嘗試建構一個保證會有內切圓的非正 n 邊形之多邊形並持續進行研究之。在討論的章節中，本研究闡述了將原題從二維嘗試推廣至三維，但由於正四面體 $\{B_4\}$ 的內接剩餘體 $\{B_4^*\}$ 的內切球和正四面體 $\{B_4\}$ 之內切球是同一顆內切球，因此 $r_{\{B_4\}} \neq r_{\{B_4^*\}} + r$ ，也就代表本研究在平面上得到的主定理，在立體圖形中不會有類似的性質。

幾何的世界十分廣闊，本研究只完成了其中一小部分，但對我而言，本研究的意義非凡，即使現在對於研究中可延伸的方向依舊充滿著許多未知數，相信隨著我在數學領域上的不斷學習，未來必能在幾何領域中慢慢探索且更加了解之。

捌、參考文獻及資料

本研究作品中，除了圖 1 (參考文獻 [3]，研究者重製)、圖 19 (參考文獻 [9]) 之外，其餘皆為研究者自行繪製。

- [1] 史丹福 (民 107)，日本寺廟的幾何難題，取自 <https://reurl.cc/m0XY6l>
- [2] 周博元 (2024 年)，多「圓」文化的延伸——Japanese Temple Geometry Problem，取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/tisf/2024/pdf/TISF2024-010043.pdf>
- [3] 姜很羣 (民 110)，與切圓有關的幾何趣題，取自 <https://zhuanlan.zhihu.com/p/341824742>
- [4] 張海潮 (民 112)，尺規作圖的代數面，取自 <https://reurl.cc/qrqmQ0>
- [5] 莊健祥 (民 100)，數學傳播，第三十五卷，第四期，第 82-85 頁
- [6] 馮玉華 (民 110)，三角形的內切圓半徑與三角形面積。國中數學第五冊數學講義 (頁 165)。台南市：翰林出版事業股份有限公司
- [7] 燈火闌珊 (民 97)。日本的寺廟幾何：天算不如人算。Udn 網路城邦。
- [8] Angela Drei (2012). Four Incircles in an Equilateral Triangle, a Sangaku. from <https://reurl.cc/0Z25MA>
- [9] AoPSOnline (2019). Israel 2018 Q6 - Equal circles inside a triangle, from <https://reurl.cc/9vxD2Y>

附錄

MAGMA 連結：https://drive.google.com/file/d/1MhB_LStEwYyvWGGFet-mOCi6nlt6YEel/view?usp=sharing

【評語】 010017

本作品的主要貢獻在於使用平面幾何與三角函數證明下述定理：給定一個三角形，將它分成四個小三角形，其中三個在角上，一個在內部。作者得到一個有趣的結果：假設三個角上的三角形的內切圓都一樣大，則此相同半徑加上內部小三角形的內切圓半徑，等於原三角形的內切圓半徑。作者接著以電腦程式輔助作形式運算，證明以下結果：給定小三角形內切圓半徑時，內部三角形圖形若存在可以用尺規作圖畫出。但作者沒能透過高等代數給出解析性的證明。此外，作者聲稱當三個角上的小三角形全等時，其內切圓半徑會達到最大值，但卻沒有給出嚴謹的證明。本作品雖然得到一些不錯的結論，但也有一些結論是可以用高等代數得到，也有一部分相當直觀可以事先預想到的(例如正多邊形上的各角上有一內切圓的情況)。整體而言，作品深度仍有加強的空間。