

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010016
參展科別	數學
作品名稱	圓緣相連—關於忍者通道性質之探討
得獎獎項	一等獎 美國國際科技展覽會 ISEF

就讀學校	高雄市立高雄高級中學
指導教師	王信元
作者姓名	李家睿

關鍵詞	<u>超立方體、動態規劃、組合極值</u>
-----	-----------------------

作者簡介



我是高雄中學科學班的學生李家睿，有幸參與這次國際科展的展覽，數學一直是最感興趣的科目及領域，能有機會分享自己的想法給評審及各位高手是我的榮幸，期待五天的國際科展可以享受其中。

2025 年台灣國際科學展覽會

研究報告

科 別：數學科

作品名稱：圓緣相連—關於忍者通道性質之探討

關 鍵 詞：超立方體、動態規劃、組合極值

編 號：

摘要

本作品由 2023 年 IMO 的第五題出發，希望探索在忍者通道中的其他性質，首先思考改變每排中放入的球數並觀察規律，進而推廣到三維圓圈塔中的性質，最後使用 hyper-cube(超立方體)的情況進行一般化的推廣與構造的優化，完成最小值問題的求解另外也對於特例部分探索解的總數。

Abstract

This study is inspired by the fifth problem of the 2023 International Mathematical Olympiad (IMO) and aims to explore additional properties within the ninja tunnel. We begin by investigating variations in the number of balls placed in each row and observing the resulting patterns. This leads to an extension of our analysis to the properties of three-dimensional circular towers. Ultimately, we generalize our findings to the case of hyper-cubes, optimizing the construction process to address the minimum value problem. Additionally, we examine the total number of solutions for specific cases.

壹、研究動機

於練習 IMO 競賽試題時，特殊的第五題立刻引起了我們的興趣，看似雜亂無章，有著許多放置情況的日式三角形，在排數足夠大之情況下卻可以保證有任意長度的忍者通道，也因此，我們希望可以探索更多關於忍者通道的性質，並嘗試思考，不同的放置情況與高維度情況下，是否也能有如此漂亮之結果？

貳、研究目的

- (1) 討論每排放入不同球數，並對於所得結果進行探究
- (2) 討論並證明三維情況下單球與多球之解答
- (3) 採用 hyper-cube，並討論高維度單球與多球堆體下界
- (4) 討論原始題目中在某些特定排數下達到最小值時的可能方法數

參、研究器材與設備

- (1) 電腦軟體：Geogebra, 小畫家, C++ 17, wolfram alpha
- (2) 紙，筆

肆、研究過程或方法

*以下為方便討論，若有未定義之項次，如 $T_{1,0}$ 則均代表0

(一)原始題目：

(2023 IMO P5)

設 n 為正整數。日式三角形是將 $1 + 2 + \cdots + n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 由上往下數的第 i 列有 i 個圓，且每一列都有一個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道，是一串由最上列到最下列的 n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。試找出 k 的最大值(以 n 表示)，保證在每一個日式三角形中，有一條包含至少 k 個紅色圓的忍者通道。

解答：

答案為 $M_i = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$ ，以下給出其證明

首先我們先聯想到一個經典問題：

從方格表中的左下角走至右上角且每次僅能向上與向右之方法總數有多少？

明顯的，由於每一格的答案只與左邊與下面有關係，因此直接相加即可(如圖 1)

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

圖 1 經典問題的解答

觀察原始問題，注意走至某一格只可能從上一行的左邊與右邊走至該格，因此希望利用類似動態規劃(dynamic programming)的方法進行思考，先做如下定義：

- 定義 $T_{n,m}$ 為抵達日式三角形第 n 列第 m 個時，走過最多紅色圓的忍者通道數量
- 若第 n 列第 m 個為紅色，則定義 $W_{n,m} = 1$ ，否則 $W_{n,m} = 0$
- T_i 代表集合 $\{T_{i,1}, T_{i,2}, \dots, T_{i,i}\}$
- $S_i = T_{i,1} + T_{i,2} + \dots + T_{i,i}$
- $M_i = \max(T_{i,1}, T_{i,2}, \dots, T_{i,i})$

接著由題目敘述，可以發現 $T_{i,j} = \max(T_{i-1,j-1}, T_{i-1,j}) + W_{i,j}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i$

對每個日式三角形，包含最多個紅色圓的忍者通道的數量為 $\max(T_{n,i}), 1 \leq i \leq n$ ，以如下例子作為說明：

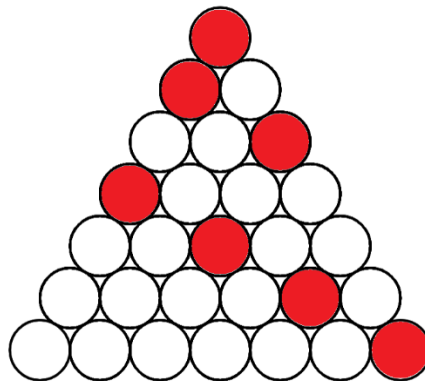


圖 2 $n=7$ 的一個塗色例子

此圖的 $T_{i,j}$ 值如下表所示

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
$i = 1$	1						
$i = 2$	2	1					
$i = 3$	2	2	2				
$i = 4$	3	2	2	2			
$i = 5$	3	3	3	2	2		
$i = 6$	3	3	3	3	3	2	
$i = 7$	3	3	3	3	3	3	3

表 2

而在表 2 中最多可以通過 3 個紅色圓

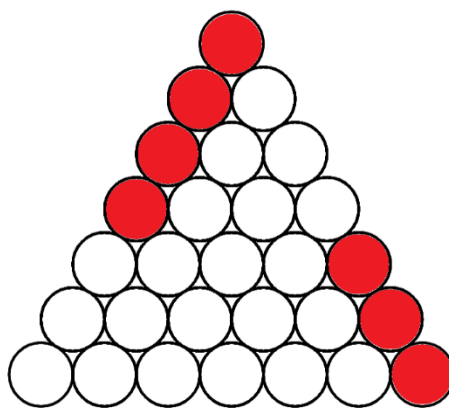
接著，藉由對於 $T_{i,j}$ 性質的觀察，可以發現每一排的結果只取決於上一排。

再次觀察圖 2 中的 T_i, S_i, M_i

	T_i	S_i	M_i
$i = 1$	{1}	1	1
$i = 2$	{2,1}	3	2
$i = 3$	{2,2,2}	6	2
$i = 4$	{3,2,2,2}	9	3
$i = 5$	{3,3,3,2,2}	13	3
$i = 6$	{3,3,3,3,3,2}	17	3
$i = 7$	{3,3,3,3,3,3,3}	21	3

表 3

由上表觀察知， $S_3 = S_2 + M_2 + 1$ ， $S_4 = S_3 + M_3 + 1$ ，...



$n = 7$ 的另外一個例子

	T_i	S_i	M_i
$i = 1$	{1}	1	1
$i = 2$	{2,1}	3	2
$i = 3$	{3,2,1}	6	3
$i = 4$	{4,3,2,1}	10	4
$i = 5$	{4,4,3,2,2}	15	4
$i = 6$	{4,4,4,3,2,3}	20	4
$i = 7$	{4,4,4,4,3,3,4}	26	4

表 4

由表 1 至表 4 可得以下結論：

引理 1. $S_i \geq S_{i-1} + M_{i-1} + 1 \forall i \geq 0$

證明：

取 k 滿足 $T_{i-1,k} = M_{i-1}$ ，(即 $\{T_{i-1,1}, T_{i-1,2}, \dots, T_{i-1,i-1}\}$ 中任一最大值的下標)

則易知 $T_{i,k} = T_{i,k-1} = T_{i-1,k} = M_{i-1}$

接著將所有數字分為兩部分進行估計：

- $T_{i,j} \geq T_{i-1,j} \forall j < k$
- $T_{i,j} \geq T_{i-1,j-1} \forall j > k+1$

又 $S_i = \sum_{j=1}^i T_{i,j} = \sum_{j=1}^{k-1} T_{i,j} + M_{i-1} + M_{i-1} + \sum_{j=k+1}^n T_{i,j} \geq \sum_{j=1}^{k-1} T_{i-1,j} + M_{i-1} + 1$
(+1 是因為每排新增一個紅球)，故有 $S_i \geq S_{i-1} + M_{i-1} + 1$

引理 2. $M_i \geq \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$ ，其中 $\lceil x \rceil$ 為 ceil function

證明：由鴿籠原理即得

由於起始時為 $S_1 = 1, M_1 = 1$ ，故可由引理 1,2 得到以下表格

	S_i 最小可能	M_i 最小可能
$i = 1$	1	1
$i = 2$	3	2
$i = 3$	6	2
$i = 4$	9	3
$i = 5$	13	3
$i = 6$	17	3
$i = 7$	21	3
$i = 8$	25	4

可以發現對於任意的 i ，若正整數 k 滿足 $2^k \leq i < 2^{k+1}$ ，則 M_i 的最小可能為 k ，接著以數學歸納法證明此假設

定理 3. $M_i \geq \lfloor \log_2 i \rfloor + 1$ ，其中 $\lfloor x \rfloor$ 為 floor function，且 $S_{2^{k+1}-1} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k + 1)$

證明：

對 $k = \lfloor \log_2 i \rfloor$ 的值做數學歸納法

對於 $k = 0$ 的情況，只有可能 $i = 1$ ，由題目可知必有 $T_1 = \{1\}$ ， $S_i = 1$ ，故 $M_1 = 1$
命題成立

假設對於所有 i 滿足 $\lfloor \log_2 i \rfloor = k$ ，都有 $M_i \geq k + 1$ ，且 $S_{2^{k+1}-1} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k + 1)$ ，
欲證對於所有 i 滿足 $\lfloor \log_2 i \rfloor = k + 1$ ，都有 $M_i \geq k + 2$ ，且 $S_{2^{k+2}-1} \geq (2^{k+2} - 1) \cdot (k + 2)$

由引理 1，和歸納假設，可以知道 $S_{2^{k+1}} \geq (2^{k+1} - 1) \cdot (k + 1) + k + 1 + 1 = 2^{k+1} \cdot (k + 1) + 1$

再由引理 2，可以知道 $M_{2^{k+1}} \geq \left\lceil \frac{2^{k+1}(k+1)+1}{2^{k+1}} \right\rceil = k + 2$

對於 $2^{k+1} < i \leq 2^{k+2} - 1$ ，可以知道 $S_i - S_{i-1} \geq M_{i-1} + 1 \geq k + 3$ ，故自然 $M_i \geq k + 2$
另外 $S_{2^{k+2}-1} \geq S_{2^{k+1}} + (2^{k+2} - 2^{k+1} - 1) \cdot (k + 3) = 2^{k+1} \cdot (k + 1) + 1 + (2^{k+2} - 2^{k+1} - 1) \cdot (k + 3)$

因此 $S_{2^{k+2}-1} \geq (2^{k+2} - 1)(k + 2)$ ，故原命題成立。

至此，完成了下界的估計，接著希望構造一種滿足下界的塗色方法，這時注意到引理 2 中的 S_i 與估計中的情況相當吻合，因此或許形如引理 2 的構造方法是可行的。

定理 4. 存在 $M_i \leq \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$ 的構造

證明：

設 (i, j) 代表將第 i 行第 j 格塗成紅色

以下證明 $(1,1), (2,1), (3,3), (4,1), (5,3), (6,5), (7,7) \dots$ 的塗色法可以符合題意，即將 $(i, 2(i - 2^{\lfloor \log_2(i) \rfloor}) + 1)$ 塗成紅色成立

注意到可以證明若 $\lfloor \log_2(i) \rfloor$ 的值相同，則這些紅色圓圈彼此互相不能到達，因為若 $\lfloor \log_2(i) \rfloor$ 相同，則相當於塗色 $(i, 2i + 1 - c)$ ， c 是常數，而由相鄰兩排移動最多只能向右移動一格，假設存在為 a, b ，則有 $(a, 2a + 1 - c), (b, 2b + 1 - c)$ 可以互相抵達，因此 $2(b - a) \leq b - a$ ，故 $a = b$ ，矛盾

因此最多只有 $0, 1, 2, \dots, \lfloor \log_2(i) \rfloor = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$ 種不同的取值

最後，由定理 3 與定理 4，可以知道原題答案即為 $M_i = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$ ■

(二)每排放置多球的情況

在開始討論每排放置更多球的情況之前，為了簡化討論並同時呈現題目有趣的性質，先證明一個性質

性質 1 令 $f(n) = k$ 代表原題目中的答案，則 $f(n)$ 遞增且 $f(n+1) - f(n) \leq 1$

證明：

注意到若前 n 排已可保證路徑中有至少 k 個紅球，則不論下一排的配置情況，至少可以選擇與前 n 排相同的路徑以走訪至少 k 個紅球，因此 $f(n+1) \geq f(n)$ ，遞增證畢

另外，因為 $f(n) = k$ ，故必定存在一種構造只能最多走訪 k 個紅球，選擇該配置情況，因為下一排中最多只能走訪最多新走訪一個紅球，故 $f(n) \leq k + 1$ ，因此 $f(n+1) - f(n) \leq 1$

因此，可以將原始題目改成如下版本：

(延伸至多球情況下的題目)

設 m 為正整數，定義 m -日式三角形是將 $1 + 2 + \dots + n$ 個圓排成正三角形的形狀，使得對所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 由上往下數的第 i 列有 i 個圓，且前 $m - 1$ 列每列所有圓形均不塗色，之後每一列都有 m 個圓塗成紅色。在日式三角形中，所謂的忍者通道，是一串由最上列到最下列的 n 個圓，其中每個圓連到其下一列與之相鄰的兩圓之一。

設 k 為正整數。試找到最小正整數 n ，使得保證在每一個 m -日式三角形中，有一條包含至少 k 個紅色圓的忍者通道。

首先，先觀察， $T_{i,j} = T_{i-1,j} + T_{i-1,j-1} + W_{i,j}$ 依然是正確的，唯一有改變的是 $S_i \geq S_{i-1} + W_{i-1} + m$ ，因為每排至少會新增 m 個紅色球，證明方式與引理 1 類似。

利用此觀察，可以再次建立 S_i, M_i 最小可能的表格

($m = 2$)	S_i 最小可能	M_i 最小可能
$i = 1$	0	0
$i = 2$	2	1
$i = 3$	5	2
$i = 4$	9	3
$i = 5$	14	3
$i = 6$	19	4
$i = 7$	25	4
$i = 8$	31	4
$i = 9$	37	5

注意到在修改後的題目下，對於 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ，答案分別為 $n = 2, 3, 4, 6, 9$ 並沒有與原問題 ($m = 1$) 的情況下有相同的明顯規律，也因此討論求和情況與使用數學歸納法將較為麻煩

為解決計算上的困難與進行結果的討論，首先需要先優化估計部分，並於估計完成後一併給出構造之方法：

若存在構造可以滿足每一層總和都符合 $S_{i+1} = S_i + M_i + m$ ($i \geq m$)，且 $M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$ ，則此

構造必可使 S_i 最小，又因 $M_i \geq \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$ ，故答案亦最小，即為符合估計下界的構造。但，

於構造中計算 S_i 以確定符合 $M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$ 的條件也不甚方便，因此可以使用以下這個較嚴格的條件進行確認

引理 5

若 $T_i = \{T_{i,1}, T_{i,2}, \dots, T_{i,i}\}$ 滿足集合中只有至多兩種不同取值，且兩種取值相差 1，所有較大取值均相連，或是全部相同， $\forall i \geq m \in \mathbb{N}$ ，則此為符合答案的最小構造，且不論 m 的取值，均存在相對應的構造

證明：

首先驗證 $M_i = \left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$ ，因為只有至多兩種相差為 1 的取值，故明顯只有可能為 $\left\lfloor \frac{S_i}{i} \right\rfloor$ 或 $\left\lceil \frac{S_i}{i} \right\rceil$

接著確認符合 $S_{i+1} = S_i + M_i + m$ ($i \geq m$)，由於前述條件，可以將

T_i 表示成 $\{a, \dots, a, a+1, \dots, a+1, a, \dots, a\}$ 的形式，因此

$T_{i+1} = \{a, \dots, a, a+1, \dots, a+1, a, \dots, a\}$ 再加上 m 個位置新增 1，故總共增加 $a+1+m = M_i + m$ ，得證。

證明保證存在構造方式，首先當 $i = m$ 時，明顯可以成立，只需將整排全部選取，此時 $T_m = \{1, 1, \dots, 1\}$ 即可

假設 $i = k$ 時存在構造方式，欲證當 $i = k + 1$ 時仍存在構造方式，則只需觀察上述證明中， $T_{k+1} = \{a, \dots, a, a + 1, \dots, a + 1, a, \dots, a\}$ 另外在 m 個位置加上1，而加入1前仍符合題目條件，因此只需將1每次加在 $a + 1$ 的旁邊即可，若整排均已變 $a + 1$ ，則可以從最左邊開始依次改為 $a + 2$ ，如此仍會符合條件

有了引理 5 的幫助，可以構造出 $m = 2$ 和 $m = 3$ 的塗色答案(如圖 4、5)

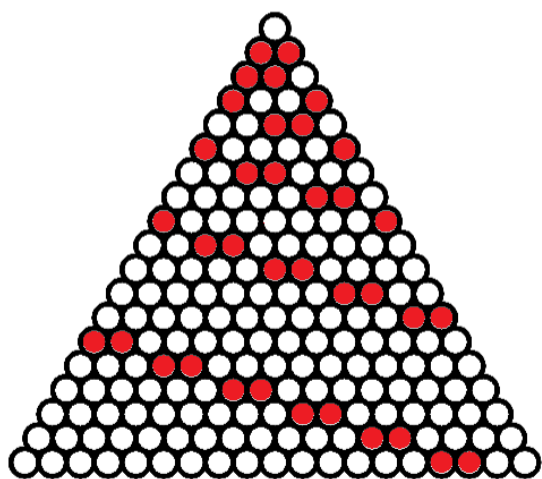


圖 4 $m = 2$ 的構造

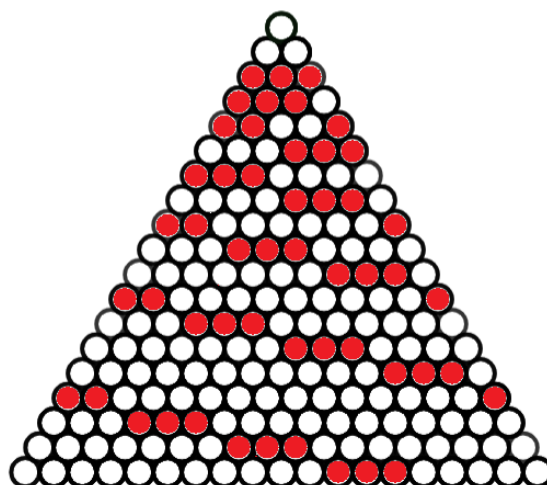


圖 5 $m = 3$ 的構造

最後，由於已知此構造是最佳的，可以直接利用構造中的性質進行最終答案的計算，雖然直接表示為紅色的圓圈較為不易，但仍可直接對紅圈性質進行估計

引理 6 給定 m 的情況下，若定義 $\langle a_k \rangle$ 依次代表 $k = 1, 2, \dots$ 的答案，則

$$\begin{cases} a_i = a_{i-1} + \left\lfloor \frac{b_{i-1}}{m} \right\rfloor + 1 \\ b_i = a_i - m + m \times \left\{ \frac{b_{i-1}}{m} \right\} \end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

其中 $\langle b_k \rangle$ 為輔助數列， $a_1 = m, b_1 = 0$ ， $\lfloor x \rfloor$ 為 floor function， $\{x\}$ 代表 x 的小數部分

證明:

觀察圖 3, 圖 4 的構造，以數學歸納法證明 b_i 即為 T_{a_i} 中，小於 i 值的數量， a_i 為原題答案

對於 $i = 1$ ，由題目條件即可知道原命題成立

假設 $i = l$ 時，原命題成立，欲證明當 $i = l + 1$ 時，原命題仍然成立

觀察到每往下一排，會多新增一個球，而假設上一排有 x 個連續為最大值的球，則此時會有 $x + 1$ 個，因此在尚未增加染色紅球時，不為最大值的球數量不會改變，因此需要 $\left\lfloor \frac{b_l}{m} \right\rfloor$ 排後，剩餘的不為最大值的球數才會小於 m ，而此時下一排便會使必定會使最大值提高

故可知 $a_{l+1} = a_l + \left\lfloor \frac{b_l}{m} \right\rfloor + 1$ 為正確答案，另外，在 $T_{a_{l+1}-1}$ 時，尚有 $m \cdot \left\{ \frac{b_l}{m} \right\}$ 個位置不為最

大值，故新增 m 個球後，共有 $m - m \cdot \left\{ \frac{b_i}{m} \right\}$ 個位置已為最大值，剩下 $a_{i+1} - m + m \cdot \left\{ \frac{b_i}{m} \right\}$ 個值不為最大值，故得證

至此，討論完多球情況下的答案，但卻需要仰賴輔助數列的幫忙，接下來證明以單一數列表示之方法，與呈現對於數列性質的探索

	$< a_i >$ 的前15 項	OEIS 搜尋的結果	計算公式
$m = 2$	2,3,4,6,9, 14,21,31,47,70, 105,158,237,355,533	A073941	$c_i = \left\lfloor \frac{1 + \sum_{j=1}^{i-1} c_j}{2} \right\rfloor$ $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1$ c_i 與計算中的 $a_{i-3} \forall i \geq 3$ 相同
$m = 3$	3,4,5,7,9, 12,16,21,28,38, 50,67,89,119,159	A120149	$c_i = 2 + \left\lfloor \frac{1 + \sum_{j=0}^{i-1} c_j}{3} \right\rfloor$ $c_1 = 2$ c_i 與計算中的 $a_{i-1} \forall i \geq 2$ 相同
$m = 4$	4,5,6,7,8, 10,12,14,17,20, 24,29,35,42,50,	A120171	$c_i = \left\lfloor \frac{11 + \sum_{j=1}^{i-1} c_j}{4} \right\rfloor$ $c_1 = 2$ c_i 與計算中的 $a_{i-5} \forall i \geq 5$ 相同

因此，猜測對於固定的 m ，似乎可將答案表示為 $a_i = \left\lfloor \frac{d + \sum_{j=1}^{i-1} a_j}{m} \right\rfloor$ ，其中 d 是代定常數，但是，OEIS的結果卻有一個缺點：並不是由第一項開始均相同

性質 2 $b_i \equiv \sum_{j=1}^i a_j \pmod{m} \forall i \geq 1$

證明：

一樣使用數學歸納法，對於 $i = 1$ ，因為 $b_1 = 0, a_1 = m$ ，符合條件

假設當 $i = x$ 時命題成立，欲證當 $i = x + 1$ 命題成立，

又 $b_{x+1} = a_x - m + m \cdot \left\{ \frac{b_x}{m} \right\} \equiv a_{x+1} + b_x \pmod{m}$ ，又由歸納假設，

有 $b_x \equiv \sum_{i=1}^x a_i \pmod{m}$ ，故 $b_{x+1} \equiv \sum_{i=1}^{x+1} a_i \pmod{m}$

得證。

定理 7 $a_1 = m, a_i = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j}{m} \right\rfloor + m \forall i \geq 2$

證明：

使用數學歸納法證明定理 7：

首先，對於 $i = 1$ ，命題明顯成立

假設當 $i = x$ 時命題成立，即 $a_x = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^{x-1} a_i}{m} \right\rfloor + m$ ，欲證 $a_{x+1} = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^x a_i}{m} \right\rfloor + m$

由引理 6，知道 $a_{x+1} = a_x + \left\lfloor \frac{b_x}{m} \right\rfloor + 1$

故可以等價證明 $\left\lfloor \frac{b_x}{m} \right\rfloor + 1 = a_{x+1} - a_x = \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^x a_i}{m} \right\rfloor + m - a_x$

由性質 2，知道 $\left\lfloor \frac{b_x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^x a_i}{m} \right\rfloor = \frac{b_x}{m} - \frac{\sum_{i=1}^x a_i}{m}$

因此等價欲證 $\frac{b_x}{m} - \frac{\sum_{i=1}^x a_i}{m} = m - a_x - 1$ ， $b_x - \sum_{i=1}^x a_i + m(a_x + 1 - m) = 0$

但此時依然無法處理 $\sum_{i=1}^x a_i$ ，因此希望再一次使用數學歸納法，同時證明這條式子：
對於 $x = 1$ ， $a_1 = m, b_1 = 0$ ，成立

假設對於 $x = y$ ，有 $b_y - \sum_{i=1}^y a_i + m(a_y + 1 - m) = 0$ ，欲證對於 $x = y + 1$ 時仍然成立，即 $b_{y+1} - \sum_{i=1}^{y+1} a_i + m(a_{y+1} + 1 - m) = 0$ ，考慮將兩式相減，等價欲證 $b_{y+1} - b_y - a_{y+1} + m(a_{y+1} - a_y) = 0$

又因為 $b_{y+1} = a_{y+1} - m + m \cdot \left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor$ ，且 $a_{y+1} = a_y + \left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor + 1$

故等價證明 $m \cdot \left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor - m - b_y + m \left(\left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor + 1 \right)$

即 $m \left(\left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor \right) + m \cdot \left\lfloor \frac{b_y}{m} \right\rfloor = b_y$ ，成立！

故得證 ■

因此，可以得到僅由 a_i 構成的表示式，至此完成了二維多球問題的討論

(三) 三維情況下的問題與立方體

我們希望將問題延伸至三維的情況，並繼續討論原始問題

但此時發現，對於球是否相鄰的問題，雖然可以立體堆塔的情況進行思考，惟數學定義上較為不方便，且對於更高維的情況會有困難，例如四維情形於實際中並不存在，故考慮超立方體的定義，

定義：

- 考慮三維座標平面中的非負整數點 $(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- 位於第 n 層的點座標 (x, y, z) 滿足 $x + y + z = n$
- 兩座標 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 相鄰若且唯若 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| = 1$

(三維版本的題目)

對於正整數 n ，定義日式建築是一個邊長 n 的正方體，其中每一層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1層到第 n 層的 n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。設 k 為正整數，試找到最小正整數 n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條 k 個紅色點的忍者通道。

定義 $T_{i,j,k}$ 為走至點 (i,j,k) 時最少通過的紅色點數量

此時類似於二維版本時有關係式 $T_{i,j,k} = \max(T_{i-1,j,k}, T_{i,j-1,k}, T_{i,j,k-1}) + W_{i,j,k}$

同時定義：

- $T_m = \{T_{i,j,k}, i+j+k = m\}$
- $S_m = \sum_{i+j+k=m} T_{i,j,k}$
- $W_m = \max(T_m)$

因此，計算 S_m 時就顯得較為困難，且若想以表格觀察規律也較為不便

較有可能之做法可能是以 i 值進行討論，並採用拆開成許多子區塊，在每一層裡，按照不同 i 值定義

- $T_{m,i} = \{T_{i,0,m-i}, T_{i,1,m-i-1}, \dots, T_{i,m-i,0}\}$
- $S_{m,i} = \sum_{j+k=m-i} T_{i,j,k}$

則可以注意到 $T_{m,i}$ 與 $T_{m-1,i}$ 的關係與降低一個維度之情況類似，而 $T_{m,i}$ 與 $T_{m-1,i-1}$ 則有著一樣多的元素，且對應位置之元素均相鄰，經過一些觀察之後，可以知道

$$\text{引理 8 } S_{m,i} \geq \max(S_{m-1,i-1}, S_{m-1,i} + \max(T_{i,0,m-i-1}, T_{i,1,m-i-2}, \dots, T_{i,m-i-1,0})) + \max(T_{i,0,m-i}, T_{i,1,m-i-1}, \dots, T_{i,m-i,0})$$

證明：

首先，可以先忽略 $W_{m,i}$ ，因為新增的紅球必定會使 $S_{m,i}$ 之值增加 $W_{m,i}$ ，且與上一層之答案無關

以下不妨設 $W_{m,i} = 0$

由引理 1 的證法，容易得到 $S_{m,i} \geq S_{m-1,i} + W_{m-1,i}$ ，另外 $S_{m,i} \geq S_{m-1,i-1}$ 則可以由 $T_{i,j,k} \geq T_{i-1,j,k}$ 對於所有 $T_{m,i}$ 內的元素皆成立得到，得證

但由於希望證明的總和 $S_m = \sum_{i=0}^m S_{m,i}$ 若直接以引理 8 相加，會因為各項最大值較不易討論的關係而無法求得，此處選擇採用調整法

引理 9 給定 S_m 的值，使 S_{m+1} 之下界使用 S_m 估計之情況下達到最小值的所有可能 T_m 集合中，必有一個使得 $\max(T_m) - \min(T_m) \leq 1$

證明：

由引理 8，可以知道 $S_{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} S_{m+1,i} \geq \sum_{i=0}^{m+1} \max(S_{m,i-1}, S_{m,i} + M_{m,i})$

首先，對於 $T_{m,i}$ 內的元素，自然希望 $\max(T_{m,i}) - \min(T_{m,i}) \leq 1$ ，如此能使 $M_{m,i}$ 最小，在使用引理 8 的估計下可使 S_{m+1} 值最小

接著，使用調整法對於 $T_{m,0}, T_{m,1}, T_{m,2}, \dots, T_{m,m}$ 中兩相鄰項滿足 $\max(T_{m,i+1}, T_{m,i}) - \min(T_{m,i+1}, T_{m,i}) \geq 2$ 時分類討論並進行調整：

$$(1) \max(T_{m,i+1}) > \min(T_{m,i}) + 2$$

此時，更動 $S_{m,i+1}$ 和 $S_{m,i}$ 會影響到 $S_{m+1,i+2}, S_{m+1,i+1}, S_{m+1,i}$ 此三項，在使用調整法的前提下，假設最不好的情況，亦即 $T_{m,i+2}$ 的每一項均極大， $T_{m,i-1}$ 的每一項均極小，如此，使 $S_{m,i+1}$ 之值減小時，無法使 $S_{m+1,i+2}$ 減小，且 $S_{m+1,i}$ 也必定會較大

但即使如此，如下證明在此情況下調整至 $\max(T_{m,i+1}) - \min(T_{m,i}) = 1$ 也保證不會變差

$$(1-1) \text{ 若 } T_{m,i} \text{ 不全相同，且 } \max(T_{m,i+1}) - \min(T_{m,i}) \geq 2$$

則將 $T_{m,i+1}$ 最大的數字減去1 後將 $T_{m,i}$ 最小的數字增加1 將使

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前 之差值	≤ 0	-1	$\leq +1$

(註：表格中之數值代表調整後之數值減去調整前之數值的可能差值範圍，下同)

故此調整成立

$$(1-2) \text{ 若 } T_{m,i} \text{ 全相同，且 } \max(T_{m,i+1}) - \min(T_{m,i}) \geq 2，\text{ 進行以下調整}$$

將 $T_{m,i+1}$ 中為最大值的所有數(假設有 x 個)同時 -1 ，並將 $T_{m,i}$ 相對應數量的數字 $+1$ ，此時

(因為 $\max(T_{m,i+1}) - \min(T_{m,i}) \geq 2$ ，所以 $\max(T_{m,i+1}) - 1 \geq \min(T_{m,i}) + 1$ ，故 $S_{m,i+1} + M_{m,i+1} \geq S_{m,i}$)

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前 之差值	≤ 0	$-x - 1$	$\leq x + 1$

故此調整成立

利用此調整方式，因為每次調整後 $S_{m,i}$ 嚴格遞增，且 $\max(T_{m,i})$ 每次最多增加1，故必定可以在經過有限次更動後，使得 $\max(T_{m,i+1}) - \min(T_{m,i}) = 1$ ，最後需要證明此調整方式會結束，可以定義 $D = \sum_{i+j+k=m} T_{i,j,k}^2$ ，操作Case 1-1或Case 1-2的過程中，可以視為若干次將兩數字 $T_{i_1,j_1,k_1}, T_{i_2,j_2,k_2}$ 改為 $T_{i_1,j_1,k_1} - 1, T_{i_2,j_2,k_2} + 1$ 的操作，其中 $T_{i_1,j_1,k_1} - T_{i_2,j_2,k_2} \geq 2$ ，考慮操作後 D 值的改變，由於 $T_{i_1,j_1,k_1}^2 + T_{i_2,j_2,k_2}^2 -$

$$(T_{i_1,j_1,k_1} - 1)^2 - (T_{i_2,j_2,k_2} + 1)^2 = 2(T_{i_1,j_1,k_1} - T_{i_2,j_2,k_2} - 1) > 0，\text{ 故 } D \text{ 值嚴格遞減，又因}$$

為 $D \geq 0$ ，故明顯此調整經過有限次後停止，得證

$$(2) \max(T_{m,i}) > \min(T_{m,i+1}) + 2$$

當 $S_{m,i+1} + M_{m,i+1} \leq S_{m,i}$ 時，

將 $T_{m,i}$ 中最大的數 -1 ， $T_{m,i+1}$ 中最小的數 $+1$ ，調整後各項數值表格如下：

	$S_{m+1,i+2}$	$S_{m+1,i+1}$	$S_{m+1,i}$
相較於調整前 之差值	≤ 1	-1	≤ 0

因此可持續操作直至 $\max(T_{m,i}) - \min(T_{m,i+1}) = 1$ ，且有限次操作與Case 1 相同，而此操作也同樣會使 D 值嚴格遞減，故可知兩種調整法均必定結束，

此時距離完成證明情況還有最後一個問題：類似以下情況 $\max(T_{m,i}) = \min(T_{m,i}) = x$, $\max(T_{m,i+1}) = \min(T_{m,i+1}) = x + 1$, $\max(T_{m,i+2}) = \min(T_{m,i+2}) = x + 2$ 時仍與欲證題目不符，因此還需以下最後兩種調整方式：

(1)對於連續若干個集合 $\{T_{m,i}, T_{m,i+1}, T_{m,i+2}, \dots, T_{m,j}\}$ ，滿足 $\max(T_{m,i}) = \min(T_{m,i}) = x$ ， $\max(T_{m,i+1}) = \min(T_{m,i+1}) = \dots = \max(T_{m,j-1}) = \min(T_{m,j-1}) = x + 1$ ， $\max(T_{m,j}) = \min(T_{m,j}) = x + 2$ ，則直接將 $T_{m,j}$ 的所有元素 -1 ，選擇 $T_{m,i}$ 的 $m - j$ 個元素 $+1$ ，必定可使 S_{m+1} 不變或更小，且 D 值嚴格遞減，故一樣最多操作有限次

(2) 對於連續若干個集合 $\{T_{m,i}, T_{m,i+1}, T_{m,i+2}, \dots, T_{m,j}\}$ ，滿足 $\max(T_{m,i}) = \min(T_{m,i}) = x + 2$ ， $\max(T_{m,i+1}) = \min(T_{m,i+1}) = \dots = \max(T_{m,j-1}) = \min(T_{m,j-1}) = x + 1$ ， $\max(T_{m,j}) = \min(T_{m,j}) = x$ ，則直接將 $T_{m,j}$ 的所有元素 $+1$ ，選擇 $T_{m,i}$ 的 $m - j$ 個元素 -1 ，必定可使 S_{m+1} 不變或更小，且 D 值嚴格遞減，故一樣最多操作有限次

若所有調整方式均已無法進行操作，則易知必有 $\max(T_m) - \min(T_m) \leq 1$ ，故得證。

引理 10 若 $\max(T_m) - \min(T_m) = 1$ ，則使 S_{m+1} 達到最小值的的所有方法中，其中一種是將所有 $(i, j, k), i + j + k = m$ 按照字典序大小排列，並滿足排列後 $T_{i,j,k}$ 所有數值遞減

證明：

首先由於 $\max(T_m) - \min(T_m) = 1$ ，故可以考慮簡化命題，將每一項 $T_{i,j,k}$ 同時減去 $\min(T_m)$ ，此時 $0 \leq T'_{i,j,k} \leq 1$ ，且 $S'_m = S_m - |T_m| \cdot \min(T_m)$ ，

觀察 $S_{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} S_{m+1,i} \geq \sum_{i=-1}^m \max(S_{m,i}, S_{m,i+1} + M_{m,i+1})$ 的式子，改寫成 $S'_{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} S'_{m+1,i} \geq \sum_{i=-1}^m \max(S'_{m,i}, S'_{m,i+1} + 1)$ 首先注意到

若 $S'_{m,0}, S'_{m,1}, S'_{m,2}, \dots, S'_{m,m}$ 的最大值為 x ，可改寫 $\sum_{i=-1}^m \max(S'_{m,i}, S'_{m,i+1} + 1) =$

$\sum_{i=0}^n S'_{m,i} + \sum_{i=0}^n \max(0, S'_{m,i+1} + 1 - S'_{m,i}) + S_{m,0} + 1$

若最大值位於 $S_{m,y}$ ，則也可改寫成 $= \sum_{i=0}^m S'_{m,i} + x + \sum_{i=y}^m \max(0, S'_{m,i+1} + 1 - S'_{m,i}) + \sum_{i=-1}^{y-2} \max(0, S'_{m,i+1} + 1 - S'_{m,i})$

接著，在固定 $S'_m = \sum_{i=0}^m S'_{m,i}$ 的情況下，希望找到

$d = x + \sum_{i=y}^m \max(0, S'_{m,i+1} + 1 - S'_{m,i}) + \sum_{i=-1}^{y-2} \max(0, S'_{m,i+1} + 1 - S'_{m,i})$ 的最小值

首先，觀察若最大值並未出現在 $S'_{m,0}$ ，且 $S'_{m,y} = S'_{m,y+1} = \dots = S'_{m,y+z} = x$ 則將

$S'_{m,y-1}, S'_{m,y-2}, \dots, S'_{m,0}$ 向前移動至 $S'_{m,z+1}$ 可保證 d 減少或維持不變(將

$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,0}\}$ 調整為

$\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,y+z+1}, S'_{m,y-1}, \dots, S'_{m,1}, S'_{m,0}, S'_{m,y+z}, \dots, S'_{m,y+1}, S'_{m,y}\}$ ，則 d 的變動為 $\leq$

$\max(0, S'_{m,0} + 1 - S'_{m,y+z}) = 0$ ，接著注意到若存在三項滿足 $S'_{m,a} > S'_{m,a+1}, S'_{m,a+1} < S'_{m,a+2}$ ，則將 $S'_{m,a+1}$ 調整成 $\min(S'_{m,a}, S'_{m,a+2})$ 一樣不會使 d 增加，此時將任意 $\min(S'_{m,a}, S'_{m,a+2}) - S'_{m,a+1}$ 個數字減1 必不會使 d 增加，故可以假設 $\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,0}\}$ 遞減，因為 $S'_{m,0}$ 為最大值。

最後，若 $S'_{m,a}$ 是最小滿足 $S'_{m,a} = S'_{m,a+1}$ 的次項，則可以調整 $\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,0}\}$ 至 $\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,a+1}, S'_{m,a} + 1, S'_{m,a-1} + 1, \dots, S'_{m,0} + 1\}$ 不會使 d 增加，並可任一選取 $a + 1$ 項減1 (可重複選取) 必不會使 d 增加，至此可利用調整法說明 $\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,0}\}$ 應嚴格遞增，此時 $d = S'_{m,0} + 1$

對於給定的 $S'_{m,0}$ ，利用嚴格遞增條件即有 $S_m \leq \frac{(1+S'_{m,0})(S'_{m,0})}{2}$ ，故給定 S_m 的前提下，若 w 滿足第 w 個三角形數 $\geq S_m$ 且第 $w - 1$ 個三角形數 $< S_m$ ，則 d 的最小值即為 $w + 1$

因此，若 S_m 為三角形數，則按字典序進行的排列完全符合以上構造，若 S_m 不為三角形數，則字典序進行的排列會使 $\{S'_{m,m}, S'_{m,m-1}, \dots, S'_{m,0}\} = \left\{S_m - \frac{w \cdot (w+1)}{2}, 1, 2, \dots, w\right\}$ ，一樣滿足 d

有了估計上的結果後，可以進行構造

引理 11 首先選擇 $(0,0,0)$ 作為第一個紅球的位置，之後令上一個紅球放置於

$$(i, j, k), \text{ 下一個紅球則選擇放置於 } f(i, j, k) = \begin{cases} (i, j-1, k+2), & \text{if } j \neq 0 \\ (i-1, k+2, 0), & \text{if } i \neq 0, j=0, k \neq 0 \\ (i+k+1, 0, 0), & \text{if } i=0, j=0, k \neq 0 \\ (i-1, 2, 0), & \text{if } j=0, k=0 \end{cases}$$

證明：一樣採用數學歸納法

首先第一層的紅球放置完畢後， $T_{0,0,0} = 1$ ，符合 $\max(T_0) - \min(T_0) \leq 1$ ，且 $T_{i,j,k}$ 中滿足按照字典序排序後遞減

假設第 x 層放置完畢後符合 $\max(T_x) - \min(T_x) \leq 1$ ，且 $\forall i + j + k = x, T_{i,j,k}$ 按照字典序排序後遞減，以 (a, b, c) 為字典序最大滿足 $T_{i,j,k} = \max(T_x)$ 的數對，且同時染色的紅球為 (a, b, c)

欲證明第 $x + 1$ 層放置完畢後符合 $\max(T_{x+1}) - \min(T_{x+1}) \leq 1$ ，且 $\forall i + j + k = x + 1, T_{i,j,k}$ 按照字典序排序後遞減，以 $f(a, b, c)$ 為字典序最大滿足 $T_{i,j,k} = \max(T_x)$ 的數對，同時染色的紅球為 $f(a, b, c)$

按照 $f(a, b, c)$ 的定義方式，分成四種不同情況進行討論

由於 $T_{x,0,0}, T_{x-1,2,0}, \dots, T_{a,b,c}$ 的全部數均為 $\max(T_x)$ ，

若 $b \neq 0$ ，在新增紅球前， $\forall i + j + k = x + 1, i \geq a + 1, T_{i,j,k} = \max(T_x) \forall a + j + k = x + 1, j \geq b, T_{a,j,k} = \max(T_x)$

故 T_{x+1} 在新增紅球前字典序最小不為 $\max(T_x)$ 的為 $T_{a,b-1,c+2}$ ，此情況正確

若 $b = 0, c = 0$ ，在新增紅球前因為 $(a, 0, 0)$ 是字典序最大，故表示此時只有 $T_{a,0,0} = \max(T_x)$ ，其餘均為 $\max(T_x) - 1$ ，在 T_{x+1} 中僅有 $T_{a+1,0,0}, T_{a,1,0}, T_{a,0,1}$ 為 $\max(T_x)$ ，取 $(a - 1, 2, 0)$ 滿足歸納假設

若 $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ ，使用類似手法可以知道，由於新增紅球前字典序最小不為 $\max(T_x)$ 的為 $T_{a-1,c+2,0}$

若 $a = 0, b = 0, c \neq 0$ ，此時新增紅球前 $\forall i + j + k = x + 1, T_{i,j,k} = \max(T_x)$ ，故新增紅球將使 $\max(T_x)$ 提高，應直接選擇字典序最大者，為 $(c + 1, 0, 0)$

最後，利用引理 11 的證明過程中，只有在 $a = 0, b = 0, c \neq 0$ 時，會使 $\max(T_x)$ 增加，和定義的遞迴關係，可以進行答案的計算

$2^{\underbrace{2^2 \cdots 2^2 - 1 - 1 - 1 - 1}_{k-1 \text{ 個 } 2}}$

定理 12 對於三維堆塔，對於任一 k 值， n 的最小值為 $2^{\underbrace{2^2 \cdots 2^2 - 1 - 1 - 1 - 1}_{k-1 \text{ 個 } 2}} - 2$

證明：

對於給定之 k 值，令所求之答案為 $g(k)$

注意到 $f(a, b, 0) \rightarrow f(a, b - 1, 2) \rightarrow f(a, b - 2, 4), \dots, \rightarrow f(a, 0, 2b) \rightarrow f(a - 1, 2b + 2, 0)$

因 $k = m$ 的答案是 $g(m)$ ，此時塗色紅球可表示為 $(g(m) - 1, 0, 0)$ ，由上述觀察，可得 $f(g(m) - 1, 0, 0) \rightarrow f(g(m) - 2, 2 = 2^2 - 2, 0) \rightarrow f(g(m) - 3, 2 \cdot 2 + 2 = 2^3 - 2, 0) \rightarrow \dots \rightarrow f(0, 2^{g(m)} - 2, 0) \rightarrow \dots \rightarrow f(0, 0, 2^{g(m)} - 4) \rightarrow f(2^{g(m)+1} - 3, 0, 0)$

故 $k = m + 1$ 的答案為 $2^{g(m)+1} - 2$

而 $k = 0$ 的答案為1，故 $k = 1$ 的答案為2， $k = 2$ 的答案為6，利用數學歸納法即可得到

$$g(k) = 2^{\underbrace{2^2 \cdots 2^2 - 1 - 1 - 1 - 1}_{k-1 \text{ 個 } 2}} - 2 \quad \blacksquare$$

(四)三維多球問題探討

與三維單球相同，定義：

- 考慮三維座標平面中的非負整數點 $(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- 位於第 n 層的點座標 (x, y, z) 滿足 $x + y + z = n$
- 兩座標 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ 相鄰若且唯若 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| = 1$

此時可得三維多球之問題：

(延伸至三維多球情況)

對於正整數 n, m ，定義日式建築是一個邊長 n 的正方體，其中每一層恰有 m 個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1層到第 n 層的 n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰點之一。其中若該層點總數少於 m ，則將該層中所有位置均塗上紅色

設 k 為正整數，試找到最小正整數 n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條 k 個紅色點的忍者通道。

同樣定義 $T_{i,j,k}$ 為走至點 (i,j,k) 時最少通過的紅色點數量

此時一樣有關係式 $T_{i,j,k} = \max(T_{i-1,j,k}, T_{i,j-1,k}, T_{i,j,k-1}) + W_{i,j,k}$

首先，利用與三維單球相似之調整法，即可知道引理 9,10 的結論仍然成立，因此可知每次之 dp 值應不超過兩種，其構造方法如下：

引理 13：三維 m 球中最好的放置方法如下：

首先若該層點總數少於 m ，則將該層中所有位置均塗上紅色

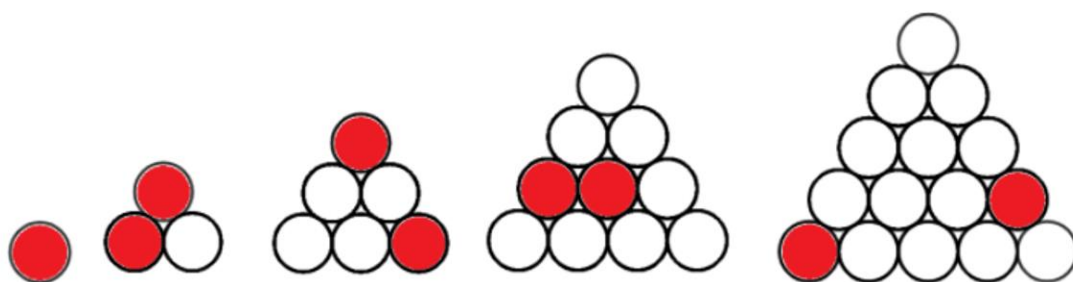
將 $\{(i,j,k), i+j+k = x\}$ 按照字典序排序為

$\{x_1 = (x, 0, 0), x_2 = (x-1, 1, 0), \dots, x_{\frac{(x+2)(x+1)}{2}} = (0, 0, x)\}$

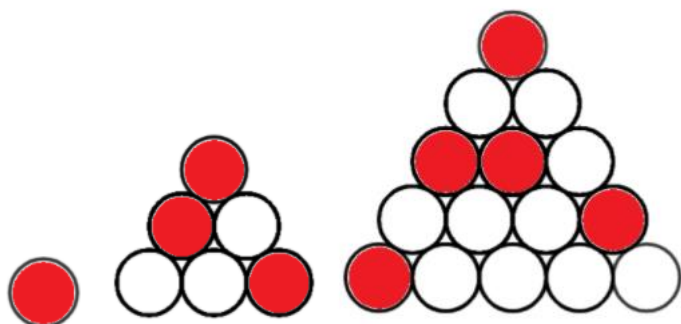
令第 x 層未加上 $W_{i,j,k}$ 前， $\{T_{i,j,k}, i+j+k = x\}$ 中最小值按照字典序排序第一次出現在 x_t ，則按字典序依序塗色 $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+m-1}$ ，其中若下標超過

$\frac{(x+2)(x+1)}{2}$ ，則取其模 $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$

其中一個 $n = 5, m = 2$ 的範例如下

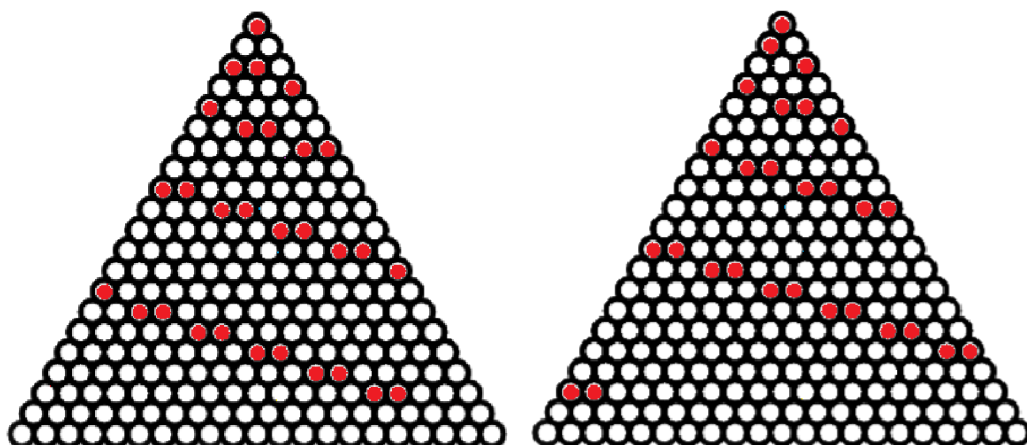


但為計算最小的 n 值，必須找出更為簡便觀察的方法，可以觀察到在上述構造下，會使 k 值增大的情況僅有塗色紅球包含該層三角形中字典序最小的球，如上圖中的 1,2,3 層因此可以將同樣 k 值不同層的紅球塗色結果合併至一張圖中，如下圖為 $m = 2$ 前 5 層的合併結果

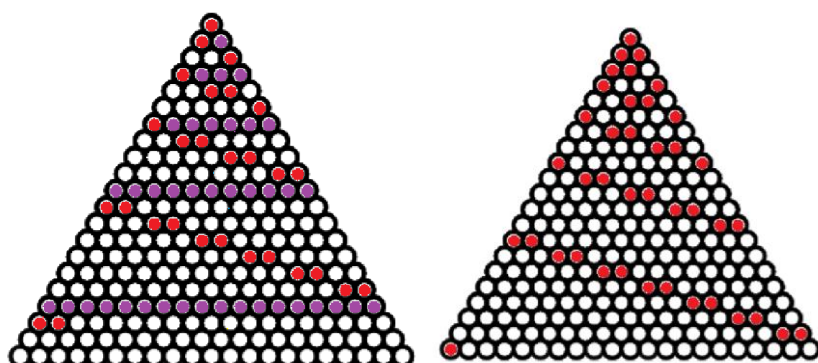


其中若該層有觸碰到最上層的圓圈，則按照 $T_{i,j,k}$ 之值拆分成兩邊並放置於兩張圖中先將這類合併的二維日式三角形區分為 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_m$ ，其中 M_i 代表第一次塗色該層時使用的紅球數，如左圖為 M_1 ，而右圖為 M_2

先將這類合併的二維日式三角形區分為 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_m$ ，其中 M_i 代表第一次塗色該層時使用的紅球數，如左圖為 M_1 ，而右圖為 M_2



可以觀察到合併日式三角形與二維多球之日式三角形極為相似，不同處在於若二維多球時該排會使 k 值增大，則合併日式三角形中必須將下一排塗色，而二維多球時則在該排起始處塗色



圖中紫色部分定義有紅球觸及最右側圓球後的下一排
接著探討何時紫色排數會增加：

使用與二維多球類似的遞迴關係，可以發現

引理 14 給定 m, i 的情況下，若定義 $\langle a_{t,m,i} \rangle$ 依次代表 M_i 合併日式三角形中第 t 次紫色排的排數，則對於足夠大的 $t > m + 1$ ，有

$$\begin{cases} a_{t,m,i} = a_{t-1,m,i} + 1 + \left\lfloor \frac{a_{t-1,m,i} + 1 - b_{t-1,m,i}}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m - b_{t-1,m,i}}{m} \right\rfloor, i \in \mathbb{N} \\ b_{t,m,i} = m - m \times \left\{ \frac{a_{t-1,m,i} + 1 - b_{t-1,m,i}}{m} \right\} \end{cases}$$

其中 $\langle b_k \rangle$ 為輔助數列， $a_{m+1,m,i}, b_{m+1,m,i}$ 須以手算直接求得且較無規律， $\lfloor x \rfloor$ 為 floor function， $\{x\}$ 代表 x 的小數部分

證明：

首先 $b_{t,m,i}$ 為該紫色列中紅球個數，且對於 $t > m + 1$ ，新一列中的紅球個數少於該排總共空位數，故只需討論該排紅球的情況

統計剩餘的空格數量，可以發現在無增加紅球的情況下剩餘空格數量不變，故因為該列共有 $a_{t-1,m,i} + 1$ 個空位，若 $b_t = 0$ ，則不須額外修補，故為 $a_{t-1,m,i} + 1 +$

$$\left\lfloor \frac{a_{t-1}+1-b_{t-1}}{m} \right\rfloor, \text{ 若 } b_t > 0, \text{ 則所需行數較原先多 } 1, \text{ 需增加修補項 } \left\lfloor \frac{m-b_{t-1}}{m} \right\rfloor = 1$$

接著，假設通過至少 k 個紅球時的最小 n 值為 n_{min} ，觀察由該排開始之合併日式三角形，並計算當前塗色紅球排數與總排數之差值，可以發現只有當出現紫色排時，才能使差值減小，而差值為0時則可通過至少 $k+1$ 個紅球
因此對於三維多球，可得以下遞迴答案：

定理 15：

給定 m 的情況下，對於 $n < m$ ，須以暴力計算方式求得其對應 k 值，若最大之 k 值為 k_{max} 以暴力計算求出對應 $k_{max}+1$ 的最小 n 值與此時對應的合併日式三角型種類 M_i 後，有以下遞迴關係：

令 $\langle A_t \rangle$ 為 $k=t$ 時的解答， $\langle B_t \rangle$ 為 $k=t$ 時的合併日式三角型種類
則

$$\begin{cases} A_t = A_{t-1} + a_{A_{t-1}, m, B_{t-1}} \\ B_t = b_{A_{t-1}, m, B_{t-1}} \end{cases}, i \in \mathbb{N}$$

對於 $t > k_{max} + 1$ 均成立

證明：必須至少要有 A_{t-1} 個紫色排，由引理 14 即得結論

最後，對於暴力驗證的部分，可以利用引理 13 給出的塗色位置進行計算

(五) 高維情況構造與討論

沿用三維情況的正立方體定義，希望可以將原問題推廣到更高維度的情況，但此時並不存在確切可視構造，考慮以 hyper-cube(超立方體)的方式進行推廣：

在 D 維情況下之定義：

- 給定一個邊長為 n 的 D 維立方體，並定義左下角為 $(0,0,\dots,0)$ ，在 D 維向量空間下定義每個點之座標值
- 對於任意點座標 $(x_1, x_2, \dots, x_D)$ ，定義其位於第 $x_1 + x_2 + \dots + x_D$ 層
- 若兩個點座標 $(x_1, x_2, \dots, x_D), (y_1, y_2, \dots, y_D)$ 滿足 $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 1$ ，則此兩點相鄰，否則不相鄰

此時，延伸題目可以表示如下：

(高維版本的題目)

對於正整數 n, D ，定義日式建築是一個邊長為 n 的 D 維正方體，其中前 n 層中每層恰有一個點為紅色點。忍者通道是一串由日式建築第1層到第 n 層的 n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。設 k 為正整數，試找到最小正整數 n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條 k 個紅色點的忍者通道。

討論：透過三維情況的討論，希望估計出確切答案較為困難，以下著重類似三維方式的估計進行討論，並給出答案的下界

同樣定義：

- $T_{x_1, x_2, \dots, x_D}$ 為走至 $(x_1, x_2, \dots, x_D)$ 經過的最多紅球數
- $W_{x_1, x_2, \dots, x_D} = 1$ 若 $(x_1, x_2, \dots, x_D)$ 為紅球，否則為0

則有 $T_{x_1, x_2, \dots, x_D} = \max(T_{x_1-1, x_2, \dots, x_D}, T_{x_1, x_2-1, \dots, x_D}, \dots, T_{x_1, x_2, \dots, x_D-1}) + W_{x_1, x_2, \dots, x_D}$

首先，先猜測答案發生在與三維情況類似的定義下：

猜測 1：在 D 維度情況下，最小值的達成方法中，其中一種方法為使得任意層 m 中，將 $(x_1, x_2, \dots, x_D), \sum_{i=1}^D x_i = m$ 按照字典序排序後， $T_{x_1, x_2, \dots, x_D}$ 遞減，且 $\max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = m) - \min(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = m) = 1$

以下提出一種可以滿足此猜想的構造方式：

引理 16 第一層塗色位置為 $(0, 0, \dots, 0)$ ，對於第二層以後的情況，若上一層塗紅色之位置為 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，定義 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$\begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}-1, x_n+2), & \text{if } x_{n-1} \neq 0 \\ (x_1, x_2, \dots, x_{n-2}-1, x_{n-1}+2, 0), & \text{if } x_{n-1} = 0, x_{n-2} \neq 0 \\ (x_1, x_2, \dots, x_i-1, x_n+2, 0, \dots, 0, 0), & \text{if } x_{n-1} = 0, x_{n-2} = 0, \dots, x_{i+1} = 0, x_i \neq 0 \\ (x_n+1, 0, \dots, 0), & \text{if } x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0 \end{cases}$$

代表下一層塗色位置，則此塗色

方式滿足猜測 1，其中由此函數定義計算出之每層塗色位置可以參考附錄 2

另外，會使 $\max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = m)$ 增加若且為若上層塗色位置滿足 $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0$

證明：

根據 $T_{x_1, x_2, \dots, x_D} = \max(T_{x_1-1, x_2, \dots, x_D}, T_{x_1, x_2-1, \dots, x_D}, \dots, T_{x_1, x_2, \dots, x_D-1}) + W_{x_1, x_2, \dots, x_D}$ 利用與引

理 11 相同的方法猜測上一層中滿足若塗色位置為 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ ，則 $T_{a_1, a_2, \dots, a_D} =$

$\max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = \sum_{i=1}^D a_i)$ 且 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ 為最大字典序滿足

$\max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = \sum_{i=1}^D a_i)$

以下使用數學歸納法證明此猜測與引理 13

對於第一層的情況，明顯符合

以下假設對於 $\sum_{i=1}^D x_i = M$ 時，塗色位置為 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ ，則 $T_{a_1, a_2, \dots, a_D} = \max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = M)$ 且 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ 為最大字典序滿足 $\max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = M)$ ，欲證下一層塗色位置為 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 時仍符合歸納假設

若 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ 中， $a_{D-1} \neq 0$ ，則根據歸納假設， $(y_1, y_2, \dots, y_D), \sum_{i=1}^D y_i = M$ 字典序 $\geq (a_1, a_2, \dots, a_D)$ ，若且唯若 $T_{y_1, y_2, \dots, y_D} = T_{a_1, a_2, \dots, a_D} = \max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = M)$

首先，證明 $(a_1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$ 不與上一層中最大值相鄰：

利用相鄰定義，易知與上一層之 $(a_1 - 1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$ ， $(a_1, a_2 - 1, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$ ， $\dots$ ， $(a_1 - 1, a_2, \dots, a_{D-1} - 2, a_D + 2)$ ， $(a_1 - 1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 1)$ 相鄰，但所有之字典序均較 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ 小，故 $T_{a_1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2}$ 在塗色前 $\neq \max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = M)$

接著，需要說明對於 $(y_1, y_2, \dots, y_D), \sum_{i=1}^D y_i = M + 1$ 字典序大於 $(a_1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$ 且位於第 $M + 1$ 層之位置，均在新增塗色紅球前即有

$T_{y_1, y_2, \dots, y_D} = \max(T_{x_1, x_2, \dots, x_D}, \sum_{i=1}^D x_i = M)$ ：

若 $(y_1, y_2, \dots, y_{D-2})$ 之字典序大於 $(a_1, a_2, \dots, a_{D-2})$ ，則可以選取最靠近 a_D 且非0者減去1，令新形成之位置為 $(y'_1, y'_2, \dots, y'_D)$ ，則與 $(y_1, y_2, \dots, y_D)$ 相鄰且字典序仍大於 $(a_1, a_2, \dots, a_D)$ ，故由歸納假設可得

若 $(y_1, y_2, \dots, y_{D-2})$ 之字典序等於 $(a_1, a_2, \dots, a_{D-2})$ ，則若 $y_{D-1} > a_{D-1} - 1$ ，可取 $(y'_1, y'_2, \dots, y'_D) = (y_1, y_2, \dots, y_{D-2}, y_{D-1} - 1, y_D)$ 仍符合題意，而若 $y_{D-1} \leq a_{D-1} - 1$ ，則最大字典序則為 $(a_1, a_2, \dots, a_{D-1} - 1, a_D + 2)$ ，得證

其他種類情況證明手法類似，惟特別注意到 $(a_1, a_2, \dots, a_D) = (0, 0, \dots, M)$ ，則下一層於塗色前即全部為相同數值，因此塗色後會導致最大值+1，其餘情況則不會改動最大值
接著，計算原問題的下界

定理 17 假設 $A'(D, n)$ 代表在有 D 維度的情況下，初始放置紅球位置為 $(n, 0, 0, \dots, 0)$

時，操作至放置紅球位置為 $(n', 0, \dots, 0, 0)$ 時， $n' > n$ 的數值，則有 $A'(D, n) =$

$$\underbrace{A'(D-1, A'(D-1, \dots, (A'(D-1, A'(D-1, 0) + 1) + 1) \dots + 1) + 1)}_{A'(D, n-1) \text{ 個}} \underbrace{A'(D, n-1) \text{ 個}}_{A'(D, n-1) \text{ 個}}$$

而最小滿足之 n 在此構造下為 $A'(D, A'(D, n-1)) + 1$ ，其中約定 $A'(1, n) = n + 1, A'(D, 0) = 1$ 對任一 $D, n \in \mathbb{N}$ 均成立

證明：

$A'(D, n-1)$ 之答案代表該層紅球放置於 $(A'(D, n-1), 0, \dots, 0, 0)$ ，考慮每次更動第一項之情況，則有 $(A'(D, n-1), 0, \dots, 0, 0) \rightarrow (A'(D, n-1) - 1, 2 = A'(D-1, 0) + 1, \dots, 0, 0) \rightarrow (A'(D, n-1) - 2, A'(D-1, A'(D-1, 0) + 1) + 1, \dots, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow$
 $\underbrace{(A'(D-1, A'(D-1, \dots, (A'(D-1, A'(D-1, 0) + 1) + 1) \dots + 1) + 1)}_{A'(D, n-1) \text{ 個}}, 0, \dots, 0) \blacksquare$
 $A'(D, n-1) \text{ 個}$

利用此公式，一樣可以在 $D = 2, D = 3$ 時得到與上述討論相同之結果

(六)高維多球問題探討

對於高維多球問題，沿用高維單球對於空間中的定義

(高維多球版本的題目)

對於正整數 n, D, m ，定義日式建築是一個邊長為 n 的 D 維正方體，其中前 n 層中每層恰有 m 個點為紅色點。若該層不足 m 球，則全數塗色。忍者通道是一串由日式建築第 1 層到第 n 層的 n 個點，其中每個點連到其下一層與之相鄰的點。

設 k 為正整數，試找到最小正整數 n ，使得保證在每一個日式建築中，有一條 k 個紅色點的忍者通道。

同樣利用高維的猜測 1，我們可構造出一種滿足猜測的答案

定理 18：

D 維 m 球中最好的放置方法如下：

首先若該層點總數少於 m ，則將該層中所有位置均塗上紅色

將 $\{(y_1, y_2, \dots, y_D), y_1 + y_2 + \dots + y_D = x\}$ 按照字典序排序為

$\{x_1 = (x, 0, 0, \dots, 0), x_2 = (x-1, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_{C_{D-1}^{x+D-1}} = (0, 0, x)\}$

令第 x 層未加上 $W_{y_1, y_2, \dots, y_D}$ 前， $\{T_{y_1, y_2, \dots, y_D}, y_1 + y_2 + \dots + y_D = x\}$ 中最小值按照字典序排序第一次出現在 x_t ，則按字典序依序塗色 $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+m-1}$ ，

其中若下標超過 C_{D-1}^{x+D-1} ，則取其模 C_{D-1}^{x+D-1}

同樣可透過是否染色 $(x, 0, \dots, 0)$ 判斷 $\max(T_{y_1, y_2, \dots, y_D})$ 是否增加，僅有當塗色紅球包含 $(x, 0, \dots, 0)$ 時才會使 k 值增加1

計算 D 維多球也可使用與三維多球相同的降維度方法，透過分類各合併 $D-1$ 維多球情況得到結果，惟過程中需以遞迴方式計算且三維以上之結果以較為繁複，故此處認為定理 18 為較佳的計算方法

(七) 達到最小值的解總數

最後，我們對於最原始的問題，探討達到最小 k 值的塗色方法總數，先觀察當 $n = 2^m - 1, m \in \mathbb{N}$ ，因為對給定的正整數 m ， $n = 2^m - 1$ 為最大使得原始題目為 m 的整數

引理 19 若 $\{p_1, p_2, \dots, p_{2^m-1}\}$ 滿足 $p_i \leq i, p_i \in \mathbb{N}$ ，使得 $\{W_{1,p_1} = 1, W_{2,p_2} = 1, \dots, W_{2^m-1,p_{2^m-1}} = 1\}$ 為一個滿足 $M_{2^m-1} = m$ 塗色方式，則對應的 T_{2^i-1} 全為 i
 $\forall i \in \mathbb{N}, i \leq m$

證明：

由引理 3 的證明，有 $S_{2^m-1} \geq m \cdot (2^m - 1) \forall m \in \mathbb{N}$

對於給定的 m ，對 $i = m, m-1, \dots, 1$ 進行數學歸納法

若 T_{2^m-1} 有不為 m 的數字，由 S_{2^m-1} 的條件，可以知道 T_{2^m-1} 中必有 $> m$ 的數字，與 $M_{2^m-1} = m$ 不合

假設對於 $i = j$ ， T_{2^j-1} 均全為 j ，欲證 $i = j-1$ 時， $T_{2^{j-1}-1}$ 均全為 $j-1$

觀察到由引理 1，有 $S_{2^j-1} \geq S_{2^j-2} + M_{2^j-2} + 1 \geq \dots \geq S_{2^{j-1}-1} + \sum_{l=2}^{2^{j-1}-1} M_{2^l-1} + 2^{j-1}$

此時若 $T_{2^{j-1}-1}$ 不全為 $j-1$ ，由 $S_{2^{j-1}-1} \geq (j-1) \cdot (2^{j-1} - 1)$ ，可知 $M_{2^{j-1}-1} \geq j$ ，搭配上式，即有 $S_{2^j-1} \geq (j-1) \cdot (2^{j-1} - 1) + (2^{j-1} \cdot j) + 2^{j-1} = j \cdot 2^j - j + 1 > j \cdot (2^j - 1)$

與歸納假設不符，得證。

利用引理 19，可知若定義 p_i 代表在 i 列的三角塔中，使 $M_i = \lfloor \log_2 i \rfloor$ 的塗色方法數，則計算 M_{2^m-1} ，可由 $M_{2^{m-1}-1}$ 乘上在已知 $T_{2^{m-1}-1}$ 均為 $m-1$ 的前提下，第 2^{m-1} 列至第 2^m-1 列的塗色方法總數

引理 20 已知 $T_{2^{m-1}-1}$ 均為 $m-1$ ，則共有 $2^{2^{m-1}-1}$ 個塗色方法使第 2^{m-1} 列至第 2^m-1 列的塗色方法，使得 T_{2^m-1} 均為 m

證明：

由於 $T_{2^{m-1}-1}$ 均為 $m-1$ ，所以 $T_{2^{m-1}}$ 僅有一個位置為 m ，以下證明若 $T_{2^{m-1},i} = 1$ ，則塗色方法共有 $C_{i-1}^{2^{m-1}-1}$ 種，因此相加後即為 $2^{2^{m-1}-1}$

由於 $S_{2^m-1} = m \cdot (2^m - 1)$ ， $S_{2^{m-1}-1} = (m-1) \cdot (2^{m-1} - 1)$ ，由上述推導，可知 $S_i = S_{i-1} + M_{i-1} + 1$ ，因此對於所有 $T_i, 2^{m-1} \leq i \leq 2^m - 1$ 中為 m 的 $T_{i,j}$ 必須相鄰，否則 $S_i > S_{i-1} + M_{i-1} + 1$ ，因此 $T_i = \{m-1, m-1, \dots, m-1, m, m, \dots, m, m-1, m-1, \dots, m-1\}$ ，其中開頭與結尾允許沒有 $m-1$

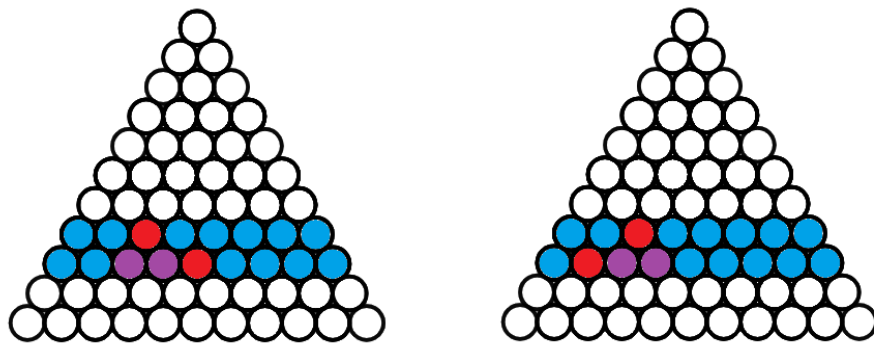


圖 6

圖 6 提供了一種 $W_{8,3} = 1$ 之後，第九排可以進行選擇的示意圖，其中紅色代表塗色位置，紫色與紅色位置 $T_{i,j} = m = 4$ ，藍色位置 $T_{i,j} = m - 1 = 3$

觀察圖中關係，可以發現若沒有新增紅球，則藍色球數量固定，每次新增塗色位置可為紫色區段的最左邊或最右邊相鄰格子，因此，若 $T_{2^m,i} = 1$ ，則相當於有 $i - 1$ 次選擇染色左邊格子，有 $2^m - i$ 次選擇染色右邊格子，以任意順序將選定左右後即可與塗色方法對應，故共有 $C_{i-1}^{2^m-1}$ 種不同的塗色方式

--

例如以下 $m = 3$ ，選擇 $W_{8,3} = 1$ 的例子(前7排暫時不考慮)

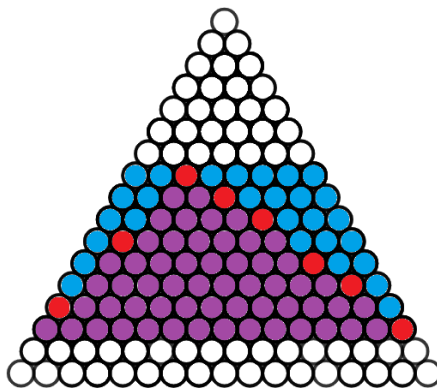


圖 7

圖片中呈現的著色方式，可記為 R, R, L, R, R, L, R ，其中 R 代表向右邊塗色， L 代表向左邊塗色，另外，若給定 R, R, L, R, R, L, R ，也可以還原出圖 7 的著色方式，只需在塗完紫色後選擇最右邊的紫色格子旁邊的空格或最左邊的即可

--

故共有 $\sum_{i=0}^{2^m-1} C_i^{2^m-1} = 2^{2^m-1}$ 種可能的塗色，得證。

最後，由引理 19 和引理 20，可知 $p_{2^m-1} = 2^{2^{m-1}-1} \cdot 2^{2^{m-2}-1} \cdot \dots \cdot 2^{2^1-1} = 2^{2^m-m}$

接著，我們討論 $p_{2^{m-2}}$ 的情況

引理 21 對於任一滿足 $M_{2^{m-2}} = m + 1$ 的塗色方式，必有 $T_{2^{m-1}-2} = \{m, m, \dots, m, m - 1\}$ 或 $T_{2^{m-1}-2} = \{m - 1, m, \dots, m, m\}$

證明：

由之前的討論，可知 $S_{2^{m-1}-2} \geq (2^{m-1} - 2) \cdot m - 1$ ，若 $S_{2^{m-1}-2} > (2^{m-1} - 2) \cdot m - 1$ ，則 $S_{2^{m-1}-1} \geq (2^{m-1} - 2) \cdot m + m + 1 = (2^{m-1} - 1) \cdot m + 1$ ，故 $M_{2^{m-1}-1} > m$ ，因此 $S_{2^{m-1}} \geq (2^{m-1} - 1) \cdot m + 1 + (m + 1) + 1 = (2^{m-1}) \cdot m + 3$ ， $S_{2^{m-2}} \geq S_{2^{m-1}} + \sum_{l=0}^{2^{m-1}-3} M_{2^{m-1}+l} + 2^{m-1} - 2 \geq 2^{m-1} \cdot m + 3 + (1 + m) \cdot (2^{m-1} - 2) + 2^{m-1} - 2$ 化簡得到 $S_{2^{m-2}} \geq (2^m - 2)(m + 1) + 1$ ，由鴿籠原理可得矛盾
因此 $S_{2^{m-1}-2} = (2^{m-1} - 2) \cdot m - 1$

可以發現無需直接計算 $S_{2^{m-2}}$ 的最小可能，因為已知 $S_{2^{m-2}} \geq (2^m - 2) \cdot (m + 1) - 1$ ，

且若達到最小值，則必須有 $S_{i+1} = S_i + M_i + 1$ ，且 $M_i = \left\lfloor \frac{S_i}{i} \right\rfloor$ ，因此若存在2個以上的 S_i 或 M_i 不為當下可能之最小值，則由鴿籠可證明不為合法塗色

使用此種觀點證明 $T_{2^{m-1}-2}$ 中不可有數字 $> m$ ：

因為此時 $M_{2^{m-1}-2} > m$ ，至少會使 $M_{2^{m-1}-2}$ 增加1，同時 $M_{2^{m-1}-1}$ 也會增加1，故矛盾

最後，若 $M_{2^{m-1}-2}$ 中 $m - 1$ 的位置不位於最左邊或最右邊，則 $S_{2^{m-1}-1} > S_{2^{m-1}-2} + m + 1$ ，故 $S_{2^{m-1}-1} \geq (2^{m-1} - 1) \cdot m + 1$ ，此時 $M_{2^{m-1}} > m - 1$ ，因此 $S_{2^{m-1}-1}, M_{2^{m-1}}$ 不合，矛盾

結合以上結論，即得證

利用引理 19，可得 $T_{2^{m-1}} = \{3, 3, \dots, 3\}$ 或 $\{2, 3, \dots, 3, 4, 3, \dots, 3\}$ 或 $\{3, \dots, 3, 4, 3, \dots, 3, 2\}$ ，同樣允許4之左邊或右邊無其他3

引理 22 若 $M_{2^{m-1}} = m - 1$ ，則 2^{m-1} 至 $2^m - 2$ 共有 $3 \cdot (2^{m-1} - 1) \cdot (2^{2^{m-1}-3})$ 種不同的塗色方法

證明：

由於 $T_{2^{m-1}}$ 中均為 $m - 1$ ，故在 2^{m-1} 列至 $2^m - 2$ 列中， $T_{i,j}$ 均為 $m - 1$ 或 m ，類似引理 14 的想法，可知選取新染色位置大致為連續 $T_{i,j} = m$ 的左側或右側，但此情況允許一個 $S_{i+1} = S_i + M_i + 2$ ，因此對於發生此情況的不同情況分類如下圖(以 $m = 4$ 舉例)

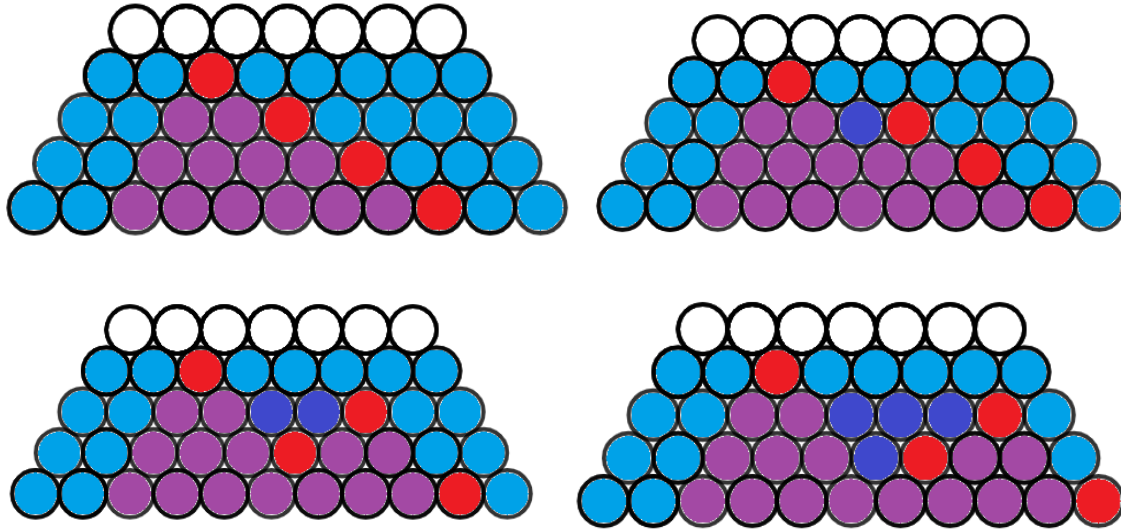


圖 8 其中 ○ 代表省略圓圈，● 代表塗色圓圈，● 代表 $T_{i,j} = m$ 的非著色圓圈，
● 代表左側連續與右側連續滿足 $T_{i,j} = m - 1$ 的圓圈，● 代表中間滿足 $T_{i,j} = m - 1$ 的圓圈

則可以注意到，若某一排新著色圓圈與 $T_{i,j} = m$ 的非著色圓圈的

1. 距離超過3 的情況下，經過兩排後，會相較最佳情況(左上圖)中新增兩個紫色圓圈，不符合條件，若距離 $2^m - 2$ 兩排內 ($2^m - 2$ 或 $2^m - 3$)，則會因剩餘藍色格數過少而無法放置距離超過3 的著色圓圈
2. 距離為2，則下一排必須放置於兩個深藍圓圈中間，否則一樣會新增兩個紫色圓圈(左下圖第四排中的紅色圓圈若不塗色，也會在第五排變成紫色圓圈，外加其他紅色圓圈位置新增至第五排時新增的紫色圓圈，將比最少情況新增兩個以上)，對於第 $2^m - 2$ 排，則不可能放置距離為2 的點
3. 距離為1 的情況對於下一排則沒有特殊限制，可放置於紫色連續段的左邊或右邊，第 $2^m - 2$ 排仍有機會

一樣觀察淺藍色圓圈減少的情況，並嘗試轉換為組合計數模型

首先，若完全沒有任何一排與新著色圓圈的距離 ≥ 1 ，則答案即為 $2^{2^{m-1}-1}$ ，因為此情況為唯一可使 $M_{2^m-1} = m$ 的放置方法，且第 $2^m - 1$ 只有一種方法可塗色圓圈符合題意。若有一排存在紅色圓圈與紫色圓圈距離為1，則可將深藍色圓圈與紅色圓圈綁定，視為同一個圓圈，進行排列組合問題的思考，此時問題可改為在第 2^{m-1} 的第 i 格塗紅色格後，左側有 $i - 1$ 格淺藍色圓圈，右側有 $2^{m-1} - i$ 淺藍色圓圈，需要在其中一側綁定一組兩個相鄰的淺藍色圓圈，之後將其分成左與右排列在直線上，按順序依次表示每一排選擇左側或右側

此時按照不同 i 值可以直接列出計算式

方法數

$$= \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2) + C_{2^{m-1}-i-1}^{2^{m-1}-2} \cdot (2^{m-1}-i-1) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2)$$

$$\text{因為 } C_{i-2}^{2^{m-1}-2} \cdot (i-2) = (2^{m-1}-2) \cdot C_{i-3}^{2^{m-1}-3}$$

$$\text{因此所求即為 } 2 \cdot (2^{m-1}-2) \cdot 2^{2^{m-1}-3} = (2^{m-1}-2) \cdot 2^{2^{m-1}-2}$$

最後，對於距離為2的情況，與距離為1的情況類似，只是改為一次綁定3個點，故方

$$\text{法數為 } = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-3}^{2^{m-1}-3} \cdot (i-3) + C_{2^{m-1}-i-2}^{2^{m-1}-3} \cdot (2^{m-1}-i-2) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_{i-3}^{2^{m-1}-3} \cdot$$

$$(i-3)$$

$$\text{使用幾乎一樣的簡化方式可得答案為 } (2^{m-1}-3) \cdot 2^{2^{m-1}-3}$$

將三種可能相加即為所求，得證■

性質 23 若 $T_{2^{m-1}-1} = \{2, 3, \dots, 3, 4, 3 \dots, 3\}$ 的情況，考慮所有可能的4的位置，在 2^{m-1} 至 $2^m - 2$ 總共有 $(2^{m-1}-3) \cdot (2^{2^{m-1}-2}) + 1$ 種不同的塗色方法

證明：此時較難計算的問題是最左側的2，由先前的假設，知道若選擇 $T_{i,j} = 3$ 的位置放置紅球，則只能緊連連續4的段落，但對於2的選擇則可以在任何時刻，因為不論何時染色最左側紅球，都只將使 $T_{i,1} = 3$ ，不會產生矛盾

因此，考慮 $T_{2^{m-1}-1,i} = 1, i \geq 2$ ，則可以將原命題改為有 $i-1+1$ 次選擇左側的機會，其中有一個特殊選擇最左側的機會，和 $2^{m-1}-1-i$ 次選擇右側的機會，而特殊選擇最左側的操作必須在左側全部選擇完成之前，直接計算可得共有 $\sum_{i=2}^{2^{m-1}} C_i^{2^{m-1}} \cdot (i-1) = \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_i^{2^{m-1}} \cdot i - \sum_{i=1}^{2^{m-1}} C_i^{2^{m-1}} = (2^m - 1) \cdot 2^{2^{m-1}-2} - 2^{2^{m-1}-1} + 1 = (2^{m-1}-3) \cdot (2^{2^{m-1}-2}) + 1$

故得證■

最後，由引理 21, 引理 22, 性質 23，可得答案為

$$p_{2^{m-1}-1} \cdot (3 \cdot 2^{m-1} - 1) \cdot (2^{2^{m-1}-3}) + p_{2^{m-1}-1} \cdot ((2^{m-1}-3) \cdot (2^{2^{m-1}-2}) + 1)$$

(因為 $T_{2^{m-1}-1} = \{m, m, \dots, m\}$ 的方法數與 $p_{2^{m-1}-1}$ 相同，而 $T_{2^{m-1}-1} = \{m -$

$1, m, \dots, m, m+1, m, \dots, m\}$ 的方法數為 $\frac{p_{2^{m-1}-1}}{2}$ ， $T_{2^{m-1}-1} = \{m, \dots, m, m +$

$1, m, \dots, m, m-1\}$ 的情況與上一種對稱)

$$\text{化簡可得 } p_{2^m-2} = ((5 \cdot 2^m - 18) \cdot 2^{2^{m-1}-4} + 1) \cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m \geq 3$$

利用程式亦可得 $p_6 = 46, p_{14} = 15888$ ，符合公式所得結果

透過 p_{2^m-2} 的討論過程，我們發現欲計算 p_{2^m-3} 需討論的情況會較多且規律較為複雜，推測對於任一項的表示方式並不簡單。

伍、研究結果與討論

- (1) 對於原始 2023 IMO P5 的解答，為 $k = \lfloor \log_2(i) \rfloor + 1$
- (2) 延伸至每排放置多球的情況，若每排有 m 個球，並在改編題目條件下，答案由以下遞迴式給出 $a_1 = m, a_i = \left\lfloor \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_j}{m} \right\rfloor + m \forall i \geq 2$ ，其中 a_k 即為最少通過 k 個紅色圓圈的排數
- (3) 延伸至三維空間下的問題，並改以向量空間進行定義，則至少通過 k 個紅色圓圈的排數為 $2^{\frac{2^{2^{k-1}}-1-1-1-1}{k-1 \text{ 個 } 2}} - 2$
- (4) 延伸至三維多球可使用定理 15 進行計算
- (5) 對於高維情況下之問題，若 $A'(D, n)$ 代表在有 D 維度的情況下，初始放置紅球位置為 $(n, 0, 0, \dots, 0)$ 時，操作至放置紅球位置為 $(n', 0, \dots, 0, 0)$ 時， $n' > n$ 的數值，則有
$$A'(D, n) = \underbrace{A'(D-1, A'(D-1, \dots, (A'(D-1, A'(D-1, 0) + 1) + 1) \dots + 1) + 1)}_{A'(D, n-1) \text{ 個}}$$
而至少通過 k 個紅色圓圈的排數下界為 $A'(D, A'(D, k-1)) + 1$ ，其中約定 $A'(1, n) = n + 1, A'(D, 0) = 1$ 對任一 $D, n \in \mathbb{N}$ 均成立
- (6) 延伸至高維多球可使用定理 18 進行計算
- (7) 達到原始問題中最小值得塗色方法 $\langle p_i \rangle$ 有 $p_{2^m-1} = 2^{2^m-m}$ 以及 $p_{2^m-2} = \left((5 \cdot 2^m - 18) \cdot 2^{2^{m-1}-4} + 1 \right) \cdot 2^{2^{m-1}-m}, \forall m \geq 3$

陸、相關應用與未來展望

- (1) 提出對於高維度情況下的估計
- (2) 計算出任一項次的排列組數

柒、參考資料

- (1) 2023 年 IMO 第五題
- (2) <https://oeis.org> 線上整數數列大全
- (3) 高中數學課本第二冊(南一版)

附錄 1：計算塗色任意維度下下界所給出之塗色方式

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
vector<int> find_answer(vector<int> Last1){
    vector<int> Last = Last1;

    int tmp = Last.back();
    if(Last[(int)Last.size()-2]!=0){
        Last[(int)Last.size()-1]+=2;
        Last[(int)Last.size()-2]-=1;
        return Last;
    }
    for(int i=(int)Last.size()-3;i>=0;i--){
        if(Last[i]>0){
            Last[i]-=1;
            Last[i+1]+=2+tmp;
            Last[(int)Last.size()-1]=0;
            return Last;
        }
    }
    Last[0]=tmp+1;
    Last[(int)Last.size()-1]=0;
    return Last;
}

int main(){
    int D,Total,Count = 0;
    cout << "請輸入維度與總排數，並以空格分隔"
    cin >> D >> Total;
    vector<int> Test;
    for(int i=0;i<D;i++) Test.push_back(0);
    for(int i=0;i<Total;i++){
        if(Test[0]==i){
            cout << "-----\n";
            cout << "此段落中，最長路徑為" << Count << "\n";
            Count++;
        }
        vector<int> Test1 = find_answer(Test);
        for(int i:Test1) cout << i << " ";
    }
}
```

```
Test = Test1;
cout << "\n";
}
cout << "-----\n";
cout << "在" << D << "維度" << Total << "排的情況，此構造的最長路徑為" << Count
<< "\n";
}
```

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
#define rep(i,n) for(int i=1;i<=n;i++)
#define rep2(i,n) for(int i=n;i>=1;i--)
int DP[50][50];
int W[50][50];
vector<int> Min_answer = {0,1,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5};
set<vector<int>>> s;
int All_level>Total=0;
void init(int N){
    for(int j=0;j<=N;j++){
        DP[N][j]=0;
        W[N][j]=0;
    }
}
int find_answer(int level){
    int Max = 0;
    for(int j=1;j<=level;j++){
        DP[level][j] = max(DP[level-1][j-1],DP[level-1][j])+W[level][j];
        if(DP[level][j]>Min_answer[All_level]) return -1;
    }
    for(int i=1;i<=level;i++){
        Max = max(Max,DP[level][i]);
    }
    return Max;
}
void recursion(int Level){
    if(All_level==Level){
        rep(a1,Level){
            W[Level][a1]=1;
            int tmp = find_answer(Level);
            if(tmp==Min_answer[All_level]) Total+=1;
            init(Level);
        }
    }
    rep(a1,Level){
        W[Level][a1]=1;
```

```
if(find_answer(Level)==-1) init(Level);
    else{
        //cout << "A1 = " << a1 << "\n";
        recursion(Level+1);
        init(Level);
    }
}

int main(){
    cout << "請輸入總排數：";
    cin >> All_level;
    Total = 0;
    recursion(1);
    cout << Total << "\n";
}
```

【評語】 010016

本作品設定多個圓排成 n 列，使得由上而下的第 i 列恰有 i 個圓，而其公切線可以形成一個正三角形。今在各列任取一個圓著色，然後觀察所有由最頂端圓到最底端圓，由上而下相切圓所形成的路徑，問這些路徑經過著色圓的個數 k 之最大值？作者給出本問題的解析解為 $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ ，並將問題朝兩個方向推廣。第一個方向推廣成一個列有多個圓被著色，而第二個方向則是將問題推廣至三維甚至更高維度。這兩個推廣都不算容易，特別是高維度的情況並沒有直觀圖形可以依賴，而是必須做很好的抽象分析。作者所獲致的結果，第一個推廣的解答需要仰賴輔助數列，第二個推廣的解答則僅寫下遞迴式，可再嘗試，找出一個明確解。