2025年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010015

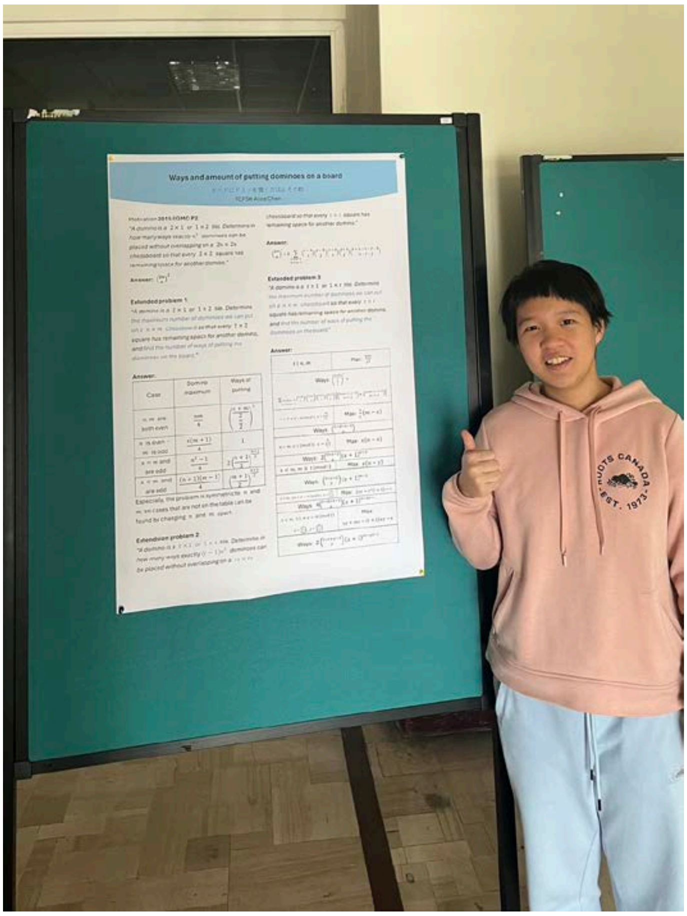
參展科別　數學

作品名稱　棋盤中放入最多骨牌數及方法數探討

就讀學校　臺中市立臺中第一高級中學
指導教師　梁勇能
作者姓名　陳羿安

關鍵詞　骨牌、數學歸納法、組合

作者簡介



大家好，我是臺中一中的陳羿安。我從小便對數學很有興趣，並參與了許多競賽及研究。高一時參加歐洲女子數學奧林匹亞並獲得金牌。高一下開始做專題研究，在這之中我發揮了自己遇到困難不放棄的長處，也改進了無法靜下心來長期做一件事的缺點。我認為做專題研究不只讓我在數學上有進步，也讓我學會了更多好的研究方法與態度。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：棋盤中放入最多骨牌數及方法數探討

關鍵詞：骨牌、數學歸納法、組合

編號：

摘要

本研究改編自 2015 EGMO P2，探討在$n \times m$的棋盤中放入最多的$1 \times t$或$t \times 1$的骨牌，並使得每一個$t \times t$還有空間再放入一個骨牌的方法數。原本題目是$t = 2,\ n = m$為偶數的情況。於是我先從$t = 2$開始研究，推導出 (1)n, m皆為偶數、(2)n, m一奇一偶、(3)n, m皆為奇數的答案。接著再推廣到 (4)任意的t且$t \mid n = m$的結果。最後再討論 (5)n, m分別為t的倍數、模t餘 1 的數，或其他數等不同可能性得出的不同答案。

壹、研究動機

本研究起源於一個國際數學競賽的題目，歐洲女子數學奧林匹亞競賽 European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) 2015 年的第二題，題目敘述如下：「一個骨牌由1×2或2×1方格構成，在一個$2n \times 2n$的棋盤上，欲放置n^2個骨牌，使得對於棋盤中的每個2×2區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？」解題中覺得這是一個非常有趣的題目。它將組合問題討論後轉換為高中熟知的走捷徑問題，是一個需要知識量不多但並不簡單的題目。解出題目後，我發現若給定棋盤的兩邊長皆為偶數，能將題目簡化。接著我便好奇，若拿掉該題目條件，將棋盤邊長改為不是偶數，或是做更多的延伸與研究，答案會有何不同。

貳、研究器材與設備

1. 紙、筆

2. 平板、電腦

參、研究過程與方法

$t=2,\ 2\mid n=m$
EGMO 2015 P2

↓

$t=2, n,m$任意
變化題1

↓

t任意, $t\mid n=m$
變化題2

↓

t,n,m皆任意
變化題3

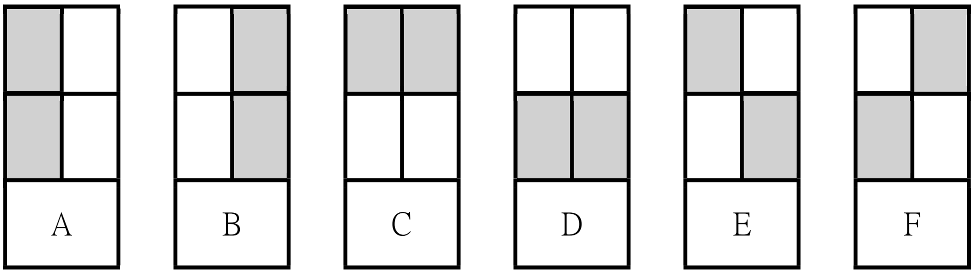
原題目：一個骨牌由1×2 或2×1方格構成，在一個$2n\times 2n$ 的棋盤上，欲放置n^2個骨牌，使得對於棋盤中的每個2×2 的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？

答案：$\binom{2n}{n}^2$種。

解答：

將$2n\times 2n$ 分成n^2個2×2的區域，每個2×2的區域皆至少需要留下2個方格未被覆蓋，故每個2×2至多有兩個方格被覆蓋，即覆蓋住$2n^2$個方格。依題意放置n^2個骨牌也是覆蓋住$2n^2$個方格，由此可知每個2×2 的區域皆有恰2個方格被覆蓋。

每個2×2被覆蓋2個方格的方法有以下六種，並將其如圖（一）分別命名。



圖（一）

首先，易知對於 E、F，該2 × 2區域內已無法再放入一個骨牌，故 E、F 必不存在於該棋盤中。接著討論對於 A、B、C、D，每個2 × 2的上下左右分別可以放哪些放法，使得它所影響到2 × 2不會違反題意。例如：由下方框框所示，A 的左邊只能放 A，放其他的皆會違反題意，而 A 的右邊 A、B、C、D 都可以放（記做全），A 的下方可以放 A、D，A 的上方可以放 A、C。

				C				
			AC	C	BC			
				全				
	AC						BC	
A	A	全				全	B	B
	AD						BD	
				全				
			AD	D	BD			
				D				

圖（二）

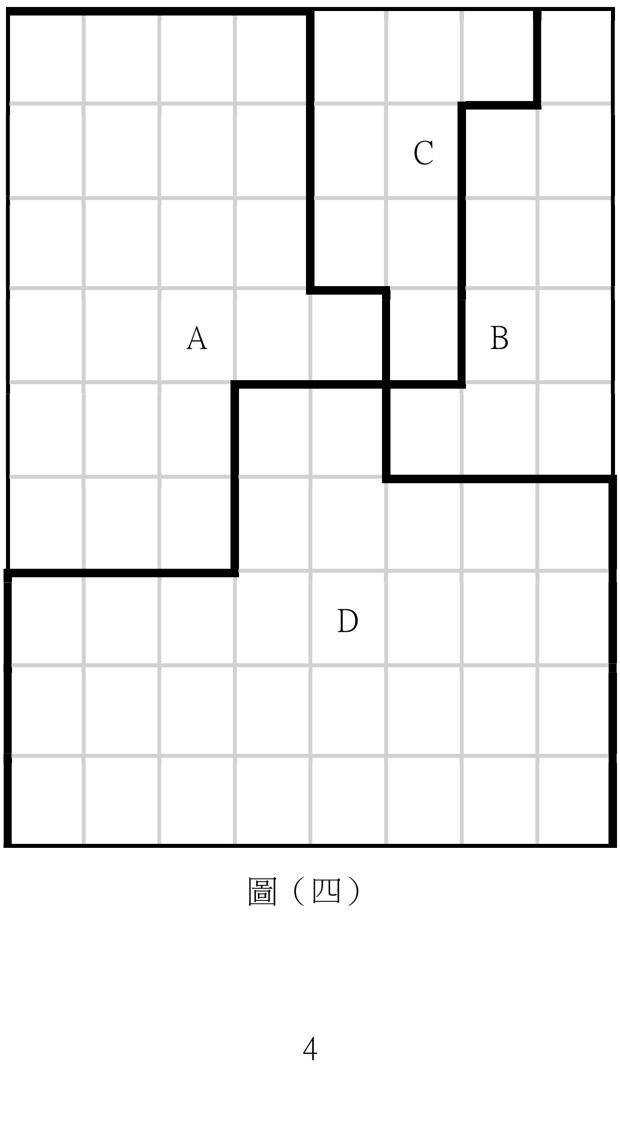
觀察發現表格重複的地方很多，於是我將表格重複的地方合併，簡化為圖（三）。

		C		
	AC	C	BC	
A	A	全	B	B
	AD	D	BD	
		D		

圖（三）

。觀察發現，我們將$2n \times 2n$表格先劃分為$n \times n$個2×2，接著用兩條分別從左上至右下及左下至右上的捷徑劃分，將棋盤分為四個區域，其中圖（四）為$n = 8$的其中一個例子。左邊代表 A，下方代表 D，右邊代表 B，上方代表 C。這樣的放置骨牌的方法符合我們上面整理出的圖（三），而這也包含所有可能的放法。

綜上所述，總方法數為兩條捷徑的畫法，即$\binom{2n}{n}^2$。



圖（四）

變化題 1：一個骨牌由1×2或2×1方格構成，在一個$n\times m$（$n,m\geq 2$）的棋盤上，欲放置多個骨牌，使得對於棋盤中的每個2×2的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問最多可以放入幾個骨牌，又有幾種放法？

變化題 1-1：n,m 皆為偶數。

答案：最多放置$\frac{mn}{4}$個骨牌，且有$\binom{\frac{n+m}{2}}{\frac{n}{2}}^2$種放法。

解答 1-1：

令$n=2s,\ m=2t$ ，仿照上述可把棋盤劃分為st個2×2，每個2×2最多有2個位置被放入骨牌，故可以放下的骨牌最大數量為$\frac{2st}{2}=\frac{mn}{4}$。骨牌放置的方法與上述也一樣，方法數為兩條捷徑的畫法，共有$\binom{s+t}{s}^2=\binom{\frac{n+m}{2}}{\frac{n}{2}}^2$種放法。

為了讓後續的證明更嚴謹，另一種敘述是：當n,m 皆為偶數時，至多有$\frac{nm}{4}$個位置有放置骨牌。由每個2×2至多只有兩個位置可以放置骨牌得知。

變化題 1-2：n 為偶數且m 為奇數。

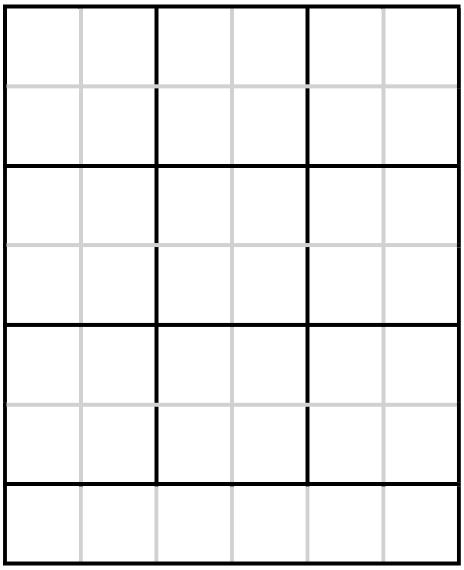
答案：最多放置$\frac{n(m+1)}{4}$，且有 1 種放法。

解答 1-2：

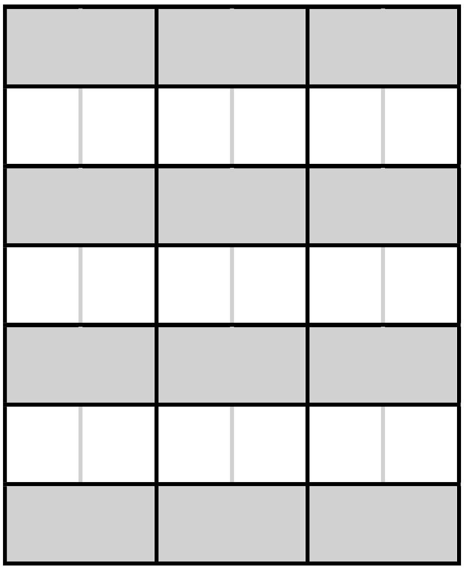
以下方圖（五）、圖（六）$n=6,\ m=7$的棋盤舉例，將其劃分為上方的$n\times(m-1)$與下方的$n\times 1$ ，由於$m-1$是偶數，故上方的$n\times(m-1)$由變化題 1-1 知最多可以有$\frac{n(m-1)}{2}$個位置有放置骨牌，而下方的$n\times 1$最多可以放有n個位置放置骨牌，故總共至多有$\frac{n(m+1)}{2}$個位置放置骨牌，也就是放置$\frac{n(m+1)}{4}$個骨牌。接下來考慮放置方法，以灰底表示骨牌放置的地方。

下方的$n \times 1$若想要全部n個位置都放下骨牌，則放置了$\frac{n}{2}$個骨牌，且只有一種方法（全放），接著考慮上方的$n \times (m-1)$，每個2×2皆須放下一個骨牌，那就只有一種方法（見圖（六），若放置 ABCD 中不是 C 的其他種，皆會違反題意。）

綜上所述，最多可以放置$\frac{n(m+1)}{4}$個骨牌，且只有1種放法。



圖（五）



圖（六）

變化題 1-3：$n = m$為奇數。 答案：最多放置$\frac{n^2-1}{4}$的骨牌，且有$2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$種放法。

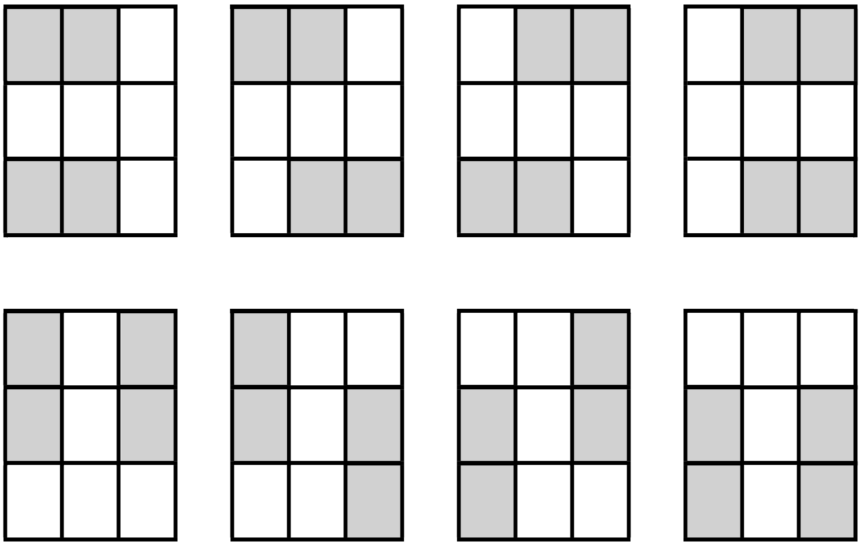
解答 1-3：

我們先將行列編號，由最上方算第一列，最左邊算第一行，由下、由右計算，以利後續證明。

引理 1：最多放置$\frac{n^2-1}{4}$個骨牌，且骨牌只有可能全部都是橫著放或是全部都是直著放，且若橫著放，則全部放置在奇數列，反之亦然。

我們用數學歸納法證明以下引理。

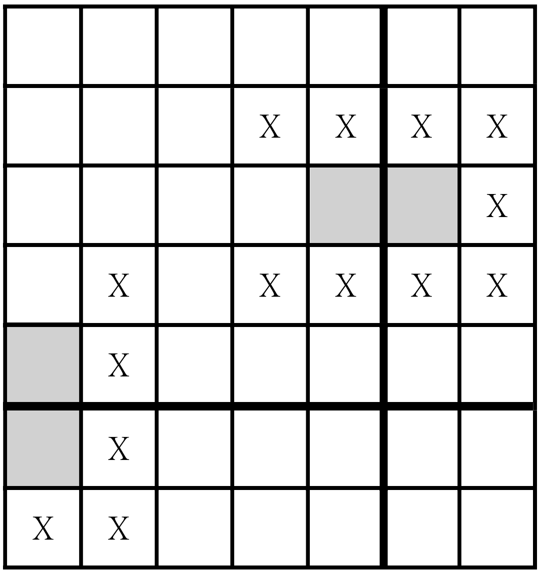
1. 初始條件$n = m = 3$時，所有放法如圖（七）所列，且皆符合引理 1。



圖（七）

2. 假設引理 1 在$n = m < k$的時候成立。

3. 對於$n = m = k$時，我們將棋盤劃分為左上的$(k-2) \times (k-2)$，並且在倒數第二、三行的中間及倒數第二、三列的中間畫出分隔線。如圖（八）是一個$k = 7$的例子。

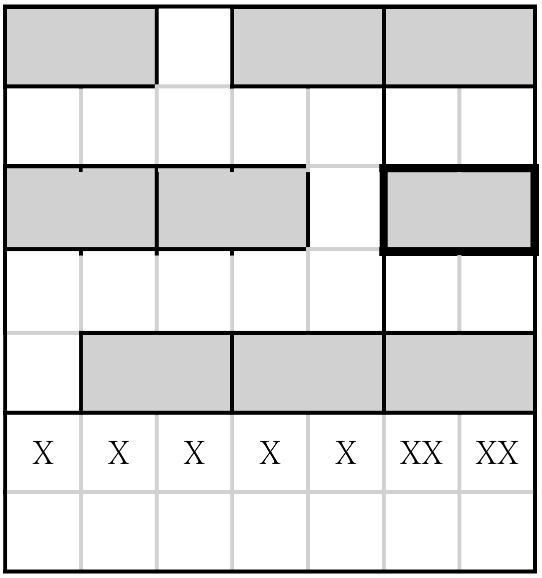


圖（八）

如果有一個骨牌跨過垂直分隔線，如圖（八）灰底的地方，則因為畫 X 處都一定不會放置骨牌，所以我們可以將該骨牌往右移一格，讓它不跨過分隔線但仍然是一個合法的放置方法。若有骨牌跨過水平分隔線同理可以把它往下移一格讓它不跨過分隔線。於是，我們可以假設沒有骨牌經過分隔線。這時，左上角的$(k-2) \times (k-2)$由歸納前

提，最多可以放置$\frac{(k-2)^2-1}{4}$個骨牌，而剩餘的 L 型最多可以放置$k+1$個骨牌，故總和為$\frac{k^2-1}{4}$個骨牌。

不失一般性假設左上的$(k-2)\times(k-2)$骨牌是橫著放，如圖（九），則因為畫 X 處不能放置骨牌，所以倒 L 型的右邊一定是從第一列開始隔列放置骨牌，於是 XX 處亦不能放置骨牌，所以最後一列一定也是全部橫著放，滿足引理 1。特別的注意到這時候如果棋盤允許，我們可以將倒 L 型右邊的骨牌往左移也成立（例如圖（九）框線較粗的那個骨牌）。



圖（九）

由數學歸納法知引理 1 成立。

綜上所述，我們至多可以放置$\frac{n^2-1}{4}$個骨牌。若是橫著放，我 們將在奇數列的每一列放置$\frac{n-1}{2}$個骨牌，而這有$\frac{n+1}{2}$種放法（每列空一格，一定空在奇數行），並共會放置$\frac{n+1}{2}$列。所以共有$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$種放法，但也可以直著放，故共有$2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$種放法。

變化題 1-4；$n<m$ 且皆為奇數。 答案：最多放置$\frac{(n+1)(m-1)}{4}$個骨牌，且有$\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$種放法。

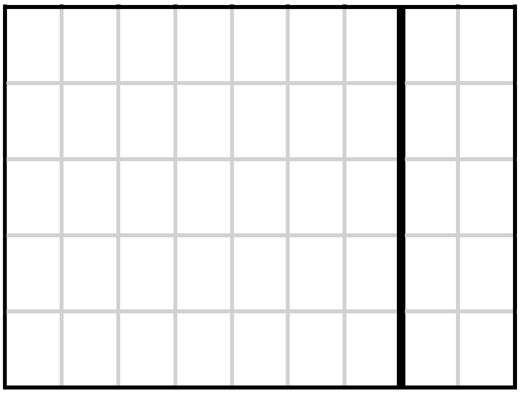
解答 1-4：

我們將短邊放置垂直於頁面底部，長邊平行於頁面底部，以利證明。接著，我們先證明以下這個引理。

引理 2：最多放置$\frac{(n+1)(m-1)}{4}$個骨牌，且骨牌只有可能全部都是橫著放，並放置在奇數列。

以下用數學歸納法證明這個引理。

1. 初始條件就是變化題 1-3。
2. 假設這個引理在$n \leq k,\ m < l$時成立。
3. 考慮$n = k,\ m = l,\ \ k < l$時的情況。首先，將棋盤劃分為左邊的$(l-2) \times k$及右邊的$2 \times k$，並特別畫出分隔線。注意到因為$k < l$故$k \leq l-2$。圖（十）為一個$k = 5,\ l = 9$的狀況。



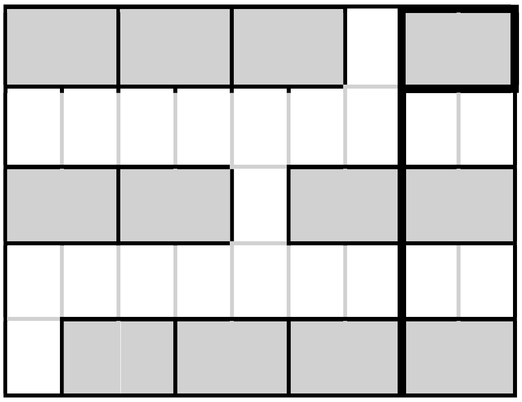
圖（十）

與變化題 1-3 類似，若有骨牌經過分隔線，則可以將它往右移，故可以假設所有骨牌皆不經過分隔線。由歸納前提及變化題 1-2 知，左邊至多放置$\frac{(l-3)(k+1)}{4}$個骨牌，右邊最多放置$\frac{k+1}{2}$個骨牌，總和為$\frac{(k+1)(l-1)}{4}$個骨牌，滿足引理 2。

接著考慮放置方法，圖（十一）為一個例子，左邊由歸納前提放置，滿足引理 2，右邊由變化題 1-2 知只有一種方法，且該方法亦滿足引理 2，故$k \times l$的棋盤也滿足引理 2。

特別的，若$l-2 = k$，則左邊也可以不要橫著放，而是直著放。但若直著放，由變化題 1-3 我們知道倒數第三行一定有$\frac{k-1}{2}$個骨牌。但是右邊的$2 \times k$已經固定只有一種放法，而

他跟倒數第三行會矛盾，故不合。並且注意到這時候如果棋盤允許，我們可以將右邊的骨牌往左移也成立（例如圖（十一）框線較粗的那個骨牌）。



圖（十一）

由數學歸納法知引理 2 皆成立。

綜上所述，我們至多可以放置$\frac{(n+1)(m-1)}{4}$個骨牌。我們將在奇數列的每一列放置$\frac{m-1}{2}$個骨牌，而這有$\frac{m+1}{2}$種放法（每列空一格，一定空在奇數行），並共會放置$\frac{n+1}{2}$列。所以總共有$\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$種放法。

至此，變化題 1 的所有情況皆已探討完畢，如下表所整理。由於此題目對n,m對稱，下表沒列出來的可能性可以將n,m調換獲得（m為偶數，n為奇數以及$n>m$皆為奇數）。

條件	最多放置的骨牌數	放置骨牌的方法數
n,m皆為偶數	$\frac{nm}{4}$	$\binom{\frac{n+m}{2}}{\frac{n}{2}}^2$
n為偶數，m為奇數	$\frac{n(m+1)}{4}$	1
$n=m$ 為奇數	$\frac{n^2-1}{4}$	$2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$
$n<m$且皆為奇數	$\frac{(n+1)(m-1)}{4}$	$\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

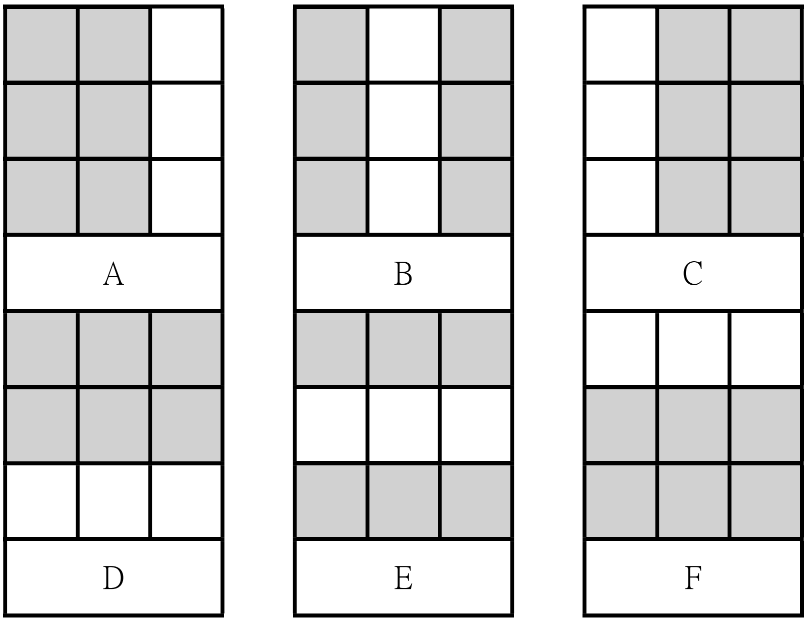
變化題 2：一個骨牌由$1 \times t$或$t \times 1$方格構成，在一個$tn \times tn$的棋盤上，欲放置$(t-1)n^2$個骨牌，使得對於棋盤中的每個$t \times t$的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？（原題是$t=2$的情況。）

變化題 2-1：$t=3$。一個骨牌由1×3或3×1方格構成，在一個$3n \times 3n$的棋盤上，欲放置$2n^2$個骨牌，使得對於棋盤中的每個3×3的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？

答案：$\binom{2n}{n}^2 + 2\sum_{\substack{i+j\le n-1 \\ k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}$種放法。

解答 2-1：

仿照上述，我們將棋盤劃分成$n \times n$個3×3，每個3×3都恰有6個方格被骨牌覆蓋。則有圖（十二）以下六種放法。



圖（十二）

我們分成含 B、E 及不含 B、E 兩個情況來討論。

情況 1：不含 B、E。

討論 A、C、D、F 的上下左右可以放誰。

		D		
	AD	D	CD	
A	A	全	C	C
	AF	F	CF	
		F		

圖（十三）

得出圖（十三），而這是與原題很類似的結果，由此可知這個情況的放法為$\binom{2n}{n}^2$。

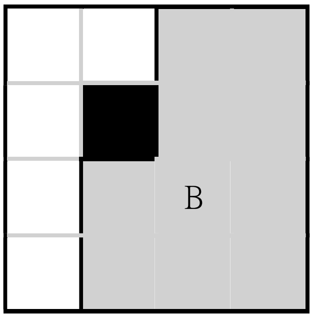
<u>情況 2：</u>含 B、E 其中一個。

觀察 B、E 的附近可以放誰，得出圖（十四）。可知 B、E 在棋盤上不共存，且若將一個滿足題意的棋盤中的 B 全部換成 E，或將 E 全部換成 B，該棋盤一樣可以滿足題意。故以下不失一般性，假設棋盤上有 B。

	BD				DE	
AB	B	BC		AE	E	CE
	BF				EF	

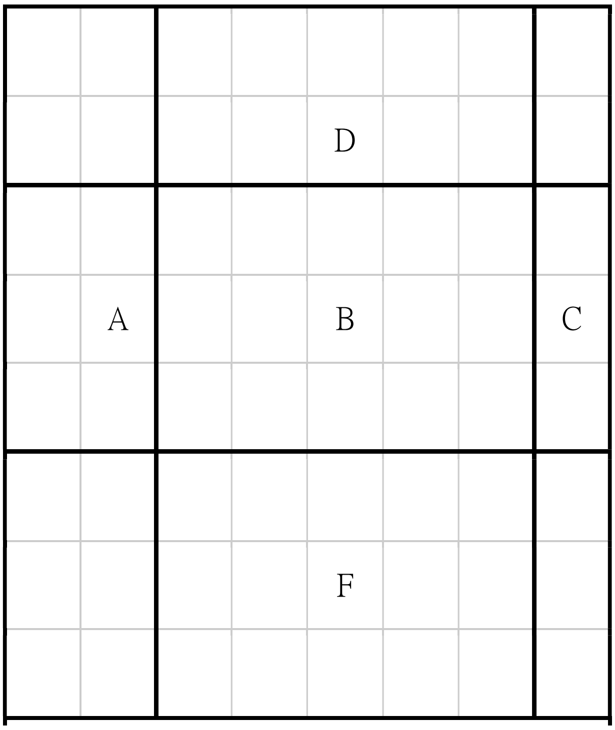
圖（十四）

首先證明棋盤中的 B 圍成一個矩形。假設棋盤中的 B 不為矩形（見圖（十五）灰底的部分）。則必存在一個非 B 的區域，其上下左右有兩個以上是 B（圖（十五）黑底的部分）。由圖（十四）我們可以發現一個非 B 的上下左右只可能最多一個 B，故這不成立。於是我們知道棋盤中的 B 圍成一個矩形。



圖（十五）

圖（十六）是一個$n = 8$的例子（下圖中的每個格子代表一個3×3），而左上、左下、右上、右下四個區域可以分別再一條捷徑劃分。故這個例子中共有$\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{2}$種放法。



圖（十六）

將情況一般化，全部共有$\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}$種放法，其中代表左邊數過來$i$排是A，接著接B，後面再$j$排是C（因為一定要有B，所以$i + j \le n - 1$），另一邊同理，$k$代表D，$l$代表F。其中B可以換成E，故需要再$\times 2$。

綜上所述，我們知道變化題2-1的答案為

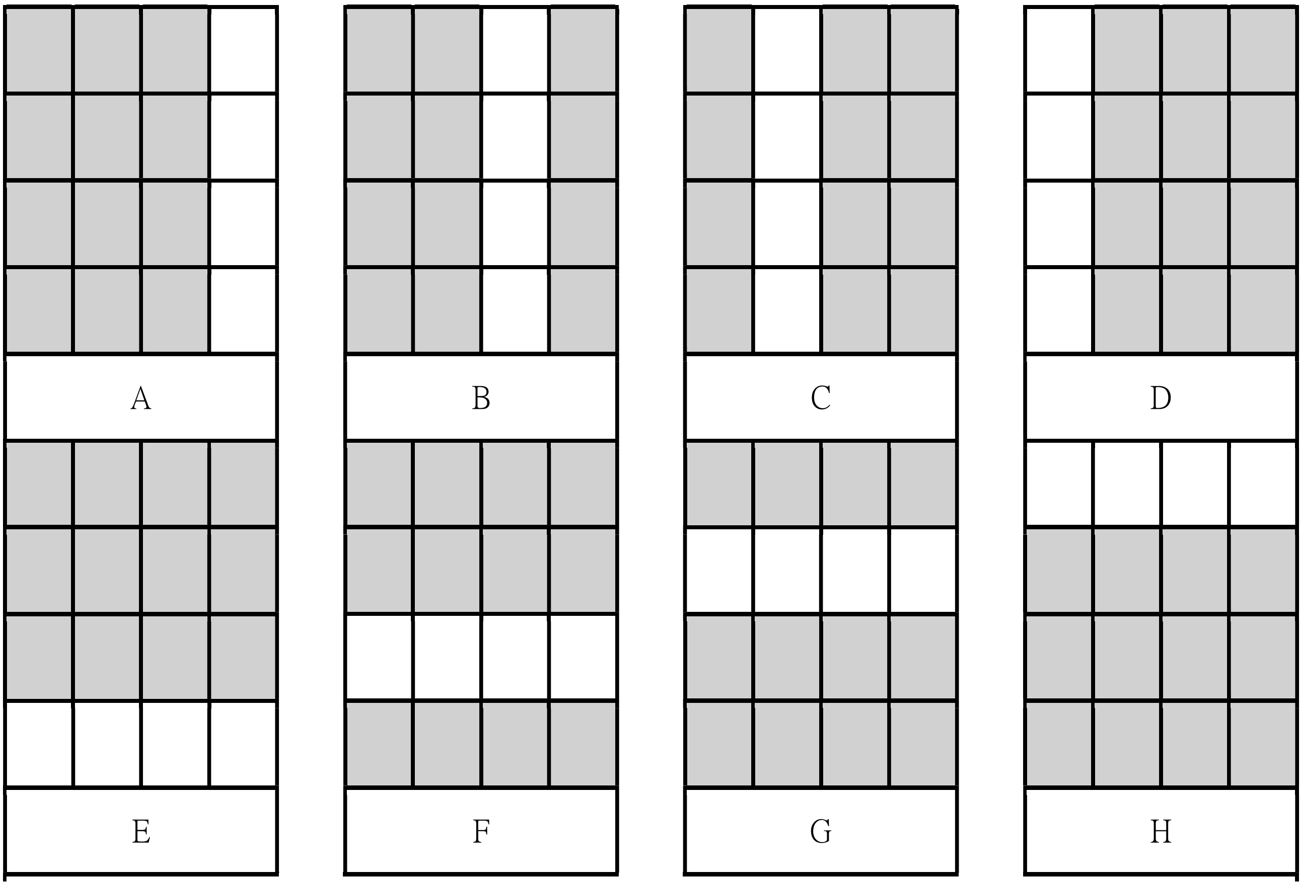
$$\binom{2n}{n}^2 + 2\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}$$

變化題 2-2；$t=4$。一個骨牌由1×4或4×1方格構成，在一個$4n\times 4n$的棋盤上，欲放置$3n^2$個骨牌，使得對於棋盤中的每個4×4的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？

答案：$\binom{2n}{n}^2+2\sum_{\substack{i+j\le n-1\\ k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}(n-i-j+1)$種放法。

解答 2-2：

仿照上述，我們將棋盤劃分成n^2個4×4，每個4×4都恰有 12 個方格被骨牌覆蓋。則有圖（十七）以下八種放法。



圖（十七）

情況 1：只有 A、D、E、H。

一樣討論 A、D、E、H 的上下左右可以放誰。

		E		
	AE	E	DE	
A	A	全	D	D
	AH	H	DH	
		H		

圖（十八）

得出圖（十八），而這是與原題很類似的結果，由此知這個情況的放法為$\binom{2n}{n}^2$。

情況 2：含 B、C、F、G 其中一個。

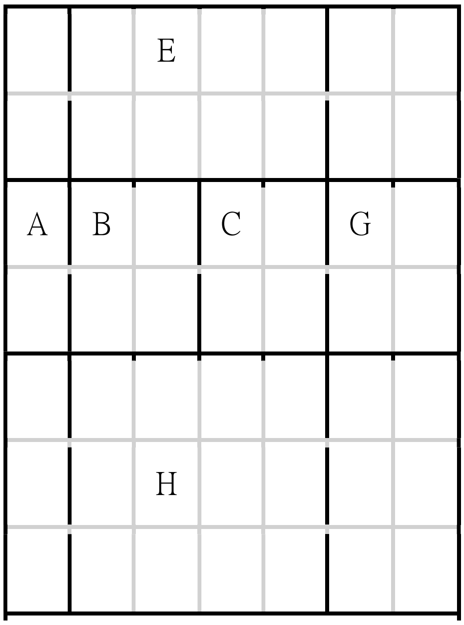
同樣的，考慮 B、C、F、G 上下左右分別可以放誰。

	BE				CE	
AB	B	BCD		ABC	C	CD
	BH				CH	
	EF				EFG	
AF	F	DF		AG	G	DG
	FGH				GH	

圖（十九）

首先觀察若 B、C 存在則 F、G 不存在，反之亦然。首先討論有 B、C 的狀況。仿照變化題 2 的討論，我們知道 B、C 會構成兩個高度相等且相鄰的矩形。

圖（二十）是$n=7$的一個例子。



圖（二十）

一般化後我們知道此情況的方法數為$\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}(n-i-j+1)$

其中i代表左邊數過來i排是 A，接著接 B 和 C，後面再j排是 G（因為一定要有 B 或 C，所以$i+j\le n-1$），另一邊同理，k代表 E，l代表 H。後面的$n-i-j+1$代表 B 和 C 總共有$n-i-j$排，所以有$n-i-j+1$種方法挑選 B 和 C 分別幾排（允許完全沒有 B 或完全沒有 C）。

同理 F、G 的情況是形成兩個等寬的矩形，故可知方法數為

$\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}(n-k-l+1)=\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}(n-i-j+1)$

（只是將i,j與k,l互換）。

於是結合情況 1，我們有此問題的答案為

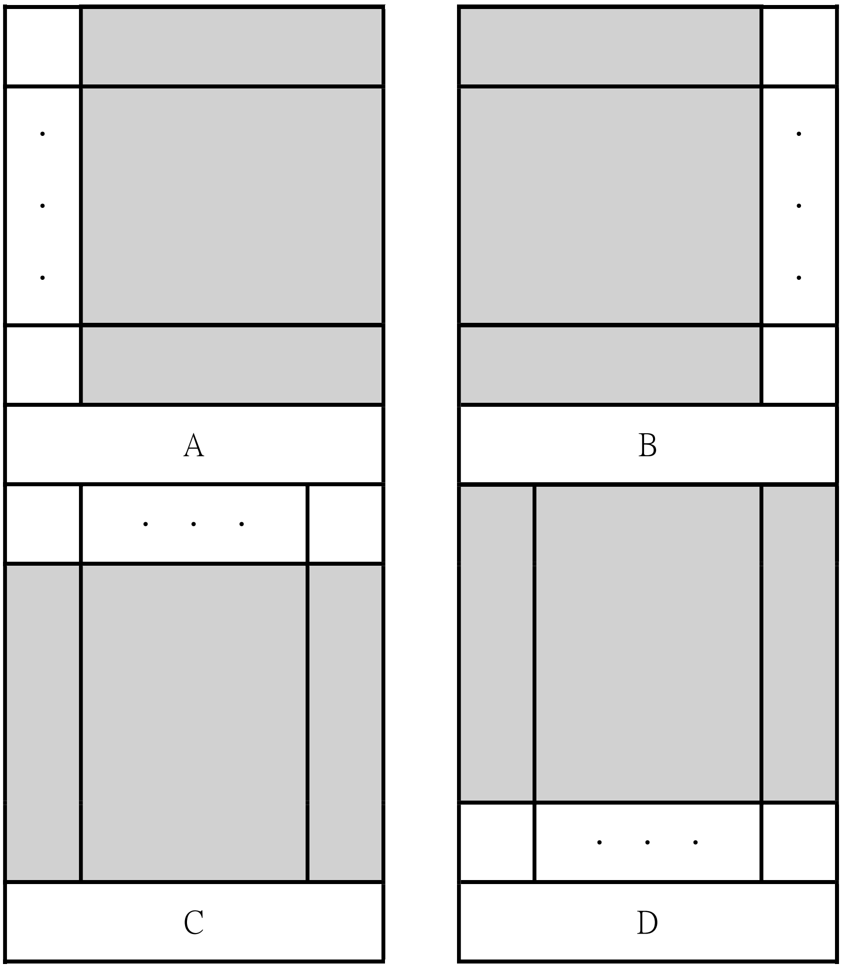
$$\binom{2n}{n}^2+2\sum_{\substack{i+j\le n-1\\k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}(n-i-j+1)$$

變化題 2-3：考慮所有t。一個骨牌由$1\times t$或$t\times 1$方格構成，在一個$tn\times tn$的棋盤上，欲放置$(t-1)n^2$個骨牌，始得對於棋盤中的每個$t\times t$的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問有幾種放法？

答案：$\binom{2n}{n}^2+2\sum_{\substack{i+j\le n-1\\ k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$種放法。

解答 2-3：

仿照上述，同樣的我們先將棋盤劃分為$n\times n$個$t\times t$，接著我們由考慮每個$t\times t$要放置$(t-1)$個骨牌且符合題意，改為考慮每個$t\times t$空出一個放骨牌的位置未放置骨牌。則我們會有$2t$種放法（橫著放有t列，直著放有t行）。其中特別分出四種用以下圖（二十一）的方法將其命名（灰底表示有放置骨牌）。空最左邊的為 A，空最右邊的為 B，空最上面的為 C，空最下面的為 D。



圖（二十一）

剩下的$2t-4$種，空左邊數來第i行的把它命名為S_i，其中$2 \le i \le t-1$，空上面數來第i列的把它命名為T_i，$2 \le i \le t-1$。接著便仿照上述討論。

情況 1：只含 A、B、C、D。

同樣的，整理出如圖（二十二）的結論，跟之前一樣的，我們知道這個情況有$\binom{2n}{n}^2$種放法。

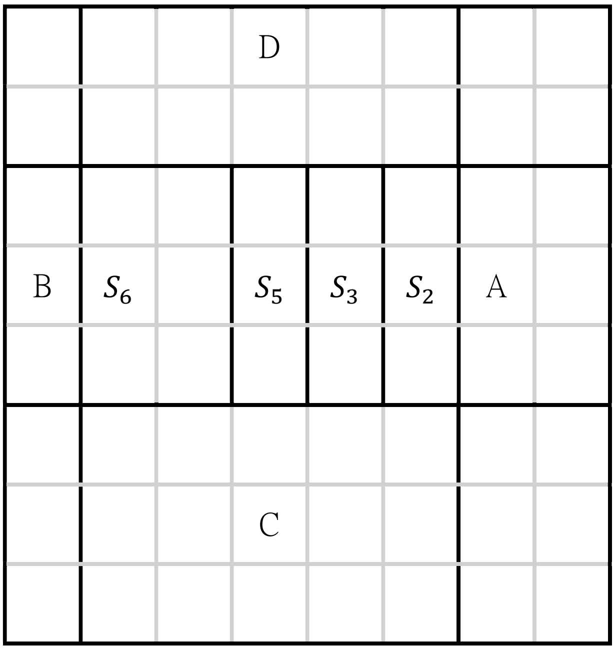
		D		
	BD	D	AD	
B	B	全	A	A
	BC	C	AC	
		C		

圖（二十二）

情況 2：含有S_i與T_i任意一個。

首先，一樣考慮每種$t \times t$上下左右還可以放誰。可以得到對於S_i，左邊可以放 B 以及所有S_j滿足$j \ge i$。右邊可以放 A 以及所有S_j滿足$j \le i$。上面可以放 D 及S_i，下面可以放 C 及S_i。同理可以得到T_i的討論，而由這個討論也可以發現S_i, T_i不共存，但兩者的方法數是一樣的。

接著同樣於變化題 2-2 的考慮，我們知道所有S_i會形成多個等高且相鄰的矩形，並且由左到右的i是遞減的。圖（二十三）是一個$n=8$的例子。



圖（二十三）

中間由多個S_i組成的矩形，可以任意放入遞減的i（不一定嚴格遞減）。假設有k行，且有$t-2$種i，則有$\binom{k+t-3}{k}$種選擇i的方法（重複組合）。由此我們知道，這個情況有$\sum_{\substack{i+j\le n-1\\ k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$種放法。其中$i$代表左邊數過來$i$排是 B，接著接$S_i$，後面再$j$排是 A（因為一定要有$S_i$，所以$i+j\le n-1$），另一邊同理，$k$代表 D，$l$代表 C。後面的$\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$代表$S_i$總共的放法。$T_i$的狀況同理一樣，再結合情況 1，我們知道總共放置骨牌的方法數為

$$\binom{2n}{n}^2+2\sum_{\substack{i+j\le n-1\\ k+l\le n-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$$

可以代入前面討論完畢的$t=2,\ 3,\ 4$發現這個公式皆符合。

變化題 3：一個骨牌由$1\times t$或$t\times 1$方格構成，在一個$n\times m$（$n,m\geq t$）的棋盤上，欲放置多個骨牌，使得對於棋盤中的每個$t\times t$的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問最多可以放入幾個骨牌，又有幾種放法？

變化題 3-1：$t\mid n,m$。

答案：最多放置$\frac{(t-1)mn}{t^2}$個骨牌，且有

$$\binom{\frac{n+m}{t}}{\frac{n}{t}}^2+\sum_{\substack{i+j\leq n-1\\k+l\leq m-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\left[\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}+\binom{t+m-k-l-3}{m-k-l}\right]$$

種放法。

解答 3-1：

類似於上方的討論，由劃分$t\times t$，每個$t\times t$最多放置$t-1$個骨牌，我們知道最多放入$\frac{(t-1)mn}{t^2}$個骨牌。只放 ABCD 的話方法數為$\binom{\frac{n+m}{t}}{\frac{n}{t}}^2$，

放入S_i的話方法數為

$$\sum_{\substack{i+j\leq n-1\\k+l\leq m-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$$

放入T_i的話方法數為

$$\sum_{\substack{i+j\leq n-1\\k+l\leq m-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+m-k-l-3}{m-k-l}$$

故總方法數為

$$\binom{\frac{n+m}{t}}{\frac{n}{t}}^2+\sum_{\substack{i+j\le n-1\\ k+l\le m-1}}\binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\left[\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}+\binom{t+m-k-l-3}{m-k-l}\right]$$

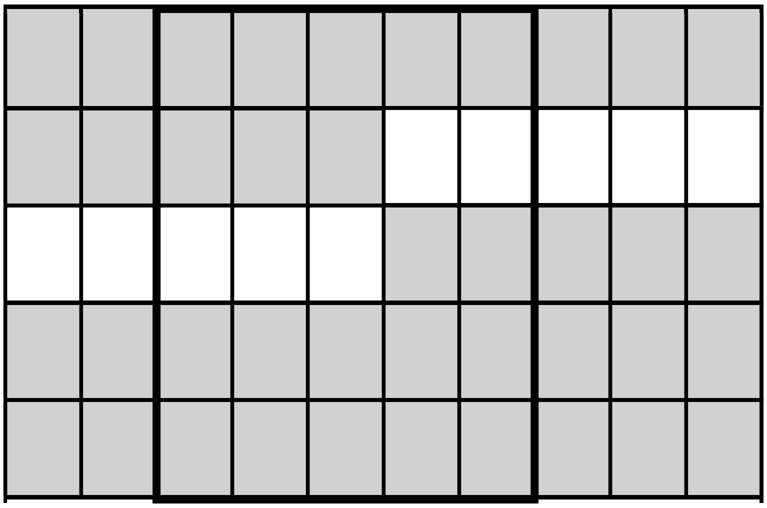
為了讓後續的證明更嚴謹，另一種敘述是：當$t\mid n,m$時，至多有$\frac{(t-1)mn}{t}$個位置有放置骨牌。由每個$t\times t$至多只有$(t-1)t$個位置可以放置骨牌得知。

變化題 3-2；$t\mid n$，$0\neq d=m\ (mod\ t)$，$x=\lfloor\frac{m}{t}\rfloor$。

答案：最多放置$\frac{n}{t}(m-x)$個骨牌，且有$\binom{t-d+x-1}{x}$種放法。

解答 3-2：

將棋盤劃分為下方的$d\times n$及上方的$(m-d)\times n$。由變化題 3-1 知道上方最多有$\frac{(t-1)(m-d)n}{t}$個位置有放置骨牌，而下方因為$d<n$，所以最多可以全部放置骨牌。故最多放置$\frac{tmn-(m-d)n}{t^2}=\frac{n}{t}\left(\frac{tm-(m-d)}{t}\right)=\frac{n}{t}(m-x)$個骨牌。至於放入方法數，首先發現最下方$d\times n$必須放滿，且上方的$(m-d)\times n$中每個$t\times t$都要放一個骨牌。考慮劃分棋盤為$\frac{n}{t}$個$t\times m$，對於相鄰的$t\times m$，若骨牌放置方法不一樣，如圖（二十四）是一個$t=5$的例子，選擇一個$t\times t$跨過這兩個$t\times m$，(如圖（二十四）粗線框起來的區域)，則必不合。



圖（二十四）

由此我們只需要討論一個$t \times m$放置$\frac{tm-(m-d)}{t} = m - x$個骨牌的方法數。又因為棋盤最下面的$t \times d$一定要放滿，於是我們先考慮$t \times (m-d)$的情況。

我們構造一個二維數列$a_{i,j}$，其中i代表在$t \times (m-d)$的最下方放置了連續i個骨牌（$0 \le i \le t-1$），j代表$\frac{m-d}{t}$，而$a_{i,j}$代表滿足以上對i,j的敘述時骨牌放置的方法數。

初始值我們有不管對於任何m，$a_{0,1} = a_{1,1} = a_{2,1} = \cdots = a_{t-1,1} = 1$。

接著考慮遞迴式，對於$a_{0,j}$，與$a_{i,j-1}$的差別是下方加入一個$t \times t$，而這個$t \times t$要放入$t-1$個骨牌。最下面沒有骨牌的話，表示這個$t \times t$上方要有連續$t-1$個骨牌。又我們知道不能連續放入t個骨牌（不然會違反題意），因此上一個$t \times t$一定是最下面沒有骨牌的，即$a_{0,j-1}$。於是，我們有$a_{0,j} = a_{0,j-1} = 1$。

一樣探討剩餘的$a_{i,j}$，會發現若下方的的$t \times t$最後要有i個骨牌，則上面要有$t-i-1$個骨牌，所以上方的$t \times t$的下面要有不大於i個骨牌，也就是$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{i} a_{k,j-1} = a_{i,j-1} + \sum_{k=0}^{i-1} a_{k,j-1} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}$。

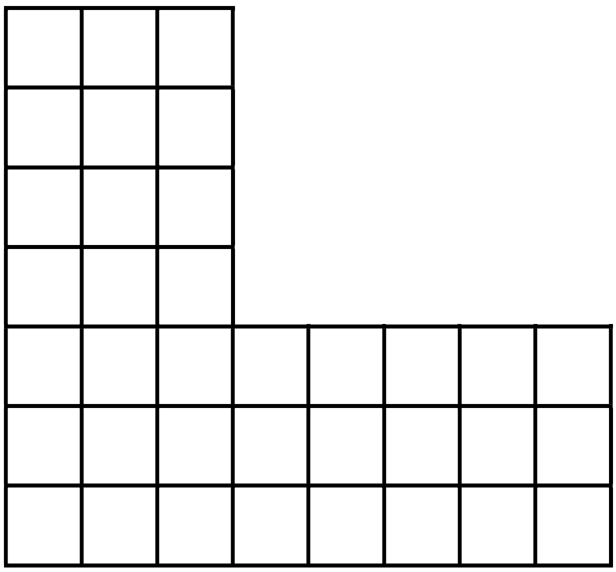
接著考慮組合對應，一個由座標$(0,1)$到座標(i,j)走捷徑的方法數也滿足$a_{i,j} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}$。初始值$a_{0,1} = a_{1,1} = \cdots = a_{t-1,1} = a_{0,2} = a_{0,3} = \cdots = 1$也符合。於是我們知道$a_{i,j}$表示由$(0,1)$到$(i,j)$走捷徑的方法數，也就是$\binom{i+j-1}{j-1}$。

接下來回到原本的問題，我們知道一個$t \times m$棋盤最下面的$t \times d$一定要放滿，也就是除了下方的$t \times d$以外最下面的$t \times t$的最下方至多放入$t-d-1$個連續骨牌，我們知道放置骨牌的總方數為$\sum_{k=0}^{t-d-1} a_{k,x} = \sum_{k=0}^{t-d-1}\binom{k+x-1}{x-1} = \binom{x-1}{x-1} + \binom{x}{x-1} + \cdots + \binom{t-d+x-2}{x-1} = \binom{t-d+x-1}{x}$（由 Hockey-stick identity 可以得知）。

綜上所述，我們知道最多可以放入$\frac{n}{t}\left(\frac{tm-(m-d)}{t}\right) = \frac{n}{t}(m-x)$個骨牌，且放入方法數為$\binom{t-d+x-1}{x}$。

在繼續考慮不一樣的n, m之前，我們先來定義一個寬度為t的 L 型。

定義 1：一個寬度為t的 L 型棋盤，有兩個變數可以改變，垂直頁面底部長度的最大值（簡稱垂直長度n）及平行頁面底部的長度的最大值（簡稱平行長度m）。如圖（二十五）是一個寬度$t=3,\ n=7,\ m=8$的例子）。其中我們知道$n, m \leq t$，並且我們另外特別要求$t \nmid n, m$及$n \leq m$。



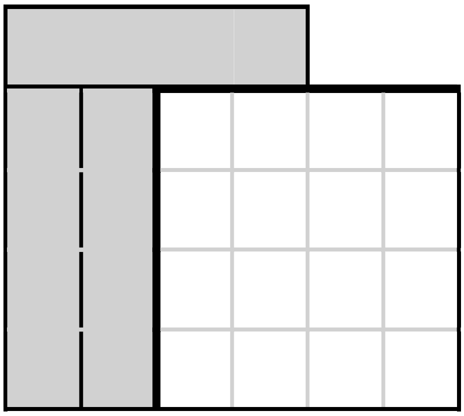
圖（二十五）

接著我們要證明一個引理。

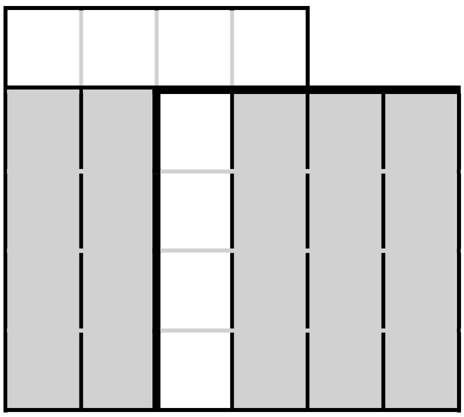
引理 3：對於一個寬度為t的 L 型棋盤，令$d = n\ (mod\ t),\ e = m\ (mod\ t),\ x = \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor,\ y = \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor$，最多可以放入個$n + m - x - y - t$個骨牌。

以下使用數學歸納法證明這個引理。

1. 初始條件是$n, m < 2t$，也就是$x = y = 1, d = n - t, e = m - t$的情況。如表二十六是一個$t = 4, n = 5, m = 6$的例子。我們先劃分出右下角的$t \times t$，用跟變化題 1-3 一樣的討論，我們可以假設沒有骨牌跨過粗體分隔線，則$t \times t$最多放置$t - 1$個骨牌，而左上的 L 型最多放置$d + e - 1$個骨牌（最多是如圖（二十六）灰底放滿$d + e$個骨牌，但這種放法剛好不合，所以最多放$d + e - 1$個骨牌，如圖（二十七）是其中一種放法）。總和為$d + e + t - 2 = (d + t) + (e + t) - 1 - 1 - t$個骨牌，符合引理 3。



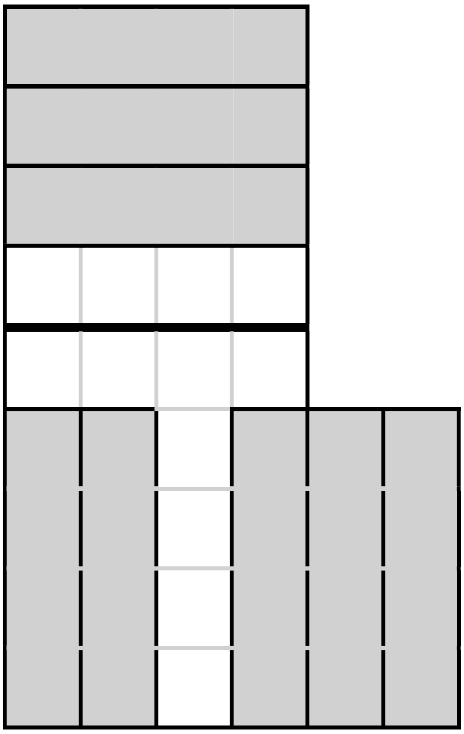
圖（二十六）



圖（二十七）

2. 接著我們假設引理 3 在$n \leq k, m < l$時引理 3 皆成立。
3. 對於$n = k,\ m = l$時，由於$n \leq m$，所以若非初始值已經討論到的情況，則$l > 2t$，因此我們可以將上方一個$t \times t$劃分出來，剩餘的如圖（二十八）是一個$n = k, m = l - t$寬度為t的 L 型棋盤。首先仿照變化題 1-3 的討論，我們可以假設分割線上沒有骨牌，於是底

下的 L 型棋盤由歸納前提可以放置$k+l-x+1-y-2t$個骨牌，而該$t\times t$可以放置$t-1$個骨牌，總和為$k+l-x-y-t$，符合引理 3（下圖是其中一種放置方法）。



圖（二十八）

由數學歸納法知引理 3 成立。

變化題 3-3：$n=m\equiv 1\ (mod\ t)$，$x=\lfloor\frac{n}{t}\rfloor$。

答案：最多放置$x(n-x)$個骨牌，且有$2\binom{t+x-2}{x}(x+1)^{n-x}$種放法。

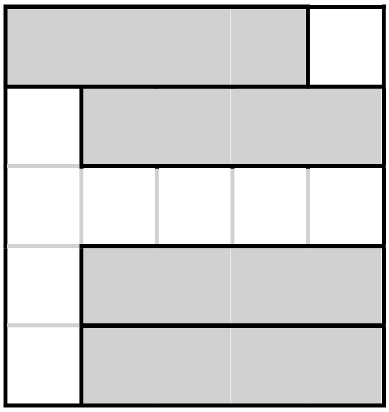
解答 3-3：

我們先將行列編號，由最上方算第一列，最左邊算第一行，由下、由右計算，以利後續證明。

引理 4：最多可以放入$x(n-x)$個骨牌。且骨牌只有可能全部都是橫著放或是全部都是直著放。若是橫著放，則是合法地選擇$n-x$行（合法意思是不連續t個），每行放置最多的骨牌。

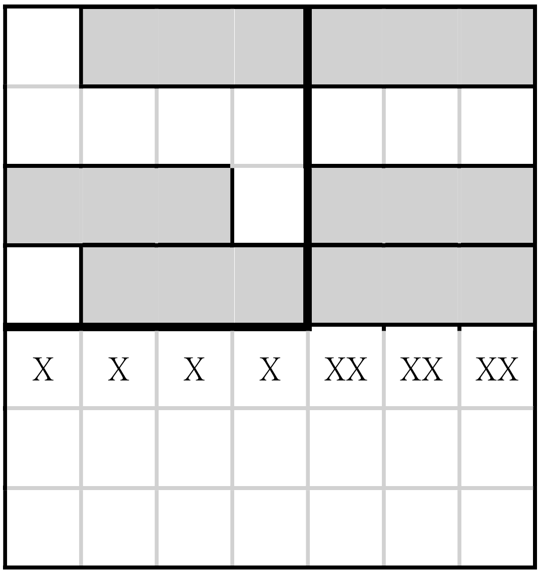
以下使用數學歸納法證明這個引理。

1. 初始條件為$n = m = t + 1$，$x = 1$。顯然若不失一般性選擇橫著放，則合法地選擇t行，每行放置一個骨牌，為放置t個骨牌。圖（二十九）為一個$t = 4,\ n = 5$的例子



圖（二十九）

2. 假設這個引理在$n = m < k$時皆成立。
3. 對於$n = m = k$時，將棋盤劃分為左上的$(k - t) \times (k - t)$及寬度為t，垂直長度等於平行長度等於n的 L 型棋盤。再次由變化題 1-3 的討論我們可以假設沒有骨牌經過分隔線。左上的$(k - t) \times (k - t)$由歸納前提最多放置$(x - 1)(k - t - x - 1)$個骨牌，而 L 型由引理 3 最多放置$2k - 2x - t$個骨牌，總和為$x(k - x)$，符合引理 4。至於放法，不失一般性左上棋盤的骨牌是橫著放。表三十是一個$t = 3,\ n = m = 7$的例子。則因為畫 X 處一定不能放置骨牌，則 L 型的右邊一定是橫著放入最多的合法骨牌，仿照變化題 2-3 的討論方式，右邊放入骨牌的列一定跟左邊一樣。於是畫 XX 處也不能放置骨牌。接著最下方就一定要橫著放滿最多的骨牌。圖（三十）是一個放置骨牌的方法。這些討論也全部符合引理 4。



圖（三十）

由數學歸納法知引理 4 成立。

綜上所述，我們至多可以放置$x(n-\mathrm{x})$個骨牌。若是橫著放，我們將用變化題 3-2 一樣的方法合法選擇$n-x$列放置骨牌，有$\binom{t-1+x-1}{x}=\binom{t+x-2}{x}$種選擇方法。每一列放置$x$個骨牌，而這有$x+1$種放法（每列空一格，一定空在第模$t$餘$1$的行），並共會放置$n-x$列。所以共有$\binom{t+x-2}{x}(x+1)^{n-x}$種放法，但也可以直著放，故共有$2\binom{t+x-2}{x}(x+1)^{n-x}$種放法。

變化題 3-4：$n<m$，$m\equiv 1\ (mod\ t)$，$n\not\equiv 0,\ 1\ (mod\ t)$，$x=\lfloor\frac{m}{t}\rfloor$，$y=\lfloor\frac{n}{t}\rfloor$

解答 3-4：

同樣地，我們假設n那邊平行於頁面底部，m那邊垂直於頁面底部。

引理 5：最多可以放入$x(n-y)$個骨牌。且骨牌只有可能全部都是橫著放，放置在合法的$n-y$行。

肆、研究結論與討論

1. 改變原題目邊長條件，改為一個$n \times m$的棋盤，並考慮最多放置的骨牌數以及放法。研究結論如下。特別的，本題對n, m對稱，沒有列在以下的情況可由n, m交換獲得。

條件	最多放置的骨牌數	放置骨牌的方法數
n, m皆為偶數	$\frac{nm}{4}$	$\binom{\frac{n+m}{2}}{\frac{n}{2}}^2$
n為偶數，m為奇數	$\frac{n(m+1)}{4}$	1
$n = m$ 為奇數	$\frac{n^2-1}{4}$	$2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$
$n < m$且皆為奇數	$\frac{(n+1)(m-1)}{4}$	$\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

2. 改變骨牌的大小為$t \times 1$及$1 \times t$，棋盤為$tn \times tn$，放置$(t-1)n^2$個骨牌。得出放置骨牌的方法數為

$$\binom{2n}{n}^2 + 2\sum_{\substack{i+j \le n-1 \\ k+l \le n-1}} \binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j}$$

3. 改變骨牌的大小為$t \times 1$及$1 \times t$，棋盤為$n \times m$，並考慮最多放置的骨牌數以及放法。研究結果如下。

<table>
<tr><td>條件：$t \mid n, m$</td><td>最多放置的骨牌數：$\frac{nm}{t^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：
$\binom{\frac{n+m}{t}}{\frac{n}{t}}^2 + \sum_{\substack{i+j\le n-1 \\ k+l\le m-1}} \binom{i+k}{i}\binom{j+k}{j}\binom{i+l}{i}\binom{j+l}{j}\left[\binom{t+n-i-j-3}{n-i-j} + \binom{t+m-k-l-3}{m-k-l}\right]$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>條件：$t \mid n,\ 0 \neq d = m\ (mod\ t),\ x = \lfloor \frac{m}{t} \rfloor$</td><td>最多放置的骨牌數：$\frac{n}{t}(m-x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：$\binom{t-d+x-1}{x}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>條件：$n = m \equiv 1\ (mod\ t),\ x = \lfloor \frac{n}{t} \rfloor$</td><td>最多放置的骨牌數：$x(n-x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：$2\binom{t+x-2}{x}(x+1)^{n-x}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>條件：$n < m,\ m \equiv 1\ (mod\ t)$
$n \not\equiv 0,1\ (mod\ t),\ x = \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor,\ y = \lfloor \frac{n}{t} \rfloor$</td><td>最多放置的骨牌數：$x(n-y)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：$\binom{t+y-2}{y}(x+1)^{n-y}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>條件：$n = m,\ 0,1 \neq d = n\ (mod\ t),\ x = \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor$</td><td>最多放置的骨牌數：$2nx - x^2(t+1) - x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：$4\binom{t-d+x-1}{x}(x+1)^{n-xt-1}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>條件：$n < m,\ 0,1 \neq e = m\ (mod\ t)$
$x = \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor,\ y = \left\lfloor \frac{m}{t} \right\rfloor$</td><td>最多放置的骨牌數：$ny + mx - (t+1)xy - x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">放置骨牌的方法數：$2\binom{t-e+y-1}{y}(x+1)^{m-yt-1}$</td></tr>
</table>

其中變化題 3-3 以前皆已有證明，變化題 3-4 以後為猜測，目前還沒有嚴謹的證明。

伍、未來展望

1. 完成變化題 3-4 以後猜測的證明。

2. 拓展至在三維空間中放置骨牌。

3. 改變骨牌形狀成 L 型或其他型，在同樣的棋盤中考慮最多放置骨牌數及放法。

陸、參考資料

Art of Problem Solving (AoPS): https://artofproblemsolving.com/community/c6h1078552p4725316

【評語】010015

本作品主要解決以下問題：一個骨牌由 1×2 方格構成，在一個 m×n 的棋盤上，欲放置多個骨牌，使得對於棋盤中的每個 2×2 的區域，皆還有空間再放入一個骨牌，試問最多可以放入幾個骨牌，又有幾種放法？作者對於 m、n 的各種奇偶性組合與大小關係進行細緻的討論，都得到解析解。此外作者還推廣成 1×t 或 t×1 的骨牌，但只能得到一些組合數的乘積與求和做為表達式，無法進一步化簡。本作品的寫作十分清楚，前半部的結論也十分有趣，值得嘉許。然而作品內容的延伸性不足，是比較可惜之處。