2025年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010012

參展科別　數學

作品名稱　神秘的數字圓舞曲 － 探討質數環排列的存在性

就讀學校　國立臺南第一高級中學

指導教師　林倉億

作者姓名　林家禾

關鍵詞　圖標論、數字排列、質數環

作者簡介

我的名字是林家禾，從小對未知事物充滿好奇心，我的興趣包含學習自然科學的知識、思考數學問題、下圍棋、玩機器人等，這些富含邏輯思考的活動是我的樂趣來源。在數學領域，我喜歡學習各種工具與解題技巧，享受推導問題過程所帶來的成就感。在一次偶然的機會，我突發奇想構造出質數環，並開啟對這個神秘排列的研究之旅。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區　　別：

科　　別：數學科

作品名稱：神秘的數字圓舞曲 – 探討質數環排列的存在性

關 鍵 詞：圖標論、數字排列、質數環

摘要

如果正整數 1～n 存在環狀排列，使得相鄰的數字和皆為質數，則將其定義為質數環。

本研究主要使用不同方法探討質數環的存在性。在本研究與文獻中，都沒有寫出質數環通式的方法，因此我藉由孿生質數、類孿生質數、一般質數（相差不固定的質數組）等方法，構造特定值的質數環，並使用程式驗證各定理在有限範圍能構造出質數環的整數個數、比例。

本研究的貢獻之一在於發展出類孿生質數構造質數環的方法，我突破質數對相差變大會比較難找出數字關係的框架，延伸孿生質數的方法至類孿生質數，還結合一對孿生質數與一對相差四的質數以構造質數環。

更進一步地，本研究提出使用不限定差的質數組構造質數環的方法，擺脫孿生質數猜想，使這個問題的解決方法更一般化。

Abstract

If a circular arrangement of numbers from 1 to k exists such that the sum of each adjacent pair is a prime number, this arrangement is defined as a Prime Circle with n = k. This study primarily investigates the existence of Prime Circles using various methods. Since no general formula for Prime Circles has been presented in this study or the literature, I employed approaches involving twin primes, pseudo-twin primes (prime pairs with differences greater than two), and general primes (prime sets with non-fixed differences) to construct Prime Circles for specific values. Additionally, I utilized programming to verify the number and proportion of integers that can form Prime Circles within a finite range.

One of the key contributions of this research is the development of a new method for constructing Prime Circles using pseudo-twin primes. By extending the twin prime method to pseudo-twin primes, I overcame the challenge posed by larger prime pair differences, which traditionally make it harder to establish numerical relationships. Furthermore, I combined a pair of twin primes with a pair of primes differing by four to successfully construct a Prime Circle.

Additionally, this research introduces a method for constructing Prime Circles using prime sets with non-fixed differences, thus moving beyond the constraints of the twin prime conjecture and generalizing the problem.

壹、前言

一、研究動機

我在高一時晉級中山大學數學人才培育計畫的高級班，並參與了專題研究課程。在課程中，我們可以選擇有興趣的題目進行專題研究，每次上課時向教授報告研究進度與討論研究方向；同時，我也配合學校的專題課進行此專題研究，結合兩方資源以達到比較好的成效。

我之所以選擇以證明質數環排列的存在性為我的主題，一方面是配合教授擅長的圖論領域，另一方面出自於我從小對質數的好奇心，因此我突發奇想構造出一種環狀排列，使每對相鄰點所代表的數字和皆為質數。我一開始以為這件事情理所當然，但是在研究之後發現證明這個排列存在就困難重重，無法找出一個通解，甚至在某些情況無法有效地排列，教授還曾建議我更改題目，不過我沒有放棄，以不同方向切入，尋求質數環存在的條件與排列方法。

二、研究目的

- 利用孿生質數對進行組合構造質數環。
- 利用相差 t 的質數對 $p,\ p+t$（類孿生質數）構造質數環。
- 利用差不固定的質數組（一般質數）構造質數環。
- 目標：在給定的正偶數集合中，證明或驗證 90% 以上的偶數能構造質數環。

三、文獻回顧

Antonio Filz 於 1982 年對於這個問題提出猜想[1]，猜測對於任意偶數皆能夠造出質數環，然而目前仍沒有方法完全證明它。在接下來的文獻回顧中，我會先對質數環進行基本的定義，並說明幾種目前已被提出，可以給予適當條件構造質數環的方法。

質數環定義
設 k 為一個正偶數[2]，如果存在 $1\sim k$ 的環狀排列，使得任意相鄰兩數和皆為質數，則將其定義為 $n=k$ 的質數環。

如圖 1 為一個 n=8 的質數環，任意相鄰兩數字和皆為 3, 7, 11, 13，都屬於質數，內文中為方便表示，將以數列形式呈現，下方數列為其中一種表達方式：

1, 2, 5, 8, 3, 4, 7, 6

由於這個數列屬於環狀排列，因此對此數列進行平移或翻轉並不會改變其結構。

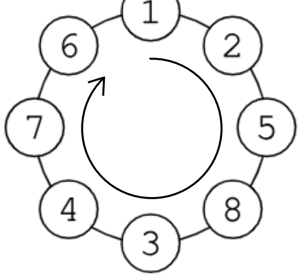


圖 1、質數環範例[3]

目前已有三種排列質數環的數學方法，第一種是窮舉法[3]，只能用來構造比較小的質數環；第二種是孿生質數法[4]，可以分成使用一對孿生質數或兩對孿生質數，分別為下方的定理 0.1、定理 0.2；而第三種則是利用利用哈米爾頓環的性質構造質數環[5]，為定理 0.3。

> 定理 0.1
> 若 $p, p+2$ 為一對孿生質數：
> (a) 存在 $n=p-1$ 的質數環。
> (b) 若 $2p+1$ 也是質數，存在 $n=p+1$ 的質數環。

一對孿生質數的方法透過構造數列使得首尾相加為 3，剩餘每相鄰兩項相加為 p 或 $p+2$，此時 $n=p-1$。

1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, … , p-4, 4, p-2, 2

若 $2p+1$ 也是質數，則可以在首尾加上 $p+1, p$ 兩項，此時 $n=p+1$。

p+1, 1, p-1, 3, p-3, 5, p-5, … , p-4, 4, p-2, 2, p

> 定理 0.2
> 若 $p, p+2$ 與 $q, q+2$ 為兩對孿生質數，且 $q>2p$ ，則存在 $n=q-p$ 的質數環。

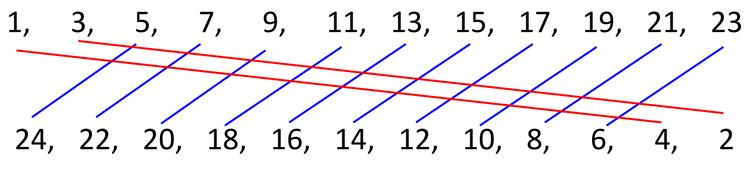
兩對孿生質數的方法則是一對孿生質數方法的延伸，加入一條數列使得相鄰兩項和為 q 或 $q+2$，此時 $n=q-p$，且 $q>2p$。

p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1
2, p-2, 4, p-4, 6, p-6, … , p-5, 5, p-3, 3, p-1, 1

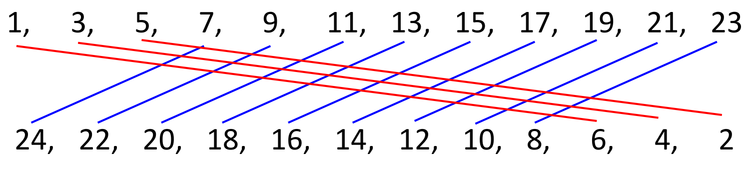
若 n 很大時，可以猜測存在孿生質數對 $p, p+2$ 和 $q, q+2$ 使得 $n=q-p$ [6]。

> 定理 0.3
> 若存在四個質數 p_1, p_2, p_1+k, p_2+k（p_1 可為 1, $p_1<p_2,\ k>3$），滿足$gcd\left(\frac{p_2-p_1}{2}, \frac{k}{2}\right)=1$，則存在 $n=k$ 的質數環。

首先將奇數與偶數分成兩條遞增與遞減的數列，再使用兩種不同方法將兩條數列一一對應，而這兩種方法分別會使用到兩個質數，加起來總共需要四個，以下舉一個 n=24 的例子：



⇒ 5, 29



⇒ 7, 31

在第一種串法中，每個偶數皆與對應位置後兩位的奇數串連成一組，使用到 5, 29 兩個質數；而第二種串法的偶數則是與對應位置後三位的奇數串連成一組，使用到 7, 31 兩個質數，此時 $(p1, p2, p1+k, p2+k) = (5, 7, 29, 31)$，如果滿足 $gcd\left(\frac{p_2-p_1}{2}, \frac{k}{2}\right)=1$，則可以將兩種串法合併形成哈米爾頓環。

仔細觀察可以發現，定理 0.3 其實涵蓋了定理 0.2 的結果。換句話說，定理 0.3 將兩對孿生質數的方法推廣為使用兩對間隔相同但相差大於二的質數。不過，這兩個定理切入的角度有所不同：定理 0.2 僅透過孿生質數的特性，將遞增與遞減的偶數數列交錯排列；而定理 0.3 則利用哈米爾頓環的性質，將奇數與偶數對應並連接起來。

定理 0.3 的來源是由中興大學陳宏賓、陽明交通大學傅恆霖、台灣師範大學郭君逸三位教授所共同發表的論文[5]，我在參加全國科展口試前不久才偶然查到它，發現這個定理與本研究的定理 3.1、定理 3.2 擁有相同的結論，雖然敘述方法與切入角度不同，但是本質是一樣的。在本研究的定理 3.1、3.2 中，我試著利用兩個彼此沒有關聯的質數，給予適當條件，分類列出數條子數列，再將它們串連得到質數環，不過我在研究過程中並沒有受到該篇論文的影響，而是由其他定理中分類數字、構造數列的經驗所累積而成，在全國科展結束以後，我有在自己構造出來的解法基礎上得到新的突破，使用分裂法，將定理 3.1 條件中的一個質數分成另外兩個質數，改變適當條件，繼續構造相同大小的質數環，即為研究過程中的定理 3.3。

除了數學方法外，也有人使用程式方法構造質數環[7, 8]，計算固定 n 值時，質數環排列方法數。值得一提的是，有研究利用程式得出當 n 為 14～50 的偶數時，都能夠造出相鄰兩項和與差皆為質數的特殊質數環[9]。

貳、 研究過程或方法

一、 孿生質數

(一) 青少年城市邀請賽例題

2001 青少年數學國際城市邀請賽曾經考過一題：

2. 能否將 1 到 20 這 20 個數，填在一個圓周上，使得任何相鄰二數之和均為質數？

其中一個解法先利用 29, 31 這一組孿生質數，將 9 ~ 20 的數列以下列順序排列

9, 20, 11, 18, 13, 16, 15, 14, 17, 12, 19, 10

不難發現，奇數由 9 遞增至 19，偶數由 20 遞減至 10 ，而此排列正好能使相鄰數之和皆為 29 或 31。

接下來利用相同的方法將 3～8 填入，先找出一對適合的質數 11, 13，再進行以下排列

3, 8, 5, 6, 7, 4

最後將 1, 2 填入 3, 10 之間，就可以造出一個 $n=20$ 的質數環。

9, 20, 11, 18, 13, 16, 15, 14, 17, 12, 19, 10, 1, 2, 3, 8, 5, 6, 7, 4

以上是詳解提供的一種解法。起初，我並未查詢到前面的文獻，這個題目啟發我從孿生質數的方向切入構造質數環，發展出如同文獻定理 0.1、定理 0.2 的結果，事後才發現已經有人提出這兩種方法。

(二) 使用兩對孿生質數

我認為一對孿生質數的方法，除了文獻中提到的定理 0.1：

若 $p,\ p+2$ 為一對孿生質數，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

若 $p,\ p+2$ 為一對孿生質數，且 $2p+1$ 為質數，則存在 $n=p+1$ 的質數環。

延伸空間不大，因為當存在 k 對孿生質數時，若使用上面的兩個定理，僅能得到小於 $2k$ 個 n 能構成質數環。

但是使用文獻中的定理 0.2：

若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，存在 $n=q-p$ 的質數環

則可以有不超過 $k(k-1)$ 個 n 能構成質數環（可能重複，只能說" $\le$ "），因此我認為使用兩對孿生質數的發展空間比較大。

因此，我希望將 $n=q-p$ 推廣到 $n=q-p+2t,\ (t\in\mathbb{N})$ 。

在定理 1.1 中，我試圖將定理 0.2 的 $n=q-p$ 延伸至 $n=q-p+2,\ n=q-p+4,\ \ldots$ 以此類推，猜測就算有重疊情形發生，也會使驗證能構造質數環的偶數個數成倍增長。

定理 1.1.1
若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，其中 $q>2p-4$，則存在 $n=q-p+2$ 的質數環。

【證明】

與定理 0.2 的方法相同，先利用 $q,\ q+2$ 列出一條數列，使相鄰兩項和皆為 q 或 $q+2$。

p-2, q-p+2, p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1, q-p+1, p-1

此數列最少有 $p-2,\ q-p+2$ 兩項，而 $q-p+2$ 較大，因此 $q-p+2>p-2 \Rightarrow q>2p-4$。

接著串聯第二條相鄰兩項和為 p 或 $p+2$ 的數列：

3, p-3, 5, p-5, … , p-6, 6, p-4, 4

最後將未使用的 1, 2 夾在兩數列間，即左端 p-2, 2, 3、右端 p-1, 1, 4。

p-2, q-p+2, p, q-p, p+2, q-p-2, … , q-p-3, p+3, q-p-1, p+1, q-p+1, p-1

2, 3, p-3, 5, p-5, … , p-6, 6, p-4, 4, 1

$Q.E.D.$

定理 1.1.2
若 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 為兩對孿生質數，其中 $q>2p-4t$ ($t=2\sim 5$) 且 $p>4t+1$，則存在 $n=q-p+2t$ 的質數環。

【證明】

與定理 1.1.1 方法相同，先構建兩數列，再將剩下的數排序夾在兩數列間。其中每個數列一都至少有最前面兩項，因此能寫出條件 $q>2p-4t$；此外，數列一最小的奇數 $p-2t$ 需要大於數列二最大的奇數 $2t+1$，因此 $p>4t+1$。

$t=2$

數列一：p-4, q-p+4, p-2, q-p+2, … , q-p+1, p-1, q-p+3, p-3

數列二：6, p-6, 8, p-8, … , p-7, 7, p-5, 5

連接：左端 p-4, 4, 1, 6、右端 p-3, 3, 2, 5

p-4, q-p+4, p-2, q-p+2, … , q-p+1, p-1, q-p+3, p-3

4, 1, 6, p-6, 8, p-8, … , p-7, 7, p-5, 5, 2, 3

條件：$q-p+4>p-4 \Rightarrow q>2p-8$

$t=3$

數列一：p-6, q-p+6, p-4, q-p+4, … , q-p+3, p-3, q-p+5, p-5

數列二：7, p-7, 9, p-9, … , p-10, 10, p-8, 8

連接：左端 p-6, 6, 1, 4, 7、右端 p-5, 5, 2, 3, 8

p-6, q-p+6, p-4, q-p+4, … , q-p+3, p-3, q-p+5, p-5

6, 1, 4, 7, p-7, 9, p-9, … , p-10, 10, p-8, 8, 3, 2, 5

條件：$q-p+6>p-6 \Rightarrow q>2p-12$

$t=4$

數列一：p-8, q-p+8, p-6, q-p+6, … , q-p+5, p-5, q-p+7, p-7

數列二：10, p-10, 12, p-12, … , p-11, 11, p-9, 9

連接：左端 p-8, 8, 5, 2, 3, 10、右端 p-7, 7, 6, 1, 4, 9

p-8, q-p+8, p-6, q-p+6, … , q-p+5, p-5, q-p+7, p-7

8, 5, 2, 3, 10, p-10, 12, p-12, … , p-11, 11, p-9, 9, 4, 1, 6, 7

條件：$q-p+8>p-8 \Rightarrow q>2p-16$

$t=5$

數列一：p-10, q-p+10, p-8, q-p+8, … , q-p+7, p-7, q-p+9, p-9

數列二：11, p-11, 13, p-13, … , p-14, 14, p-12, 12

連接：左端 p-10, 10, 3, 2, 5, 8, 11 、右端 p-9, 9, 4, 1, 6, 7, 12

p-10, q-p+10, p-8, q-p+8, … , q-p+7, p-7, q-p+9, p-9

10, 3, 2, 5, 8, 11, p-11, 13, p-13, … , p-14, 14, p-12, 12, 7, 6, 1, 4, 9

條件：$q-p+10>p-10 \Rightarrow q>2p-20$

$Q.E.D.$

當 $t>5$ 時，尚未列出連接部份的排序，但推測都能成立。

以上是我將孿生質數方法延伸的結果，由於一對孿生質數 $n=p-1$ 延伸成 $n=p-1-2t$ 會有一部分跟定理 0.2 重疊，因此我主要是將兩對孿生質數 $n=q-p$ 定理延伸成 $n=q-p+2t$，效果很好，可以構造 $6\sim 60000$ 任意偶數的質數環（請見結果）。

二、 類孿生質數

假設函數 g 為任意兩質數 p_i，p_j 的差，其中 p_n 為質數數列，如果 $g=2$，則 p_i，p_j 為一對孿生質數，而接下來我想驗證當 $g>2$ 時，是否能用類似定理 0.1 的方法證明質數環的存在性。

(一) 使用一對相差為 k ($k \in \mathbb{N}$) 的質數

> 定理 2.1.1
> 當 $g = 4$ 時，即 $p,\ p+4$ 為一對質數 ($p > 4$) ，則存在 $n = p-1$ 的質數環。

【證明】

分成兩個情況討論，因為 $p-1$ 為偶數，所以 $p-1$ 除以 4 可能餘 0 或 2 。

Case A:

若 $p-1 \equiv 0\ (mod 4)$ ，可建立兩數列 1, p-1, 5, p-5, 9, p-9, … , p-4, 4 與 3, p-3, 7, p-7, … , p-2, 2，使得兩個數列任相鄰兩項和皆為 p 或 $p+4$，且第一個數列包含所有除以 4 餘 $1,\ 0$ 的數，第二個數列包含所有除以 4 餘 $3,\ 2$ 的數。

$$\text{即 } \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k \text{ is odd},\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 1 \\ k \text{ is even},\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 1 \end{cases} \quad and \quad \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k \text{ is odd},\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 3 \\ k \text{ is even},\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 3 \end{cases}$$

Case B:

若 $p-1 \equiv 2\ (mod 4)$ ，可建立兩數列：

1, p-1, 5, p-5, 9, p-9, …, p-2, 2 與 3, p-3, 7, p-7, …, p-4, 4

使得兩個數列任相鄰兩項和皆為 p 或 $p+4$，且第一個數列包含所有除以 4 餘 $1,\ 2$ 的數，第二個數列包含所有除以 4 餘 $3,\ 0$ 的數，因此第一個數列比第二個數列多兩項。

$$\text{即 } \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p+1}{2}} = \begin{cases} k \text{ is odd},\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 1 \\ k \text{ is even},\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 1 \end{cases} \quad and \quad \{a_k\}_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} k \text{ is odd},\ a_k = 4 \times \dfrac{k-1}{2} + 3 \\ k \text{ is even},\ a_k = p - 4 \times \dfrac{k-2}{2} - 3 \end{cases}$$

Case A 的兩數列首尾相接合併為 1, …, 4, 3, …, 2；Case B 的兩數列合併為 1, …, 2, 3, …, 4。無論是哪種情況，皆能形成 $n = p-1$ 的質數環，不過 p 需要大於 4，否則無法構造出上述的兩個數列。

1, p-1, 5, p-5, … , p-8, 8, p-4, 4
2, p-2, 6, p-6, … , p-7, 7, p-3, 3 $\quad p-1 \equiv 0\ (mod 4)$

或

1, p-1, 5, p-5, … , p-6, 6, p-2, 2
4, p-4, 8, p-8, … , p-7, 7, p-3, 3 $\quad p-1 \equiv 2\ (mod 4)$

Q.E.D.

定理 2.1.2

當 $g=6$ 時，即 $p,\ p+6$ 為一對質數 ($p>6$) ，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

【證明】

與定理 2.1.1 類似的，先將 $p-1$ 除以 6，將餘數分成 0, 4 兩類。

註： $(p,\ p+6)=(6k-1,\ 6k+5)$ *or* $(6k+1,\ 6k+7)$ ，因此 $p-1\not\equiv 2\ (mod\ 6)$ 。

Case A:

若 $p-1\equiv 0\ (mod 6)$ ，可建立三個數列

1, p-1, 7, p-7, ..., p-12, 12, p-6, 6（包含所有除以 6 餘 1, 0 的數）

2, p-2, 8, p-8, ..., p-11, 11, p-5, 5（包含所有除以 6 餘 2, 5 的數）

3, p-3, 9, p-9, ..., p-10, 10, p-4, 4（包含所有除以 6 餘 3, 4 的數）

只要能將每條數列首尾互相串連，即可形成質數環。可以觀察到，每條數列首項和尾項相加除以 6 皆餘 1，由此規律可以快速類推其他 Case。

Case B:

若 $p-1\equiv 4\ (mod 6)$ ，可以建立三個數列，分別包含所有除以 6 餘 1, 4 / 2, 3 / 5, 0 的數，每條數列首尾為 1, 4 / 2, 3 / 5, 6，每條數列首相和尾項相加除以 6 皆餘 5。

用圖形來將每條數列首位的規則列出（同一行的屬於同一數列）

Case A: 1 2 3 / 6 5 4　　Case B: 1 2 5 / 4 3 6

Case A 的三條數列首尾排列成 1, 6, 5, 2, 3, 4；Case B 排列成 1, 4, 3, 2, 5, 6 ，在此排列中，每一條數列的中間項皆被省略，只需考慮首尾兩項，因此這兩項必須相鄰，中間不能插入其他數字。(如數列 1, p-1, 7, p-7, ..., p-12, 12, p-6, 6 只需考慮 1, 6 兩項，剩餘的數皆不影響排列)

由以上分類討論可得知，當 $p,\ p+6$ 為一對質數時，存在 $n=p-1$ 的質數環。

Q.E.D.

（補充）附錄_定理 2.1.3

利用定理 2.1 的歸納法，先將 $p-1$ 對 g 同餘，再分類逐一討論，可以證明當 g 為 $8\sim 20$ 的偶數，且 $p,\ p+g$ 為一對質數時，存在 $n=p-1$ 的質數環。(詳見「陸、附錄」)

在 $g>20$ 情況尚未證明，但推測可以使用相同的方法證明它們成立。

將孿生質數法延伸至類孿生質數法後，我認為或許也能用類似的概念，結合定理 0.2 串連數列的方法與定理 2.1 分類數字的技巧，使用兩對以上的類孿生質數構造質數環，討論後發現當其中一對為孿生質數，另一對為類孿生質數時，的確有此構造質數環的規則。

(二) 使用一對孿生質數與一對相差四的質數

> 定理 2.2
> 若 $p, p+2$ 與 $q, q+4$ 為兩對質數，且 $q>2p-4$，則存在 $n=q-p+2$ 的質數環。

【證明】

Case A: $q\equiv 1(\,mod\ 4)$

1° 先證明 $q\equiv 1(\,mod\ 4)\ \Rightarrow\ p\equiv q-p+1(\,mod\ 4)$ 。

Case 1: $p\equiv 1(\,mod\ 4)\Rightarrow q-p+1\equiv 1-1+1\equiv 1\equiv p(\,mod\ 4)$

Case 2: $p\equiv 3(\,mod\ 4)\Rightarrow q-p+1\equiv 1-3+1\equiv -1\equiv p(\,mod\ 4)$

2° 建立兩數列，其中紅色部份為奇數，且由 1° 得知 $q-p+1$ 與 p 會屬於同一個數列。

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, p+6, q-p-6, ..., q-p-5, p+5, q-p-1, p+1

Seq2: p-1, q-p+1, p+3, q-p-3, p+7, q-p-7, ..., q-p-4, p+4, q-p ， p

Seq1 的紅色部份首項為 $p-2$、末項為 $q-p-1$、等差 4，黑色部份首項為 $q-p+2$、末項為 $p+1$、等差 -4；Seq2 的紅色部份首項為 $q-p+1$、末項為 p、等差 -4，黑色部份首項為 $p-1$、末項為 $q-p$、等差 4。

Seq1, Seq2 包含 $p-2\sim q-p+2$ 的所有數，因此 $p-2<q-p+2\Rightarrow q>2p-4$。

3° 在 Seq1, Seq2 後面加入 1, 2，從後面串連。

(p-2)-Seq1-(p+1) --- 1, 2 --- (p)-Seq2-(p-1)

就可以用類似文獻中定理 0.2 的方法，以 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3 數列將其首尾串聯，形成 $n=q-p+2$ 的質數環。

(p-2)-Seq1-(p+1) --- 1, 2 --- (p)-Seq2-(p-1)

4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

Case B: $q\equiv 3(\,mod\ 4)$

1° $q\equiv 3(\,mod\ 4)\Rightarrow p\not\equiv q-p+1(\,mod\ 4)\Leftrightarrow p\equiv q-p-1(\,mod\ 4)$

2° 如同 Case A 建立由 $q, q+4$ 構成的兩條數列與第三條利用 $p, p+2$ 構成的數列。

Seq1: p-2, q-p+2, p+2, q-p-2, ..., q-p-3, p+3, q-p-1, p-1

Seq2: p+1, q-p-1, p+5, q-p-5, ..., q-p-4, p+4, q-p, p

Seq3: 4, p-4, 6, p-6, ..., p-5, 5, p-3, 3

除了這三條數列以外，還剩下 1, 2 兩個數，接著可以使用以下方法，技巧性的將這些元素串起來，形成 $n=q-p+2$ 的質數環。

(p-2)-Seq1-(p-1) --- (3)-Seq3-(4) --- 1 --- (p+1)-Seq2-(p) --- 2

Q.E.D.

三、　一般質數（不限定差的質數對）

由於前面定理 1、定理 2 限制質數間的差距，總是會牽扯到分類討論，因此我開始思考是否有更為一般化的方法，使用兩個以上彼此沒有關聯的質數構造質數環。

> 定理 3.1
>
> 若存在質數 $p, q\ (p<q)$，使得 $p+q-1$ 亦為質數，且 $gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1$，則存在 $n=q-1$ 的質數環。

在證明之前，我想先用一個範例說明我想這個問題的思路。

例：(p, q) = (7, 17)，n=16

Step1：列出數條數列，使相鄰數字和依序為 q, p, q, p…

一、16, 1, 6, 11
二、15, 2, 5, 12
三、14, 3, 4, 13
四、10, 7
五、9, 8

Step2：串連數列

16, 1, 6, 11, 12, 5, 2, 15, 8, 9, 14, 3, 4, 13, 10, 7

Step3：討論偶數排列，發現對於任意相鄰兩項，後項皆為前項減 10 (q-p) 或加 6 (p-1)

16, 6, 12, 2, 8, 14, 4, 10

【證明】

Part1（概念）：

首先將所有數字分成若干條數列，從最大的數 $q-1$ 開始構造數列一，使得相鄰數和依序為 $q, p, q, p, \ldots$，當應填入的下一個數不在區間 $[1, q-1]$，則以剩下次大的數開始構造數列二，以此類推。(Step1)

接著將所有數列串聯，使得任兩條數列交接處形成的質數皆為 $p+q-1$。(Step2)

此時觀察內部的偶數排列，設為 $\{e_n\}, e_i \in \{2, 4, 6, \ldots, q-1\}, e_1=q-1$，發現對於任意相鄰兩數 $e_i, e_{i+1}\left(1 \leq i < \frac{q-1}{2}\right)$，滿足 $e_{i+1} \equiv e_i-(q-p)\ (mod\ q-1)$，同時因為

$$e_2 \equiv e_1-(q-p)\ (mod\ q-1)$$
$$e_3 \equiv e_2-(q-p)\ (mod\ q-1)$$
$$\vdots$$
$$\frac{e_{(q-1)/2} \equiv e_{(q-3)/2}-(q-p)\ (mod\ q-1)}{e_{(q-1)/2} \equiv e_1-(q-p)\times\frac{q-3}{2}\ (mod\ q-1)} \Rightarrow e_1 \equiv e_{(q-1)/2}-(q-p)\ (mod\ q-1)$$

可以得出 $e_1, e_{(q-1)/2}$ 也滿足上述規則，換句話說，這條數列是循環的。不過條件是 $gcd\left(\frac{q-p}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1$，否則此數列不會涵蓋所有在範圍 $[1, q-1]$ 內的偶數。此時對於任意相鄰兩項偶數，後項皆為前項減 q-p 或加 p-1；同理，對於任意相鄰兩項奇數，後項皆為前項加 q-p 或減 p-1。(Step3)

Part2（符號化）：

已知偶數數列第一項為 $q-1$，奇數數列第一項為 1，因此可以對任一對相加為 q 偶數 m 與奇數 n 討論這兩個數操作後的偶數 r 與奇數 s，如下方說明。

$$m+n=q < \begin{cases} \begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \\ \begin{cases} r=m+(p-1) \\ s=n-(p-1) \end{cases} \end{cases}$$

假設排列順序為 $m \to n \to r \to s$，若 $\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases}$，則 $n+r=p$；若 $\begin{cases} r=m+(p-1) \\ s=n-(p-1) \end{cases}$，則 $n+r=p+q-1$，兩者的 $n+r$ 皆為質數，且 $r+s=m+n=q$，由於 Part1 已經說明在 $gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1$ 的條件下可填入所有數字，因此可以重複相同的操作，將所有數字填入並使得任意相鄰數字和皆為質數。

經由以上推論，證明在 $gcd\left(\frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2}\right)=1$ 的條件下，可以構造出 $n=q-1$ 的質數環。

$Q.E.D.$

定理 3.2
若存在質數 $p, q\ (p<q)$ 與一個奇質數 k，使得 $p+q-k\ (p>k, k<q-p)$ 亦為質數，且 $gcd\left(\frac{p-k}{2}, \frac{q-k}{2}\right)=1$，則存在 $n=q-k$ 的質數環。

【證明】

如定理 3.1 中 Part1 的說明，在 $gcd\left(\frac{p-k}{2}, \frac{q-k}{2}\right)=1$ 的條件下，可以用相同規則構造兩條覆蓋所有 $[1, q-k]$ 數字的奇數或偶數的數列。此時需討論的問題僅剩下任意相鄰數字和是否為質數。

如定理 3.1 中 Part2，設偶數數列第一項為 $q-k$，奇數數列第一項為 k，可以對任一對相加為 q 偶數 m 與奇數 n 討論對這兩個數操作後的偶數 r 與奇數 s。

$m+n=q$

$Case1$

$$\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \cdots\ n+r=p,\ r+s=q$$

$Case2$

$$\begin{cases} r=m+(p-k) \\ s=n-(p-k) \end{cases} \cdots\ n+r=p+q-k,\ r+s=q$$

$Case3$

$$\begin{cases} r=m-(q-p) \\ s=n-(p-k) \end{cases} \cdots\ n+r=p,\ r+s=k$$

$$(a)\begin{cases} r'=r-(q-p) \\ s'=s+(q-p) \end{cases} \cdots\ (X,\ r-(q-p)<k-(q-p)<0)$$

$$(b)\begin{cases} r'=r+(p-k) \\ s'=s-(p-k) \end{cases} \cdots\ s+r'=p,\ r'+s'=k \Rightarrow Case3$$

$$(c)\begin{cases} r'=r-(q-p) \\ s'=s-(p-k) \end{cases} \cdots\ (X,\ r-(q-p)<k-(q-p)<0)$$

$$(d)\begin{cases} r'=r+(p-k) \\ s'=s+(q-p) \end{cases} \cdots\ s+r'=p,\ r'+s'=q \Rightarrow Case1,\ Case2$$

$Case4$

$$\begin{cases} r=m+(p-k) \\ s=n+(q-p) \end{cases} \textit{the case is not exist}$$

$$\because \begin{cases} r=m+(p-k)\le q-k \\ s=n+(q-p)\le q-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\le q-p \\ n\le p-k \end{cases} \Rightarrow q=m+n\le q-k\ (X)$$

經由討論可以發現無論是哪一種情況，操作後還會是一對相加為 q 的質數，而且對於任意相鄰數的和皆為質數，因此證明在 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$ 的條件下，可以構造 $n=q-k$ 的質數環。（註：定理 3.1 沒有 Case3，因為任意的 m, n 的平均值皆為（相對 $\frac{q}{2}$ 對稱），因此操作一定使一個增加，另一個減少） $Q.E.D.$

（補充）

可以從另一個角度思考定理 3.1、定理 3.2，對於任何一個偶數 t，如果存在質數 k（k 也可以為 1），使得 $q=t+k$ 也是質數，再從 (k,q) 區間找出 p，滿足 $p+q-k\in\mathbb{P}$ 與 $gcd\left(\frac{p-k}{2},\ \frac{q-k}{2}\right)=1$，即可構造出 $n=q-k=t$ 的質數環。

在定理 3.1、定理 3.2 中，我都是先給定 p 與 q，找出符合條件的 k，再驗證 $p+q-k$ 是否也是質數，因此不難發現，在尋找這四個質數的過程中，$p+q-k$ 為質數是最難滿足條件的，因此我開始想，能否將 $p+q-k$ 拆成兩個質數，繼續沿用相同的思路構造質數環，於是我先從條件較為簡單的定理 3.1 著手。

定理 3.3

若 $p, q, p+q-k, q-2k$ 皆為質數，其中 k 為大於 1 的奇數，$k<q-p, k<p$，且 $gcd\left(\frac{p-k}{2}, \frac{q-k}{2}\right)=1$，則存在 $n=q-1$ 的質數環。

【證明】

首先定義偶數數列、奇數數列的集合分別為：

$$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\},\ O=\{o_1, o_2, \ldots, o_n\}$$

再定義三種操作 1. $-(q-p)$，2. $+(p-k)$，3. $+(q-k)$，對於 E 中所有 e_i 皆有：

$$e_{i+1}=e_i-(q-p)\ or\ e_{i+1}=e_i+(p-k)\ or\ e_{i+1}=e_i+(q-k)\quad (\text{其中 } e_{n+1}=e_1)$$

奇數數列 O 中的 o_i 則是 1. $+(q-p)$，2. $-(p-k)$，3. $-(q-k)$

*** 假設有一對相鄰的 $e_i+o_i=q$，使用以上操作推論後兩項：

$$\begin{cases} o_{i+1}=o_i+(q-p) \\ e_{i+1}=e_i-(q-p) \end{cases} \Rightarrow o_i+e_{i+1}=p \qquad \begin{cases} o_{i+1}=o_i-(p-k) \\ e_{i+1}=e_i+(p-k) \end{cases} \Rightarrow o_i+e_{i+1}=p+q-k$$

$$\begin{cases} o_{i+1}=o_i-(q-k) \\ e_{i+1}=e_i+(q-k) \end{cases} \Rightarrow o_i+e_{i+1}=2q-k$$

$$o_{i+1}+e_{i+1}=q$$

發現無論如何操作，皆能使 o_i, e_{i+1} 與 o_{i+1}, e_{i+1} 這兩對相鄰數的和為質數。

*** 因此欲證明，存在排列方法僅使用以上所述的三種操作，使 $[1, q-1]$ 範圍內的偶數都包含在 E 裡面。

首先，由 $2k<k+p<q$ 可以推得 $2(q-k)>q-1$，因此 $(q-k, q-1]$ 區間內的偶數一定恰對應到一項 $[1, q-k]$ 區間內與其差 $q-k$ 的偶數，而且對於任意相鄰兩項位於 $[1, q-k]$ 的偶數 a, b，可以在中間加一項 $a+(q-k)$，且不改變原數列的結構。

如原本 $b=a+(p-k)$，加上中間一項後，這三項為 $a, a+(q-k), a+(p-k)$，此時，第三項恰好為第二項 $-(q-p)$，因此數列結構不變。注意到此時 $b\neq a-(q-p)$，其原因為 $a-(q-p)>0$ 且 $a+(q-k)<q$，會得到 $2(q-p)<k$，與原假設矛盾。

整理後，可以將此問題簡化為 $[1, q-k]$ 區間內的偶數，透過 $-(q-p), +(p-k)$ 這兩種操作構造循環數列，此即為定理 3.2 的問題，條件為 $gcd\left(\frac{p-k}{2}, \frac{q-k}{2}\right)=1$。 $Q.E.D.$

參、 研究結果與討論

一、 方法統整

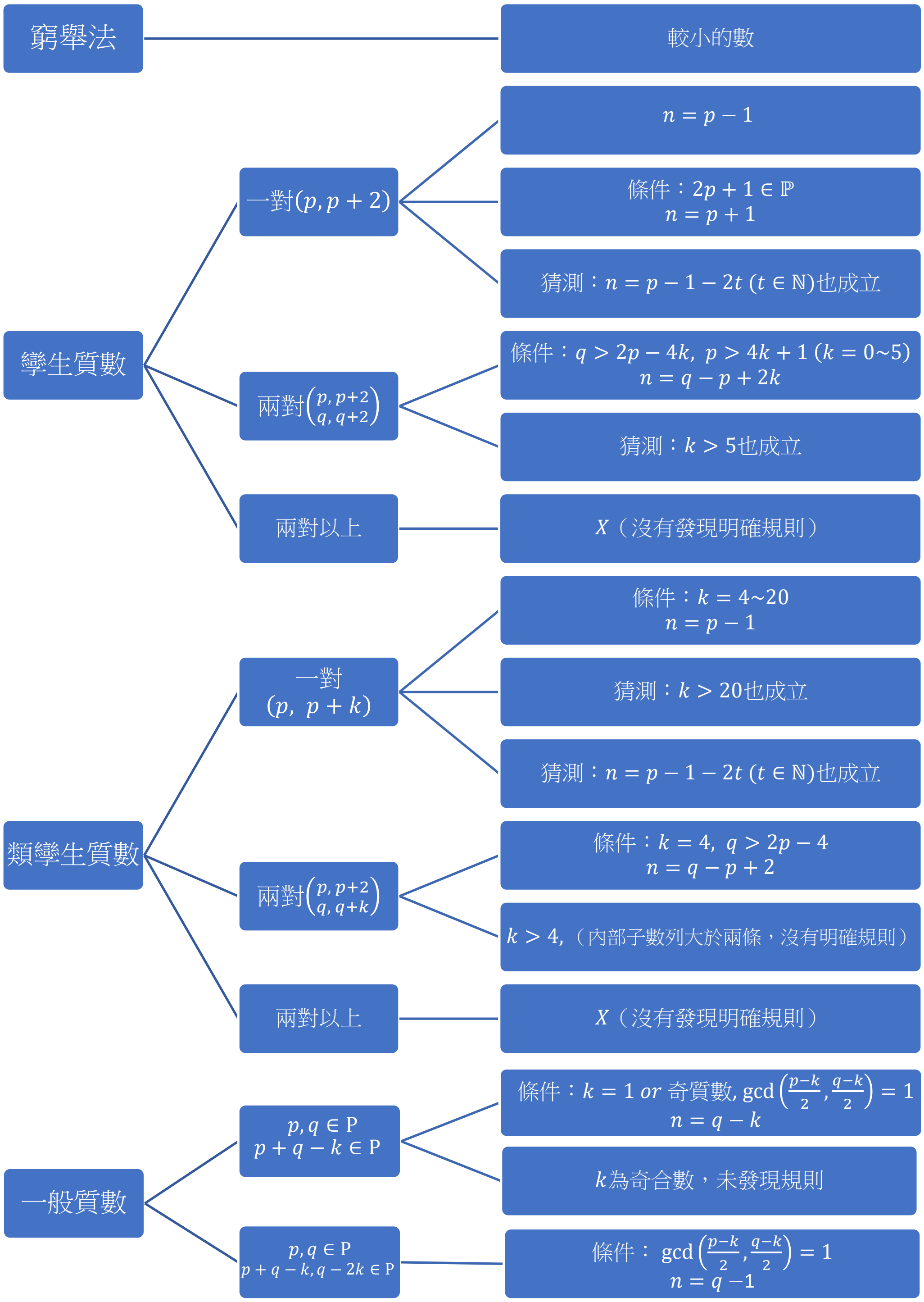


圖 2、構造質數環方法統整

我構造質數環的方法主要分成孿生質數、類孿生質數、一般質數法三種。在圖 2 中，我將這些方法所推得的定理分點列出，並寫出我對於這些方法延伸的猜測，作為未來展望。

二、 各方法效果比較（程式）

範圍	0.1	比例	0.2+1.1	比例	0+1	比例	2.1	比例	2.2	比例	2	比例	0+1+2	比例
50	8	0.348	23	1.000	23	1.000	12	0.522	11	0.478	13	0.565	23	1.000
100	11	0.229	48	1.000	48	1.000	22	0.458	23	0.479	27	0.563	48	1.000
200	19	0.194	98	1.000	98	1.000	43	0.439	44	0.449	53	0.541	98	1.000
500	32	0.129	248	1.000	248	1.000	92	0.371	107	0.431	127	0.512	248	1.000
1000	46	0.092	498	1.000	498	1.000	165	0.331	205	0.412	246	0.494	498	1.000
2000	80	0.080	998	1.000	998	1.000	294	0.295	395	0.396	476	0.477	998	1.000
5000	160	0.064	2498	1.000	2498	1.000	640	0.256	952	0.381	1144	0.458	2498	1.000
10000	256	0.051	4998	1.000	4998	1.000	1161	0.232	1867	0.374	2238	0.448	4998	1.000
15000	342	0.046	7498	1.000	7498	1.000	1632	0.218	2780	0.371	3293	0.439	7498	1.000
20000	421	0.042	9998	1.000	9998	1.000	2090	0.209	3674	0.367	4354	0.435	9998	1.000
25000	497	0.040	12498	1.000	12498	1.000	2546	0.204	4576	0.366	5412	0.433	12498	1.000
30000	568	0.038	14998	1.000	14998	1.000	2980	0.199	5465	0.364	6455	0.430	14998	1.000
35000	652	0.037	17498	1.000	17498	1.000	3406	0.195	6357	0.363	7495	0.428	17498	1.000
40000	711	0.036	19998	1.000	19998	1.000	3833	0.192	7245	0.362	8545	0.427	19998	1.000
45000	773	0.034	22498	1.000	22498	1.000	4246	0.189	8140	0.362	9590	0.426	22498	1.000
50000	843	0.034	24998	1.000	24998	1.000	4640	0.186	9023	0.361	10622	0.425	24998	1.000
55000	904	0.033	27498	1.000	27498	1.000	5037	0.183	9920	0.361	11645	0.423	27498	1.000
60000	973	0.032	29998	1.000	29998	1.000	5440	0.181	10805	0.360	12674	0.422	29998	1.000

表 1、文獻方法與定理 1, 2 在 6~ 60000 以下能構造質數環的偶數累計個數、比例

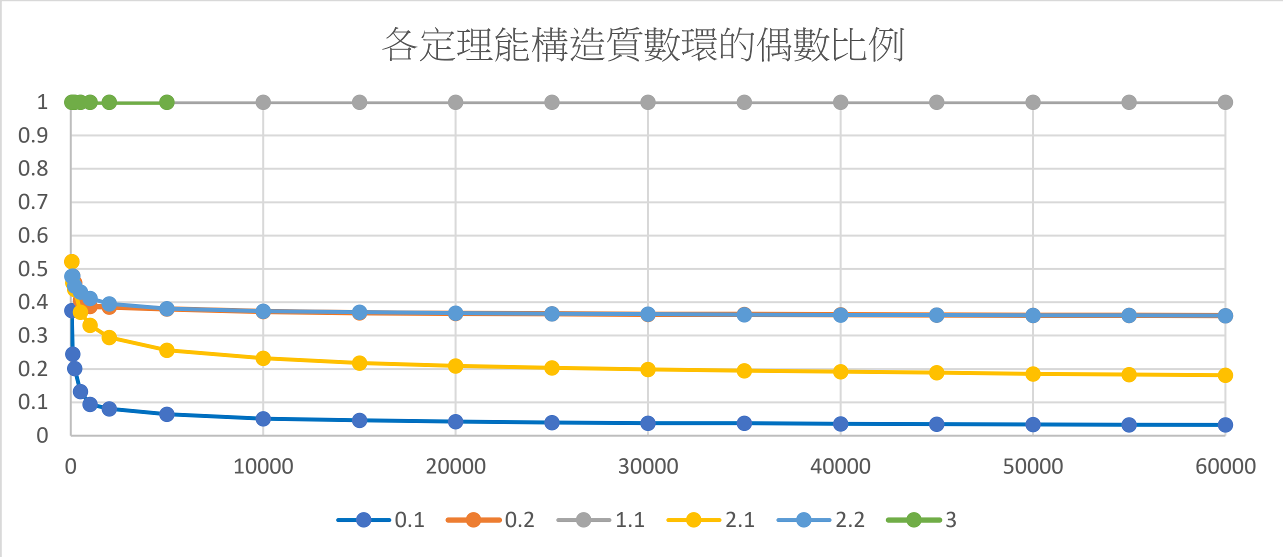


圖 3、各定理能構造質數環的偶數比例

因為與質數相關的題目不容易以數論、圖論方法直接解決所有的數，也無法明確估計能構造質數環的偶數在所有數中的占比，因此我利用程式輔助（程式碼請見「陸、附錄」)，驗證 6～60000，孿生質數、類孿生質數兩種方法所能構造質數環的構造質數環的偶數個數及比例（表 1）；礙於硬體與演算法，僅驗證一般質數法在 6～5000 的情形，若要增加驗證範圍，則需改進程式的演算法，為未來展望。

由於 $n=4$ 的質數環很小，只有唯一的排列方法，而且無法運用多對孿生質數構造質數環，因此不列入程式驗證的偶數。

由表 1、圖 3 的數據可以得到以下資訊：

i. 定理 1.1 涵蓋 6～60000 所有偶數；定理 3 涵蓋 6～5000 所有偶數，範圍以外不確定。

ii. 對於任一個定理，在 $n<60000$ 時，所能構造質數環的偶數比例皆遞減趨近於一個定值（定理 0.1 →3%、定理 0.2+1.1 維持 100%、定理 2.1 →18%、定理 2.2 →36%），顯而易見的，使用兩對質數的定理所趨近的定值比較大，符合前面比較使用一對、兩對孿生質數的猜測（$P.3$）。

iii. 比較定理 2.1, 2.2，發現範圍小時，定理 2.1 較為適用，但範圍增大後，不到 1000，定理 2.2 能構造質數環的偶數比例就會超越定理 2.1 的。

iv. 定理 0.1、定理 0.2+1.1 構造質數環的偶數會完全重疊（因為定理 0.2+1.1 範圍涵蓋 60000 以下所有偶數），而定理 2.1, 2.2 在 60000 以內則約有 22.0% 的偶數重疊。

v. 定理 0.2 與 2.2 能構造質數環的偶數比例相當，推測原因是構造方式類似。

以上是由程式輔助後所得數據的比較，目前只能說明 60000 以內的情形，未來展望能擴充到 10^6 甚至 10^7 以內的數。

三、 定理 1.1，$k=0\sim5$ 比較

k 範圍	0	比例	0~1	比例	0~2	比例	0~3	比例	0~4	比例	0~5	比例
50	12	0.522	16	0.696	22	0.957	22	0.957	22	0.957	23	1.000
100	23	0.479	32	0.667	47	0.979	47	0.979	47	0.979	48	0.980
200	45	0.459	64	0.653	92	0.939	93	0.949	94	0.959	98	0.990
500	101	0.407	158	0.637	232	0.935	236	0.952	240	0.968	248	0.996
1000	193	0.388	320	0.643	475	0.954	481	0.966	487	0.978	498	0.998
2000	385	0.386	652	0.653	972	0.974	979	0.981	986	0.988	998	0.999
5000	950	0.380	1652	0.661	2472	0.990	2479	0.992	2486	0.995	2498	1.000
10000	1862	0.373	3318	0.664	4972	0.995	4979	0.996	4986	0.998	4998	1.000
15000	2763	0.368	4985	0.665	7472	0.997	7479	0.997	7486	0.998	7498	1.000
20000	3666	0.367	6652	0.665	9972	0.997	9979	0.998	9986	0.999	9998	1.000
25000	4565	0.365	8318	0.666	12472	0.998	12479	0.998	12486	0.999	12498	1.000
30000	5458	0.364	9985	0.666	14972	0.998	14979	0.999	14986	0.999	14998	1.000
35000	6363	0.364	11652	0.666	17472	0.999	17479	0.999	17486	0.999	17498	1.000
40000	7248	0.362	13318	0.666	19972	0.999	19979	0.999	19986	0.999	19998	1.000
45000	8136	0.362	14985	0.666	22472	0.999	22479	0.999	22486	0.999	22498	1.000
50000	9029	0.361	16652	0.666	24972	0.999	24979	0.999	24986	1.000	24998	1.000
55000	9912	0.360	18318	0.666	27472	0.999	27479	0.999	27486	1.000	27498	1.000
60000	10802	0.360	19985	0.666	29972	0.999	29979	0.999	29986	1.000	29998	1.000

表 2、定理 1.1，k 增加後能構造質數環的偶數比例變化

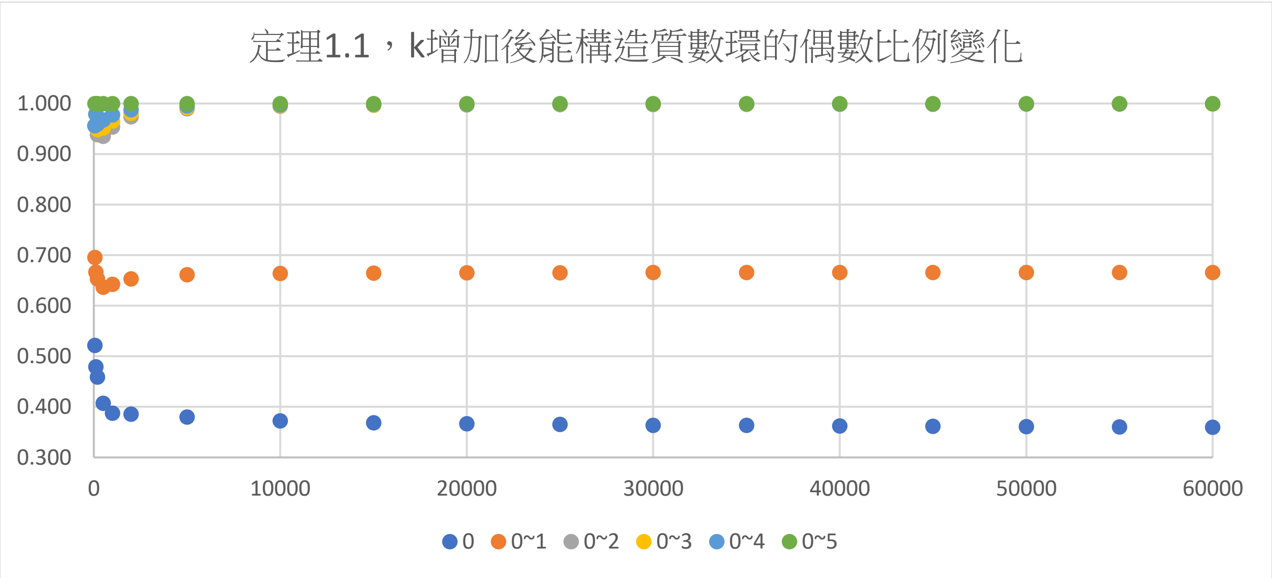


圖 4、定理 1.1，k 增加後能構造質數環的偶數比例變化

定理 1.1 證明 $k=0\sim5$ 這五種情況分別能構造 $n=q-p+2k$ 的質數環，我比較 k 增加後，所能構造質數環的偶數比例變化，並將其繪製成表 2、圖 4，發現 $k=0\sim2$ 就已經能構造大部分偶數的質數環，但是要到 $k=5$ 才能構造 $6\sim60000$ 任意偶數的質數環。

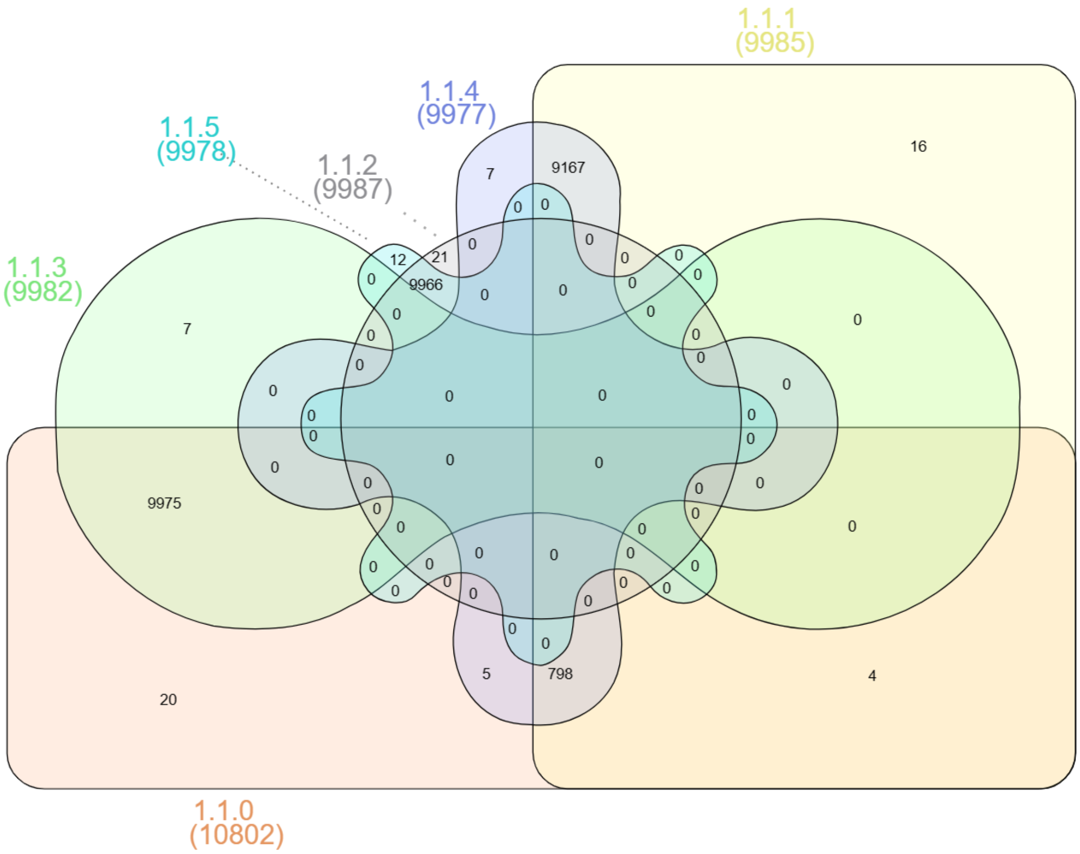


圖 5、定理 1.1，$k=0\sim 5$ 比較

	1.1.0	1.1.1	1.1.2	1.1.3	1.1.4	1.1.5
1.1.0		802	0	9975	803	0
1.1.1	802		0	0	9965	0
1.1.2	0	0		0	0	9966
1.1.3	9975	0	0		0	0
1.1.4	803	9965	0	0		0
1.1.5	0	0	9966	0	0	

表 3、定理 1.1.0~1.1.5 兩兩交集元素個數

為瞭解此分布原因，我將定理 1.1 中，$k=0\sim 5$ 時能解決的偶數分別列出比較，繪製出圖 5 的文氏圖，圖中的定理 1.1.0~1.1.5 分別對應到 $k=0\sim 5$ 的情形，可以發現這些集合的交集少且集中，主要有 3 組僅兩個集合的交集（$n(1.1.0\cap 1.1.3)=9975$, $n(1.1.1\cap 1.1.4)=9167$, $n(1.1.2\cap 1.1.5)=9966$）、1 組三個集合交集（$n(1.1.0\cap 1.1.1\cap 1.1.4)=798$），剩餘的偶數皆零散分布在各定理中。若將 $k=0\sim 5$ 兩兩比較繪出表 3，可觀察到趨勢與文氏圖大致相同。

推測其原因在於孿生質數除了 $(3,5)$ 以外，皆須滿足 $(p,p+2)=(6k-1,6k+1)$，因此 1.1.1, 1.1.4 所能構造質數環的偶數皆滿足 $n=q-p+2=(6t-1)-(6k-1)+2\equiv 2\ (mod\ 6)$，其餘兩組同理，造成交集少且集中的效果，而 1.1.0 之所以會與 1.1.1, 1.1.4 相交是因為 $(p,p+2)$ 可以取 $(3,5)$ 這對質數。

四、定理比較

(一) 定理 0.1、定理 2.1

定理 0.1：使用 $p,\ p+2$ 一對孿生質數構造 $n=p-1$ 的質數環

定理 2.1：使用 $p,\ p+g$ 一對類孿生質數構造 $n=p-1$ 的質數環

定理(g)	0.1(2)	2.1(4)	2.1(6)	2.1(8)	2.1(10)	2.1(12)	2.1(14)	2.1(16)	2.1(18)	2.1(20)
個數	809	807	1628	834	1078	1613	989	817	1644	1067

表 4、定理 0.1、定理 2.1 在 60000 以下能造出質數環的偶數個數

比較：如表 4 所示，構造的偶數個數僅取決於孿生質數或類孿生質數的密度

(二) 定理 0.2、定理 2.2

定理 0.2：使用 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+2$ 兩對孿生質數構造 $n=q-p$ 的質數環

定理 2.2：使用 $p,\ p+2$ 與 $q,\ q+4$ 一對孿生質數與一對差四質數構造 $n=q-p+2$ 的質數環

定理	0.2	2.2
個數	10802	10805

表 5、定理 0.2、定理 2.2 在 60000 以下能造出質數環的偶數個數

比較：前面的表 4 中，可以觀察到 60000 以下差二與差四的質數對個數接近，可能基於此原因，在表 5 中，定理 0.2 與定理 2.2 在 60000 以下能構造質數環的偶數個數也幾乎相同

(三) 定理 2.1、定理 3.1

定理 2.1：使用 $p,\ p+g$ 一對類孿生質數構造 $n=p-1$ 的質數環

定理 3.1：使用 $p,\ q,\ p+q-1$ 三個質數構造 $n=q-1$ 的質數環

我發現這兩個定理構造的質數環大小皆為某個質數減一，而且都有可能只用三個質數構造質數環，如下面這個 $n=16$ 的例子：

定理 2.1：	定理 3.1：
(p, p+6) = (17, 23) 1, 16, 7, 10, 13, 4 2, 15, 8, 9, 14, 3 5, 12, 11, 6	(p, q, p+q-1) = (7, 17, 23) 16, 1, 6, 11 15, 2, 5, 12 14, 3, 4, 13 10, 7 9, 8
1, 16, 7, 10, 13, 4, 3, 14, 9, 8, 15, 2, 5, 12, 11, 6	

兩種方法構造的子數列雖然不同，但是串連後最終的結果是相同的，於是我回顧「附錄、定理 2.1.3」分類討論得到的數條數列，如圖 6 中 $g=12$ 的例子，發現如果 $g+1$ 是質數，且 $p-1$ 與 g 最大公因數為 2，才可以僅使用一個質數將所有子數列串連；反之如果 $g+1$ 是合數，則至少要使用兩個質數。整理以上所述，這兩個定理有著相似的結論。

$$g=12 \Rightarrow \begin{cases} p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6\\12&11&10&9&8&7\end{matrix} \Rightarrow 1,2,11,6,7,10,3,4,9,8,5,12\ (17) \\ p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5&6&7\\2&12&11&10&9&8\end{matrix} \Rightarrow 1,12,3,10,5,8,7,6,9,4,11,2\ (13,\ \textit{not exist}) \\ p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6&7&8\\4&3&12&11&10&9\end{matrix} \Rightarrow 1,6,11,8,9,10,7,12,5,2,3,4\ (19) \\ p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7&8&9\\6&5&4&12&11&10\end{matrix} \Rightarrow 1,4,3,2,5,12,7,10,9,8,11,6\ (17) \\ p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&9&10\\8&7&6&5&12&11\end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,10,11,6,3,4,5,12,9,8\ (17,\ \textit{not exist}) \\ p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&11\\10&9&8&7&6&12\end{matrix} \Rightarrow 1,12,11,2,9,4,7,6,5,8,3,10\ (13) \end{cases}$$

圖 6、$g=12$ 分類討論情形

肆、 結論

一、　結論

在研究過程中，我將文獻的孿生質數法沿著兩個不同的方向進行延伸，第一個方向是將使用兩對孿生質數構造 $n=q-p$ 的質數環延伸至 $n=q-p+2k$ ($k=0\sim 5$) ，原本期望每加一項k值就可以使能構造質數環的偶數個數成倍增長，但是利用程式驗證後發現，會有兩兩重疊的關係，其原因可能是孿生質數對為 $6k-1,\ 6k+1$；第二個延伸方向是加大使用質數的差距，發現使用 $p,\ p+g$ 的質數對 （g 為 $4\sim 20$ 的偶數），亦能構造 $n=p-1$ 的質數環，除此之外，我也結合定理 0.2 串聯數列的方法、定理 2.1 分類數字的技巧，使用一對孿生質數與一對差四的質數構造質數環。

此外，我也提出定理 3 不限定差的質數對的方法，過去可能認為限定質數間的差距較容易掌握數字間的關聯性，但我突破這個框架，使用 $k,\ p,\ q,\ p+q-k$ 四個質數構造質數環（k 可以為 1），雖然事後查到與此定理切入角度不同、結論相同的文獻，但我仍在自己提出的解法之基礎上有所突破，即內文中的定理 3.3，我使用分裂法將的 $p+q-1$ 分裂成 $p+q-k$ 與 $2q-k$ 兩個質數，改變部分條件再繼續構造質數環。

每當提出一個新的定理，我會試著將其寫入程式中，觀察這個方法構造質數環的效率（在有限範圍內，能構造質數環的偶數比例多寡），發現定理 1 中 $k=0\sim 5$ 六種情形能涵蓋 60000 以下的任一個偶數，定理 3 也有很好的效果，能構造 5000 以下任一個偶數的質數環（5000 以上尚未驗證）；此外，有發現到各種方法構造質數環的偶數比例皆遞減趨近於一個定值，曲線皆呈凹口向上，可能是數字小的時候有比較多特例存在。

整理以上所述，本研究對於這個問題最大的貢獻在於延伸前人的成果，並提出更多從不同角度切入問題的方法。尤其是提出使用一般質數法構造質數環，如此就比較不會受到孿生質數猜想等限制，更有機會證明 Filz 提出對於任意偶數皆能構造質數環的猜想。

二、　定理比較（表 6）

方法	使用質數個數	“平均”效果	使用技巧
孿生質數法	3 個以上	普通	接近的質數對
類孿生質數法	3 個以上	普通	接近的質數對、同餘、分類
一般質數法	3 或 4	佳	同餘、分類、互質

表 6、定理比較

三、 未來展望

i. 延伸定理 0.1，當 $p, p+2$ 為孿生質數，$n=p-1-2t$ ($t>0$) 質數環存在。

ii. 延伸定理 1.1，當 $p, p+2$、$q, q+2$ 為孿生質數，$n=q-p+2k$ ($k>5, q>2p-4k$) 質數環存在。

iii. 延伸定理 2.1，當 $p, p+k$ 為質數，$n=p-1$ ($k>20$) 質數環存在。

iv. 延伸定理 2.1，當 $p, p+k$ 為質數，$n=p-1-2t$ ($t>0$) 質數環存在。

v. 延伸定理 3.2，如果 $n=q-k$ 中的 k 為奇合數，是否能修改排列方式構造質數環？

vi. 延伸定理 3.2，能否使用分裂法將 $p+q-k$ 拆成兩個質數，繼續構造質數環？

vii. 找出除了窮舉、孿生質數、類孿生質數、一般質數法（定理 3）以外的第五種方法。

viii. 改進程式演算法，驗證 $10^6 \sim 10^7$ 以內的偶數是否皆能用這些定理表示。

伍、 參考文獻資料

[1] Filz, A.: Problem 1046. J. Recreat. Math. 14, 64 (1982)

[2] MIT Mathematics PRIMES Math Problem Set (2020)
https://math.mit.edu/research/highschool/primes/materials/2020/entpro20sol.pdf

[3] Wolfram MathWorld Prime Circle
https://mathworld.wolfram.com/PrimeCircle.html

[4] OEIS A072618
https://oeis.org/A072618

[5] Chen, H. B., Fu, H. L., & Guo, J. Y. (2021). Hamiltonicity in Prime Sum Graphs. Graphs and Combinatorics, 37(1), 209-219.
https://scholar.lib.ntnu.edu.tw/zh/publications/hamiltonicity-in-prime-sum-graphs-2

[6] OEIS A072676
https://oeis.org/A072676

[7] OEIS A051252
https://oeis.org/A051252

[8] Macalester College Problem of the Week 1218 (2016)
https://stanwagon.com/potw/current_solutions/s1218.html?fbclid=IwAR2gKP6LvKOfdYvyBHD0ciwvlBwOay55Opg-I9XvvFL-pITCzj_VqgAeT3U

[9] Wolfram Demonstrations Project Special Prime Circles
https://demonstrations.wolfram.com/SpecialPrimeCircles/

陸、 附錄

> 定理 2.1.3
> 當 g 為 $8\sim 20$ 的偶數，即 $p,\ p+g$ 為一對質數 $(p>g)$ ，則存在 $n=p-1$ 的質數環。

【證明】

與定理 2.1.1, 2.1.2 類似的，先將 $p-1$ 對 g 同餘再分類，一共會分成 $g/2$ 類，且每一類可以構造出 $g/2$ 條數列，最後排列每條數列頭尾使得其相連接為質數。

對於以下的證明圖，第一列是 g ；第二列是對 g 同餘後分成的 $g/2$ 類；第三列是每一類的 $g/2$ 條數列首尾值（直向排列）；第四列是對這 $g/2$ 條數列的其中一種排列（皆是以 1 開始，與 1 同一條數列的數結束），紅色的數字對為特殊連接點（兩數和非第五列的數）；第五列是此構造此數列**主要**利用的質數（若為 X 則是數列間的連接部分沒有發現明確規則；若為 *not exist* 則是由質數為 $6k-1,\ 6k+1$ 推得該 *case* 不存在，詳見 $P.7$ 定理 2.1.2）。

$$g=8\Rightarrow\begin{cases} p-1\equiv 0\Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4\\8&7&6&5\end{matrix}\Rightarrow 1,2,7,4,5,6,3,8\ (11)\\ p-1\equiv 2\Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5\\2&8&7&6\end{matrix}\Rightarrow 1,4,7,6,5,8,3,2\ (13)\\ p-1\equiv 4\Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6\\4&3&8&7\end{matrix}\Rightarrow 1,2,3,8,5,6,7,4\ (11)\\ p-1\equiv 6\Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7\\6&5&4&8\end{matrix}\Rightarrow 1,4,3,2,5,8,7,6\ (13)\end{cases}$$

$$g=10\Rightarrow\begin{cases} p-1\equiv 0\Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5\\10&9&8&7&6\end{matrix}\Rightarrow 1,2,9,4,7,6,5,8,3,10\ (13)\\ p-1\equiv 2\Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5&6\\2&10&9&8&7\end{matrix}\Rightarrow 1,10,3,8,5,6,7,4,9,2\ (11)\\ p-1\equiv 4\Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6&7\\4&3&10&9&8\end{matrix}\Rightarrow 1,10,5,6,9,2,3,8,7,4\ (11)\\ p-1\equiv 6\Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7&8\\6&5&4&10&9\end{matrix}\Rightarrow 1,10,7,4,3,8,9,2,5,6\ (11)\\ p-1\equiv 8\Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&9\\8&7&6&5&10\end{matrix}\Rightarrow 1,10,9,2,7,4,5,6,3,8\ (11)\end{cases}$$

$$g=12 \Rightarrow \begin{cases} p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6\\12&11&10&9&8&7\end{matrix} \Rightarrow 1,2,11,6,7,10,3,4,9,8,5,12\ (17) \\ p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5&6&7\\2&12&11&10&9&8\end{matrix} \Rightarrow 1,12,3,10,5,8,7,6,9,4,11,2\ (13,\ \textit{not exist}) \\ p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6&7&8\\4&3&12&11&10&9\end{matrix} \Rightarrow 1,6,11,8,9,10,7,12,5,2,3,4\ (19) \\ p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7&8&9\\6&5&4&12&11&10\end{matrix} \Rightarrow 1,4,3,2,5,12,7,10,9,8,11,6\ (17) \\ p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&9&10\\8&7&6&5&12&11\end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,10,11,6,3,4,5,12,9,8\ (17,\ \textit{not exist}) \\ p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&11\\10&9&8&7&6&12\end{matrix} \Rightarrow 1,12,11,2,9,4,7,6,5,8,3,10\ (13) \end{cases}$$

$$g=14 \Rightarrow \begin{cases} p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7\\14&13&12&11&10&9&8\end{matrix} \Rightarrow 1,2,13,4,11,6,9,8,7,10,5,12,3,14\ (17) \\ p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5&6&7&8\\2&14&13&12&11&10&9\end{matrix} \Rightarrow 1,4,13,6,11,8,9,10,7,12,5,14,3,2\ (19) \\ p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6&7&8&9\\4&3&14&13&12&11&10\end{matrix} \Rightarrow 1,2,3,14,5,12,7,10,9,8,11,6,13,4\ (17) \\ p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7&8&9&10\\6&5&4&14&13&12&11\end{matrix} \Rightarrow 1,2,5,12,9,8,13,4,3,14,7,10,11,6\ (17) \\ p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&9&10&11\\8&7&6&5&14&13&12\end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,10,13,4,5,12,11,6,3,14,9,8\ (17) \\ p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&11&12\\10&9&8&7&6&14&13\end{matrix} \Rightarrow 1,2,9,8,3,14,11,6,5,12,13,4,7,10\ (17) \\ p-1\equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&13\\12&11&10&9&8&7&14\end{matrix} \Rightarrow 1,2,11,6,5,10,3,14,13,4,9,8,5,12\ (17) \end{cases}$$

$$g=16 \Rightarrow \begin{cases} p-1\equiv 0 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\16&15&14&13&12&11&10&9\end{matrix} \Rightarrow 1,2,15,4,13,6,11,8,9,10,7,12,5,14,3,16\ (19) \\ p-1\equiv 2 \Rightarrow \begin{matrix}1&3&4&5&6&7&8&9\\2&16&15&14&13&12&11&10\end{matrix} \Rightarrow 1,16,3,14,5,12,7,10,9,8,11,6,13,4,15,2\ (17) \\ p-1\equiv 4 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&5&6&7&8&9&10\\4&3&16&15&14&13&12&11\end{matrix} \Rightarrow 1,2,3,16,5,14,7,12,9,10,11,8,13,6,15,4\ (19) \\ p-1\equiv 6 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&7&8&9&10&11\\6&5&4&16&15&14&13&12\end{matrix} \Rightarrow 1,16,7,10,13,4,3,14,9,8,15,2,5,12,11,6\ (17) \\ p-1\equiv 8 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&9&10&11&12\\8&7&6&5&16&15&14&13\end{matrix} \Rightarrow 1,2,7,12,13,6,3,16,9,10,15,4,5,14,11,8\ (19) \\ p-1\equiv 10 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&11&12&13\\10&9&8&7&6&16&15&14\end{matrix} \Rightarrow 1,16,11,6,5,12,15,2,9,8,3,14,13,4,7,10\ (17) \\ p-1\equiv 12 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&13&14\\12&11&10&9&8&7&16&15\end{matrix} \Rightarrow 1,2,11,8,5,14,15,4,9,10,3,16,13,6,7,12\ (19) \\ p-1\equiv 14 \Rightarrow \begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&15\\14&13&12&11&10&9&8&16\end{matrix} \Rightarrow 1,16,15,2,13,4,11,6,9,8,7,10,5,12,3,14\ (17) \end{cases}$$

$$
g=18\Rightarrow\begin{cases}
p-1\equiv 0\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\18&17&16&15&14&13&12&11&10\end{matrix}\Rightarrow 1,4,15,8,11,12,7,16,3,2,17,6,13,10,9,14,5,18\ (23)\\
p-1\equiv 2\Rightarrow\begin{matrix}1&3&4&5&6&7&8&9&10\\2&18&17&16&15&14&13&12&11\end{matrix}\Rightarrow 1,18,3,16,5,14,7,12,9,10,11,8,13,6,15,4,17,2\ (19,\ \textit{not exist})\\
p-1\equiv 4\Rightarrow\begin{matrix}1&2&5&6&7&8&9&10&11\\4&3&18&17&16&15&14&13&12\end{matrix}\Rightarrow 1,18,5,14,9,10,13,6,17,2,3,16,7,12,11,8,15,4\ (19)\\
p-1\equiv 6\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&7&8&9&10&11&12\\6&5&4&18&17&16&15&14&13\end{matrix}\Rightarrow 1,4,3,2,5,18,7,16,9,14,11,12,13,10,15,8,17,6\ (23)\\
p-1\equiv 8\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&9&10&11&12&13\\8&7&6&5&18&17&16&15&14\end{matrix}\Rightarrow 1,18,9,10,17,2,7,12,15,4,5,14,13,6,3,16,11,8\ (19,\ \textit{not exist})\\
p-1\equiv 10\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&11&12&13&14\\10&9&8&7&6&18&17&16&15\end{matrix}\Rightarrow 1,18,11,8,3,16,13,6,5,14,15,4,7,12,17,2,9,10\ (19)\\
p-1\equiv 12\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&13&14&15\\12&11&10&9&8&7&18&17&16\end{matrix}\Rightarrow 1,4,9,14,17,6,7,16,15,8,5,18,13,10,3,2,11,12\ (23)\\
p-1\equiv 14\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&15&16\\14&13&12&11&10&9&8&18&17\end{matrix}\Rightarrow 1,18,15,4,11,8,7,12,3,16,17,2,13,6,9,10,5,14\ (19,\ \textit{not exist})\\
p-1\equiv 16\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&17\\16&15&14&13&12&11&10&9&18\end{matrix}\Rightarrow 1,18,17,2,15,4,13,6,11,8,9,10,7,12,5,14,3,16\ (19)
\end{cases}
$$

$$
g=20\Rightarrow\begin{cases}
p-1\equiv 0\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\20&19&18&17&16&15&14&13&12&11\end{matrix}\Rightarrow 1,2,19,4,17,6,15,8,13,10,11,12,9,14,7,16,5,18,3,20\ (23)\\
p-1\equiv 2\Rightarrow\begin{matrix}1&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\2&20&19&18&17&16&15&14&13&12\end{matrix}\Rightarrow 1,4,19,10,13,16,7,6,17,12,11,18,5,8,15,14,9,20,3,2\ (29)\\
p-1\equiv 4\Rightarrow\begin{matrix}1&2&5&6&7&8&9&10&11&12\\4&3&20&19&18&17&16&15&14&13\end{matrix}\Rightarrow 1,2,3,20,5,18,7,16,9,14,11,12,13,10,15,8,17,6,19,4\ (23)\\
p-1\equiv 6\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&7&8&9&10&11&12&13\\6&5&4&20&19&18&17&16&15&14\end{matrix}\Rightarrow 1,12,15,8,19,4,3,20,7,16,11,2,5,18,9,14,13,10,17,6\ (23)\\
p-1\equiv 8\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&9&10&11&12&13&14\\8&7&6&5&20&19&18&17&16&15\end{matrix}\Rightarrow 1,2,7,16,13,10,19,4,5,18,11,12,17,6,3,20,9,14,15,8\ (23)\\
p-1\equiv 10\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&11&12&13&14&15\\10&9&8&7&6&20&19&18&17&16\end{matrix}\Rightarrow 1,12,19,4,7,16,15,8,3,20,11,2,9,14,17,6,5,18,13,10\ (23)\\
p-1\equiv 12\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&13&14&15&16\\12&11&10&9&8&7&20&19&18&17\end{matrix}\Rightarrow 1,2,11,18,15,14,19,10,3,8,5,6,7,4,9,20,13,16,17,12\ (29)\\
p-1\equiv 14\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&15&16&17\\14&13&12&11&10&9&8&20&19&18\end{matrix}\Rightarrow 1,12,3,20,15,8,7,16,19,4,11,2,13,10,5,18,17,6,9,14\ (23)\\
p-1\equiv 16\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&17&18\\16&15&14&13&12&11&10&9&20&19\end{matrix}\Rightarrow 1,2,15,8,9,14,3,20,17,6,11,12,5,18,19,4,13,10,7,16\ (23)\\
p-1\equiv 18\Rightarrow\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&19\\18&17&16&15&14&13&12&11&10&20\end{matrix}\Rightarrow 1,12,7,16,3,20,19,4,15,8,11,2,17,6,13,10,9,14,5,18\ (23)
\end{cases}
$$

（補充）子題說明

其實定理 2.1 可以衍伸成一個子題，由於質數集合無限大，因此對於任一質數 p，可以假設存在偶數 g 使得 $p+g$ 也是質數，接著可將 $1\sim p-1$ 透過對 g 同餘分類，造出若干條數列，考慮是否存在配對方式使得每條數列首尾串接，其相鄰任兩數相加都是質數，若命題成立則對於所有質數 p ($p>3$) 皆存在 $n=p-1$ 的質數環。

程式碼（C++）

1. 建立質數數列（埃拉托斯特尼篩法）（圖 7）

```cpp
    vector<bool> isprime(2*n + 20, true);
    vector<int> primes;

    isprime[1] = false;
    for (int p = 2; p * p <= 2*n+20; ++p) {
        if (isprime[p]) {
            for (int i = p * p; i <= 2*n+20; i += p) {
                isprime[i] = false;
            }
        }
    }

    for (int p = 2; p <= 2*n+20; ++p) {
        if (isprime[p]) {
            primes.push_back(p);
        }
    }
```

圖 7、建立質數數列

2. 尋找相差 2~20 的質數對（圖 8）

```cpp
    vector<int>twin_twelve;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+12]==1){
            twin_twelve.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_fourteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+14]==1){
            twin_fourteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_sixteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+16]==1){
            twin_sixteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_eighteen;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+18]==1){
            twin_eighteen.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_twenty;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+20]==1){
            twin_twenty.push_back(i);
        }
    }
```

```cpp
    vector<int>twin_two;
    for (int i=1;i<2*n+2;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+2]==1){
            twin_two.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_four;
    for (int i=1;i<2*n+4;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+4]==1){
            twin_four.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_six;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+6]==1){
            twin_six.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_eight;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+8]==1){
            twin_eight.push_back(i);
        }
    }

    vector<int>twin_ten;
    for (int i=1;i<n+1;i++){
        if (isprime[i]==1 and isprime[i+10]==1){
            twin_ten.push_back(i);
        }
    }
```

圖 8、尋找相差 2~20 的質數對

3. 找出符合定理的數（圖 9）

```
//0.1
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    if (twin_two[i]-1<=n+1){
        fit[twin_two[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    bool a = isprime[2*twin_two[i]+1];
    if (a == true and twin_two[i]<=n){
        fit[twin_two[i]+1] = true;
    }
}
// 0.2+1.2
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    for (int j=i+1;j<twin_two.size();j++){
        int a = twin_two[i];
        int b = twin_two[j];
        if (b>2*a and b-a<=n+1){
            fit[b-a] = true;
        }
        if (b>2*a-4 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+2] = true;
        }
        if (b>2*a-8 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+4] = true;
        }
        if (b>2*a-12 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+6] = true;
        }
        if (b>2*a-16 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+8] = true;
        }
        if (b>2*a-20 and b-a<=n+1){
            fit[b-a+10] = true;
        }
    }
}
```

```
//2.2
for (int i=0;i<twin_two.size();i++){
    for (int j=i+1;j<twin_four.size();j++){
        int a = twin_two[i];
        int b = twin_four[j];
        if (b>2*a-4 and b%4==1 and b-a+2<=n+1){
            fit[b-a+2] = true;
        }
    }
}
```

```
//3.1
for (int i=1;primes[i]<n;i++){
    int q=primes[i];
    for (int j=1;primes[j]<q;j++){
        int p=primes[j];
        if (isprime[p+q-1]==1 and gcd((p-1)/2,(q-1)/2)==1){
            fit[q-1] = true;
        }
    }
}
```

```
//2.1.1
for (int i=0;i<twin_four.size();i++){
    if (twin_four[i]-1<=n+1){
        fit[twin_four[i]-1] = true;
    }
}
//2.1.2
for (int i=0;i<twin_six.size();i++){
    if (twin_six[i]-1<=n+1){
        fit[twin_six[i]-1] = true;
    }
}
```

```
//2.1.3
for (int i=0;i<twin_eight.size();i++){
    if (twin_eight[i]-1<=n+1){
        fit[twin_eight[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_ten.size();i++){
    if (twin_ten[i]-1<=n+1){
        fit[twin_ten[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_twelve.size();i++){
    if (twin_twelve[i]-1<=n+1){
        fit[twin_twelve[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_fourteen.size();i++){
    if (twin_fourteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_fourteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_sixteen.size();i++){
    if (twin_sixteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_sixteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_eighteen.size();i++){
    if (twin_eighteen[i]-1<=n+1){
        fit[twin_eighteen[i]-1] = true;
    }
}
for (int i=0;i<twin_twenty.size();i++){
    if (twin_twenty[i]-1<=n+1){
        fit[twin_twenty[i]-1] = true;
    }
}
```

```
//3.2
for (int i=1;primes[i]<n;i++){
    int q=primes[i];
    for (int j=1;primes[j]<q;j++){
        int p=primes[j];
        for (int l=1;primes[l]<q-p and primes[l]<p;l++){
            int k=primes[l];
            if(isprime[p+q-k]==1 and gcd(p-k,q-k)==2){
                fit[q-k] = true;
            }
        }
    }
}
```

圖 9、定理（0.1, 0.2+1.1, 2.1, 2.2, 3.1, 3.2）

4. 輸出符合定理的 n 個數（圖 10）

```
    for (int i=3;i<fit.size();i++){
        if (fit[i] == true){
            amount++;
        }
    }
    cout<<amount<<endl;
```

圖 10、輸出符合定理的 n 個數

【評語】010012

本作品研究質數環，該環將 1 至 n 種環狀排列，使得相鄰兩數之和皆為質數。很容易可以證明只有 n 是偶數時才可能存在質數環。其他情形質數環的存在性定理，作者受文獻啟發，在假設質數滿足特定條件的輔助下，以接近直觀的方式構造出質數環。整體而言，提出的條件假設也與文獻相差很少，有進步空間。