

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010010

參展科別 數學

作品名稱 關於Repunit數列 之餘數性質探討

得獎獎項 三等獎

突尼西亞國際工程與科技節 I-FEST2

就讀學校 臺北市立麗山高級中學

指導教師 林劭原

夏良忠

作者姓名 許弘毅

關鍵詞 Repunit數列、餘數數列、非齊次線性遞迴

作者簡介



教授、老師和同學大家好！我是來自麗山高中的許弘毅！

很慶幸今年能在我高中科展生涯的尾端參與國際科展，高中是我第一次踏進數學這個領域，在這三年的以來從最初對數論這個領域完全沒有概念，在學習的過程中感受到最純粹的美好，到現在有辦法完整的寫出一份報告書，這些經歷讓我對數學有了更深的理解及熱愛。

一路得感謝很多人，非常感謝師大數學系夏良忠指導教授的幫忙，讓我得以在數論這塊專業領域有更深的了解；謝謝學校老師的磨練和砥礪，你們的意見和想法都讓我的心智磨練的更加強大。

最後給任何想參與數學科展的你和妳，希望你都能在數學研究上找到屬於你的快樂。

附件三

研究報告封面

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別： 北區

科別：數學科

作品名稱：關於 Repunit 數列之餘數性質探討

關鍵詞：Repunit 數列、餘數數列、非齊次線性遞迴

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

摘要

在這篇作品中，主要研究 Repunit 數列 $\langle R_n \rangle = \langle 1, 11, 111, \dots \rangle$ 在模 n 之下的餘數數列 $\langle r_{k,n} \rangle$ 循環性質。我們探討了 Repunit 餘數數列在什麼條件下為純循環週期數列、混循環週期數列和完全純循環週期數列，同時給出了循環週期的公式及上界。接著我們發現一階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的循環週期與 c 進制 Repunit 數列在模 $n/\gcd(n,c)$ 之下的循環週期相同，並且進一步探討餘數數列在什麼條件下為純循環數列、混循環數列和完全純循環數列。

Abstract

This work primarily investigates the cyclic properties of the remainder sequence $\langle r_{k,n} \rangle$ of the Repunit sequence $\langle R_n \rangle = \langle 1, 11, 111, \dots \rangle$ modulo n . We explore the conditions under which the remainder sequence of Repunit numbers forms a purely periodic sequence, a pre-periodic sequence, or a perfectly periodic sequence, and we provide the formula and the upper bound for the cyclic period. Furthermore, we discover that the cyclic period of a first-order non-homogeneous linear recurrence sequence modulo n is the same as that of the base- c Repunit sequence modulo $n/\gcd(n,c)$. We also explore the conditions under which the remainder sequence forms a purely periodic sequence, a pre-periodic sequence, or a perfectly periodic sequence.

壹、研究動機

當在找專題研究的題目的時候，偶然翻到了一個有趣的題目，「把1,11,111這三個數字分別除以3，發現餘數是1,2,0，不僅餘數都不同，而且所有除以3可能餘數都出現了。把1,11,111,1111 這四個數字分別除以4發現餘數是1,3,3,3 只有兩個數字。……當有幾個數字時，餘數會湊滿呢？」

我們將以上問題延伸，探討在 Repunit 數列 $\langle 1, 11, 111, \dots \rangle$ 在模 n 之下的餘數數列其循環週期為多少，什麼時候循環週期恰為 n 及循環週期的上界為多少。接著我們想進一步探討不同的非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的餘數在是否也會循環，同時也探討其循環週期、上界及因倍數性質。

貳、研究目的

- 一、探討 Repunit 餘數數列的循環性質
- 二、探討 Repunit 餘數數列的循環週期
- 三、探討一階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的餘數循環性質

參、研究設備與器材

紙、筆、電腦

肆、研究過程或方法及進行步驟

一、名詞定義與基本性質

Definition 1. (Repunit , Albert H. Beiler[3] , 由重複的單一數字組成的數字稱為 Repunit (Repeated unit))

對於有 k 位重複的 1 組成的數字，我們記做 R_k

$$R_k = \frac{10^k - 1}{9} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10^0$$

Definition 2. (Repunit 數列 (Repunits) , OEIS_A002275)

由 Repunit 所組成的遞迴數列，我們記做 $\langle R_k \rangle := \langle 1, 11, 111, \dots \rangle$ (稱為 Repunit 數列)

遞迴關係如下

$$R_k = 10 \cdot R_{k-1} + 1, R_0 = 0$$

Definition 3. (Repunit 數列在模 n 下的餘數數列之週期性質)

Repunit 數列 $\langle R_k \rangle$ 的每一項 R_k 在模正整數 n 下所得到的餘數數列 $\langle r_k, n \rangle$ (稱為 Repunit 餘數數列) 會有週期循環的性質。

$$\langle R_k \rangle \equiv \langle r_k, n \rangle \pmod{n}$$

$$\langle r_k, 3 \rangle = \langle 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots \rangle$$

$$\langle r_k, 13 \rangle = \langle 1, 11, 7, 6, 9, 0, 1, 11, 7, 6, 9, 0, \dots \rangle$$

$$\langle r_k, 12 \rangle = \langle \textcolor{red}{1}, 11, 3, 7, 11, 3, 7, \dots \rangle$$

$$\langle r_k, 1000 \rangle = \langle \textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{11}, 111, 111, 111, \dots \rangle$$

像是 $\langle r_k, 3 \rangle$ 每三項就循環一次，而 $\langle r_k, 12 \rangle$ 則是會經過第一項 $\textcolor{red}{1}$ 之後，接下來每三項就循環一次。如同 $\langle r_k, 12 \rangle$ 和 $\langle r_k, 1000 \rangle$ ，在數列的前幾項有不循環的部分，我們稱為混循環週期數列；反之如 $\langle r_k, 13 \rangle$ ，數列中沒有不循環的部分，我們稱為純循環週期數列，特別的是形如 $\langle r_k, 3 \rangle$ ，數列恰好每三項就循環一次，循環週期恰好與模數相同，我們稱為完全純循環週期數列。 $\langle r_k, n \rangle$ 的不循環長度，我們記為 s_n ($s_3 = 0, s_{13} = 0, s_{12} = 1, s_{1000} = 2$)；而 $\langle r_k, n \rangle$ 的最小循環週期，我們記為 l_n ($l_3 = 3, l_{13} = 6, l_{12} = 3, l_{1000} = 1$)。

Definition 4. (p 進位數賦, p -adic valuation)

$$v_p(n) = \begin{cases} \max\{k | k \in \mathbb{N}_0 : p^k | n\} & \text{if } n \neq 0 \\ \infty & \text{if } n = 0 \end{cases}, p \text{ 是質數}, n \in \mathbb{N}$$

Proposition 1.

$$R_i - R_j = R_{i-j} \cdot 10^j (i > j > 0)$$

Proof.

$$R_i - R_j = \frac{(10^i - 1) - (10^j - 1)}{9} = \frac{10^i - 10^j}{9} = \frac{10^{i-j} - 1}{9} \cdot 10^j = R_{i-j} \cdot 10^j$$

■

Proposition 2. (Repunit 的除法原理)

若 $i = jq + r$ ($j > r, i, j, q \in \mathbb{N}, r \geq 0$) , 則存在正整數 Q , 使得 $R_i = R_j \cdot Q + R_r$

Proof.

$$\begin{aligned}(10^i - 1) &= (10^j - 1) \cdot 10^{i-j} + (10^{i-j} - 1) \\(10^{i-j} - 1) &= (10^j - 1) \cdot 10^{i-2j} + (10^{i-2j} - 1) \\&\vdots \\(10^{i-j(q-1)} - 1) &= (10^j - 1) \cdot 10^{i-jq} + (10^{i-jq} - 1)\end{aligned}$$

由於 $i = jq + r$, 可得

$$= (10^j - 1) \cdot 10^{i-jq} + (10^r - 1)$$

故

$$(10^i - 1) = (10^j - 1) \cdot (10^{i-j} + \cdots + 10^{i-jq}) + (10^r - 1)$$

$$\text{令 } Q = (10^{i-j} + \cdots + 10^{i-jq})$$

$$9 \cdot R_i = 9 \cdot (R_j \cdot Q + R_r)$$

$$R_i = R_j \cdot Q + R_r$$

■

Proposition 3. (Repunit 的最大公因數)

$$\gcd(R_i, R_j) = R_{\gcd(i, j)} \quad (i, j \in \mathbb{N})$$

Proof.

利用輾轉相除法求 R_i, R_j 的最大公因數

$$\begin{aligned}R_i &= R_j \cdot q_1 + R_{r_1}, & i &= jq_1' + r_1 \\R_j &= R_{r_1} \cdot q_2 + R_{r_2}, & j &= r_1q_2' + r_2 \\R_{r_1} &= R_{r_2} \cdot q_3 + R_{r_3}, & r_1 &= r_2q_3' + r_3 \\&\vdots \\R_{r_{s-2}} &= R_{r_{s-1}} \cdot q_s + R_{r_s}, & r_{s-2} &= r_{s-1}q_s' + r_s\end{aligned}$$

若 $r_s | r_{s-1}$, 則由 **Proposition 1.**

$$R_{r_s} | R_{r_{s-1}}$$

可知 R_i, R_j 的最大公因數為

$$\gcd(R_i, R_j) = R_{r_s}$$

此時 $r_s = \gcd(i, j)$, 故

$$R_{r_s} = R_{\gcd(i, j)}$$

■

Remark:

若 $R_i | R_j$ ($i, j \in \mathbb{N}, i > j$) , 則 $\gcd(R_i, R_j) = R_i$.

Proposition 4.

n 是正整數 $\gcd(n, 10) = 1$, 令 s 為最小的正整數滿足 $10^s \equiv 1(\bmod n)$
 若整數 a 滿足 $10^a \equiv 1(\bmod n)$, 則 $s|a$

Proof.

令 $a = sq + r (q \in \mathbb{N}, 0 \leq r < s)$

$$10^{sq+r} \equiv 1(\bmod n)$$

$$10^{sq} \cdot 10^r \equiv 1(\bmod n)$$

$$10^r \equiv 1(\bmod n)$$

但與 $r < s$ 且 s 為最小的正整數滿足 $10^s \equiv 1(\bmod n)$ 矛盾 , 故 $r = 0$ 。

■

L.T.E. lemma (升冪引理, Lifting-The-Exponent lemma, Geretschläger, R. [8])

給定 $x, y, n \in \mathbb{N}$ 和質數 p , 若 $p \nmid x, p \nmid y, p|x-y$

當 p 是奇數 , 則 $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$

當 $p = 2$, 則 $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(x + y) + v_p(n) - 1$

二、探討 Repunit 餘數數列的循環週期

首先我們將任意正整數寫成 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \in \mathbb{N}, \gcd(t, 10) = 1$) , 經由觀察我們可以發現 , $\langle r_k, n \rangle$ 的不循環長度 s_n , 似乎恰好為 $\max(\alpha, \beta) - 1$ 。也就是若 $\gcd(n, 10) \neq 1$, 則 Repunit 餘數數列會是混循環週期數列 , 反之若 $\gcd(n, 10) = 1$ 則 Repunit 餘數數列會是純循環週期數列。

$$n = 2^2 \cdot 5^0 \cdot 3, \langle r_k, 12 \rangle = \langle \textcolor{red}{1}, 11, 3, 7, 11, 3, 7, \dots \rangle, s_n = \max(2, 0) - 1 = 1$$

$$n = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 1, \langle r_k, 1000 \rangle = \langle \textcolor{red}{1}, \textcolor{red}{11}, 111, 111, 111, \dots \rangle, s_n = \max(3, 3) - 1 = 2$$

而對於純循環週期數列和混循環週期數列 , 其循環週期只與 t 有關

$$n = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 3, \langle r_k, 3 \rangle = \langle 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots \rangle, l_n = 3$$

$$n = 2^2 \cdot 5^0 \cdot 3, \langle r_k, 12 \rangle = \langle \textcolor{red}{1}, 11, 3, 7, 11, 3, 7, \dots \rangle, l_n = 3$$

$$n = 2^0 \cdot 5^0 \cdot 21, \langle r_k, 21 \rangle = \langle 1, 11, 6, 19, 2, 0, 1, 11, 6, 19, 2, 0, \dots \rangle, l_n = 6$$

$$n = 2^1 \cdot 5^0 \cdot 21, \langle r_k, 21 \rangle = \langle 1, 11, 27, 19, 23, 21, 1, 11, 27, 19, 23, 21, \dots \rangle, l_n = 6$$

Problem 1. Repunit 餘數數列是否會循環?

Solution

(一) $\gcd(n, 10) = 1$

Lemma 1.1

若 $\gcd(n, 10) = 1$, 則必存在一個最小正整數 l s.t. $10^l \equiv 1(\bmod 9n)$

Proof.

Let $S = \{10^0, 10^1, 10^2, \dots, 10^a, \dots, 10^b, \dots\}$

將集合內的每個元素模 $9n$, 因為模 $9n$ 下的餘數為有限的 , 由鴿籠原理 , 必能找到一組 $10^a, 10^b$, 同時 $b - a$ 為最小的 , 使得 $10^a \equiv 10^b(\bmod 9n)$ 。由於 $\gcd(n, 10) = 1$, 故

$$10^{b-a} \equiv 1(\bmod 9n)$$

令 $l = b - a$

$$10^l \equiv 1 \pmod{9n}$$

■

Lemma 1.2

若 $\gcd(n, 10) = 1$ ，則 $R_l \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow 10^l \equiv 1 \pmod{9n}$

Proof.

($\Rightarrow$)

$$R_l = \frac{10^l - 1}{9} \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\frac{10^l - 1}{9} = n \cdot t, t \in \mathbb{N}$$

$$10^l - 1 = 9n \cdot t$$

可得

$$10^l \equiv 1 \pmod{9n}$$

($\Leftarrow$)

$$10^l \equiv 1 \pmod{9n}$$

$$10^l - 1 = 9n \cdot t, t \in \mathbb{N}$$

$$\frac{10^l - 1}{9} = n \cdot t$$

可得

$$R_l \equiv 0 \pmod{n}$$

■

Theorem 1.

若 $\gcd(n, 10) = 1$ 且 l 是最小的正整數使得 $R_l \equiv 0 \pmod{n}$ ，則 $\langle r_k, n \rangle$ 的循環週期 $l_n = l$

Proof.

由遞迴關係 $R_{k+1} = 10 \cdot R_k + 1$ 及 $R_l \equiv 0 \pmod{n}$ ，可得

$$R_{l+1} \equiv 10 \cdot R_l + 1 \equiv 1 \equiv R_1 \pmod{n}$$

$$R_{l+2} \equiv 10 \cdot R_{l+1} + 1 \equiv 10 \cdot R_1 + 1 \equiv R_2 \pmod{n}$$

$\vdots$

$$R_{2l} \equiv 10 \cdot R_{2l-1} + 1 \equiv 10 \cdot R_{l-1} + 1 \equiv R_l \pmod{n}$$

$\vdots$

也就是

$$\langle r_k, n \rangle = \langle R_1 \pmod{n}, \dots, R_l \pmod{n}, R_{l+1} \equiv R_1 \pmod{n}, \dots, R_{2l} \equiv R_l \pmod{n}, \dots \rangle$$

可知 Repunit 餘數數列是純循環週期數列，由於 l 是最小的正整數使得 $R_l \equiv 0 \pmod{n}$ ，循環週期 $l_n = l$ 。

■

(二) $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, α, β 不全為 0)

Theorem 2.

若 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, α, β 不全為 0), $\langle r_k, n \rangle$ 的不循環節長度 $s_n = \max(\alpha, \beta) - 1$ 。

Proof.

考慮在 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ 的情況，我們想找到最小的正整數 j 和另一個正整數 i ($i > j$)，使得

$$R_i \equiv R_j \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

也就是

$$R_{i-j} \cdot 10^j \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

顯然 $R_{i-j} \not\equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ ，因此

$$10^j \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

可得 $j \geq \max(\alpha, \beta)$ ，接下來證明 $j = \max(\alpha, \beta)$ 。由反證法，假設 $j > \max(\alpha, \beta)$ ，可得

$$10^j \equiv 10^{\max(\alpha, \beta)} \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

但 j 為最小的正整數滿足上式，因此 $j > \max(\alpha, \beta)$ 矛盾，故 $j = \max(\alpha, \beta)$ 。

接下來由遞迴關係 $R_{k+1} = 10 \cdot R_k + 1$ 及 $10^j \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ ，可得

$$R_{j+1} \equiv 10 \cdot R_j + 1 \equiv R_j \pmod{n}$$

$$R_{j+2} \equiv 10 \cdot R_{j+1} + 1 \equiv 10 \cdot R_j + 1 \equiv R_j \pmod{n}$$

⋮

也就是

$$\langle r_k, n \rangle = \langle R_1 \pmod{n}, \dots, R_j \pmod{n}, R_{j+1} \equiv R_j \pmod{n}, \dots \rangle$$

故可知在此情況下 Repunit 餘數數列會是混循環週期數列，而不循環長度 $s_n = \max(\alpha, \beta) - 1$ 。

■

(三) $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{N}$, $\gcd(t, 10) = 1$)

接下來我們考慮在 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ 的情況，首先我們想找到最小的正整數 j 和另一個正整數 i ($i > j$)，使得

$$R_i \equiv R_j \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t}$$

也就是

$$R_{i-j} \cdot 10^j \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t}$$

因為 $\gcd(R_{i-j}, 10) = 1$ ，故必存在最小的正整數 l ，使得

$$R_l \equiv 0 \pmod{t}$$

令 $i - j = l$ ，顯然 $R_{i-j} \not\equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ ，因此

$$10^j \equiv 0 \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$$

由 **Theorem 2.**，可推得 $j = \max(\alpha, \beta)$ 。

接下來由遞迴關係 $R_{k+1} = 10 \cdot R_k + 1$ 及 $R_{l+\max(\alpha, \beta)} \equiv R_{\max(\alpha, \beta)} \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ ，可得

$$R_{l+\max(\alpha, \beta)+1} \equiv 10 \cdot R_{l+\max(\alpha, \beta)} + 1 \equiv 10 \cdot R_{\max(\alpha, \beta)} + 1 \equiv R_{\max(\alpha, \beta)+1} \pmod{n}$$

⋮

$$R_{2l+\max(\alpha, \beta)} \equiv 10 \cdot R_{2l+\max(\alpha, \beta)-1} + 1 \equiv 10 \cdot R_{l+\max(\alpha, \beta)-1} + 1 \equiv R_{l+\max(\alpha, \beta)} \pmod{n}$$

也就是

$$\langle r_k, n \rangle =$$

$$\langle R_1(\bmod n), \dots, R_{\max(\alpha, \beta)}(\bmod n), \dots, R_{l+\max(\alpha, \beta)}(\bmod n), R_{l+\max(\alpha, \beta)+1} \equiv R_{\max(\alpha, \beta)+1}(\bmod n), \\ \dots, \dots, R_{2l+\max(\alpha, \beta)} \equiv R_{l+\max(\alpha, \beta)}(\bmod n) \rangle$$

故可知在此情況下 Repunit 餘數數列會是混循環週期數列，而不循環長度 $s_n = \max(\alpha, \beta) - 1$ ，循環週期 $l_n = l$ 。

Problem 2. Repunit 餘數數列在什麼條件下為完全純循環週期數列？

Solution

我們發現只有在模 $3^m (m \in \mathbb{N})$ 之下，Repunit 餘數數列才會是完全純循環週期數列。由 **Definition 3.** 我們要證明 $l_n = n$ ，也就是

$$R_n \equiv 0(\bmod n)$$

Theorem 3.

$$10^{3^m} \equiv 1(\bmod 3^{m+2}), m \in \mathbb{N}$$

Proof.

已知 $3|(10-1) \wedge 3 \nmid 1 \wedge 3 \nmid 10$

由 **L.T.E. lemma**

$$v_3(10^{3^m} - 1) = v_3(10 - 1) + v_3(3^m) = m + 2$$

可得 $10^{3^m} - 1 = 3^{m+2} \cdot t, \gcd(3, t) = 1$

得證

$$10^{3^m} \equiv 1(\bmod 3^{m+2})$$

■

Remark:

接下來我們證明 $l_{3^m} = 3^m$ ，由反證法，假設存在更小的循環週期，根據 **Proposition 4.** 我們知道其必整除 3^m ，我們將其記為 $3^\alpha (3^\alpha | 3^m, \alpha < m)$ ，其滿足 $10^{3^\alpha} \equiv 1(\bmod 3^{m+2})$ 。由 **L.T.E. lemma**，

$$v_3(10^{3^\alpha} - 1) = \alpha + 2$$

但 $\alpha < m$ ，可得

$$10^{3^\alpha} \not\equiv 1(\bmod 3^{m+2})$$

這與原假設矛盾，故 $l_{3^m} = 3^m$ 。

Problem 3. Repunit 餘數數列的循環週期的上界

Solution

前面我們證明了在 $n = 3^m (m \in \mathbb{N})$ 時循環週期會恰好等於 3^m ，接下來證明在 $n = 3^m \cdot t, \gcd(t, 30) = 1$ 的情況下，循環週期的上界。

lemma 4.1

$$\text{若 } \gcd(n, m) = \gcd(nm, 10) = 1, l_{nm} = \text{lcm}(l_n, l_m)$$

Proof.

已知 $10^{l_{nm}} \equiv 1 \pmod{9nm}$ ，故 $10^{l_{nm}} \equiv 1 \pmod{9n}, 10^{l_{nm}} \equiv 1 \pmod{9m}$ ，由 **Proposition 4.** 可得

$$l_n | l_{nm}, l_m | l_{nm}$$

由於 l_{nm} 為最小的正整數滿足

$$10^{l_{nm}} \equiv 1 \pmod{9nm}$$

$$\text{故 } l_{nm} = \text{lcm}(l_n, l_m)$$

■

Theorem 4.

$l_{3^m \cdot t}$ 是最小的正整數, 使得 $R_{l_{3^m \cdot t}} \equiv 0 \pmod{3^{m+2} \cdot t}, \gcd(t, 30) = 1$, 則 $l_{3^m \cdot t} \leq 3^m \phi(t)$

Proof.

由 **Lemma 1.2**

$$R_{l_{3^m \cdot t}} \equiv 0 \pmod{3^m \cdot t} \Leftrightarrow 10^{l_{3^m \cdot t}} \equiv 1 \pmod{3^{m+2} \cdot t}$$

因為 $\gcd(3^m, t) = \gcd(3^m \cdot t, 10)$ 由 **lemma 4.1**

$$l_{3^m \cdot t} = \text{lcm}(l_{3^m}, l_t) = \text{lcm}(3^m, l_t)$$

由於 $l_t \leq \phi(t)$

$$\text{lcm}(3^m, l_t) \leq 3^m l_t \leq 3^m \phi(t)$$

可得

$$l_{3^m \cdot t} \leq 3^m \phi(t)$$

■

Problem 4. Repunit 餘數數列的循環週期公式

Solution

在前面的討論我們可以知道 l_n 的上界為 $3^m \phi(t)$ ，但更進一步地我們想得到循環週期的公式。由參考文獻 [6](朱亮儒。科學教育月刊第 449 期。淺談分數化小數的分類)，我們知道由 $\frac{1}{n}$ 化成循環小數之循環節長度與 Repunit 餘數數列的循環週期有所關聯。接下來我們定義 $\text{len}\left(\frac{1}{n}\right)$ 為 $\frac{1}{n}$ 化成循環小數之循環節長度。若 n 跟 30 互質，則 $\text{len}\left(\frac{1}{n}\right)$ 就是最小的正整數 l 滿足

$$10^l \equiv 1 \pmod{n}$$

恰好跟 l_n 相等。若 $n = 3^m (m \in \mathbb{N})$ ，由 Theorem 3.

$$10^{3^m} \equiv 1 \pmod{3^{m+2}}$$

我們可以知道 $\text{len}\left(\frac{1}{3^{m+2}}\right)$ 為 3^m ，接下來我們來推導出 l_n 的公式。

Theorem 5.

$$\text{gcd}(n, 10) = 1, n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}, l_n = \text{lcm}(l_{p_1^{k_1}}, \dots, l_{p_r^{k_r}})$$

Proof.

$$l_n = l_{p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}}$$

由 lemma 4.1 可推得

$$l_n = \text{lcm}(l_{p_1^{k_1}}, \dots, l_{p_r^{k_r}})$$

■

三、探討一階非齊次線性遞迴數列的循環週期性質

Definition 4. (一階非齊次線性遞迴餘數數列(first-order non-homogeneous linear recurrence sequence))

一階非齊次線性遞迴數列(first-order non-homogeneous linear recurrence sequence)定義如下

$$a_k = c \cdot a_{k-1} + d, c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}, a_0 = 0$$

而一階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的餘數所形成的數列，我們稱為一階非齊次線性遞迴餘數數列，我們記為 $\langle A_k^{(c,d)}, n \rangle$ ，其循環週期記為 $L_n^{(c,d)}$ ，不循環節長度記為 $S_n^{(c,d)}$ 。

Definition 5. (c 進制 Repunit 數列 (base- c Repunits))

由 Repunit 所組成的遞迴數列，我們記做 $\langle R_k^{(c)} \rangle$ (稱為 c 進制 Repunit 數列)，遞迴關係如下

$$R_k^{(c)} = c \cdot R_{k-1}^{(c)} + 1, R_0^{(c)} = 0, c \in \mathbb{N}$$

Definition 6. (Repunit 數列在模 n 下的餘數數列之週期性質)

c 進制 Repunit 數列在模 n 之下的餘數所形成的數列，我們稱為 c 進制 Repunit 餘數數列，我們記為 $\langle r_k^{(c)}, n \rangle$ ，其循環週期記為 $l_n^{(c)}$ ，不循環節長度記為 $s_n^{(c)}$ 。

首先我們先求解數列一般項，由遞迴關係 $a_k = c \cdot a_{k-1} + d$ ，可得

$$a_k = d \cdot \frac{c^k - 1}{c - 1} = d \cdot R_k^{(c)}$$

可發現數列各項恰為 c 進制 Repunit 數列的 d 倍，故可寫作

$$\langle d \cdot R_1^{(c)}(\bmod n), d \cdot R_2^{(c)}(\bmod n), \dots, d \cdot R_k^{(c)}(\bmod n), \dots \rangle$$

令 $N = \frac{n}{\gcd(n,d)}$ ，則此時 $L_n^{(c,d)} = l_N^{(c)}, S_n^{(c,d)} = s_N^{(c)}$

$$\langle R_1^{(c)}(\bmod N), R_2^{(c)}(\bmod N), \dots, R_k^{(c)}(\bmod N), \dots \rangle$$

也就是說一階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的餘數數列循環週期實際上就跟 c 進制 Repunit 數列在模 $\frac{n}{\gcd(n,d)}$ 之下的餘數數列循環週期是一樣的。

Problem 5. c 進制 Repunit 餘數數列在模 n 之下是否會循環?

Solution

(一) $\gcd(n, c) = 1$

Lemma 7.1

若 $\gcd(n, c) = 1$, 則必存在一個最小正整數 l

$$\text{s.t. } c^l \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

Proof.

Let $S = \{c^0, c^1, c^2, \dots, c^a, \dots, c^b, \dots\}$

將集合內的每個元素模 $(c-1)n$ ，因為模 $(c-1)n$ 下的餘數為有限的，由鴿籠原理，必能找到一組 c^a, c^b ，同時 $b-a$ 為最小的，使得

$$c^a \equiv c^b \pmod{(c-1)n}$$

由於 $\gcd(n, c) = 1$

$$c^{b-a} \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

令 $l = b - a$

$$c^l \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

■

Lemma 7.2

若 $\gcd(n, c) = 1$ ，則

$$R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow c^l \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

Proof.

($\rightarrow$)

$$R_l^{(c)} = \frac{c^l - 1}{c - 1} \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\frac{c^l - 1}{c - 1} = n \cdot t, t \in \mathbb{N}$$

$$c^l - 1 = (c - 1)n \cdot t$$

可得

$$c^l \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

($\leftarrow$)

$$c^l \equiv 1 \pmod{(c-1)n}$$

$$c^l - 1 = (c - 1)n \cdot t, t \in \mathbb{N}$$

$$\frac{c^l - 1}{c - 1} = n \cdot t$$

可得

$$R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{n}$$

■

Theorem 7.

若 $\gcd(n, c) = 1$, l 是最小的正整數
 s. t. $R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{n}$, $\langle r_k^{(c)}, n \rangle$ 的循環週期 $l_n^{(c)} = l$

Proof.

由遞迴關係 $R_k^{(c)} = c \cdot R_{k-1}^{(c)} + 1$ 及 $R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{n}$, 可得

$$\begin{aligned} R_{l+1}^{(c)} &\equiv 10 \cdot R_l^{(c)} + 1 \equiv 1 \equiv R_1^{(c)} \pmod{n} \\ R_{l+2}^{(c)} &\equiv 10 \cdot R_{l+1}^{(c)} + 1 \equiv 10 \cdot R_1^{(c)} + 1 \equiv R_2^{(c)} \pmod{n} \\ &\vdots \\ R_{2l}^{(c)} &\equiv 10 \cdot R_{2l-1}^{(c)} + 1 \equiv 10 \cdot R_{l-1}^{(c)} + 1 \equiv R_l^{(c)} \pmod{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

也就是

$$\langle r_k^{(c)}, n \rangle = \langle R_1^{(c)} \pmod{n}, \dots, R_l^{(c)} \pmod{n}, R_{l+1}^{(c)} \equiv R_1^{(c)} \pmod{n}, \dots, R_{2l}^{(c)} \equiv R_l^{(c)} \pmod{n}, \dots \rangle$$

在此情況下 c 進制 Repunit 餘數數列會是純循環週期數列, 由於 l 是最小的正整數使得 $R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{n}$, 故可知循環週期 $l_n^{(c)} = l$ 。

■

(二) $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} (\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{不全為 } 0)$

Theorem 8.

c 的質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, 若 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} (\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{不全為 } 0)$,

$$\langle r_k^{(c)}, n \rangle \text{ 的不循環節 } s_n = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) - 1.$$

Proof.

考慮在 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ 的情況, 我們想找到最小的正整數 j 和另一個正整數 $i (i > j)$, 使得

$$R_i^{(c)} \equiv R_j^{(c)} \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$$

也就是

$$R_{i-j}^{(c)} \cdot c^j \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$$

顯然 $R_{i-j}^{(c)} \not\equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$, 因此 $c^j \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$

可得 $j \geq \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, 接下來證明 $j = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 。由反證法, 假設 $j > \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, 可得

$$c^j \equiv c^{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)} \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$$

但 j 為最小的正整數滿足上式, 因此 $j > \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 矛盾, 故 $j = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 。

接下來由遞迴關係 $R_k^{(c)} = c \cdot R_{k-1}^{(c)} + 1$ 及 $R_{i-j}^{(c)} \cdot c^j \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$, 可得

$$\begin{aligned} R_{j+1}^{(c)} &\equiv c \cdot R_j^{(c)} + 1 \equiv R_j^{(c)} \pmod{n} \\ R_{j+2}^{(c)} &\equiv c \cdot R_{j+1}^{(c)} + 1 \equiv c \cdot R_j^{(c)} + 1 \equiv R_j^{(c)} \pmod{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

也就是

$$\langle r_k^{(c)}, n \rangle = \langle R_1^{(c)} \pmod{n}, \dots, R_j^{(c)} \pmod{n}, R_{j+1}^{(c)} \equiv R_j^{(c)} \pmod{n}, \dots \rangle$$

故可知在此情況下 c 進制 Repunit 餘數數列會是混循環週期數列, 而不循環長度 $s_n^{(c)} = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) - 1$ 。

■

(三) $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot t$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 不全為 0, $t \in \mathbb{N}$, $\gcd(t, c) = 1$)

接下來我們考慮在 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot t$ 的情況，首先我們想找到最小的正整數 j 和另一個正整數 i ($i > j$)，使得

$$R_i^{(c)} \equiv R_j^{(c)} \pmod{n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot t}$$

也就是

$$R_{i-j}^{(c)} \cdot c^j \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot t}$$

因為 $\gcd(R_{i-j}^{(c)}, c) = 1$ ，故必存在最小的正整數 l ，使得

$$R_l^{(c)} \equiv 0 \pmod{t}$$

令 $i - j = l$ ，顯然 $R_{i-j}^{(c)} \not\equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$ ，因此

$$c^j \equiv 0 \pmod{p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}}$$

由 **Theorem 2.**，可推得 $j = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ 。

接下來由遞迴關係 $R_k^{(c)} = c \cdot R_{k-1}^{(c)} + 1$ 及 $R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \equiv R_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \pmod{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ ，可得

$$\begin{aligned} R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)+1}^{(c)} &\equiv c \cdot R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} + 1 \equiv c \cdot R_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} + 1 \equiv R_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)+1}^{(c)} \pmod{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$R_{2l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \equiv c \cdot R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)-1}^{(c)} + 1 \equiv c \cdot R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)-1}^{(c)} + 1 \equiv R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \pmod{n}$$

也就是

$$\begin{aligned} \langle r_k^{(c)}, n \rangle = \\ \langle R_1^{(c)} \pmod{n}, \dots, R_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \pmod{n}, \dots, R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \pmod{n}, R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)+1}^{(c)} \equiv R_{\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)+1}^{(c)} \pmod{n}, \\ \dots, R_{2l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \equiv R_{l+\max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}^{(c)} \pmod{n} \rangle \end{aligned}$$

故可知在此情況下 Repunit 餘數數列會是混循環週期數列，而不循環長度 $s_n^{(c)} = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r) - 1$ ，循環週期 $l_n^{(c)} = l$ 。

Problem 6. c 進制 Repunit 餘數數列在什麼條件下為完全純循環週期數列?

Solution

Theorem 9.

$c - 1$ 的質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ ，若 $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} (\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha_k$ 和 k 不全為 0)

$$c^n \equiv 1 \pmod{n(c-1)}, c \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

Proof.

已知 $p_1 | (c-1), p_1 | (c-1), \dots, p_s | (c-1)$

由 **L.T.E. lemma**

$$v_{p_1}(c^n - 1) = v_{p_1}(c - 1) + v_{p_1}(n) = v_{p_1}(n(c - 1))$$

⋮

$$v_{p_s}(c^n - 1) = v_{p_s}(c - 1) + v_{p_s}(n) = v_{p_s}(n(c - 1))$$

令 $c^n - 1 = p_1^{v_{p_1}(c^n - 1)} \dots p_s^{v_{p_s}(c^n - 1)} \cdot t, \gcd(c - 1, t) = 1$ ，可得

$$c^n - 1 = p_1^{v_{p_1}(c^n - 1)} \dots p_r^{v_{p_r}(c^n - 1)} \cdot t = p_1^{v_{p_1}(n(c-1))} \dots p_s^{v_{p_s}(n(c-1))} \cdot t = n(c-1) \cdot t$$

得證

$$c^n \equiv 1 \pmod{n(c-1)}$$

■

Remark:

接下來我們證明 $l_n^{(c)} = n$ ，由反證法，假設存在更小的循環週期，我們知道其必整除 $l_n^{(c)}$ ，我們將其記為

$l' (l' | n, l' < n)$ ，其滿足 $c^{l'} \equiv 1 \pmod{n(c-1)}$ 。由 **L.T.E. lemma**，

$$v_{p_1}(c^{l'} - 1) = v_{p_1}(c - 1) + v_{p_1}(l') = v_{p_1}(l'(c - 1))$$

⋮

$$v_{p_s}(c^{l'} - 1) = v_{p_s}(c - 1) + v_{p_s}(l') = v_{p_s}(l'(c - 1))$$

$c^{l'} - 1 = p_1^{v_{p_1}(c^{l'} - 1)} \dots p_s^{v_{p_s}(c^{l'} - 1)} \cdot t, p_1^{v_{p_1}(c^{l'} - 1)} \dots p_s^{v_{p_s}(c^{l'} - 1)} \cdot t, \gcd(c - 1, t) = 1$ ，但 $l' < n$ ，可得

$$c^{l'} \not\equiv 1 \pmod{n(c-1)}$$

這與原假設矛盾，故 $l_n^{(c)} = n$ 。

伍、研究結果

對於 Repunit 數列

$$\langle R_k \rangle := \langle 1, 11, 111, \dots \rangle$$

遞迴關係如下

$$R_k = 10 \cdot R_{k-1} + 1, R_0 = 0$$

$$R_k = \frac{10^k - 1}{9} = 10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10^0,$$

若 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \in \mathbb{N}, \gcd(t, 10) = 1$)

我們知道 $\langle r_k, n \rangle$ 的循環週期為

$$l_n = \text{lcm}(l_{p_1^{k_1}}, \dots, l_{p_r^{k_r}}) \leq 3^m \phi(t)$$

不循環節長度為

$$s_n = \max(\alpha, \beta) - 1$$

其中若 $n = 3^m, m \in \mathbb{N}$ ，其循環節長度恰為

$$l_{3^m} = 3^m$$

	$\text{mod } n$	循環週期 (l_n)	不循環節長度 (s_n)
<u>純循環週期數列</u>	$n = t, \gcd(t, 10) = 1$	$l_n \leq 3^m \phi(t)$	0
<u>混循環週期數列</u>	$n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}, t \in \mathbb{N}, \gcd(t, 10) = 1$)	$l_n \leq 3^m \phi(t)$	$\max(\alpha, \beta) - 1$
<u>完全循環週期數列</u>	$n = 3^m, m \in \mathbb{N}$	3^m	0

對於一階非齊次線性遞迴數列

$$a_k = c \cdot a_{k-1} + d, c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N}, a_0 = 0$$

$$a_k = d \cdot \frac{c^k - 1}{c - 1} = d \cdot R_k^{(c)}$$

令 c 的質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, $N = \frac{n}{\gcd(n, d)}$ ，若 $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \cdot t$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 不全為 0, $t \in \mathbb{N}, \gcd(t, c) = 1$)，我們知道 $\langle A_k^{(c, d)}, n \rangle$ 的循環週期為

$$L_n^{(c, d)} = l_N^{(c)}$$

$$S_n^{(c, d)} = s_N^{(c)}$$

$c - 1$ 的質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ ，其中若 $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ ($\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, α_k 和 k 不全為 0)

其循環節長度恰為

$$L_n^{(c, d)} = l_N^{(c)} = N$$

陸、結論及未來展望

一、結論

本作品首先探討 Repunit 餘數數列的循環週期，先分成 $\gcd(n, 10) = 1, n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ 及 $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$ 這三種情況討論，發現 n 的 2^α 和 5^β 因數部分決定其不循環節長度，而 n 跟 10 互質的部分決定其循環節長度，而且循環節長度的上界為 $3^m \phi(t)$ ，特別的是若 $n = 3^m$ ，則其循環週期恰為 3^m ，同時我們也給出了循環週期的公式 $l_n = \text{lcm}(l_{p_1^{k_1}}, \dots, l_{p_r^{k_r}})$ 。最後我們發現一階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的循環週期與 c 進制 Repunit 數列在模 $n/\gcd(n, c)$ 之下的循環週期相同，若 $\frac{n}{\gcd(n, d)} = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} (\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha_k \text{ 和 } k \text{ 不全為 } 0)$ ，則數列的循環週期恰好為 $\frac{n}{\gcd(n, d)}$ 。

二、未來展望

(一) 探討高階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的餘數數列是否會循環

(二) 探討高階非齊次線性遞迴數列在模 n 之下的循環週期

柒、附錄

一、另一種觀點證明 Repunit 餘數數列會循環

首先我們定義 $\mathbb{Z}_n$ 為整數除以 n 之下所有可能餘數所形成的集合

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

接下來觀察遞迴關係

$$R_k = 10 \cdot R_{k-1} + 1, R_0 = 0$$

可發現 $\langle r_k, n \rangle$ 的前後項關係可以表示成 $f(x)$ ，其中 f 為從 $\mathbb{Z}_n$ 映射到 $\mathbb{Z}_n$ 的函數

$$f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad f(x) = 10x + 1$$

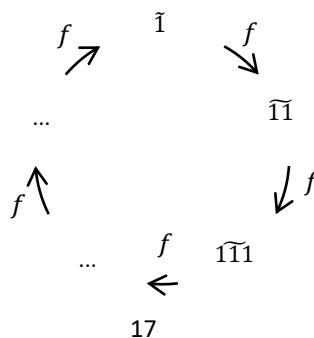
另外我們定義 $\tilde{a}$ 為 a 在模 n 下的同餘等價類

$$\tilde{a} \equiv a \pmod{n}, \tilde{a} \in \mathbb{Z}_n$$

至此可以把 $\langle r_k, n \rangle$ 表示成

$$\langle r_k, n \rangle = \langle \tilde{1}, \tilde{11}, \tilde{111}, \dots \rangle = \langle f(0), f \circ f(0), f \circ f \circ f(0), \dots \rangle = \langle f(0), f^2(0), f^3(0), \dots \rangle (\circ \text{ 是合成})$$

首先我們要證明 n 跟 10 互質的情況，如果要證明 $\langle r_k, n \rangle$ 是純循環週期數列的話，實際上就是要證明 $f(0)$ 在合成了 l_n 次之後會循環，也就是 f 是對射(單射且滿射)。



首先我們先證明 f 是滿射，也就是對於值域來說，定義域中總是存在一個元素 x ，使得 $f(x) = 10x + 1$ 。

令 $f(x) = a = 10x + 1$

$$a \equiv 10x + 1(\text{mod } n)$$

$$a - 1 \equiv 10x(\text{mod } n)$$

因為 $\gcd(n, 10) = 1$ ，根據線性同餘可以知道必存在 s ，使得

$$s \cdot 10 \equiv 1(\text{mod } n)$$

故我們將兩邊同乘 s ，可得

$$s \cdot (a - 1) \equiv s \cdot 10x(\text{mod } n)$$

$$s \cdot (a - 1) \equiv x(\text{mod } n)$$

得證 f 是滿射

接下來我們證明 f 是單射，也就是若 $f(a) = f(b)$ ，其中 $a, b \in \mathbb{Z}_n$ ，則 $a = b$ 。

若 $f(a) = f(b)$ ，則

$$10a + 1 \equiv 10b + 1(\text{mod } n)$$

$$10a \equiv 10b(\text{mod } n)$$

因為 $\gcd(n, 10) = 1$ ，故10一定有乘法反元素 s 使得

$$s \cdot 10 \equiv 1(\text{mod } n)$$

左右同乘 s 可得

$$s \cdot 10a \equiv s \cdot 10b(\text{mod } n)$$

$$a \equiv b(\text{mod } n)$$

由於 $a, b \in \mathbb{Z}_n$ ，故

$$a = b$$

得證 f 是單射

有了這個結果之後接下來我們可以找出 $\langle r_k, n \rangle$ 的循環週期 l_n

$$f^i(0) = f^{i+l_n}(0)$$

由於 f 是對射，故反函數 f^{-1} 也是對射，等號左右同時合成 f^{-1} 可得

$$f^{-1} \circ f^i(0) = f^{-1} \circ f^{i+l_n}(0)$$

$$f^{i-1}(0) = f^{i+l_n-1}(0)$$

合成 i 次可得

$$f^{l_n}(0) = 0 \equiv R_{l_n}(\text{mod } n)$$

也就是循環週期 l_n 必滿足

$$R_{l_n} \equiv 0(\text{mod } n)$$

捌、參考文獻(文獻) 及其他

- [1] 游森棚。森棚教官的數學題—全數出動
- [2] David M.Burton(2010).*Elementary Number Theory* 7th
- [3] Albert H.Beiler(1966).*Recreations in the Theory of Numbers*
- [4] 陸思明。高中新數學教室—數
- [5] 康明昌。數學傳播 25 卷 3 期。循環小數
- [6] 朱亮儒。科學教育月刊第 449 期。淺談分數化小數的分類
- [7] 李織蘭。蔣曉雲。數學傳播 45 卷 2 期。“光棍數”的數論性質和分數小數互化問題討論
- [8] Geretschläger, R. (2020). *Engaging Young Students in Mathematics through Competitions – World Perspectives and Practices*. World Scientific.

【評語】 010010

探討 Repunit 數列及其推展數列的餘數循環特性；作者給出一些規律，也得到循環節及不循環節長度的一些規則；整體而言，對於要探討的目標，能完整的呈現，是很不錯的作品。