

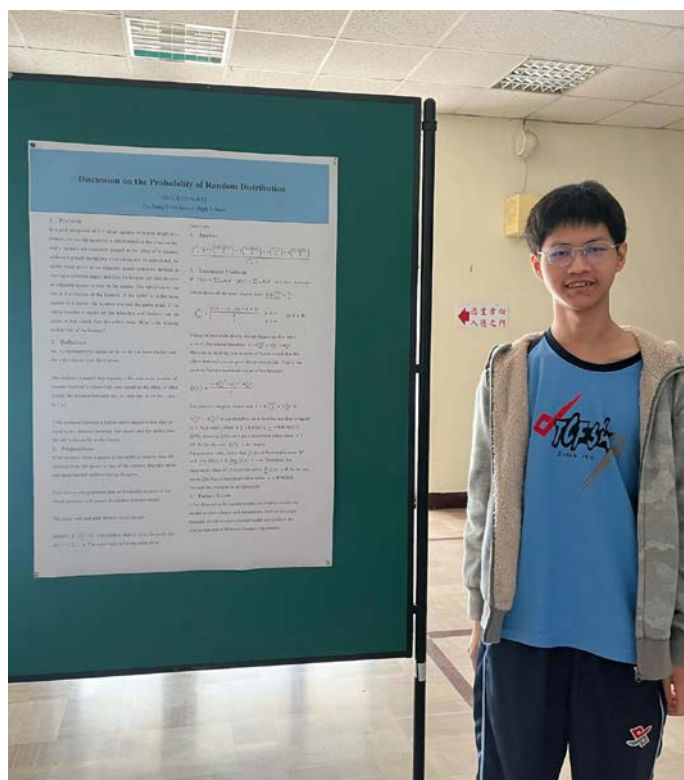
2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010009
參展科別	數學
作品名稱	方格裡的秘密—隨機分布的機率探討

就讀學校	臺中市立臺中第一高級中學
指導教師	梁勇能
作者姓名	許冠巖

關鍵詞	<u>組合遊戲、機率、人力分配</u>
-----	---------------------

作者簡介



我是許冠歲，目前在臺中一中科學班就讀。我對數學有濃厚的興趣，並且在這方面累積了些許經驗。例如，我曾參與過APMOC，學到了如何在數學解題方面提升自我。我是個樂於學習的人，總是積極面對挑戰，也希望在未來能夠不斷成長。

2025 年台灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：方格裡的秘密－隨機分布的機率探討

關鍵詞：組合遊戲、機率、人力分配

編號：

摘要

本文研究了一個信息完全公開的組合遊戲，探討當一群人被完全隨機的分配到模型裡時，其初始位置與特定位置所形成的包圍關係，並探討最佳的人力分配。本研究通過座標解析與不等關係的代數運算等方法，成功找出獲勝條件對於遊戲雙方的限制，並進一步解決問題。在研究的過程中，也將結論擴展到不同模型，探討不同模型對於遊戲造成的影響，並比較其結論有何區別。

壹、前言

一、研究動機

包圍，相信這是一個大家都不陌生的詞。字典對這個詞給出的解釋，是「由四面八方圍住」，而這個定義引發了我的思考：既然要將四面八方都圍住，那麼包圍者要付出的，理論上一定會比被包圍者多。而這個「多」，究竟多了多少？

為了探討這個問題，我利用方格建構出了一個模型如下：

在由 1×1 的小方格組成的邊長 $a \times a$ 的方格中，如果正中央站著一個被包圍者，將包圍者們以隨機的方式放入 1×1 的小方格中，任意兩人的格子都不同，那麼在不同的條件下，包圍成功的機率為何？

在建構出模型後，又引起了我更多的好奇：這些機率有著怎樣的性質？如果使用其他不同的模型，得到的機率又有什麼異同？因此，這篇專題將會就這些主題展開探討。

二、研究目的

- 1、探討在方格模型下，不同邊長與人數所得到的機率。
- 2、探討機率與相關函數的特性。
- 3、探討在其他模型下，不同邊長與人數所得到的機率。

三、研究設備及材料

平板、電腦、GeoGebra、WolframAlpha。

貳、研究過程與方法

I. 問題討論與延伸

問題：

在由 1×1 的小方格組成的邊長 $a \times a$ (a 為奇數)的方格中，A 站在正中央，將 x 個包圍者們以隨機的方式放入 1×1 的小方格中，任意兩人(包括 A)的格子都不同。若在每個回合，所有人都可以選擇走到一個相鄰的格子(相鄰定義為有共同邊)，其中包圍者可以選擇不移動，且 A 知道包圍者的初始分布，包圍者們知道 A 該回合的動向。若 A 走進與某個包圍者相同的格子，則包圍成功。若 A 走到邊界的某一格後，包圍還沒有成功，則包圍失敗。則包圍成功的機率為何？

【分析】

首先，讓我們先定義一些東西：

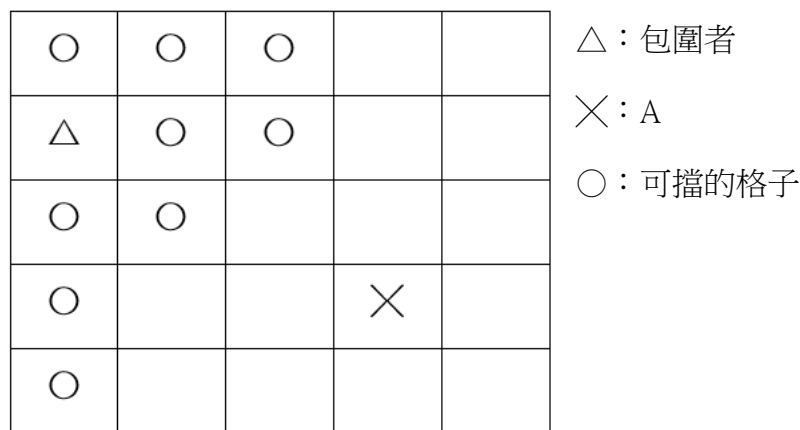
名詞介紹

定義 1.1： (m, n) 代表由左至右第 m 列，由下至上第 n 行的格子。

定義 1.2：兩個格子的距離，為從其中一格走到另一格所需的最小回合數。換句

話說， (m_1, n_1) 與 (m_2, n_2) 的距離為 $|m_1 - m_2| + |n_1 - n_2|$ 。

定義 1.3：如果某個包圍者與一個格子的距離小於等於該格子與 A 的距離，則稱該格子對於該包圍者是 *可擋的*。如下示意圖。



△ 圖 1.1

接著，我們想要證明一些事：

推論 1.1：若某個格子與 A 的距離小於該格子與任何包圍者的距離，則 A 可以走到該格子，並在到達前不被包圍。

[證明]

假設該格子與 A 的距離為 k 。我們對 k 進行歸納。

1°：當 $k = 1$ 時，顯然成立。

2°：當 $k > 1$ 時，經過一回合後，假設 A 與該格子的距離變為 $k - 1$ 。而我們知道，所有包圍者與該格的距離都大於 $k - 1$ ，因此若 A 這回合沒有被包圍，則由歸納假設知推論成立。事實上，由於所有包圍者與該格子的距離皆大於 $k - 1$ ，因此不可能有包圍者與 A 在同一格裡。故推論成立。

推論 1.2：一個包圍者可以保證所有在初始情況下，對於自己可擋的格子，在每個回合都是對於自己可擋的。

[證明]

經過一回合後，如果 A 與某個可擋的格子的距離增加了 1，那麼顯然無論包圍者怎麼走，這個格子仍然是可擋的。剩下的格子，顯然只要考慮到兩人距離差為 0 或 1 的格子。

假設 A 在 (m_1, n_1) ，包圍者 B 在 (m_2, n_2) 。

(一)：如果 $|m_1 - m_2| + |n_1 - n_2|$ 是奇數，那麼任取一點 (m, n) 。由於

$|m - m_1| + |m - m_2|$ 與 $|m_1 - m_2|$ 奇偶性相同， $|n - n_1| + |n - n_2|$ 與 $|n_1 - n_2|$ 奇偶性相同，因此任何點與兩人的距離和

$|m - m_1| + |m - m_2| + |n - n_1| + |n - n_2|$ 皆為奇數，所以不存在與兩人距離相同的點。此時無論 A 如何移動，包圍者只需原地不動。

(二)：如果 $|m_1 - m_2| + |n_1 - n_2|$ 是偶數，那麼只需考慮到兩人等距的格子。不失一般性設 $m_1 \geq m_2$ ， $n_1 \geq n_2$ 。設 $\Delta m = m_1 - m_2$ ， $\Delta n = n_1 - n_2$ 。

①：當 $\Delta m = \Delta n$ 時，如果 A 走到 $(m_1 + 1, n_1)$ ，那麼 B 走到 $(m_2 + 1, n_2)$ ，則接近 A 且遠離 B 的格子 (m, n) 都滿足 $m > m_1$ ， $m < m_2 + 1$ ，但 $m_1 \geq m_2$ ，矛盾。因此接近 A 且遠離 B 的格子不存在。

如果 A 走到 $(m_1, n_1 + 1)$ ，那麼 B 走到 $(m_2, n_2 + 1)$ ，剩下同理。

如果 A 走到 $(m_1 - 1, n_1)$ ，那麼 B 走到 $(m_2, n_2 + 1)$ ，則接近 A 且遠離 B 的格子 (m, n) 都滿足 $m < m_1$ ， $n < n_2 + 1$ ，因此

$|m - m_1| + |n - n_1| - |m - m_2| - |n - n_2| > -\Delta m + \Delta n = 0$ ，即這些格子都不是到兩人等距的格子。

如果 A 走到 $(m_1, n_1 - 1)$ ，那麼 B 走到 $(m_2 + 1, n_2)$ ，剩下同理。

因此，到兩人等距的格子經過這回合仍然是可擋的。

②：當 $\Delta m \neq \Delta n$ 時，不失一般性假設 $\Delta m > \Delta n$ 。取到兩人等距的點 (m, n) ，如果

$m \leq m_2$ ，那麼

$0 = |m - m_1| + |n - n_1| - |m - m_2| - |n - n_2| \geq \Delta m - \Delta n > 0$ ，矛盾。因此 $m > m_2$ 。讓 B 走到 $(m_2 + 1, n_2)$ ，則所有原本到兩人等距的點與 B 的距離都減少了。

綜上，可以知道 B 在每一回合都能保證格子的可擋性。故推論成立。

有了上面兩個推論，似乎就可以把包圍成功的條件轉化成：

初始時，所有邊界的格子都是對於某個包圍者可擋的。

推論 1.1 保證了只要邊界有不可擋的格子，A 就能夠走到那裡。

推論 1.2 則保證了只要初始時邊界沒有不可擋的格子，那麼包圍者就能永遠不讓 A 走到邊界。但是還有一個問題：這個遊戲一定會在有限個回合內結束嗎？因此，我們有了新的推論：

推論 1.3：這個遊戲會在有限個回合內結束。

[證明]

如果 A 能走到邊界的某格，那麼遊戲會在 A 走到那格後結束。接下來假設邊界沒有不可擋的格子。首先發現一個重要的事實：在推論 1.2 的證明中，如果 A 與 B 的距離為偶數，則 B 可以在保證可擋性的同時，保證自己與 A 的距離不會增加。並且，如果 A 想要讓自己與 B 的距離不變，他接下來的行動只能是往上或往右。而這兩種行動顯然都只能操作有限次。A 與 B 的距離為奇數的情形則最多只會發生一回合，因此，A 與 B 的距離會不斷減少，即在有限回合內，一定可以包圍成功。因此，這個遊戲一定會在有限個回合內結束。

現在，我們只需要聚焦在包圍者的哪些分布可以保證所有邊界的格子都是可擋的。由於邊界的格子數很多，我們希望找出一些能夠代表的格子。因此，新的推論：

推論 1.4：初始時，如果 $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼 $(i, 1)$ 是可擋的 $\forall i = 1, 2, \dots, a$ 。

其他三個方向同理。

[證明]

我們知道 A 的初始位置 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 與 $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 的距離是 $\frac{a-1}{2}$ 。如果一個包圍者的位置

(m, n) 滿足 $m < n$ ，那麼 $|m - \frac{a+1}{2}| + |n - 1| > |m - \frac{a+1}{2}| + |m - 1| \geq \frac{a-1}{2}$ ，即

$(\frac{a+1}{2}, 1)$ 對於他不是可擋的。而如果一個包圍者的位置 (m, n) 滿足

$m + n > a + 1$ ，那麼結合 $m \leq a$ ，

$|m - \frac{a+1}{2}| + |n - 1| > |m - \frac{a+1}{2}| + a - m = |m - \frac{a+1}{2}| + |m - a| \geq \frac{a-1}{2}$ ，即

$(\frac{a+1}{2}, 1)$ 對於他不是可擋的。因此，如果 $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼初始時，必有一

個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m \geq n$ ， $m + n \leq a + 1$ 。而在這兩個條件下，

當 $m \geq \frac{a+1}{2}$ 時， $|m - \frac{a+1}{2}| + |n - 1| = m + n - \frac{a+1}{2} - 1 \leq a - \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2}$ ，

當 $m < \frac{a+1}{2}$ 時， $|m - \frac{a+1}{2}| + |n - 1| = \frac{a-1}{2} - m + n \leq \frac{a-1}{2}$ ，因此包圍者的位置只要

滿足這兩個條件， $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 對於他就是可擋的。

綜上， $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的若且唯若有至少一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m \geq n$ ，

$m + n \leq a + 1$ 。

若符合這兩個條件，

①：當 $i \leq \frac{a+1}{2}$ 時，若 $m \geq i$ ， $|m - i| + |n - 1| \leq a - i = \left| \frac{a+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|$ ，若

$m \leq i$ ， $|m - i| + |n - 1| \leq i - 1 \leq a - i = \left| \frac{a+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|$ 。

②：當 $i \geq \frac{a+1}{2}$ 時，若 $m \geq i$ ， $|m - i| + |n - 1| \leq a - i \leq i - 1 = \left| \frac{a+1}{2} - i \right| +$

$\left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|$ ，若 $m \leq i$ ，

$$|m - i| + |n - 1| = i - m + n - 1 \leq i - 1 = \left\lfloor \frac{a+1}{2} - i \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{2} - 1 \right\rfloor。$$

因此如果 $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的，則 $(i, 1)$ 也是可擋的。其他三個方向同理。

有了推論 1.4，我們就可以把包圍成功的條件進一步限縮：

初始時， $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, a)$ 、 $(1, \frac{a+1}{2})$ 、 $(a, \frac{a+1}{2})$ 都是可擋的。

而注意到在推論 1.4 的證明過程中，我們發現 $(\frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的若且唯若有至少一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m \geq n$ ， $m + n \leq a + 1$ 。也就是說，我們可以把上述包圍成功的條件改寫。不過在這之前，我們先引進一些新的定義：

定義 1.4：初始時，定義 S 為所有站著包圍者的格子的集合。或者，一個格子屬於 S 若且唯若初始時該格子上有一個包圍者。

定義 1.5：

$$S_1 = \{(m, n) | a \geq m \geq n \geq 1, m + n \leq a + 1, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$S_2 = \{(m, n) | a \geq n \geq m \geq 1, m + n \leq a + 1, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$S_3 = \{(m, n) | a \geq n \geq m \geq 1, m + n \geq a + 1, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$S_4 = \{(m, n) | a \geq m \geq n \geq 1, m + n \geq a + 1, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

有了這些定義，我們可以改寫包圍成功的條件：

$$\forall i = 1, 2, 3, 4, S \cap S_i \neq \emptyset。$$

根據這個條件，我們終於可以開始計算包圍成功的機率。首先，我們想要知道在 S_1 裡的格子有幾個。當 $n = t$ 時， m 可以是 $t, t + 1, \dots, a - t + 1$ ，有 $a - 2t + 2$ 種

可能。因此，再扣掉 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 後， S_1 裡的格子有

$$\sum_{t=1}^{\frac{a+1}{2}} (a - 2t + 2) - 1 = \frac{a(a+1)}{2} - \frac{a+1}{2} \times \frac{a+3}{2} + a + 1 - 1 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1 \text{ 個。顯然 } S_2、$$

S_3 、 S_4 也與 S_1 相同。接著，我們可以發現 S_1 和 S_3 的交集、 S_2 和 S_4 的交集都是空集合。 S_1 和 S_2 的交集則為滿足 $m = n$ ， $m + n \leq a + 1$ 的格子，扣掉 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$ ，顯然共有 $\frac{a-1}{2}$ 個， S_1 和 S_4 、 S_2 和 S_3 、 S_3 和 S_4 也相同。有了這些資訊，我們就能算出包圍成功的機率。

由於包圍者的分布是隨機的，因此根據排容原理，我們要求的機率就是：

$$\frac{\text{所有情形} - \sum_i (S \text{與} S_i \text{交集為空}) + \sum_{i < j} (S \text{與} S_i, S_j \text{交集皆空}) - \sum_{i < j < k} (S \text{與} S_i, S_j, S_k \text{交集皆空})}{\text{所有情形}}$$

接著計算每一項分別是什麼：

所有情形：除了正中央外，要在剩下 $a^2 - 1$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{a^2-1}{x}$ 種情形。

$\sum_i (S \text{與} S_i \text{交集為空})$ ： S 與 S_i 交集為空，代表要在剩下

$a^2 - 1 - \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{3a^2-2a-1}{4}$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x}$ 種情形。而 i 有

四種可能，因此共有 $4 \binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j} (S \text{與} S_i, S_j \text{交集皆空})$ ： S 與 S_i, S_j 交集為空，有兩種情況：

如果 $(i, j) = (1, 3)$ 或 $(2, 4)$ ，那麼剩下 $a^2 - 1 - 2 \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] = \frac{a^2-2a+1}{2}$ 個格子，有

$\binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x}$ 種情形。而 (i, j) 有兩種可能，因此共有 $2 \binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x}$ 種情形。

如果 $(i, j) = (1, 2)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 、 $(1, 4)$ ，那麼剩下

$a^2 - 1 - 2 \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] + \frac{a-1}{2} = \frac{a^2-a}{2}$ 個格子，有 $\binom{\frac{a^2-a}{2}}{x}$ 種情形。而 (i, j) 有四種可

能，因此共有 $4 \binom{\frac{a^2-a}{2}}{x}$ 種情形。

綜上，總共有 $2 \binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x} + 4 \binom{\frac{a^2-a}{2}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j < k} (S \text{與} S_i, S_j, S_k \text{交集皆空})$ ： S 與 S_i, S_j, S_k 交集為空，代表要在剩下

$a^2 - 1 - 3 \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] + 2 \times \frac{a-1}{2} = \frac{a^2-2a+1}{4}$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}$ 種情形。

而 (i, j, k) 有四種可能，因此共有 $4 \binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}$ 種情形。

求出這些後，我們就可以計算包圍成功的機率：

$$\frac{\text{所有情形} - \sum_i (S \text{ 與 } S_i \text{ 交集為空}) + \sum_{i < j} (S \text{ 與 } S_i, S_j \text{ 交集皆空}) - \sum_{i < j < k} (S \text{ 與 } S_i, S_j, S_k \text{ 交集皆空})}{\text{所有情形}}$$

$$= \frac{\binom{a^2-1}{x} - 4 \binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x} + 2 \binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x} + 4 \binom{\frac{a^2-a}{2}}{x} - 4 \binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{a^2-1}{x}}$$

現在有了機率，我們成功找到了這個問題的答案。但我們想要讓它變得更漂亮，這樣更方便做一些其他事情。因此，我們對這個函數求極限，觀察在 $a \rightarrow \infty$ 時會發生什麼。

延伸問題 1.1：

試找出 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\binom{a^2-1}{x} - 4 \binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x} + 2 \binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x} + 4 \binom{\frac{a^2-a}{2}}{x} - 4 \binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{a^2-1}{x}}$ 。

【分析】

首先，讓我們看看這個定理：

定理 1： $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 、 $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ 為兩次數相同的非零多項式，則

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}。$$

換句話說，我們可以忽略所有的非最高次項。雖然我們要求的式子看起來並不是多項式的形式，但可以對組合數進行一些分析。

定義 1.6：(廣義組合數) $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{R})$

也就是說，在 $k > 0$ 時，我們可以把 $\binom{n}{k}$ 看成 n 的 k 次多項式。有了這個定義，再看看我們的函數，可以發現分子和分母都是 a 的 $2x$ 次多項式。因此，根據

定理 1，我們可以忽略所有的非最高次項，即：

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\binom{a^2-1}{x} - 4\binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x} + 2\binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x} + 4\binom{\frac{a^2-a}{2}}{x} - 4\binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{a^2-1}{x}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\binom{a^2}{x} - 4\binom{\frac{3}{4}a^2}{x} + 2\binom{\frac{a^2}{2}}{x} + 4\binom{\frac{a^2}{2}}{x} - 4\binom{\frac{a^2}{4}}{x}}{\binom{a^2}{x}}$$

並且我們知道， $\binom{ta^2}{x} = \frac{ta^2(ta^2-1)\dots(ta^2-x+1)}{x!}$ ，再把非最高次項忽略掉，就變成了 $\frac{(ta^2)^x}{x!}$ 。把 $x!$ 約掉，得到：

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\binom{a^2}{x} - 4\binom{\frac{3}{4}a^2}{x} + 2\binom{\frac{a^2}{2}}{x} + 4\binom{\frac{a^2}{2}}{x} - 4\binom{\frac{a^2}{4}}{x}}{\binom{a^2}{x}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^{2x} - 4(\frac{3}{4}a^2)^x + 2(\frac{1}{2}a^2)^x + 4(\frac{1}{2}a^2)^x - 4(\frac{1}{4}a^2)^x}{a^{2x}}$$

$$= 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

就是我們要的答案。

透過取極限，我們成功把一個含有組合數的複雜函數轉換成了比較簡單的指數函數的和。因此，可以開始分析一些其他的問題，例如人力分配的最佳策略。

延伸問題 1.2：

在 a 足夠大時，試找出能讓平均每個人包圍住的人數期望值最大的 x 。即，找出

$$Q(x) = \frac{1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\left(\frac{1}{4}\right)^x}{x} \text{ 在 } x > 0 \text{ 時的最大值。}$$

【分析】

讓我們先看看 x 為整數時的情況。

首先，我們發現 $Q(7) \approx 0.07324$ ，並且知道 $1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 是

一個機率，因此小於等於 1。當 $x \geq 14$ 時， $Q(x) \leq \frac{1}{14} \approx 0.07143 < Q(7)$ 。因此，我們只要觀察 $x = 1, 2, \dots, 13$ 時， $Q(x)$ 的值。以下是結果：

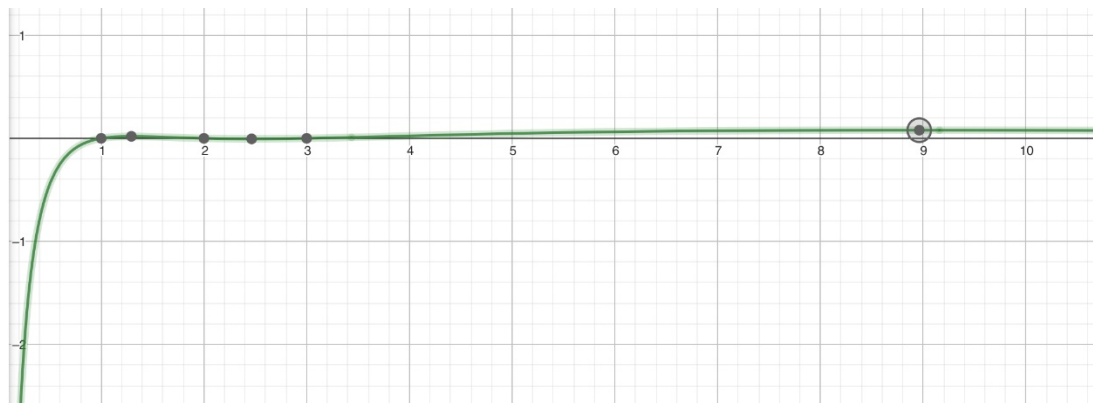
x	$Q(x)$
1	0
2	0
3	0
4	0.02344
5	0.04688
6	0.06348
7	0.07324
8	0.07787
9	0.07904
10	0.07806
11	0.07582
12	0.07290
13	0.06967

可以發現，在 $x = 9$ 時， $Q(x)$ 可以取得最大值約 0.07904。

而如果把 $Q(x)$ 的定義域擴展到 $\mathbb{R}^+$ ，我們想找到 $\frac{d}{dx} Q(x) = 0$ 的解。經過 Wolfram Alpha 的計算，得到了 $x \approx -0.47581, 1.29386, 2.46427, 8.96161$ 四個值。其中， $-0.47581 < 0$ ，不在討論範圍內。而 $x \approx 2.46427$ 得到的是最小值，忽略。 $x \approx 1.29386$ 時， $Q(x) \approx 0.01928$ ，也很小。此外， $Q(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 連續，且

$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} Q(x) = -\infty$ ，所以 $Q(x)$ 的最大值出現在 $\frac{d}{dx} Q(x) = 0$ 時。

因此， $Q(x)$ 的最大值出現在 $x \approx 8.96161$ 時， $Q(x) \approx 0.07904$ ，與前面得到的 $Q(9)$ 差不多。因此，我們知道如果想要讓每個包圍者提供的效果最大化，大約9個人是最佳選擇。



△ 圖 1.2，為 $Q(x)$ 的圖形

現在我們對這個模型有了一些結論。那麼接下來，將這個模型做一些推廣：

把 $a \times a$ 的方格，改成 $a \times b$ 的方格。

II. 推廣模型一

在由 1×1 的小方格組成的邊長 $a \times b$ (a, b 為奇數, $a < b$)的方格中，A 站在正中央，將 x 個包圍者們以隨機的方式放入 1×1 的小方格中，任意兩人(包括 A)的格子都不同。若在每個回合，所有人都可以選擇走到一個相鄰的格子(相鄰定義為有共同邊)，其中包圍者可以選擇不移動，且 A 知道包圍者的初始分布，包圍者們知道 A 該回合的動向。若 A 走進與某個包圍者相同的格子，則包圍成功。若 A 走到邊界的某一格後，包圍還沒有成功，則包圍失敗。則包圍成功的機率為何？

【分析】

不失一般性，假設方格有 a 個橫行與 b 個直列。首先，注意到在上一個問題中，定義 1.1、1.2、1.3、1.4 都與邊長無關，因此沿用這四個定義。除此之外，推論

1.1、1.2、1.3 也與邊長無關，因此在這個問題中，這三個推論也是對的。事實上，我們只需要把上一個問題做適當的修改就可以得到答案。首先是

推論 1.4，我們希望得到類似的性質。

推論 2.1：若 $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼 $(i, 1)$ 是可擋的對於所有 $i = 1, 2, \dots, b$ 。若 $(\frac{b+1}{2}, a)$ 是可擋的，那麼 (i, a) 是可擋的對於所有 $i = 1, 2, \dots, b$ 。若 $(1, \frac{a+1}{2})$ 是可擋的，那麼 $(1, i)$ 是可擋的對於所有 $i = 1, 2, \dots, a$ 。若 $(b, \frac{a+1}{2})$ 是可擋的，那麼 (b, i) 是可擋的對於所有 $i = 1, 2, \dots, a$ 。

[證明]

我們知道 A 的初始位置 $(\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 與 $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 的距離是 $\frac{a-1}{2}$ 。如果一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n < \frac{b-a}{2}$ ，那麼如果 $m \leq \frac{b-a}{2}$ ，

$$\left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| \geq \left| m - \frac{b+1}{2} \right| \geq \left| \frac{b+1}{2} - \frac{b-a}{2} \right| = \frac{a+1}{2} > \frac{a-1}{2}, \text{ 如果 } m > \frac{b-a}{2},$$

$$\left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| > \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + \left| m - \frac{b-a}{2} - 1 \right| \geq \frac{a-1}{2}, \text{ 即 } (\frac{b+1}{2}, 1) \text{ 對於他不是可}$$

擋的。而如果一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m + n > \frac{b+a}{2} + 1$ ，那麼如果

$$m > \frac{b+a}{2}, \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| \geq \left| m - \frac{b+1}{2} \right| > \frac{a-1}{2}, \text{ 如果 } m \leq \frac{b+a}{2},$$

$$\left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| > \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + \frac{b+a}{2} - m = \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + \left| m - \frac{b+a}{2} \right| \geq \frac{a-1}{2}, \text{ 即}$$

$(\frac{b+1}{2}, 1)$ 對於他不是可擋的。因此，如果 $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼初始時，必有一

個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n \geq \frac{b-a}{2}$ ， $m + n \leq \frac{b+a}{2} + 1$ 。而在這兩個條件下，

$$\text{當 } m \geq \frac{b+1}{2} \text{ 時， } \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| = m + n - \frac{b+1}{2} - 1 \leq \frac{b+a}{2} - \frac{b+1}{2} = \frac{a-1}{2}, \text{ 當}$$

$$m < \frac{b+1}{2} \text{ 時， } \left| m - \frac{b+1}{2} \right| + |n - 1| = \frac{b+1}{2} - m + n - 1 \leq \frac{b+1}{2} - \frac{b-a}{2} - 1 = \frac{a-1}{2}, \text{ 因此}$$

包圍者的位置只要滿足這兩個條件， $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 對於他就是可擋的。綜上， $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 是

可擋的若且唯若有至少一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n \geq \frac{b-a}{2}$ ， $m + n \leq$

$\frac{b+a}{2} + 1$ 。若符合這兩個條件，

① 當 $i \leq \frac{b+1}{2}$ 時，

若 $m \geq i$ ，

$$|m - i| + |n - 1| \leq \frac{b+a}{2} - i = \left| \frac{b+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|,$$

若 $m \leq i$ ，

$$|m - i| + |n - 1| \leq i - 1 - \frac{b-a}{2} \leq \frac{a-1}{2} \leq \frac{b+a}{2} - i = \left| \frac{b+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|。$$

② 當 $i \geq \frac{b+1}{2}$ 時，

若 $m \geq i$ ，

$$|m - i| + |n - 1| \leq \frac{b+a}{2} - i \leq i - \frac{b-a}{2} - 1 = \left| \frac{b+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|,$$

若 $m \leq i$ ，

$$|m - i| + |n - 1| = i - m + n - 1 \leq i - \frac{b-a}{2} - 1 = \left| \frac{b+1}{2} - i \right| + \left| \frac{a+1}{2} - 1 \right|。$$

因此如果 $(\frac{b+1}{2}, 1)$ 是可擋的，則 $(i, 1)$ 也是可擋的。同理，如果 $(\frac{b+1}{2}, a)$ 是可擋的，

則 (i, a) 也是可擋的。接著，我們知道 A 的初始位置 $(\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 與 $(1, \frac{a+1}{2})$ 的距離是

$\frac{b-1}{2}$ 。如果一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n > \frac{b-a}{2}$ ，那麼

$$|m - 1| + \left| n - \frac{a+1}{2} \right| > \left| n + \frac{b-a}{2} - 1 \right| + \left| n - \frac{a+1}{2} \right| \geq \frac{b-1}{2}, \text{即} \left(1, \frac{a+1}{2} \right) \text{對於他不是可擋}$$

的。若一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m + n > \frac{b+a}{2} + 1$ ，那麼結合 $n \leq a < b$ ，

$$|m - 1| + \left| n - \frac{a+1}{2} \right| > \frac{b+a}{2} - n + \left| n - \frac{a+1}{2} \right| = \left| n - \frac{b+a}{2} \right| + \left| n - \frac{a+1}{2} \right| \geq \frac{b-1}{2}, \text{即}$$

$\left(1, \frac{a+1}{2} \right)$ 對於他不是可擋的。因此，如果 $\left(1, \frac{a+1}{2} \right)$ 是可擋的，那麼初始時，必有一

個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n \leq \frac{b-a}{2}$ ， $m + n \leq \frac{b+a}{2} + 1$ 。而在這兩個條件下，

當 $n \geq \frac{a+1}{2}$ 時， $|m-1| + \left|n - \frac{a+1}{2}\right| = m + n - \frac{a+1}{2} - 1 \leq \frac{b+a}{2} - \frac{a+1}{2} = \frac{b-1}{2}$ ，當
 $n < \frac{a+1}{2}$ 時， $|m-1| + \left|n - \frac{a+1}{2}\right| = \frac{a+1}{2} + m - n - 1 \leq \frac{a+1}{2} + \frac{b-a}{2} - 1 = \frac{b-1}{2}$ ，因此
 包圍者的位置只要滿足這兩個條件， $\left(1, \frac{a+1}{2}\right)$ 對於他就是可擋的。綜上， $\left(1, \frac{a+1}{2}\right)$ 是
 可擋的若且唯若有至少一個包圍者的位置 (m, n) 滿足 $m - n \leq \frac{b-a}{2}$ ， $m + n \leq$
 $\frac{b+a}{2} + 1$ 。若符合這兩個條件，

① 當 $i \leq \frac{a+1}{2}$ 時，

若 $n \geq i$ ，

$$|m-1| + |n-i| \leq \frac{b+a}{2} - i = \left|\frac{b+1}{2} - 1\right| + \left|\frac{a+1}{2} - i\right|，$$

若 $n \leq i$ ，

$$|m-1| + |n-i| \leq i - 1 + \frac{b-a}{2} \leq \frac{b-1}{2} \leq \frac{b+a}{2} - i = \left|\frac{b+1}{2} - 1\right| + \left|\frac{a+1}{2} - i\right|，$$

② 當 $i \geq \frac{a+1}{2}$ 時，

若 $n \geq i$ ，

$$|m-1| + |n-i| \leq \frac{b+a}{2} - i \leq i + \frac{b-a}{2} - 1 = \left|\frac{b+1}{2} - 1\right| + \left|\frac{a+1}{2} - i\right|，$$

若 $n \leq i$ ，

$$|m-1| + |n-i| = i + m - n - 1 \leq i + \frac{b-a}{2} - 1 = \left|\frac{b+1}{2} - 1\right| + \left|\frac{a+1}{2} - i\right|。$$

因此如果 $\left(1, \frac{a+1}{2}\right)$ 是可擋的，則 $(1, i)$ 也是可擋的。同理，如果 $(b, \frac{a+1}{2})$ 是可擋的，
 則 (b, i) 也是可擋的。

有了推論 2.1，我們就可以把包圍成功的條件進一步限縮：

初始時， $\left(\frac{b+1}{2}, 1\right)$ 、 $\left(\frac{b+1}{2}, a\right)$ 、 $\left(1, \frac{a+1}{2}\right)$ 、 $(b, \frac{a+1}{2})$ 都是可擋的。

而注意到在推論 2.1 的證明過程中，我們發現了讓這四個格子可擋的充要條件。

也就是說，我們可以把上述包圍成功的條件改寫。不過在這之前，我們先把定義

1.5 也修改一下：

定義 2.1：

$$T_1 = \{(m, n) | b \geq m \geq 1, a \geq n \geq 1, m + n \leq \frac{b+a}{2} + 1,$$

$$m - n \geq \frac{b-a}{2}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$T_2 = \{(m, n) | b \geq m \geq 1, a \geq n \geq 1, m + n \leq \frac{b+a}{2} + 1,$$

$$m - n \leq \frac{b-a}{2}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$T_3 = \{(m, n) | b \geq m \geq 1, a \geq n \geq 1, m + n \geq \frac{b+a}{2} + 1,$$

$$m - n \leq \frac{b-a}{2}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$T_4 = \{(m, n) | b \geq m \geq 1, a \geq n \geq 1, m + n \geq \frac{b+a}{2} + 1,$$

$$m - n \geq \frac{b-a}{2}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) \neq (\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

有了這些定義，我們可以改寫包圍成功的條件：

$$\forall i = 1, 2, 3, 4, S \cap T_i \neq \emptyset.$$

接著，計算 T_1 、 T_2 的格子數。在 T_1 的條件下，當 $n = t$ 時， m 可以是

$$\frac{b-a}{2} + t, \frac{b-a}{2} + t + 1, \dots, \frac{b+a}{2} + 1 - t, \text{ 有 } a - 2t + 2 \text{ 種可能。因此，再扣掉 } (\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})$$

後， T_1 裡的格子有

$$\sum_{t=1}^{\frac{a+1}{2}} (a - 2t + 2) - 1 = \frac{a(a+1)}{2} - \frac{a+1}{2} \times \frac{a+3}{2} + a + 1 - 1 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1 \text{ 個。顯然 } T_3 \text{ 也}$$

與 T_1 相同。在 T_2 的條件下，當 $n = t$ 時，若 $t \leq \frac{a-1}{2}$ ， m 可以是 $1, 2, \dots, \frac{b-a}{2} + t$ ，有

$$\frac{b-a}{2} + t \text{ 種可能。若 } t > \frac{a-1}{2}，m \text{ 可以是 } 1, 2, \dots, \frac{b+a}{2} + 1 - t，\text{ 有 } \frac{b+a}{2} + 1 - t \text{ 種可能。}$$

因此，再扣掉 $(\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 後， T_2 裡的格子數為

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=1}^{\frac{a-1}{2}} \left(\frac{b-a}{2} + t \right) + \sum_{t=\frac{a+1}{2}}^a \left(\frac{b+a}{2} + 1 - t \right) - 1 \\
&= \frac{b-a}{2} \times \frac{a-1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{a-1}{2} \times \frac{a+1}{2} + \frac{a+1}{2} \left(\frac{b+a}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \times \frac{a+1}{2} \times \frac{3a+1}{2} - 1 \\
&= \frac{2ab - a^2 + 2a + 1}{4} - 1
\end{aligned}$$

個。顯然 T_4 也與 T_2 相同。接著，我們可以發現 T_1 和 T_3 的交集、 T_2 和 T_4 的交集都是

空集合。 S_1 和 S_2 的交集則為滿足 $m - n = \frac{b-a}{2}$ ， $m + n \leq \frac{b+a}{2} + 1$ 的格子，即

$m = \frac{b-a}{2} + n$ ， $2n \leq a + 1$ 的格子，扣掉 $\left(\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$ ，顯然共有 $\frac{a-1}{2}$ 個， T_1 和 T_4 、 T_2 和

T_3 、 T_3 和 T_4 也相同。有了這些資訊，我們就能算出包圍成功的機率，即

$$\frac{\text{所有情形} - \sum_i (S \text{ 與 } T_i \text{ 交集為空}) + \sum_{i < j} (S \text{ 與 } T_i, T_j \text{ 交集皆空}) - \sum_{i < j < k} (S \text{ 與 } T_i, T_j, T_k \text{ 交集皆空})}{\text{所有情形}}$$

接著同樣計算每一項分別是什麼：

所有情形：除了正中央外，要在剩下 $ab - 1$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{ab-1}{x}$ 種情形。

$\sum_i (S \text{ 與 } T_i \text{ 交集為空})$ ： S 與 T_i 交集為空，當 $i = 1, 3$ 時代表要在剩下

$ab - 1 - \left[\left(\frac{a+1}{2} \right)^2 - 1 \right] = ab - \frac{a^2 + 2a + 1}{4}$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{ab - \frac{(a+1)^2}{4}}{x}$ 種情形。

而 i 有二種可能，因此共有 $2 \binom{ab - \frac{(a+1)^2}{4}}{x}$ 種情形。當 $i = 2, 4$ 時代表要在剩下

$ab - 1 - \left(\frac{2ab - a^2 + 2a + 1}{4} - 1 \right) = \frac{2ab + a^2 - 2a - 1}{4}$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{\frac{2ab + a^2 - 2a - 1}{4}}{x}$ 種情

形。而 i 有二種可能，因此共有 $2 \binom{\frac{2ab + a^2 - 2a - 1}{4}}{x}$ 種情形。綜上，總共有

$2 \binom{ab - \frac{(a+1)^2}{4}}{x} + 2 \binom{\frac{2ab + a^2 - 2a - 1}{4}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j} (S \text{ 與 } T_i, T_j \text{ 交集皆空})$ ： S 與 T_i, T_j 交集為空，有三種情況：

如果 $(i, j) = (1, 3)$ ，那麼剩下 $ab - 1 - 2 \left[\left(\frac{a+1}{2} \right)^2 - 1 \right] = ab - \frac{a^2 + 2a - 1}{2}$ 個格子，有

$\binom{ab - \frac{a^2 + 2a - 1}{2}}{x}$ 種情形。如果 $(i, j) = (2, 4)$ ，那麼剩下

$ab - 1 - 2\left(\frac{2ab-a^2+2a+1}{4} - 1\right) = \frac{(a-1)^2}{2}$ 個格子，有 $\binom{\frac{(a-1)^2}{2}}{\frac{a-1}{2}}$ 種情形。如果

$(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4)$ ，那麼剩下

$ab - 1 - \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] - \left(\frac{2ab-a^2+2a+1}{4} - 1\right) + \frac{a-1}{2} = \frac{ab-a}{2}$ 個格子，有 $\binom{ab-a}{\frac{a-1}{2}}$ 種情形。

而 (i, j) 有四種可能，因此共有 $4\binom{ab-a}{\frac{a-1}{2}}$ 種情形。綜上，總共有

$\binom{ab-\frac{a^2+2a-1}{2}}{\frac{a-1}{2}} + \binom{\frac{(a-1)^2}{2}}{\frac{a-1}{2}} + 4\binom{ab-a}{\frac{a-1}{2}}$ 種情形。

$\sum_{i < j < k} (S \text{ 與 } T_i, T_j, T_k \text{ 交集皆空})$ ： S 與 T_i, T_j, T_k 交集為空，當

$(i, j, k) = (2, 3, 4), (1, 2, 4)$ 時代表要在剩下

$ab - 1 - 2\left(\frac{2ab-a^2+2a+1}{4} - 1\right) - \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] + 2\left(\frac{a-1}{2}\right) = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ 個格子中選出 x

個，有 $\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x}$ 種情形。而 (i, j, k) 有二種可能，因此共有 $2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x}$ 種情形。當

$(i, j, k) = (1, 3, 4), (1, 2, 3)$ 時代表要在剩下

$ab - 1 - \left(\frac{2ab-a^2+2a+1}{4} - 1\right) - 2\left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1\right] + 2\left(\frac{a-1}{2}\right) = \frac{2ab-a^2-2a+1}{4}$ 個格子中選

出 x 個，有 $\binom{\frac{2ab-a^2-2a+1}{4}}{x}$ 種情形。而 (i, j, k) 有二種可能，因此共有 $2\binom{\frac{2ab-a^2-2a+1}{4}}{x}$ 種

情形。綜上，總共有 $2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} + 2\binom{\frac{2ab-a^2-2a+1}{4}}{x}$ 種情形。

求出這些後，我們就可以計算包圍成功的機率：

$$\frac{\text{所有情形} - \sum_i (S \text{ 與 } T_i \text{ 交集為空}) + \sum_{i < j} (S \text{ 與 } T_i, T_j \text{ 交集皆空}) - \sum_{i < j < k} (S \text{ 與 } T_i, T_j, T_k \text{ 交集皆空})}{\text{所有情形}}$$

$$= \frac{\binom{ab-1}{x} - 2\binom{ab-\frac{(a+1)^2}{2}}{\frac{a-1}{2}} - 2\binom{\frac{2ab+a^2-2a-1}{4}}{\frac{a-1}{2}} + \binom{ab-\frac{a^2+2a-1}{2}}{\frac{a-1}{2}} + \binom{\frac{(a-1)^2}{2}}{\frac{a-1}{2}} + 4\binom{ab-a}{\frac{a-1}{2}} - 2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{\frac{2ab-a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{ab-1}{x}}。$$

現在有了機率，我們成功找到了這個問題的答案。接著，我們一樣對這個函數求極限，觀察在 $b \rightarrow \infty$ 時會發生什麼。

延伸問題 2.1：

a 視為一有限大的常數，試找出

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\binom{ab-1}{x} - 2\binom{ab - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{2ab+a^2-2a-1}{x} + \binom{ab - \frac{a^2+2a-1}{2}}{x} + \binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} + 4\binom{ab-a}{x} - 2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{2ab-a^2-2a+1}{x}}{\binom{ab-1}{x}}$$

。

【分析】

由定義 1.6，我們知道上式的分子和分母都可以視為 b 的 x 次多項式。同樣根據定理 1，我們把非最高次項忽略：

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} & \frac{\binom{ab-1}{x} - 2\binom{ab - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{2ab+a^2-2a-1}{x} + \binom{ab - \frac{a^2+2a-1}{2}}{x} + \binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} + 4\binom{ab-a}{x} - 2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{2ab-a^2-2a+1}{x}}{\binom{ab-1}{x}} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\binom{ab}{x} - 2\binom{ab}{x} - 2\binom{\frac{ab}{2}}{x} + \binom{ab}{x} + 4\binom{\frac{ab}{2}}{x} - 2\binom{\frac{ab}{2}}{x}}{\binom{ab-1}{x}} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 0 = 0。 \end{aligned}$$

我們發現，這個函數在 $b \rightarrow \infty$ 時的極限是 0。事實上，這並不是一個令人驚訝的結果。可以觀察到，如果固定 a ，當 b 增加時，扣掉 $\left(\frac{b+1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$ 後的總格子數 $ab - 1$ 也會增加，但 T_1 裡的格子數 $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 1$ 卻不會改變。因此，當 $b \rightarrow \infty$ 時，包圍者被分到 T_1 裡的格子的機率就會趨近於 0。換句話說，相對於所有格子的集合來說， T_1 是一個零測集。也就是， S 與 T_1 交集非空是幾乎不可能的。發現這一點後，我們可以知道這個極限為 0 是非常合理的。

現在我們對這個模型有了一些結論。那麼接下來，將模型做另一個推廣：

把二維的方格，改成三維。

III. 推廣模型二

在由 $1 \times 1 \times 1$ 的小格子組成的邊長 $a \times a \times a$ (a 為奇數)的格子中，A 站在正中央，將 x 個包圍者們以隨機的方式放入 $1 \times 1 \times 1$ 的小格子中，任意兩人(包括 A)的格子都不同。若在每個回合，所有人都可以選擇走到一個相鄰的格子(相鄰定義為有共同面)，其中包圍者可以選擇不移動，且 A 知道包圍者的初始分布，包圍者們知道 A 該回合的動向。若 A 走進與某個包圍者相同的格子，則包圍成功。若 A 走到邊界的某一格後，包圍還沒有成功，則包圍失敗。則包圍成功的機率為何？

【分析】

模型由二維變成三維，我們依然可以做出類似的定義：

定義 3.1: (p, q, r) 代表由左至右第 p 列，由下至上第 q 行，由後至前第 r 排的格子。
 p, q, r 分別稱為該格子的 p 座標、 q 座標、 r 座標。

定義 3.2：兩個格子的距離，為從其中一格走到另一格所需的最小回合數。換句話說， (p_1, q_1, r_1) 與 (p_2, q_2, r_2) 的距離為 $|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| + |r_1 - r_2|$ 。

定義 3.3：如果某個包圍者與一個格子的距離小於等於該格子與 A 的距離，則稱該格子對於該包圍者是可擋的。

接著一樣對推論進行修改。

首先，推論 1.1 的證明與維度無關，因此仍然正確。接著是其他推論：

推論 3.1：初始時，如果 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼 $(i, j, 1)$ 是可擋的 $\forall i, j = 1, 2, \dots, a$ 。其他六個方向同理。

[證明]

設 $\frac{a+1}{2} = k$ 。我們知道 A 的初始位置 (k, k, k) 與 $(k, k, 1)$ 的距離是 $k - 1$ 。

由於 $(k, k, 1)$ 是可擋的，因此存在包圍者在 (p, q, r) 滿足

$$|p - k| + |q - k| + |r - 1| \leq k - 1, \text{ 因此}$$

$$|p - i| + |q - j| + |r - 1| \leq |p - i| + |q - j| + k - 1 - |p - k| - |q - k|$$

$$\leq |k - i| + |k - j| + |k - 1|, \text{ 即}(i, j, 1)\text{是可擋的。}$$

推論 3.2：一個包圍者可以保證如果在初始情況下 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 是可擋的，那麼

$\forall i, j = 1, 2, \dots, a, (i, j, 1)$ 在每個回合都是可擋的。其他方向同理。

[證明]

假設經過若干回合後， $(i, j, 1)$ 仍然是可擋的 $\forall i, j = 1, 2, \dots, a$ 。則經過一回合後，如果 A 與某個可擋的格子的距離增加了 1，那麼顯然無論包圍者怎麼走，這個格子仍然是可擋的。剩下的格子，顯然只要考慮 $(i, j, 1)$ 中到兩人距離差為 0 或 1 的格子。

假設 A 在 (p_1, q_1, r_1) ，包圍者 B 在 (p_2, q_2, r_2) ，

(一)：如果 $|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| + |r_1 - r_2|$ 是奇數，那麼任取一點 (p, q, r) 。由於 $|p - p_1| + |p - p_2|$ 與 $|p_1 - p_2|$ 奇偶性相同， $|q - q_1| + |q - q_2|$ 與 $|q_1 - q_2|$ 奇偶性相同， $|r - r_1| + |r - r_2|$ 與 $|r_1 - r_2|$ 奇偶性相同，因此任何點與兩人的距離和 $|p - p_1| + |p - p_2| + |q - q_1| + |q - q_2| + |r - r_1| + |r - r_2|$ 皆為奇數，所以不存在與兩人距離相同的點。此時無論 A 如何移動，包圍者只需原地不動。

(二)：如果 $|p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| + |r_1 - r_2|$ 是偶數，那麼只需考慮到兩人等距的格子。如果 $r_1 < r_2$ ，那麼 $(p_1, q_1, 1)$ 顯然是不可擋的，矛盾。因此 $r_1 \geq r_2$ 。設

$\Delta p = p_1 - p_2, \Delta q = q_1 - q_2, \Delta r = r_1 - r_2$ 。不失一般性設 $p_1 \geq p_2, q_1 \geq q_2$ 。如果 $\Delta r < \Delta p + \Delta q$ ，那麼

$$|p_1 - p_1| + |q_1 - q_1| + |1 - r_1| < |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2| + |1 - r_2|, \text{ 即}(p_1, q_1, 1)\text{是}$$

不可擋的，矛盾。因此 $\Delta r \geq \Delta p + \Delta q$ 。接著分類討論：

①：如果 A 走到 $(p_1 + 1, q_1, r_1)$ ，那麼所有與 A 距離減少的格子 (p, q, r) 都滿足 $p > p_1$ 。讓 B 走到 $(p_2 + 1, q_2, r_2)$ ，則所有滿足 $p > p_1$ 的格子與 B 的距離都減少了。因此，不存在接近 A 但遠離 B 的格子。

②：如果 A 走到 $(p_1, q_1 + 1, r_1)$ ，那麼讓 B 走到 $(p_2, q_2 + 1, r_2)$ 。剩下同 ①。

③：如果 A 走到 $(p_1, q_1, r_1 + 1)$ ，那麼讓 B 走到 $(p_2, q_2, r_2 + 1)$ 。剩下同 ①。

④：如果 A 走到 $(p_1 - 1, q_1, r_1)$ ，那麼讓 B 走到 $(p_2, q_2, r_2 + 1)$ ，則接近 A 但遠離 B 的格子 $(p, q, 1)$ 都滿足 $p < p_1$ 。此時

$$|p - p_1| + |q - q_1| + |1 - r_1| - |p - p_2| - |q - q_2| - |1 - r_2|$$

$> -\Delta p - \Delta q + \Delta r \geq 0$ ，即這些都不是原本到兩人等距的格子。

⑤：如果 A 走到 $(p_1, q_1 - 1, r_1)$ ，那麼讓 B 走到 $(p_2, q_2, r_2 + 1)$ 。剩下同 ④。

⑥：如果 A 走到 $(p_1, q_1, r_1 - 1)$ ，

⑥-1：若 Δp 和 Δq 中至少有一個不為零，不失一般性設 $\Delta p \neq 0$ ，那麼讓 B 走到 $(p_2 + 1, q_2, r_2)$ ，則接近 A 但遠離 B 的格子 $(p, q, 1)$ 都滿足 $p \leq p_2$ 。此時

$$|p - p_1| + |q - q_1| + |1 - r_1| - |p - p_2| - |q - q_2| - |1 - r_2|$$

$\geq \Delta p - \Delta q + \Delta r \geq 2\Delta p > 0$ ，即這些都不是原本到兩人等距的格子。

⑥-2：若 $\Delta p = \Delta q = 0$ ，那麼

$|p - p_1| + |q - q_1| + |1 - r_1| - |p - p_2| - |q - q_2| - |1 - r_2| = \Delta r > 0$ ，即不存在到兩人等距的格子。此時 B 可以隨便走。

綜上，可以知道 B 在每一回合都能保證目標格子的可擋性。故推論成立。

推論 3.3：一個包圍者可以保證如果在初始情況下 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 和 $(\frac{a+1}{2}, 1, \frac{a+1}{2})$ 都是可擋的，那麼 $\forall i, j, m, n = 1, 2, \dots, a$ ， $(i, j, 1)$ 和 $(m, 1, n)$ 在每個回合都是可擋的。除了 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 和 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, a)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, 1, \frac{a+1}{2})$ 和 $(\frac{a+1}{2}, a, \frac{a+1}{2})$ 、 $(1, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 和 $(a, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 之外的組合同理。

[證明]

設 $\frac{a+1}{2} = k$ 。我們知道 A 的初始位置 (k, k, k) 與 $(k, k, 1)$ 、 $(k, 1, k)$ 的距離都是 $k - 1$ 。因此若在初始情況下 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 和 $(\frac{a+1}{2}, 1, \frac{a+1}{2})$ 都是可擋的，則存在包圍者 B 在 (p, q, r) 滿足

$|p - k| + |q - k| + |r - 1| \leq k - 1$ 、 $|p - k| + |q - 1| + |r - k| \leq k - 1$ ，此時 $2k - 2 \geq |p - k| + |q - k| + |r - 1| + |p - k| + |q - 1| + |r - k| \geq 2k - 2$ ，等號成立於 $p = k$ 且 $1 \leq q \leq k$ 且 $1 \leq r \leq k$ 時。此時由

$|p - k| + |q - k| + |r - 1| \leq k - 1$ 可得到 $r \leq q$ ，由

$|p - k| + |q - 1| + |r - k| \leq k - 1$ 可得到 $q \leq r$ ，故 $q = r$ 。

讓 B 整場遊戲執行以下策略：

- 1、當 A 使 p 座標增加 1 時，B 也使 p 座標增加 1。
- 2、當 A 使 p 座標減少 1 時，B 也使 p 座標減少 1。
- 3、當 A 使 q 座標增加 1 時，B 也使 q 座標增加 1。
- 4、當 A 使 q 座標減少 1 時，B 使 r 座標增加 1。
- 5、當 A 使 r 座標增加 1 時，B 也使 r 座標增加 1。
- 6、當 A 使 r 座標減少 1 時，B 使 q 座標增加 1。

注意到這個策略會使 A 和 B 的 p 座標維持相同，因此我們可以忽略 p 座標。此時可以發現，這個策略與二維正方形模型中，推論 1.2 中 ①的情形完全相同。因此這個策略可以保證可擋性，推論成立。

推論 3.4：一個包圍者在初始情況下不可能使 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, 1, \frac{a+1}{2})$ 、 $(1, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 、 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, a)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, a, \frac{a+1}{2})$ 、 $(a, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 中的任意三個格子同時都是可擋的。

[證明]

設 $\frac{a+1}{2} = k$ 。我們知道 A 的初始位置 (k, k, k) 與此推論中的六個格子的距離都是 $k - 1$ 。如果在 (p, q, r) 的包圍者 B 使得 $(k, k, 1)$ 和 (k, k, a) 都是可擋的，那麼

$$|p - k| + |q - k| + |r - 1| \leq k - 1, |p - k| + |q - k| + |r - a| \leq k - 1, \text{ 因此}$$

$$a - 1 = 2k - 2 \geq |p - k| + |q - k| + |r - 1| + |p - k| + |q - k| + |r - a|$$

$$\geq |r - 1| + |r - a| = a - 1, \text{ 等號成立於 } p = q = k \text{ 時。此時由於}$$

$$|p - k| + |q - k| + |r - 1| \leq k - 1, \text{ 因此 } r \leq k。又由於}$$

$$|p - k| + |q - k| + |r - a| \leq k - 1, \text{ 因此 } k \leq r, \text{ 故 } k = r, \text{ 即 B 在 } (k, k, k), \text{ 與 A}$$

相同，矛盾。故一個包圍者在初始時不可能使 $(k, k, 1)$ 和 (k, k, a) 都是可擋的，
 $(k, 1, k)$ 和 (k, a, k) 、 $(1, k, k)$ 和 (a, k, k) 同理。(這也是推論 3.3 中將這三組排除的原因。)因此，若要使該六個格子中的三個都是可擋的，必須是 $(k, k, 1)$ 和 (k, k, a) 、
 $(k, 1, k)$ 和 (k, a, k) 、 $(1, k, k)$ 和 (a, k, k) 三組各選一個。不失一般性假設存在包圍者 C 在 (p, q, r) 使得 $(k, k, 1)$ 、 $(k, 1, k)$ 、 $(1, k, k)$ 都是可擋的，那麼由推論 3.3 的證明知 $p = k, 1 \leq q = r < k$ 。但此時

$$|p - 1| + |q - k| + |r - k| > k - 1, \text{ 即 } (1, k, k) \text{ 不是可擋的，矛盾。故推論成立。}$$

推論 3.5：這個遊戲會在有限個回合內結束。

[證明]

如果 A 能走到邊界的某格，那麼遊戲會在 A 走到那格後結束。接下來假設邊界沒有不可擋的格子。假設 A 某回合在 (p_1, q_1, r_1) 的位置，不失一般性假設 A 下回合走到 $(p_1, q_1, r_1 - 1)$ 。由推論 3.2 知道存在包圍者 B 使得 $(i, j, 1)$ 是可擋的

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, a, \text{ 此時 B 執行推論 3.2 中的 ⑥, 則 B 可以使 A 與 B 的距離減少。}$$

而在推論 3.2、推論 3.3 中，當 A 與 B 的距離為偶數時，所有行動都不會使 A 與 B 的距離增加，並且奇數的情形至多只會發生一次。因此，其他包圍者可以在保證可擋性的同時，保證自己與 A 的距離不會增加。綜上，所有包圍者與 A 的距離和會不斷減少，即在有限回合內，一定可以包圍成功。因此，這個遊戲一定會

在有限個回合內結束。

我們可以注意到二維模型中的推論 1.2，在三維模型時被拆成了推論 3.2、推論 3.3、推論 3.4，除此之外都與二維模型差不多。這是因為在二維模型中，其實並不需要推論 1.2 這麼強的結論，因此推論 1.2 到三維就出了問題。但推論 3.2、推論 3.3、推論 3.4 仍然保證了包圍者對於特定格子的可擋性，而這也是我們需要的結論。因此，有了這些推論，我們就可以把包圍成功的條件進一步限縮：

初始時， $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, 1)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, 1, \frac{a+1}{2})$ 、 $(1, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 、 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, a)$ 、 $(\frac{a+1}{2}, a, \frac{a+1}{2})$ 、 $(a, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ 都是可擋的。

接著，我們可以沿用定義 1.4，並修改定義 1.5：

定義 3.4：

$$W_1 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - \frac{a+1}{2}| + |q - \frac{a+1}{2}| + |r - 1| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$W_2 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - \frac{a+1}{2}| + |q - 1| + |r - \frac{a+1}{2}| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$W_3 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - 1| + |q - \frac{a+1}{2}| + |r - \frac{a+1}{2}| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$W_4 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - \frac{a+1}{2}| + |q - \frac{a+1}{2}| + |r - a| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$W_5 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - \frac{a+1}{2}| + |q - a| + |r - \frac{a+1}{2}| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

$$W_6 = \{(p, q, r) | a \geq p, q, r \geq 1, |p - a| + |q - \frac{a+1}{2}| + |r - \frac{a+1}{2}| \leq \frac{a-1}{2},$$

$$p, q, r \in \mathbb{N}, (p, q, r) \neq (\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})\}$$

有了這些定義，我們可以改寫包圍成功的條件：

$$\forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, S \cap W_i \neq \emptyset.$$

根據這個條件，我們終於可以開始計算包圍成功的機率。首先，我們想要知道在

W_1 裡的格子有幾個。如果 $r - 1 = t$ ，當 $|q - \frac{a+1}{2}| = u \neq 0$ 時， p 可以是

$a - t - u, a - t - u - 1, \dots, 1 + t + u$ ，有 $a - 2t - 2u$ 種可能。而 u 可以是

$\frac{a-1}{2} - t, \frac{a-1}{2} - t - 1, \dots, 1$ ，且對於每個 u ，都有兩個可能的 q ，因此數對 (p, q) 可能

的數量為

$$2 \sum_{u=1}^{\frac{a-1}{2}-t} (a - 2t - 2u) = \frac{a^2}{2} - a - 2at + 2t + 2t^2 + \frac{1}{2}$$

個。當 $q = \frac{a+1}{2}$ 時， p 可以是 $a - t, a - t - 1, \dots, 1 + t$ ，有 $a - 2t$ 種可能。因此數對

(p, q) 共有 $\frac{a^2}{2} - a - 2at + 2t + 2t^2 + \frac{1}{2} + a - 2t = \frac{a^2}{2} - 2at + 2t^2 + \frac{1}{2}$ 個可能。而 t

可以是 $\frac{a-1}{2}, \frac{a-1}{2} - 1, \dots, 1, 0$ ，再扣掉 $(\frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+1}{2})$ ，則 W_1 中 (p, q, r) 的數量為

$$\sum_{t=0}^{\frac{a-1}{2}} (\frac{a^2}{2} - 2at + 2t^2 + \frac{1}{2}) - 1 = \frac{a^3 + 3a^2 + 5a - 9}{12}$$

個。顯然 W_2, W_3, W_4, W_5, W_6 也與 W_1 相同。接著，由推論 3.3 的證明知道 W_1 與

W_2 的交集為滿足 $p = \frac{a+1}{2}$ 且 $1 \leq q = r < \frac{a+1}{2}$ 的格子，共有 $\frac{a-1}{2}$ 個。其他除了 W_1 和 W_4 、

W_2 和 W_5 、 W_3 和 W_6 的組合也相同。

接著一樣使用排容原理：

所有情形：除了正中央外，要在剩下 $a^3 - 1$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{a^3-1}{x}$ 種情形。

$\Sigma_i (S \text{ 與 } W_i \text{ 交集為空})$ ： S 與 W_i 交集為空，代表要在剩下

$a^3 - 1 - \frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} = \frac{11a^3-3a^2-5a-3}{12}$ 個格子中選出 x 個，有 $\binom{\frac{11a^3-3a^2-5a-3}{12}}{x}$ 種情形。

而 i 有六種可能，因此共有 $6 \binom{\frac{11a^3-3a^2-5a-3}{12}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j} (S \text{與} W_i, W_j \text{交集皆空})$ ： S 與 W_i, W_j 交集為空，有兩種情況：

如果 $(i, j) = (1, 4), (2, 5), (3, 6)$ ，那麼剩下

$a^3 - 1 - 2 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] = \frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6}$ 個格子，有 $\binom{\frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6}}{x}$ 種情形。而 (i, j) 有

三種可能，因此共有 $3 \binom{\frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6}}{x}$ 種情形。如果 (i, j) 為其他組合，那麼剩下

$a^3 - 1 - 2 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + \frac{a-1}{2} = \frac{5a^3-3a^2-2a}{6}$ 個格子，有 $\binom{\frac{5a^3-3a^2-2a}{6}}{x}$ 種情形。而 (i, j)

有 $\binom{6}{2} - 3 = 12$ 種可能，因此共有 $12 \binom{\frac{5a^3-3a^2-2a}{6}}{x}$ 種情形。綜上，總共有

$3 \binom{\frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6}}{x} + 12 \binom{\frac{5a^3-3a^2-2a}{6}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j < k} (S \text{與} W_i, W_j, W_k \text{交集皆空})$ ： S 與 W_i, W_j, W_k 交集為空，有兩種情況：

如果 (i, j, k) 中任兩個為 $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ ，那麼剩下

$a^3 - 1 - 3 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 2 \times \frac{a-1}{2} = \frac{3a^3-3a^2-a+1}{4}$ 個格子，有 $\binom{\frac{3a^3-3a^2-a+1}{4}}{x}$ 種情形。

而 (i, j, k) 有 $4 \times 3 = 12$ 種可能，因此共有 $12 \binom{\frac{3a^3-3a^2-a+1}{4}}{x}$ 種情形。如果 (i, j, k) 為其

他組合，那麼剩下 $a^3 - 1 - 3 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 3 \times \frac{a-1}{2} = \frac{3a^3-3a^2+a-1}{4}$ 個格子，有

$\binom{\frac{3a^3-3a^2+a-1}{4}}{x}$ 種情形。而 (i, j, k) 有 $\binom{6}{3} - 12 = 8$ 種可能，因此共有 $8 \binom{\frac{3a^3-3a^2+a-1}{4}}{x}$ 種

情形。綜上，總共有 $12 \binom{\frac{3a^3-3a^2-a+1}{4}}{x} + 8 \binom{\frac{3a^3-3a^2+a-1}{4}}{x}$ 種情形。

$\sum_{i < j < k < m} (S \text{與} W_i, W_j, W_k, W_m \text{交集皆空})$ ： S 與 W_i, W_j, W_k, W_m 交集為

空，有兩種情況：

如果 $(i, j, k, m) = (1, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (2, 3, 5, 6)$ ，那麼剩下

$a^3 - 1 - 4 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 4 \times \frac{a-1}{2} = \frac{2a^3-3a^2+a}{3}$ 個格子，有 $\binom{\frac{2a^3-3a^2+a}{3}}{x}$ 種情形。而

(i, j, k, m) 有三種可能，因此共有 $3 \binom{\frac{2a^3-3a^2+a}{3}}{x}$ 種情形。如果 (i, j, k, m) 為其他組合，

那麼剩下 $a^3 - 1 - 4 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 5 \times \frac{a-1}{2} = \frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6}$ 個格子，有

$\left(\frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6} \right)_x$ 種情形。而 (i, j, k, m) 有 $\binom{6}{4} - 3 = 12$ 種可能，因此共有

$12 \left(\frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6} \right)_x$ 種情形。綜上，總共有 $3 \left(\frac{2a^3-3a^2+a}{3} \right)_x + 12 \left(\frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6} \right)_x$ 種情形。

$\sum_{i < j < k < m < n} (S \text{ 與 } W_i, W_j, W_k, W_m, W_n \text{ 交集皆空})$ ：S 與

W_i, W_j, W_k, W_m, W_n 交集為空，代表要在剩下

$a^3 - 1 - 5 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 8 \times \frac{a-1}{2} = \frac{7a^3-15a^2+23a-15}{12}$ 個格子中選出 x 個，有

$\left(\frac{7a^3-15a^2+23a-15}{12} \right)_x$ 種情形。而 (i, j, k, m, n) 有六種可能，因此共有 $6 \left(\frac{7a^3-15a^2+23a-15}{12} \right)_x$ 種

情形。

$\sum_{i < j < k < m < n < v} (S \text{ 與 } W_i, W_j, W_k, W_m, W_n, W_v \text{ 交集皆空})$ ：S 與

$W_i, W_j, W_k, W_m, W_n, W_v$ 交集為空，代表要在剩下

$a^3 - 1 - 6 \left[\frac{a^3+3a^2+5a-9}{12} \right] + 12 \times \frac{a-1}{2} = \frac{a^3-3a^2+7a-5}{2}$ 個格子中選出 x 個，有

$\left(\frac{a^3-3a^2+7a-5}{2} \right)_x$ 種情形。

求出這些後，我們就可以計算包圍成功的機率為：

$$1 - \frac{6 \left(\frac{11a^3-3a^2-5a-3}{12} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{3 \left(\frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{12 \left(\frac{5a^3-3a^2-2a}{6} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{12 \left(\frac{3a^3-3a^2-a+1}{4} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{8 \left(\frac{3a^3-3a^2+a-1}{4} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{3 \left(\frac{2a^3-3a^2+a}{3} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{12 \left(\frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{6 \left(\frac{7a^3-15a^2+23a-15}{12} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{\left(\frac{a^3-3a^2+7a-5}{2} \right)_x}{\binom{a^3-1}{x}},$$

就是這個題目的答案。接著，我們一樣對這個函數求極限，觀察在 $a \rightarrow \infty$ 時會發生什麼。

延伸問題 3.1：

試找出

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{6 \left(\frac{11a^3 - 3a^2 - 5a - 3}{12x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{3 \left(\frac{5a^3 - 3a^2 - 5a + 3}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{12 \left(\frac{5a^3 - 3a^2 - 2a}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} - \frac{12 \left(\frac{3a^3 - 3a^2 - a + 1}{4x} \right)}{(a^3 - 1)} -$$

$$\frac{8 \left(\frac{3a^3 - 3a^2 + a - 1}{4x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{3 \left(\frac{2a^3 - 3a^2 + a}{3x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{12 \left(\frac{4a^3 - 6a^2 + 5a - 3}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} - \frac{6 \left(\frac{7a^3 - 15a^2 + 23a - 15}{12x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{\left(\frac{a^3 - 3a^2 + 7a - 5}{2x} \right)}{(a^3 - 1)}。$$

【分析】

由定義 1.6，我們知道上式各項的分子和分母都可以視為 a 的 $3x$ 次多項式。同樣根據定理 1，我們把非最高次項忽略：

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{6 \left(\frac{11a^3 - 3a^2 - 5a - 3}{12x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{3 \left(\frac{5a^3 - 3a^2 - 5a + 3}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{12 \left(\frac{5a^3 - 3a^2 - 2a}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} - \frac{12 \left(\frac{3a^3 - 3a^2 - a + 1}{4x} \right)}{(a^3 - 1)} -$$

$$\frac{8 \left(\frac{3a^3 - 3a^2 + a - 1}{4x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{3 \left(\frac{2a^3 - 3a^2 + a}{3x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{12 \left(\frac{4a^3 - 6a^2 + 5a - 3}{6x} \right)}{(a^3 - 1)} - \frac{6 \left(\frac{7a^3 - 15a^2 + 23a - 15}{12x} \right)}{(a^3 - 1)} + \frac{\left(\frac{a^3 - 3a^2 + 7a - 5}{2x} \right)}{(a^3 - 1)} =$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{6 \left(\frac{11a^3}{12x} \right)}{(a^3)} + \frac{3 \left(\frac{5a^3}{6x} \right)}{(a^3)} + \frac{12 \left(\frac{5a^3}{6x} \right)}{(a^3)} - \frac{12 \left(\frac{3a^3}{4x} \right)}{(a^3)} - \frac{8 \left(\frac{3a^3}{4x} \right)}{(a^3)} + \frac{3 \left(\frac{2a^3}{3x} \right)}{(a^3)} + \frac{12 \left(\frac{4a^3}{6x} \right)}{(a^3)} -$$

$$\frac{6 \left(\frac{7a^3}{12x} \right)}{(a^3)} + \frac{\left(\frac{a^3}{2x} \right)}{(a^3)}。$$

並且我們知道， $\binom{ta^3}{x} = \frac{ta^3(ta^3-1)\dots(ta^3-x+1)}{x!}$ ，再把非最高次項忽略掉，就變成了

$\frac{(ta^3)^x}{x!}$ 。把 $x!$ 和 a^{3x} 約掉，得到：

$$\lim_{a \rightarrow \infty} 1 - \frac{6 \left(\frac{11a^3}{12x} \right)}{(a^3)} + \frac{3 \left(\frac{5a^3}{6x} \right)}{(a^3)} + \frac{12 \left(\frac{5a^3}{6x} \right)}{(a^3)} - \frac{12 \left(\frac{3a^3}{4x} \right)}{(a^3)} - \frac{8 \left(\frac{3a^3}{4x} \right)}{(a^3)} + \frac{3 \left(\frac{2a^3}{3x} \right)}{(a^3)} + \frac{12 \left(\frac{4a^3}{6x} \right)}{(a^3)} -$$

$$\frac{6 \left(\frac{7a^3}{12x} \right)}{(a^3)} + \frac{\left(\frac{a^3}{2x} \right)}{(a^3)} = 1 - 6 \left(\frac{11}{12} \right)^x + 15 \left(\frac{5}{6} \right)^x - 20 \left(\frac{3}{4} \right)^x + 15 \left(\frac{2}{3} \right)^x - 6 \left(\frac{7}{12} \right)^x + \left(\frac{1}{2} \right)^x。$$

這就是我們要的答案。

接著我們一樣可以研究人力分配的最佳策略：

延伸問題 3.2：

在 a 足夠大時，試找出能讓平均每個人包圍住的人數期望值最大的 x 。即，找出

$$R(x) = \frac{1 - 6\left(\frac{11}{12}\right)^x + 15\left(\frac{5}{6}\right)^x - 20\left(\frac{3}{4}\right)^x + 15\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6\left(\frac{7}{12}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{x} \text{ 在 } x > 0 \text{ 時的最大值。}$$

【分析】

讓我們先看看 x 為整數時的情況。

首先，我們發現 $R(30) \approx 0.02062$ ，並且知道

$1 - 6\left(\frac{11}{12}\right)^x + 15\left(\frac{5}{6}\right)^x - 20\left(\frac{3}{4}\right)^x + 15\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6\left(\frac{7}{12}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是一個機率，因此小於

等於 1。當 $x > 50$ 時， $R(x) < \frac{1}{50} = 0.02 < R(30)$ 。因此，我們只要觀察

$x = 1, 2, \dots, 50$ 時， $R(x)$ 的值。以下是結果：

x	$R(x)$	x	$R(x)$	x	$R(x)$	x	$R(x)$
1	0	14	0.00611	27	0.01957	40	0.02063
2	0	15	0.00747	28	0.02000	41	0.02046
3	0	16	0.00884	29	0.02035	42	0.02028
4	0	17	0.01020	30	0.02062	43	0.02008
5	0	18	0.01152	31	0.02083	44	0.01987
6	0.00004	19	0.01278	32	0.02098	45	0.01965
7	0.00018	20	0.01397	33	0.02107	46	0.01943
8	0.00048	21	0.01506	34	0.02112	47	0.01920
9	0.00097	22	0.01606	35	0.02112	48	0.01896
10	0.00166	23	0.01696	36	0.02108	49	0.01873
11	0.00255	24	0.01775	37	0.02101	50	0.01848
12	0.00362	25	0.01845	38	0.02091		

13	0.00482	26	0.01906	39	0.02078		
----	---------	----	---------	----	---------	--	--

可以發現，在 $x = 34$ 、 35 時， $R(x)$ 可以取得最大值約 0.02112 。取的更精細，則 $R(34) \approx 0.021116$ ， $R(35) \approx 0.021117$ 。因此 $R(x)$ 在 $x = 35$ 時取得最大值。

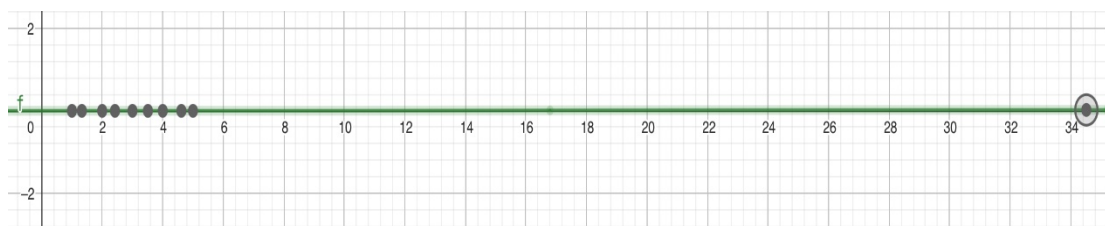
而如果把 $R(x)$ 的定義域擴展到 $\mathbb{R}^+$ ，我們想找到 $\frac{d}{dx}R(x) = 0$ 的解。經過

Wolfram Alpha的計算，得到了 $x \approx 1.32758, 2.42276, 3.51030, 4.61573, 34.51842$ 五個值。其中，前四個 x 所得到的 $R(x)$ 值都很小，忽略。此外， $R(x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 連續，且 $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ ，

$\lim_{x \rightarrow 0^+} R(x) = -6 \ln 11 + 63 \ln 2 - 38 \ln 3 + 15 \ln 5 - 6 \ln 7 \approx -0.00026$ 為負值，

顯然不會是 $R(x)$ 的上界。所以 $R(x)$ 的最大值出現在 $\frac{d}{dx}R(x) = 0$ 時。因此， $R(x)$ 的

最大值出現在 $x \approx 34.51842$ 時， $R(x) \approx 0.02112$ ，與前面得到的 $R(34)$ 、 $R(35)$ 差不多。因此，我們知道如果想要讓每個包圍者提供的效果最大化，大約 34 或 35 個人是最佳選擇。



△ 圖 3.1，為 $R(x)$ 的圖形

參、研究結果

1、在邊長為 a 的正方形模型下：

$$\text{包圍成功的機率：} \frac{\binom{a^2-1}{x} - 4\binom{\frac{3a^2-2a-1}{4}}{x} + 2\binom{\frac{a^2-2a+1}{2}}{x} + 4\binom{\frac{a^2-a}{2}}{x} - 4\binom{\frac{a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{a^2-1}{x}}$$

$$a \rightarrow \infty \text{時的機率：} 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^x + 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\left(\frac{1}{4}\right)^x$$

最佳的人力分配策略：約 9 個人包圍 1 個人。

2、在邊長 $a \times b$ 的長方形模型下：

包圍成功的機率：

$$\frac{\binom{ab-1}{x} - 2\binom{ab - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{\frac{2ab+a^2-2a-1}{4}}{x} + \binom{ab - \frac{a^2+2a-1}{2}}{x} + \binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} + 4\binom{\frac{ab-a}{2}}{x} - 2\binom{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2}{x} - 2\binom{\frac{2ab-a^2-2a+1}{4}}{x}}{\binom{ab-1}{x}}$$

$$b \rightarrow \infty \text{時的機率：} 0$$

3、在邊長 $a \times a \times a$ 的正方體模型下：

包圍成功的機率：

$$1 - \frac{6\binom{\frac{11a^3-3a^2-5a-3}{12}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{3\binom{\frac{5a^3-3a^2-5a+3}{6}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{12\binom{\frac{5a^3-3a^2-2a}{6}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{12\binom{\frac{3a^3-3a^2-a+1}{4}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{8\binom{\frac{3a^3-3a^2+a-1}{4}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{3\binom{\frac{2a^3-3a^2+a}{3}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{12\binom{\frac{4a^3-6a^2+5a-3}{6}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} - \frac{6\binom{\frac{7a^3-15a^2+23a-15}{12}}{x}}{\binom{a^3-1}{x}} + \frac{\binom{a^3-3a^2+7a-5}{2}}{\binom{a^3-1}{x}}。$$

$$a \rightarrow \infty \text{時的機率：} 1 - 6\left(\frac{11}{12}\right)^x + 15\left(\frac{5}{6}\right)^x - 20\left(\frac{3}{4}\right)^x + 15\left(\frac{2}{3}\right)^x - 6\left(\frac{7}{12}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

最佳的人力分配策略：約 34 或 35 個人包圍 1 個人。

肆、討論與結論

我們從最簡單的正方形模型開始，探討在此模型下，包圍成功的機率。在探討的過程中，先是從遊戲兩方的角度分別找出限制，成功把複雜的情況轉化成對初始

情形的分析，再透過對特定格子的分析，將焦點限縮在 4 個格子上。經過計算，我們成功找到了想要的結果。

在對機率函數求極限後，成功將機率從組合數的形式，變成了指數函數的形式。

求出較簡單的形式後，我們開始分析人力分配的最佳效率。

接著，我們將模型推廣到長方形與正方體。透過類似的討論，一樣得出了在新模型下，包圍成功的機率，以及取極限後的結果。

未來，我們希望能夠將模型推廣至其他形狀的模型，例如三角形等，分析與其他模型的異同。

伍、參考書目

[1] James Stewart、Daniel Clegg、Saleem Watson。(2020)。Calculus 9/e(Metric Version)。Cengage Learning 出版。

【評語】 010009

本作品討論在一個 axa 的方格的中心放入一個被包圍者，其他地方隨機放下 x 個包圍者，每次行動包圍者與被包圍者均只能移動一格，問被包圍者能夠逃出 axa 方格的機率為何？作者不僅解決上述問題，也把問題推廣成 axb 的長方形以及 $axaxa$ 的立方體，且都解出答案。在解答的過程中，作者熟練的運用組合與機率相關的技巧，充份體現出原問題的內在結構，數學推導部分需要加強。