

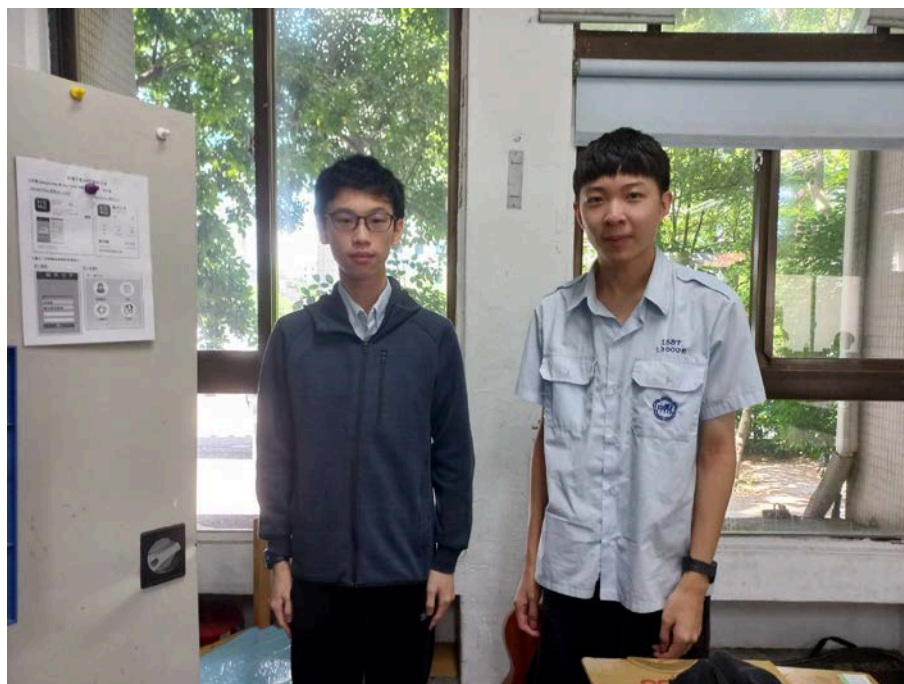
2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010008
參展科別	數學
作品名稱	連續兩個未知數相加減再相乘的極值問題

就讀學校	國立臺灣師範大學附屬高級中學
指導教師	吳思曄 陳鵬旭
作者姓名	柯思丞 車昱霖

關鍵詞	<u>代數、極值、不等式</u>
-----	------------------

作者簡介



我們是師大附中高三科學班的學生—柯思丞和車昱霖，由於我們對數學的喜愛，在高一時一起選擇了數學專題研究，我們對代數都有興趣就開始研究現在的題目。在做科展的過程中會遇到許多困難，不過藉由不斷的思考，獲得了一些成果也學習到了許多。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：連續兩個未知數相加減再相乘的極值問題

關鍵詞：代數、極值、不等式（最多三個）

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

摘要

本研究從2022年 APMO 第五題的代數題目出發，題目為 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ ， $\sum_{k=1}^4 a_k^2 = 1$ ，試求出 $(a_4 - a_1) \prod_{k=1}^3 (a_k - a_{k+1})$ 的最小值。我們希望將原問題的四個未知數，希望推廣到 n 個未知數的通解。我們首先用算幾不等式及其他幾何性質算出了 $n=2\sim 4$ 的解，其中包括了偏微分求切平面的方法。在研究 n 的未知數的通解時，我們利用實數的完備性說明最小值一定存在，接著我們利用舉例以及反證法，發現到 n 個未知數時其最小值會小於0，以及最小值成立時各項相加會等於0，我們運用這些特別的性質，並且使用了各種不等式得出 $n \equiv 2 \pmod{4}$ 的通解。最後我們用拉格朗日乘數可以求出 $n \equiv k \pmod{2k}$ 的局部最小值，還有部分相加與相減的關聯性，未來希望能求出絕對的最小值和最大值。

Abstract

This study originates from the algebra problem of Question 5 in the 2022 APMO (Asia-Pacific Mathematics Olympiad), The problem is that $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ ， $\sum_{k=1}^4 a_k^2 = 1$ ，determine the minimum value of $(a_4 - a_1) \prod_{k=1}^3 (a_k - a_{k+1})$. We aim to generalize the original problem's four unknowns to a solution that is applicable to n unknowns. To solve the problem of 2 to 4 unknowns, we utilized methods such as AM-GM inequalities, partial derivative to find tangent planes, etc. In exploring the general solution for n unknowns, we applied the completeness of real numbers to show that a minimum value must exist. Through examples and proof by contradiction, our investigation revealed that when there are n unknowns, the minimum value is less than 0. In addition, when the minimum value is achieved, the sum of all terms equals 0. Leveraging these special properties and various inequalities, we derived the general solution for $n \equiv 2 \pmod{4}$. Finally, we use Lagrange multiplier to find out the local minimum of $n \equiv k \pmod{2k}$ and explore the relationship between pairwise addition and subtraction in the original problem. We hope that we can find the absolute minimum and maximum in the future.

壹、前言

一、研究動機

本研究源自於 2022 年 APMO 第五題：

實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ，試決定 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ 的最小值並找出所有得到該最小值的 (a, b, c, d) 數值。

我們很好奇如果將未知數推廣到 n 個是否有通解，於是開始此次的研究。

二、研究目的

(一)未知數為 2 個及 4 個的解法。

(二)未知數為 3 個時的偏微分求切平面研究。

(三)未知數為 5 個時的研究。

(四)推廣到 n 個未知數的最小值通解。

(五)討論相減和相加的差異性。

貳、研究方法

一、原問題討論與二個未知數的解法

(一)原題目(4 個未知數)

題目：實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 。試決定 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (a, b, c, d) 數值。

解法：不失一般性，令 a 最大，考慮 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \leq 0$ 的情況，

$$\because a-b \geq 0, a-d \leq 0 \quad \therefore (b-c)(c-d) \geq 0$$

因此有 $a \geq b \geq c \geq d$ 及 $a \geq d \geq c \geq b$ 二種情況

$$\text{而 } (a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = (a-b)(d-c)(c-b)(d-a)$$

所以可以令 $a \geq b \geq c \geq d$ ， $S(a, b, c, d) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$

$$S(a, b, c, d) = -(a-b)(b-c)(c-d)(a-d)$$

令 $a-b=y$, $b-c=x$, $c-d=w$, $w, x, y > 0$ 代入 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$

$$(d+w+x+y)^2 + (d+w+x)^2 + (d+w)^2 + d^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4d^2 + (6w+4x+2y)d + ((w+x+y)^2 + (w+x)^2 + w^2 - 1) = 0$$

$$\because d \in \mathbb{R} \therefore D \geq 0$$

$$(6w+4x+2y)^2 - 16((w+x+y)^2 + (w+x)^2 + w^2 - 1) \geq 0$$

$$(3w+2x+y)^2 - 4((w+x+y)^2 + (w+x)^2 + w^2 - 1) \geq 0$$

$$4 \geq 4((w+x+y)^2 + (w+x)^2 + w^2) - (3w+2x+y)^2$$

$$= (3w^2 + 2wy + 3y^2) + 4x(w+x+y)$$

$$\geq 8wy + 4x(w+x+y) \quad (\text{由算幾不等式, } 3w^2 + 3y^2 \geq 6wy)$$

$$= 4(x(w+x+y) + 2wy)$$

$$\Rightarrow x(w+x+y) + 2wy \leq 1 \text{——— ①}$$

$$S(a, b, c, d) = -wxy(w+x+y)$$

$$\text{由①知 } \frac{1}{2} \geq \frac{x(w+x+y) + 2wy}{2},$$

$$\text{再由算幾不等式知 } \frac{1}{2} \geq \frac{x(w+x+y) + 2wy}{2} \geq \sqrt{2wxy(w+x+y)}$$

$$2wxy(w+x+y) \leq \frac{1}{4}$$

$$-wxy(w+x+y) = S(a, b, c, d) \geq -\frac{1}{8}$$

$$"=" \text{成立於 } x(w+x+y) = 2wy, w=y, wxy(w+x+y) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x(2w+x) = 2w^2, w^2x(2w+x) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow w^4 = \frac{1}{16}, w = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{可以得到一解 } (a, b, c, d) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right)$$

$\therefore$ 所求為 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ $\therefore$ 可得出另外三組解

$S(b,c,d,a), S(c,d,a,b), S(d,a,b,c)$ ，同乘負號其結果不變

$\Rightarrow$ 故最小值為 $-\frac{1}{8}$ ，一共 8 組解

$$(a,b,c,d) = \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee \pm \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee$$

$$\pm \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \vee \pm \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)$$

(二)未知數個數為 2 個

題目：實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 1$ 。試決定 $(x-y)(y-x)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (x, y) 數值。

解法：

1.解法一(代數)：

令 $x-y=k, x=y+k$ ，所求 $= -k^2$

$$(y+k)^2 + y^2 = 1, 2y^2 + 2ky + k^2 - 1 = 0$$

$$\because y \in \mathbb{R} \therefore D \geq 0, 4k^2 - 8(k^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow -k^2 \geq -2$$

$$\text{故最小值為 } -2, \text{ 成立於 } k = \pm\sqrt{2}, (x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

2.解法二(幾何)：

$$\text{令 } (x-y)(y-x) = k \Rightarrow (x-y)^2 = -k, x-y = \pm\sqrt{-k}$$

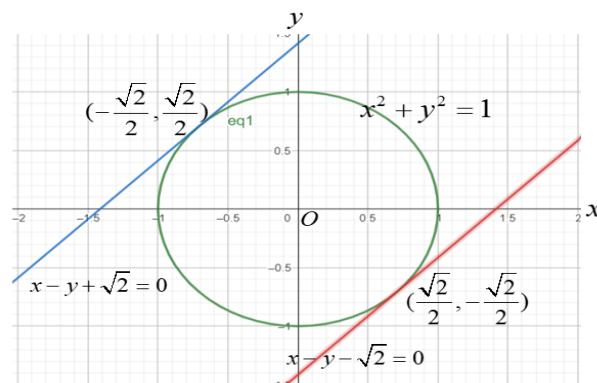
設直線 $L: x-y = \pm\sqrt{-k}$ ， L 的斜率為 1， x 截距為 $\pm\sqrt{-k}$ 且與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相交

因此當 k 有最小值時， $L: x-y = \pm\sqrt{-k}$ 與

圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，如圖一

將 $x^2 + y^2 = 1$ 對 x 微分， $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$$\text{令 } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = -y \text{ 代入 } x^2 + y^2 = 1$$



圖一

$$\text{得 } (x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ 故最小值為 } -2$$

二、三個未知數的二種解法

題目：實數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。試決定 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (x, y, z) 數值。

(一)解法一(代數)：

不失一般性，令 $x \geq y \geq z$, $x-y=a, y-z=b, a, b > 0$

所求 $= -ab(a+b)$

$x = z+a+b, y = z+b$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\Rightarrow (z+a+b)^2 + (z+b)^2 + z^2 = 1$$

$$3z^2 + (2a+4b)z + a^2 + 2b^2 + 2ab - 1 = 0$$

$$\because z \in \mathbb{R} \quad \therefore (a+2b)^2 - 3(a^2 + 2b^2 + 2ab - 1) \geq 0$$

$$-2a^2 - 2ab - 2b^2 + 3 \geq 0$$

$$3 \geq 2a^2 + 2b(a+b)$$

$$\Rightarrow 3 \geq 2a^2 + b(a+b) + b(a+b) \geq 3\sqrt[3]{2[ab(a+b)]^2}$$

$$1 \geq 2[ab(a+b)]^2$$

$$ab(a+b) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-ab(a+b) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(x-y)(y-z)(z-x) \text{ 的最小值為 } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$"=" \text{ 成立於 } (x, y, z) \vee (y, z, x) \vee (z, x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(二)解法二(幾何圖形)：

1. 【引理一】切平面的求法

若 $z = f(x, y)$ 的偏導函數均為連續，則在 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切線所形成的平面會包含所

有過點 P 的曲線的切線，稱此平面為曲面 $z = f(x, y)$ 在點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的

$$\text{切平面方程式： } z - z_0 = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

2.解法：

令所求 $= k$ ， $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $(x - y)(y - z)(z - x) = k$ 的交點為：

$$P_1(a, b, c) \vee P_2(c, a, b) \vee P_3(b, c, a)$$

令 $O(0, 0, 0)$ 為 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的圓心， $\overline{OP_1} = (a, b, c)$ 為 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 、

$(x - y)(y - z)(z - x)$ 在 (a, b, c) 之法向量

$$(x - y)(y - z)(z - x) = k, \quad yz^2 - xz^2 + x^2z - y^2z + xy^2 - x^2y - k = 0 \cdots (*)$$

(*)式對 x 偏微分：

$$2yz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - z^2 - 2xz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2xz + x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 - 2xy = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} (x^2 - y^2 + 2yz - 2xz) = z^2 - y^2 + 2xy - 2xz$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z^2 - y^2 + 2xy - 2xz}{x^2 - y^2 + 2yz - 2xz}$$

(*)式對 y 偏微分：

$$2yz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + z^2 - 2xz \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2yz + x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 + 2xy = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} (x^2 - y^2 + 2yz - 2xz) = x^2 - z^2 + 2yz - 2xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - z^2 + 2yz - 2xy}{x^2 - y^2 + 2yz - 2xz}$$

$\therefore$ 法向量為 $\overline{OP_1} = (a, b, c)$ 且過 (a, b, c)

$\therefore$ 其切平面方程式為 $a \cdot (x - a) + b \cdot (y - b) + c \cdot (z - c) = 0$

$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

又其切平面可表示為 $z - c = \frac{\partial z}{\partial x} (x - a) + \frac{\partial z}{\partial y} (y - b)$ ($c \neq 0$)

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b,c)} = \frac{c^2 - b^2 + 2ab - 2ac}{a^2 - b^2 + 2bc - 2ac} = -\frac{a}{c} \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b,c)} = \frac{a^2 - c^2 + 2bc - 2ab}{a^2 - b^2 + 2bc - 2ac} = -\frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 + c^3 - ab^2 - 2a^2c - 2ac^2 - b^2c + 4abc = 0 \\ -b^3 - c^3 + a^2b + a^2c + 2b^2c + 2bc^2 - 4abc = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

由此聯立方程式可解得 (a, b, c)

分情況討論其解：

(1) $a = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} c^3 - b^2c = 0 \\ -b^3 - c^3 + 2b^2c + 2bc^2 = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(c+b)(c-b) = 0 \\ -(b+c)(b^2 - 3bc + c^2) = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$\because b = c$ 時， $(b^2 - 3bc + c^2) = 0$ 和 $b^2 + c^2 = 1$ 無法同時成立

$\therefore b = -c$

$$(a, b, c) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \because \text{要求最小值} \quad \therefore (a, b, c) = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(2) $b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -c^3 + a^2c = 0 \\ a^3 + c^3 - 2a^2c - 2ac^2 = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(a+c)(a-c) = 0 \\ (a+c)(a^2 - 3ac + c^2) = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$\because a = c$ 時， $(a^2 - 3ac + c^2) = 0$ 和 $a^2 + c^2 = 1$ 無法同時成立

$\therefore b = -c$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \because \text{要求最小值} \quad \therefore (a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(3) $c = 0$

$\because$ 上述設切平面時 $c \neq 0$

$\therefore$ 要重新設新的切平面

$$(x-y)(y-z)(z-x)=k, \quad yz^2-xz^2+x^2z-y^2z+xy^2-x^2y-k=0 \dots (*)$$

(*)式對 y 偏微分

$$z^2 - z^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + 2xz \cdot \frac{\partial x}{\partial y} - 2yz + y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + 2xy - 2xy \cdot \frac{\partial x}{\partial y} - x^2 = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y^2 - z^2 + 2xz - 2xy) = x^2 - z^2 + 2yz - 2xy$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x^2 - z^2 + 2yz - 2xy}{y^2 - z^2 + 2xz - 2xy}$$

(*)式對 z 偏微分

$$2yz - z^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial z} - 2xz + 2xz \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + x^2 - y^2 + y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial z} - 2xy \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(y^2 - z^2 + 2xz - 2xy) = y^2 - x^2 + 2xz - 2yz$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{y^2 - x^2 + 2xz - 2yz}{y^2 - z^2 + 2xz - 2xy}$$

又其切平面可表示為 $x - a = \frac{\partial x}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial x}{\partial z}(z - c) \quad (a \neq 0)$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial x}{\partial y} \right|_{(a,b,c)} = \frac{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}{b^2 - c^2 + 2ac - 2ab} = -\frac{b}{a} \\ \left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{(a,b,c)} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - 2bc}{b^2 - a^2 + 2ac - 2ab} = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 - 2a^2b - 2ab^2 - ac^2 - bc^2 + 4abc = 0 \\ -a^3 - c^3 + ab^2 + 2a^2c - 2ac^2 + b^2c - 4abc = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$c=0$ 代入

$$\Rightarrow \begin{cases} -a^3 + ab^2 = 0 \\ a^3 + b^3 - 2a^2b - 2ab^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(b+a)(b-a) = 0 \\ (a+b)(a^2 - 3ab + b^2) = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore a=b$ 時, $(a^2 - 3ab + b^2) = 0$ 和 $a^2 + b^2 = 1$ 無法同時成立

$$\therefore a = -b$$

$$\Rightarrow (a, b, c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \vee \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad \because \text{要求最小值} \quad \therefore (a, b, c) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$(4) abc \neq 0$$

$$\begin{cases} a^3 + c^3 - ab^2 - 2a^2c - 2ac^2 - b^2c + 4abc = 0 \\ -b^3 - c^3 + a^2b + a^2c + 2b^2c + 2bc^2 - 4abc = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$n=3$ 時 $abc \neq 0$ 無實數解之證明

$$\begin{cases} a^3 + c^3 - ab^2 - 2a^2c - 2ac^2 - b^2c + 4abc = 0 \\ -b^3 - c^3 + a^2b + a^2c + 2b^2c + 2bc^2 - 4abc = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

第一式和第二式同 $\div abc$

$$\begin{cases} \frac{a^2}{bc} + \frac{c^2}{ab} - \frac{b}{c} - 2 \cdot \frac{a}{b} - 2 \cdot \frac{c}{b} - \frac{b}{a} + 4 = 0 \\ -\frac{b^2}{ac} - \frac{c^2}{ab} + \frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 2 \cdot \frac{b}{a} + 2 \cdot \frac{b}{a} - 4 = 0 \end{cases}, \quad \text{令 } \frac{b}{a} = m, \frac{c}{b} = n, \frac{c}{a} = mn$$

$$\begin{cases} \frac{1}{m^2n} + mn^2 - \frac{1}{n} - \frac{2}{m} - 2n - m + 4 = 0 \\ -\frac{m}{n} - mn^2 + \frac{1}{mn} + \frac{1}{m} + 2m + 2mn - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{兩式相加得到 } \frac{1}{m^2n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{m} - 2n - m - \frac{m}{n} + \frac{1}{mn} + \frac{1}{m} + 2m + 2mn = 0$$

同乘 m^2n

$$2m^3n^2 - 2m^2n^2 + m^3n - mn - m^3 - m^2 + m + 1 = 0$$

$$(2m^3 - 2m^2)n^2 + (m^3 - m)n - m^3 - m^2 + m + 1 = 0$$

$$\text{判別式 } D = (m^3 - m)^2 + 4(2m^3 - 2m^2)(m^3 + m^2 - m - 1)$$

$$= m^2(m^2 - 1)^2 + 8m^2(m - 1)(m + 1)(m^2 - 1)$$

$$= 9m^2(m^2 - 1)^2 \geq 0$$

$$\therefore n = \frac{-(m^3 - m) \pm \sqrt{9m^2(m^2 - 1)^2}}{2(2m^3 - 2m^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-m(m^2-1) \pm 3m(m^2-1)}{4m^2(m-1)} \\
&= \frac{-(m+1) \pm 3(m+1)}{4m} \\
&= -\frac{m+1}{m} \vee \frac{m+1}{2m}
\end{aligned}$$

$$(I) n = -\frac{m+1}{m}$$

$$\frac{c}{b} = -\frac{\frac{b}{a}+1}{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{a+b}{b} \Rightarrow c = -(a+b)$$

$$c = -(a+b) \text{ 代入 } a^3 + c^3 - ab^2 - 2a^2c - 2ac^2 - b^2c + 4abc = 0$$

$$a(a^2 - b^2) - (a+b)^3 + 2a^2(a+b) - 2a(a+b)^2 + b^2(a+b) - 4ab(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^2 - ab - a^2 + ab - b^2 + 2a^2 - 2a^2 - 2ab + b^2 - 4ab) = 0$$

$$-6(a+b)ab = 0$$

$$a+b=0 \vee a=0 \vee b=0, \because c=-(a+b) \therefore \text{都不合}$$

$$(II) n = \frac{m+1}{2m}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{b}{a}+1}{2 \cdot \frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{a+b}{2b} \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ 代入 } a^3 + c^3 - ab^2 - 2a^2c - 2ac^2 - b^2c + 4abc = 0$$

$$a(a^2 - b^2) + \frac{1}{8}(a+b)^3 - a^2(a+b) - \frac{1}{2}a(a+b)^2 - \frac{1}{2}b^2(a+b) + 2ab(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a^2 - ab + \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}ab + \frac{1}{8}b^2 - a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b^2 + 2ab) = 0$$

$$(a+b)(-\frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{8}ab - \frac{3}{8}b^2) = 0$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0$$

$$a^2 - ab + b^2 = 0 \vee a+b=0 (\text{不合}, \because c = \frac{a+b}{2})$$

$$\text{若 } a^2 - ab + b^2 = 0$$

$$\because b \neq 0 \quad \therefore \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 1 = 0, \quad D = 1 - 4 < 0, \quad \text{因此 } \frac{a}{b} \text{ 無實數解}$$

由(I)(II)知，當 $abc \neq 0$ 時， (a, b, c) 無實數解

故 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的最小值為 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$"=" \text{成立於 } (x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

3. 將其切平面圖形畫出來(利用 Desmos 繪圖軟體)

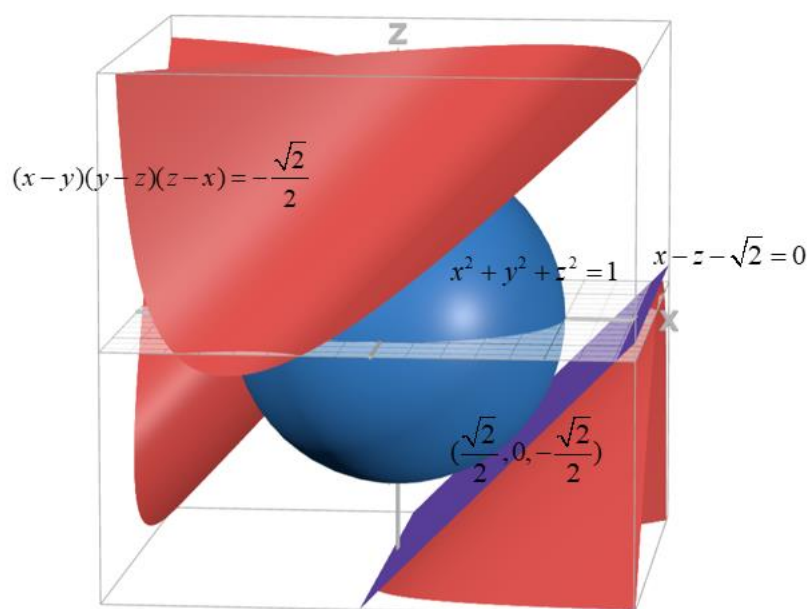
$$(1) \text{切點為 } P_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\because \text{法向量為 } \overrightarrow{OP_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \text{ 且過 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\therefore \text{其切平面方程式為 } \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot (y - 0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 0$$

$$x - z - \sqrt{2} = 0$$

曲面及切平面方程式、切點如圖二所示



圖二

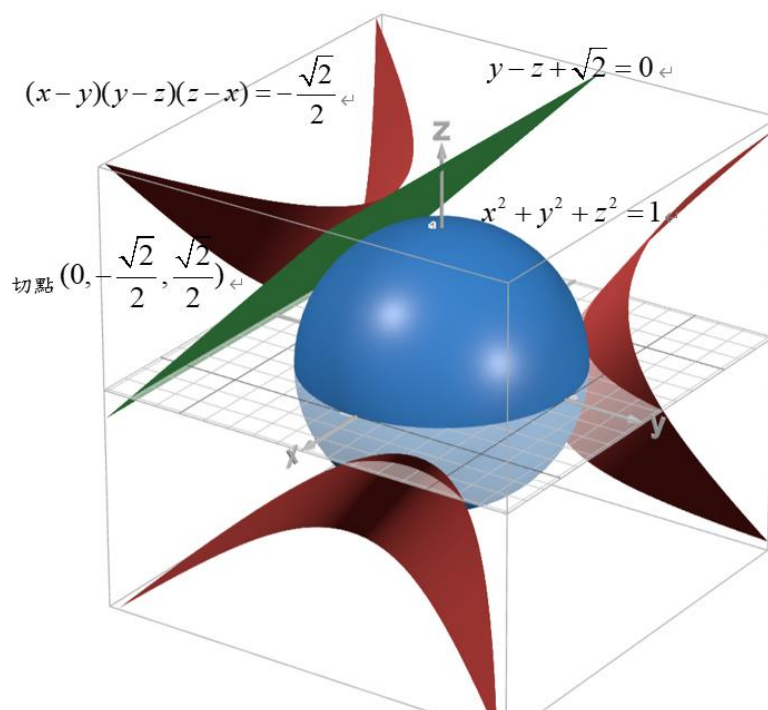
(2)切點為 $P_2\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore$ 法向量為 $\overline{OP_2} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 且過 $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore$ 其切平面方程式為 $0 \cdot (x-0) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(y - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

$$y - z + \sqrt{2} = 0$$

曲面及切平面方程式、切點如圖三所示



圖三

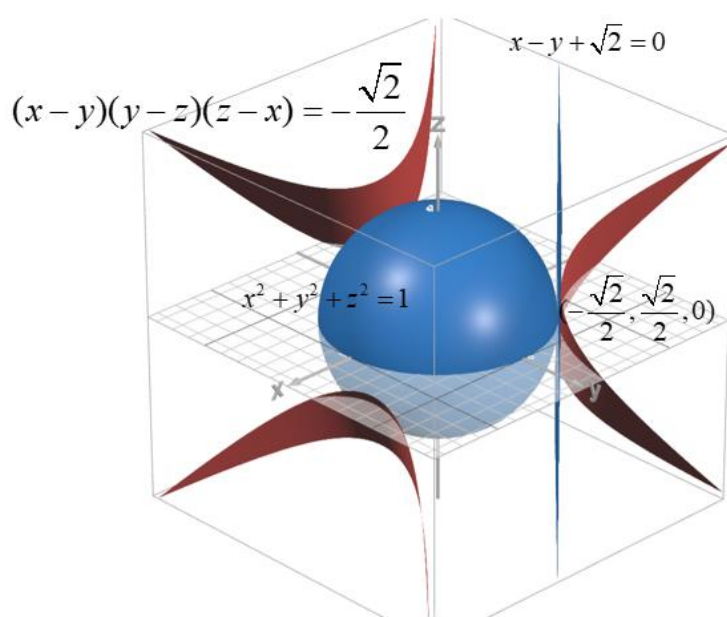
(3)切點為 $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$\therefore$ 法向量為 $\overline{OP_3} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 且過 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

$$\therefore \text{其切平面方程式為} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 \cdot (z - 0) = 0$$

$$x - y + \sqrt{2} = 0$$

曲面及切平面方程式、切點如圖四所示



圖四

三、五個未知數的解法

題目：實數 x, y, z, w, v 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 1$ ，試求出

$S_5 = (x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x)$ 的最小值及滿足最小值的 (x, y, z, w, v) 數值。

解法：設當最小值發生時， $(x, y, z, w, v) = (a, b, c, d, e)$

設 $k \in \mathbb{R}$

將 $(x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x) = k$ 視為 $v = f(x, y, z, w)$, $e \neq 0$

$$a \cdot (x-a) + b \cdot (y-b) + c \cdot (z-c) + d \cdot (w-d) + e \cdot (x-e) = 0$$

$$ax + by + cz + dw + ev = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

$$v - e = \frac{\partial v}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial v}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial v}{\partial z}(z-c) + \frac{\partial v}{\partial w}(w-d)$$

比較係數可知， $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a}{e}$ ， $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{b}{e}$ ， $\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{c}{e}$ ， $\frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{d}{e}$

將 $(x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x)=k$ 對 x 偏微分

$$(y-z)(z-w)\left[(x-y)(w-v)(v-x)\right]' = 0$$

$$(w-v)(v-x) + (x-y)\left[\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)(v-x) + (w-v)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - 1\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x+w-2v)(x-y) = -(w-v)(y+v-2x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{(w-v)(y+v-2x)}{(x+w-2v)(x-y)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{(a,b,c,d,e)} = -\frac{(d-e)(b+e-2a)}{(a-b)(a+d-2e)} = -\frac{a}{e} \dots\dots\dots ①$$

將 $(x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x)=k$ 對 y 偏微分

$$(z-w)\left[(x-y)(y-z)(w-v)(v-x)\right]' = 0$$

$$\left[-(y-z) + (x-y)\right](w-v)(v-x) + (x-y)(y-z)\left[\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right)(v-x) + (w-v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x+w-2v)(x-y)(y-z) = -(w-v)(v-x)(x+z-2y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{(w-v)(v-x)(x+z-2y)}{(x-y)(y-z)(x+w-2v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{(a,b,c,d,e)} = -\frac{(d-e)(e-a)(a+c-2b)}{(a-b)(b-c)(a+d-2e)} = -\frac{b}{e} \dots\dots\dots ②$$

將 $(x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x)=k$ 對 z 偏微分

$$(x-y)\left[(y-z)(z-w)(w-v)(v-x)\right]' = 0$$

$$\left[-(z-w) + (y-z)\right](w-v)(v-x) + (y-z)(z-w)\left[\left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)(v-x) + (w-v)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(x+w-2v)(y-z)(z-w) = -(w-v)(v-x)(y+w-2z)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{(w-v)(v-x)(y+w-2z)}{(x+w-2v)(y-z)(z-w)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{(a,b,c,d,e)} = -\frac{(d-e)(e-a)(b+d-2c)}{(b-c)(c-d)(a+d-2e)} = -\frac{c}{e} \dots\dots\dots ③$$

將 $(x-y)(y-z)(z-w)(w-v)(v-x) = k$ 對 w 偏微分

$$(x-y)(y-z)\left[(z-w)(w-v)(v-x)\right]' = 0$$

$$-(w-v)(v-x) + (z-w)\left[\left(1 - \frac{\partial v}{\partial w}\right)(v-x) + (w-v)\left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial w}(x+w-2v)(z-w) = -(v-x)(z+v-2w)$$

$$\frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{(v-x)(z+v-2w)}{(z-w)(x+w-2v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial w}\bigg|_{(a,b,c,d,e)} = -\frac{(e-a)(c+e-2d)}{(c-d)(a+d-2e)} = -\frac{d}{e} \dots\dots\dots ④$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 1$$

$$① \div ② \frac{(b-c)(b+e-2a)}{(e-a)(a+c-2b)} = \frac{a}{b}$$

假設 $a = 0$

$$(b-c)(b+e) = 0 \Rightarrow b = c \vee b = -e$$

$$b = c \text{ 不合 } (\because (a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a) < 0)$$

若 $b = -e$ ，代入②

$$\frac{(b+d)(c-2b)}{(b-c)(d+2b)} = -1$$

$$bc - 2b^2 + cd - 2bd = -bd - 2b^2 + cd + 2bc \Rightarrow bc + bd = 0 \Rightarrow b(c+d) = 0$$

$$c+d = 0 \vee b = 0 \text{ (不合, } \because a-b \neq 0)$$

則 $c = -d$

因此可假設其解為 $(0, b, c, -c, -b)$, $S_5 = 2b^2c(b-c)^2 \therefore c < 0$

將 $e = -b$, $d = -c$ 代入③、 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 1$

$$\textcircled{3} : -b(b-c)(-b)(b-3c) = c(b-c)2c(2b-c)$$

$$b^3 - 3b^2c = 4bc^2 - 2c^3 \Rightarrow b^3 - 3b^2c - 4bc^2 + 2c^3 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$2b^2 + 2c^2 = 1 \Rightarrow 2c^2 = 1 - 2b^2 \text{ 代入 } \textcircled{5}$$

$$b^3 - 3b^2c - 2b(1 - 2b^2) + c(1 - 2b^2) = 0$$

$$5b^3 - 5b^2c - 2b + c = 0$$

$$c = \frac{5b^3 - 2b}{5b^2 - 1} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - b^2} \text{ (取 -)}$$

$$\left(\frac{5b^3 - 2b}{5b^2 - 1} \right)^2 = \frac{1}{2} - b^2, \text{ 令 } k = b^2$$

$$\frac{25k^3 - 20k^2 + 4k}{25k^2 - 10k + 1} = \frac{1}{2} - k \Rightarrow 100k^3 - 85k^2 + 20k - 1 = 0$$

只能由公式解求得 b^2 , 無法化簡, 另外還有每一項都不等於 0 的情況尚未求出。

四、未知數個數為 n 個

題目： $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$, $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n) \times (a_n - a_1)$ 的

最小值問題 ($n \geq 4$)

(一)用代數解, 若用與前面類似的方法不適用原因：

當 $n = 5$ 時

可以令 $k_1 = a_1 - a_2$, $k_2 = a_2 - a_3$, $k_3 = a_3 - a_4$, $k_4 = a_4 - a_5$

$$(a_5 + k_4 + k_3 + k_2 + k_1)^2 + (a_5 + k_4 + k_3 + k_2)^2 + (a_5 + k_4 + k_3)^2 + (a_5 + k_4)^2 + a_5^2 = 1$$

$$5a_5^2 + (8k_4 + 6k_3 + 4k_2 + 2k_1)a_5 + (k_4 + k_3 + k_2 + k_1)^2 + (k_4 + k_3 + k_2)^2 + (k_4 + k_3)^2 + (k_4)^2 - 1 = 0$$

$$\because a_5 \in \mathbb{R}$$

$$\therefore (8k_4 + 6k_3 + 4k_2 + 2k_1)^2 - 20[(k_4 + k_3 + k_2 + k_1)^2 + (k_4 + k_3 + k_2)^2 + (k_4 + k_3)^2 + (k_4)^2 - 1] \geq 0$$

$$5 \geq 5[(k_4 + k_3 + k_2 + k_1)^2 + (k_4 + k_3 + k_2)^2 + (k_4 + k_3)^2 + (k_4)^2] - (4k_4 + 3k_3 + 2k_2 + k_1)^2$$

$$5 \geq 4k_4^2 + 6k_3^2 + 6k_2^2 + 4k_1^2 + 6k_4k_3 + 6k_4k_2 + 2k_4k_1 + 8k_3k_2 + 4k_3k_1 + 6k_2k_1$$

難以使用算幾不等式

(二)採用新方法

令 $S_n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n) \times (a_n - a_1)$ ，其中 S_n^* 為 S_n 的最小值

1. 【定理一】： S_n 的最小值一定存在

證明：

$$\because a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = 1, \therefore -1 \leq a_1 \leq 1, -1 \leq a_2 \leq 1, \dots, -1 \leq a_n \leq 1$$

$$-2^n \leq (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n) \times (a_n - a_1) \leq 2^n$$

由實數的完備性，因為 S_n 的最小下界存在，因此 S_n 的最小值一定存在

2. 【定理二】： $S_n^* < 0$

證明(舉例法)：

$$\text{當 } (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{4}, \dots, \frac{\sqrt{2^{n-2}}}{2^{n-2}}, \frac{\sqrt{3 \times 2^{n-3}}}{3 \times 2^{n-3}}, \frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}}}{3 \times 2^{n-2}} \right) \text{ 時,}$$

$$S_n^* \leq S_n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \dots (a_{n-1} - a_n) \times (a_n - a_1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{4}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{4}}{4} - \frac{\sqrt{8}}{8} \right) \dots \left(\frac{\sqrt{2^{n-3}}}{2^{n-3}} - \frac{\sqrt{2^{n-2}}}{2^{n-2}} \right) \times \left(\frac{\sqrt{2^{n-2}}}{2^{n-2}} - \frac{\sqrt{3 \times 2^{n-3}}}{3 \times 2^{n-3}} \right) \\ &\times \left(\frac{\sqrt{3 \times 2^{n-3}}}{3 \times 2^{n-3}} - \frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}}}{3 \times 2^{n-2}} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}}}{3 \times 2^{n-2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{4}}{4} \right)^{n-3} \times \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^1 \dots \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-2} \right) \right) \times \left(\frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 \times 2^{n-2}} \right) \\ &\times \left(\frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}} (\sqrt{2} - \sqrt{1})}{3 \times 2^{n-2}} \right) \times \left(\frac{\sqrt{3 \times 2^{n-2}} (1 - \sqrt{3 \times 2^{n-3}})}{3 \times 2^{n-2}} \right) < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n^* < 0$$

3. 【定理三】：當 S_n 有最小值時， $\sum_{k=1}^n a_k = 0$

證明(反證法)：

設有 S_n 最小值時， $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$

若 $a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^* \neq 0$ ，且 $(a_1^* - a_2^*)(a_2^* - a_3^*) \dots (a_{n-1}^* - a_n^*) \times (a_n^* - a_1^*)$ 小於零，

$$\text{令 } \delta = \frac{a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*}{n},$$

$$\begin{aligned} & \text{則 } (a_1^* - \delta)^2 + (a_2^* - \delta)^2 + \dots + (a_n^* - \delta)^2 \\ &= (a_1^*)^2 + (a_2^*)^2 + \dots + (a_n^*)^2 - 2\delta(a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*) + n\delta^2 \\ &= (a_1^*)^2 + (a_2^*)^2 + \dots + (a_n^*)^2 - \frac{(a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*)^2}{n} < (a_1^*)^2 + (a_2^*)^2 + \dots + (a_n^*)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{令 } (a_1^* - \delta)^2 + (a_2^* - \delta)^2 + \dots + (a_n^* - \delta)^2 = k^2, \text{ 其中 } 0 \leq k < 1$$

$$\text{當 } 0 < k < 1, \text{ 設 } (a_1', a_2', \dots, a_n') = \left(\frac{a_1^* - \delta}{k}, \frac{a_2^* - \delta}{k}, \dots, \frac{a_n^* - \delta}{k} \right),$$

$$\begin{aligned} & (a_1^* - a_2^*)(a_2^* - a_3^*) \dots (a_{n-1}^* - a_n^*) \times (a_n^* - a_1^*) \\ & > \left(\frac{a_1^* - a_2^*}{k} \right) \left(\frac{a_2^* - a_3^*}{k} \right) \dots \left(\frac{a_{n-1}^* - a_n^*}{k} \right) \times \left(\frac{a_n^* - a_1^*}{k} \right) \\ &= (a_1' - a_2')(a_2' - a_3') \dots (a_{n-1}' - a_n') \times (a_n' - a_1') \end{aligned}$$

$\Rightarrow S_n^*$ 此時明顯不是 S_n 的最小值 ($\rightarrow \leftarrow$)

$$\text{又當 } k=0 \text{ 時, } (a_1^* - \delta)^2 + (a_2^* - \delta)^2 + \dots + (a_n^* - \delta)^2 = k^2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1^* = a_2^* = \dots = a_n^* = \delta$$

$$\Rightarrow (a_1^* - a_2^*)(a_2^* - a_3^*) \dots (a_{n-1}^* - a_n^*) \times (a_n^* - a_1^*) = 0,$$

$\Rightarrow S_n^*$ 此時明顯不是 S_n 的最小值 ($\rightarrow \leftarrow$)

因此 S_n 有最小值時， $\sum_{k=1}^n a_k = 0$

4. $n \equiv 2 \pmod{4}$ 的特殊解法

令 $n = 2m$

S_{2m} 的最小值發生時，

$(a_1 + (-a_2))((-a_2) + a_3) \times \cdots \times (a_{2m-1} + (-a_{2m}))((-a_{2m}) + a_1) = -S_{2m}$ 有最大值。

$\because 0 < -S_{2m}$

$$\begin{aligned} & \therefore (a_1 + (-a_2))((-a_2) + a_3) \times \cdots \times (a_{2m-1} + (-a_{2m}))((-a_{2m}) + a_1) \\ &= |(a_1 + (-a_2))| |((-a_2) + a_3)| \times \cdots \times |(a_{2m-1} + (-a_{2m}))| |((-a_{2m}) + a_1)| \end{aligned}$$

(I) 由三角不等式可知，

$$\begin{aligned} & |(a_1 + (-a_2))| |((-a_2) + a_3)| \times \cdots \times |(a_{2m-1} + (-a_{2m}))| |((-a_{2m}) + a_1)| \\ & \leq (|a_1| + |a_2|)(|a_2| + |a_3|) \times \cdots \times (|a_{2m-1}| + |a_{2m}|)(|a_{2m}| + |a_1|) \end{aligned}$$

(其中等號成立於 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = -a_2 = -a_4 = \cdots = -a_{2m}$)

(II) 由柯西不等式可知，

$$\begin{aligned} & (|a_1| + |a_2|)(|a_2| + |a_3|) \times \cdots \times (|a_{2m-1}| + |a_{2m}|)(|a_{2m}| + |a_1|) \\ & \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(1^2 + 1^2)} \sqrt{(a_2^2 + a_3^2)(1^2 + 1^2)} \times \cdots \times \sqrt{(a_{2m}^2 + a_1^2)(1^2 + 1^2)} \\ & = 2^m \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) \times \cdots \times (a_{2m}^2 + a_1^2)} \end{aligned}$$

(其中等號成立於 $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \cdots = a_{2m}^2$)

(III) 由算幾不等式可知，

$$(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) \times \cdots \times (a_{2m}^2 + a_1^2) \leq \left(\frac{(a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) + \cdots + (a_{2m}^2 + a_1^2)}{2m} \right)^{2m} = \left(\frac{1}{m} \right)^{2m}$$

(其中等號成立於 $a_1^2 + a_2^2 = a_2^2 + a_3^2 = \cdots = a_{2m}^2 + a_1^2$)

因此由(I) (II) (III)可知，

$$(a_1 + (-a_2))((-a_2) + a_3) \times \cdots \times (a_{2m-1} + (-a_{2m}))((-a_{2m}) + a_1) \leq 2^m \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^{2m}} = \frac{2^m}{m^m} = \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$$

(其中等號成立於 $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2m-1} = -a_2 = -a_4 = \cdots = -a_{2m} = \pm n^{\frac{1}{2}}$)

故此時 S_n 有最小值 $-\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$

5. n 為其他值

目前還無法求得，只能利用 **Lagrange multiplier** 得知局部最小值

設 $n = k$ 時，最小值成立於 $(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_k^*)$

則 $n = (2m+1)k$ 時，有局部最小值成立於

$$a_1 = a_{1+k} = a_{1+2k} = \cdots = a_{1+2mk} = \frac{a_1^*}{\sqrt{2m+1}}$$

$$a_2 = a_{2+k} = a_{2+2k} = \cdots = a_{2+2mk} = \frac{a_2^*}{\sqrt{2m+1}}$$

...

$$a_k = a_{2k} = a_{3k} = \cdots = a_{(2m+1)k} = \frac{a_k^*}{\sqrt{2m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}$$

證明：

$n = k$ 時

$$\frac{S_k}{(a_{t-1} - a_t)(a_t - a_{t+1})} (a_{t+1} + a_{t-1} - 2a_t) = 2\lambda a_t, \quad t=1, 2, \dots, k, \quad a_0 = a_k, \quad a_1 = a_{k+1}$$

各式 λ 相等

因為對 a_t 偏微分只跟 a_{t-1} 和 a_{t+1} 有關，設定通解時讓 k 個一組循環，並且每項都

除以 $\sqrt{2m+1}$ ，可得

$$\frac{S_n}{\left(\frac{a_{t-1}}{\sqrt{2m+1}} - \frac{a_t}{\sqrt{2m+1}}\right)\left(\frac{a_t}{\sqrt{2m+1}} - \frac{a_{t+1}}{\sqrt{2m+1}}\right)} \left(\frac{a_{t+1}}{\sqrt{2m+1}} + \frac{a_{t-1}}{\sqrt{2m+1}} - 2\frac{a_t}{\sqrt{2m+1}}\right) = 2\lambda \frac{a_t}{\sqrt{2m+1}}$$

$$(2m+1) \frac{S_n}{(a_{t-1} - a_t)(a_t - a_{t+1})} (a_{t+1} + a_{t-1} - 2a_t) = 2\lambda a_t, \quad t=1, 2, \dots, k, \quad a_0 = a_k, \quad a_1 = a_{k+1}$$

各式 λ 一定相等，此時有局部最小值，但無法說明 $n \equiv k \pmod{2k}$ 為一組通解。

五、相減與相加相關研究

題目： $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ， $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ ，試求出 $T_n = (a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_n + a_1)$ 的最小值問題。

(一)與 $S_n = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \cdots (a_n - a_1)$ 之關聯性

1. $n \equiv 0 \pmod{4}$

將 S_n 的 a_{2k} 改成 $-a_{2k}$ $\left(k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\right)$ ，

$$\begin{aligned} & (a_1 - (-a_2))((-a_2) - a_3) \cdots (a_{n-1} - (-a_n))((-a_n) - a_1) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} (a_1 - (-a_2))((-a_2) - a_3) \cdots (a_{n-1} - (-a_n))((-a_n) - a_1) \\ &= (a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \end{aligned}$$

因此 T_n 的最小值問題與 S_n 的最小值問題相同，

T_n 的最小值與 S_n 的最小值兩者可互推。

2. $n \equiv 2 \pmod{4}$

將 S_n 的 a_{2k} 改成 $-a_{2k}$ $\left(k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\right)$ ，

$$\begin{aligned} & (a_1 - (-a_2))((-a_2) - a_3) \cdots (a_{n-1} - (-a_n))((-a_n) - a_1) \\ &= (-1)^{\frac{n}{2}} (a_1 - (-a_2))((-a_2) - a_3) \cdots (a_{n-1} - (-a_n))((-a_n) - a_1) \\ &= -(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \end{aligned}$$

因此 T_n 的最小值問題與 S_n 的最大值問題相同，

T_n 的最小值與 S_n 的最大值兩者可互推。

(二) $n=2,3,4$ 的解

1. $n=2$

實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 1$ 。試決定 $(x+y)(y+x)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (x, y) 數值。

解法： $(x+y)(y+x) = (x+y)^2 \geq 0$ ，" $=$ " 成立於 $x = -y$

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

故最小值為 0，成立於 $(x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

2. $n=3$

題目：實數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。試決定 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 的最小值，並找出所有得到該最小值的 (x, y, z) 數值。

解法：令 $(x+y)(y+z)(z+x) = k$ 與 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切於 (a, b, c)

令切平面 $E_1: a \cdot (x-a) + b \cdot (y-b) + c \cdot (z-c) = 0$

$$ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

也可表示為 $z - c = \frac{\partial z}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-b)$ ($c \neq 0$)

因此經過移項化簡， $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b,c)} = -\frac{a}{c}$ ， $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a,b,c)} = -\frac{b}{c}$

將 $(x+y)(y+z)(z+x) = k$ 拆開

$$x^2y + x^2z + xy^2 + 2xyz + xz^2 + y^2z + yz^2 = k$$

對 x 偏微分

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2}{x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + 2xz}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b,c)} = -\frac{b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc} = -\frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow c^3 - a^3 + (2a + 2b)c^2 + (b^2 - 2a^2)c - ab^2 - 2a^2b = 0 \dots\dots\dots ①$$

對 y 偏微分

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}{x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a,b,c)} = -\frac{a^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc} = -\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow c^3 - b^3 + (2a + 2b)c^2 + (a^2 - 2b^2)c - a^2b - 2ab^2 = 0 \dots\dots\dots ②$$

$$\begin{cases} c^3 - a^3 + (2a + 2b)c^2 + (b^2 - 2a^2)c - ab^2 - 2a^2b = 0 \\ c^3 - b^3 + (2a + 2b)c^2 + (a^2 - 2b^2)c - a^2b - 2ab^2 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

分情況討論：

(1) $a = 0$

$$\text{由①知， } c^3 + 2bc^2 + b^2c = 0$$

$$c(b+c)^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \vee b = -c$$

$$\text{由②知， } c^3 - b^3 + 2bc^2 - 2b^2c = 0$$

$$(c-b)(c^2 + 3bc + b^2) = 0$$

$$\text{若 } c = 0$$

$$\begin{cases} (c-b)(c^2 + 3bc + b^2) = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ 不同時成立}$$

$$\text{若 } b = -c$$

$$2c(-c^2) = 0 \Rightarrow b, c = 0 (\text{不合})$$

因此 $a = 0$ 不合

(2) $b = 0$

與 $a = 0$ 時同理， $b = 0$ 也不合，因為①、②式為 a, b 互換的關係

又因前面使用切平面方程式時， $c \neq 0$

因此 a, b, c 都 $\neq 0$

(3) $a, b, c \neq 0$

將①、②式同 $\div abc$

$$\begin{cases} \frac{c^2}{ab} - \frac{a^2}{bc} + 2 \cdot \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{c}{b} + \frac{b}{a} - 2 \cdot \frac{a}{b} - \frac{b}{c} - 2 \cdot \frac{a}{c} = 0 \\ \frac{c^2}{ab} - \frac{b^2}{ac} + 2 \cdot \frac{c}{a} + 2 \cdot \frac{c}{b} + \frac{a}{b} - 2 \cdot \frac{b}{a} - \frac{a}{c} - 2 \cdot \frac{b}{c} = 0 \end{cases}$$

將兩式相減

$$\Rightarrow \frac{b^2}{ac} - \frac{a^2}{bc} + 3 \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c} \right) = 0$$

$$\text{令 } \frac{b}{a} = m, \frac{c}{b} = n, \frac{c}{a} = mn$$

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{m^2 n} + 3 \left(m - \frac{1}{m} \right) - \left(\frac{1}{mn} - \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$\text{經過化簡, } (m+1)(m-1)(3mn+m+1) = 0$$

$$\text{(I) } m = -1$$

$$a = -b, (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\text{(II) } m = 1$$

$$a = b \text{ 代入①}$$

$$c^3 - b^3 + 4bc^2 - b^2c - 3b^2 = 0$$

$$(c+b)(c-b)(c+4b) = 0$$

$$\text{若 } c+b=0 \Rightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\text{若 } c-b=0$$

$$\text{則 } a=b=c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (取 } - \because \text{要求最小值)}$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = -\frac{8}{9}\sqrt{3}$$

$$\text{若 } c = -4b$$

$$b^2 + b^2 + 16b^2 = 1 \Rightarrow (a, b, c) = \pm \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = \pm \frac{\sqrt{2}}{6} > -\frac{8}{9}\sqrt{3}$$

∴此時並非最小值

$$(III) 3mn + m + 1 = 0$$

$$3 \cdot \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 = 0$$

$$c = -\frac{a+b}{3} \text{ 代入①}$$

$$\text{經過化簡，} (a+b)(4a^2 + 17ab + 4b^2) = 0$$

$$\text{若 } a+b=0, \text{ 則 } (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\text{若 } 4a^2 + 17ab + 4b^2 = 0$$

$$(4a+b)(a+4b) = 0$$

$$a = -4b \vee b = -4a$$

$$\Rightarrow a = -4b, b = c \vee b = -4a, a = c \text{ (如(II)之情況)}$$

$$\text{故 } (x+y)(y+z)(z+x) \text{ 的最小值為 } -\frac{8}{9}\sqrt{3}, \text{ 成立於 } (x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

3. $n=4$

題目：實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ，試決定 $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ 的最小值並找出所有得到該最小值的 (a, b, c, d) 數值。

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) = [a - (-b)][(-b) - c][c - (-d)][(-d) - a] \text{ 與}$$

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \text{ 類似}$$

因此根據之前的研究，最小值為 $-\frac{1}{8}$ ，且最小值發生時，

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) = & \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee \pm \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee \\ & \pm \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \vee \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \end{aligned}$$

參、研究結果與討論

一、實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 。 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ 的最小值為 $-\frac{1}{8}$ ，其成

$$\text{立於 } (a, b, c, d) = \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee \pm \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \\ \vee \pm \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \vee \pm \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right)。$$

二、實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 1$ 。 $(x-y)(y-x)$ 的最小值為 -2 ，最小值成立於

$$(x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)。$$

幾何的觀點為 $(x-y)(y-x)$ 最小值成立於斜率為 1 的直

線與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，此二條直線為 $x-y=\sqrt{2}$ ， $x-y=-\sqrt{2}$ ，切點為 $\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)。$

三、實數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 的最小值為 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

最小值成立於 $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vee \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vee \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)。$ 幾何的觀點為

$(x-y)(y-z)(z-x)=k$ 與球體 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切，可得知最小值為 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，三個切平面

為 $x-z-\sqrt{2}=0$ ， $y-z+\sqrt{2}=0$ ， $x-y+\sqrt{2}=0$ ，切點分別為

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)。$$

四、在求出 n 個未知數的通解時，我們發現

【定理一】若 $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ ， S_n 的最小值一定存在。

【定理二】 S_n 的最小值會小於 0。

【定理三】最小值時，各項相加會 = 0。

五、 $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ 時， $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ， $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$ ， S_n 有最小值 $-\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$ ，

最小值成立於 $a_1 = a_3 = \dots = a_{2m-1} = -a_2 = -a_4 = \dots = -a_{2m} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。

六、利用拉格朗日乘數，我們可以利用 $n=k$ 的解推得 $n \equiv k(\text{mod } 2k)$ 的 S_n 局部最小值，我們猜測 n 的絕對最小值也是 $n \equiv k(\text{mod } 2k)$ 為一組通解，不過尚待證明。

七、若將 S_n 的相減改為相加，則

(一)當 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ 時， T_n 的最小值與 S_n 的最小值兩者可互推。

(二)當 $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ 時， T_n 的最小值與 S_n 的最大值兩者可互推。

八、實數 x, y 滿足 $x^2 + y^2 = 1$ 。 $(x+y)(y+x)$ 的最小值為0，最小值成立於

$$(x, y) = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)。$$

九、實數 x, y, z 滿足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 。 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 的最小值為 $-\frac{8}{9}\sqrt{3}$ ，成立於

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

十、實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 。 $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ 的最小值為 $-\frac{1}{8}$ ，其成

$$\begin{aligned} \text{立於 } (a, b, c, d) = & \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \vee \pm \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4} \right) \\ & \vee \pm \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \vee \pm \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}, \frac{\sqrt{3}+1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4}, -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \right) \end{aligned}$$

肆、結論與應用

本研究從一開始的四個未知數開始，利用不同方法來求出 n 個未知數的通解，我們首先利用最小值會小於0(定理二)及當最小值成立時，每項相加會等於0(定理三)的性質求得 $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ 的通解。另外我們使用拉格朗日乘數法得知可以藉由 $n=k$ 的解推得 $n \equiv k(\text{mod } 2k)$ 的局部最小值。在 S_n 為相加的研究中，我們發現當 $n \equiv 0(\text{mod } 4)$ 時， T_n 的最

小值與可由 S_n 的最小值可互相推得； $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ 時， T_n 的最小值可由 S_n 的最大值推得。
期望之後能找出 S_n 和 T_n 的最小值與最大值通解。

伍、參考資料

- 一、Asian Pacific Mathematics Olympiad。APMO 2022 Solution。 <https://reurl.cc/pv4ryZ>
- 二、Joal Hass et al. (2019). *University Calculus —Early Transcendentals in SI Units 4/E*.
Pearson FT Press.
- 三、林琦焜（2009 年 6 月）。實數系的建構。數學傳播，33(2)，21- 26。
<https://reurl.cc/pv2yzZ>

【評語】 010008

本作品是一個競賽不等式問題的推廣。將原來四個變數推廣到多個變數，是一個有數學味道的作品。但是推廣不等式如果沒有夠好的結果或連結就容易成為孤立的問題。目前作品的成果只能對少數的一些情況有完整解答，其餘的部分或者沒有辦法確定的確是所求的極值，或者還沒有處理。整體而言，數學的確定內容比較少了一點是可惜的地方。