

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010004

參展科別 數學

作品名稱 Wrong seating around the table

得獎獎項 三等獎

就讀學校 臺北市立永春高級中學

指導教師 鄭硯仁

高晟鈞

作者姓名 黃偲安

關鍵詞 stirling numbers of the first kind、parking
function、permutation

作者簡介



教授、老師及同學大家好！我是黃偲安，就讀永春高中數理資優班三年級，數學是我從小到大最感興趣的科目，時常能在學習數學的過程中感到快樂。經歷了兩年的專題研究，我常在做研究的過程中得到愉悅感，時常發現到某定理並證明出來而成就感滿滿。有機會參加2025國際科展，是對我研究最大的鼓勵，我會把握這次機會，讓更多人了解我的研究！

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：

科別：數學科

作品名稱：Wrong seating around the table

關鍵詞：stirling numbers of the first kind、parking
function、permutation

編號：

中文摘要

本研究探討在一場圓桌會議中， n 人逐一亂序入場找尋各自對應的名牌編號 ($1 \sim n$ 號) 入座，其中 1 號第一個入場並坐到了 k 號位，此後入場的人們若發現與自己編號相同的位置是空的，就直接入座；若與自己編號相同的位置被占走了，就以逆時針方向尋找空位入座。在上述的規則下，若共有 n 人，且 1 號坐到 k 號位的情況，給予與問題相關統計量的組合證明。後續本研究將規則改為 $1 \sim p$ 號按照順序進場且皆想坐到 k 號位的前提下，探討了坐錯的人們是怎麼樣的循環和坐錯人數的次數分佈。並多數的研究結果皆與 stirling numbers of the first kind 有相關。本研究還探討了共有 n 人，且 1 號坐到 k 號位的情況下，坐錯人數的標準差函數的遞增情況與對數函數完全曲線相關。

英文摘要

This study investigates a round table meeting in which n people enter one by one in random order to find their corresponding nametag numbers ($1 \sim n$) to be seated, among which No. 1 is the first one to enter and is seated at seat k . Subsequent people who find that the seat with the same number as their own is empty will be seated directly; if the seat with the same number as their own is occupied, they will search for the empty seat in an anti-clockwise direction until there is an empty seat to be seated. Under the above rule, if there are a total of n people and number 1 is seated in seat k , a proof of the combination of statistics related to the problem is given. In this study, we changed the rule to the premise that the number $1 \sim p$ are in the order of entry and all of them want to sit in the seat k . We investigated how the cycle of people sitting in the wrong seat is like and how the number of people sitting in the wrong seat is distributed in the order of the number of wrong seats. Most of the results were related to the stirling numbers of the first kind. In this study, we also investigated how the progression of the standard deviation function of the number of wrong seated people is correlated with the logarithmic function when there are n people in total and number 1 is seated at position k .

壹、研究動機

一、研究發想

本研究問題承繼著作者前一年的研究「圓桌中對應編號的錯排問題」[2]，題目如下：有 n 個人要在一個圓桌上舉行會議，其中每個人都有自己的編號 ($1 \sim n$ 號)，同時圓桌的 n 個位置上也有各自的名牌編號 ($1 \sim n$ 號) 以順時針擺放置圓桌上與人們的編號對應。其中第一個進來的人 (1 號) 坐到了圓桌上 k 號位，此後的人們亂序進入，若發現與自己編號相同的位置是空的就直接入座；若與自己編號相同的位置被坐走了，就以逆時針方向尋找空位入座。這些人們分別進入時有很多不同的入座順序，而最後又能有多少種不同的入座結果？

二、名詞解釋與前篇研究結果

在前篇研究中，對於此研究問題有以下名詞定義。其中前六點乃本研究繼續沿用的名詞。

(一)名詞解釋

前篇研究中，針對 n 人的圓桌問題，且 1 號坐到 k 號位，有以下九點名詞：

1. 人們入座的順序為 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ 稱「入座順序」，記載方式為 $a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} - a_n$ 。
2. 坐錯位置的人有 m 人 ($m \leq n$)，其中 b_1 號坐到 b_2 號位， $\dots$ ， b_{m-1} 號坐到 b_m 號位， b_m 號坐 1 號位稱為「坐法循環」，記載方式為 ${}_n(b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ ，其中 ${}_n()$ 代表沒人坐錯位置。
3. 有幾種的入座順序能造成相同的坐法循環，稱為坐法循環方法數，記載方式： $\#_n(b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ 。
4. 當 $n=k$ 時，設隨機變數 X 表坐錯位置的人數，且 $E_k(X)$ 為坐錯位置人數的期望值。
5. 當 $n=k$ 時，記 σ_k 為坐錯人數的標準差。
6. 當 $n=k$ 時，記 $a_{k,x}$ 為 x 人坐錯的方法數。
7. rlmax 是在一組排列中，由右至左逐個選取當前最大的數字形成的

集合大小。例如：排列為 615243，由右至左第一個數字為 3，而 3 是當前最大數；接著 4 為 排列 43 之空前大，因此 4 被選取；依此規則取至最左，共計取到的數字為 6,5,4,3，故 $rlmax = 4$ 。

8. $rlmax_a$ 是在一組排列中，僅觀察數字 a 右方的數字，按照 $rlmax$ 的定義方式選取當前最大的數字形成的集合大小。例如：排列 615243， $rlmax_1$ 表示僅觀察數字 1 右方的數字 5243，按照 $rlmax$ 的選取規則，最終取到的數字為 3,4,5，故 $rlmax_1 = 3$ 。
9. $s_{n,i}$ 為 stirling numbers of the first kind 分佈表上的數字，其中 $s_{n,i}$ 是將 $1 \sim n$ 的直線排列，產生 i 個 cycles 的方法數。

在本研究中，同樣針對 n 人的圓桌問題，每個人的編號記錄為 a_i ($1 \leq i \leq n$)， $1 \sim p$ 號按照順序入場且都想坐到 k 號位。依此前提，定義如下名詞：

10. 承名詞定義 2.，現 $1 \sim p$ 號按照順序入場且都想坐到 k 號位，其坐法循環中至多有 p 組循環。坐法循環的記載方式為 $_n(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)})_n(b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)}) \dots_n(b_1^{(r)}, b_2^{(r)}, \dots, b_{m-1}^{(r)}, b_m^{(r)})$ ，其中 $r \leq p$ 。在上述坐法循環中，至多有 p 個循環，其中 $_n(b_1^{(r)}, b_2^{(r)}, \dots, b_{m-1}^{(r)}, b_m^{(r)})$ 代表第 r 組循環，以上標 $^{(r)}$ 表示。透過這樣的表示方式，可從坐法循環明確地看出共有幾組人坐錯。例如：1-2-3-4-5-6， $n=k=6$ ， $p=3$ 時，表示 1,2,3 號皆想坐到 6 號位。其坐法循環為 $_6(1,6)_6(2,5)_6(3,4)$ 中有 3 組循環；又例如：1-2-3-4-6-5-7-8， $n=k=8$ ， $p=3$ 時，同樣表示 1,2,3 號皆想坐到 8 號位。其坐法循環為 $_8(1,8)_8(2,7)_8(3,6,5)$ 中有 3 組循環。以上兩個例子顯然可知，本研究的名詞定義方式可明確地看出共有幾組人坐錯。
11. 承名詞定義 4.,5.,6.，現 $1 \sim p$ 號按照順序入場且都想坐到 k 號位，則 $E_k^{(p)}(X)$ 為坐錯位置人數的期望值； $\sigma_k^{(p)}$ 為坐錯人數的標準差； $a_{k,x}^{(p)}$ 為 x 人坐錯的方法數。

(二)前篇研究結果

前篇研究中，討論了以下兩點研究目的。

1. 若共有 n 位，且 1 號坐到 k 號位，1 號為第一個入場的前提下，探討如何從入座順序找出坐法循環、坐法循環的總數、坐法循環方法數、坐錯人數的次數分佈、期望值和標準差。
2. 若共有 n 位，且 1 號想坐到 k 號位，1 號不限定為第一個入場的前提下，探討如何從入座順序找出坐法循環、坐法循環的總數、和坐錯人數的次數分佈。

前篇研究針對上述研究問題有以下結果。

1. 給定 n 人的圓桌問題，且 1 號第一個入場坐到 k 號位。
 - (1) 坐法循環為 ${}_n(1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ ，其中 $b_2 = k$ ，且 b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。
 - (2) 坐法循環總數為 2^{k-2} 。
 - (3) 坐法循環為 ${}_n(1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ ，令 $d_i = b_i - b_{i+1} - 1$ ，則坐法循環方法數為 $\#_n(1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m) = \prod_{i=2}^{m-1} P_{d_i}^{k-b_i+d_i} \times P_{n-k}^{n-1}$ 。
 - (4) 坐錯人數的分佈與 stirling numbers of the first kind 有著相同的

$$\text{次數分佈, } E_k(X) = 1 + H_{k-1}, \sigma_k = \sqrt{H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2}。$$

2. 給定 n 人的圓桌問題，1 號想要坐到 k 號位且不限定為第一個入場。
 - (1) 坐法循環為 ${}_n(b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ ，若 k 號在 1 號之後入場，則 $b_1 = 1$ ， $b_2 = k$ ， b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。若 k 號在 1 號之前入場， b_2 為入座順序中 1 號之後編號既比 1 號大且比 k 號小的最大編號位，而 b_{i+1} 為入座順序中在 b_i

之後且比 b_i 小之最大數，直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。若 1 號在最後一位入場，則坐法循環為 $_n()$ 。

(2) 坐法循環總數為 2^{k-1} 種。

(3) $\text{rlmax}_a \sim \text{rlmax}$ 。即兩者有著相同的次數分佈。

(4) 在 *stirling numbers of the first kind* 的分佈表上，有著遞迴式

$$s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}, n \geq i \geq 2, n, i \in N.$$

(5) 給定 n 人的圓桌問題，且 1 號想要坐到 k 號位，1 號不限定為第一個入場，坐錯人數的次數分佈仍與 *stirling numbers of the first kind* 有著相同的次數分佈。

(三)前篇研究中未盡完善之處

在前篇研究中，雖已有上述的研究結果，但仍有以下四點是作者認為討論不夠完善的。

1. 針對在 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時，坐錯人數的標準差公

式為 $\sigma_k = \sqrt{H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2}$ ，但前篇研究中並未討論此公

式的遞增幅度。

2. 針對在 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時，坐法循環總數為 2^{k-2} 種；若 1 號不限定第一個入場且坐到 k 號位時，坐法循環總數為 2^{k-1} ，上述兩種情況最終得出的坐法循環總數正好有著兩倍關係，但前篇研究並未得到直觀的組合證明。

3. 前篇研究得知在 *stirling numbers of the first kind* 的分佈表上，有

著遞迴式 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}$ ，前篇研究中僅利用數學歸納法證

明，並未得到直觀的組合證明此遞迴式成立。

4. 對於 $\text{rlmax}_a \sim \text{rlmax}$ ，前篇研究中僅利用 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}$ 成

立的前提下，進而說明上述兩者等分佈，但並未得到組合證明。

除上述四點前篇研究未盡完善之處，本研究也好奇，若是將圓桌問題的入座規則改變，前篇研究只規定 1 號想去坐 k 號位，改為 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐 k 號位，是否可以發現更多的組合性質。

貳、研究目的及研究問題

一、(1) 探討 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數，是 1 號不限定第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數有著兩倍的關係。(2)

遞迴式 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}$ 的組合證明。(3) $\text{rlmax}_a \sim \text{rlmax}$ 的組合證

明。

二、若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，探討：(1) 坐錯人數的次數分佈。(2) 如何從入座順序得出坐法循環。(3) 坐法循環總數與相關性質。

三、探討 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時，探討坐錯人數標準差公式

$\sigma_k = \sqrt{H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2}$ 的遞增幅度。

參、研究設備及器材

紙、筆、Desmos、sage、GeoGebra

肆、研究過程或方法及進行步驟

一、研究過程

(一) 探討 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數，是 1 號不

限定第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數有著兩倍的關係。

以 $k=4$ 為例，在 1 號為第一個入場的情況， $k=4$ 時的坐法循環有 ${}_n(1,4)$ 、 ${}_n(1,4,3)$ 、 ${}_n(1,4,2)$ 、 ${}_n(1,4,3,2)$ 這 4 組。事實上若不限定 1 號為第一個入場，也會存在這 4 組坐法循環，這裡指的「不限定」意指 1 號仍有可能是第一個入場的人，因此與前述相同的坐法循環仍存在；但由於 1 號不限定為首位進場的人，代表其不一定能如願坐到 k 號位，因此可視為將上述 4 組坐法循環中的 4 刪去，即可得到以下 4 組新的坐法循環 ${}_n(1)$ 、 ${}_n(1,3)$ 、 ${}_n(1,2)$ 、 ${}_n(1,3,2)$ ，要特別注意的是如有人坐錯，就不可能只有一人坐錯，因此坐法循環裡所記錄的數必為兩個以上，所以 ${}_n(1)$ 這組坐法循環是不合理的，也可以理解成 1 號坐到了自己的 1 號位，也就是沒有任何人坐錯，那麼 ${}_n(1)$ 這組坐法循環就會是 ${}_n()$ 無人坐錯的坐法循環。

從上述的說明可知，1 號為第一個入場與否，討論坐法循環總數時都可以將其分為兩類，一類是 1 號為第一個入場的情況，另一類是 1 號並非第一個入場的情況。在討論 1 號並非第一個入場時，只需將坐法循環中的 k 刪去，此舉並不會改變坐法循環總數，意即兩類情況的坐法循環總數相等。至此說明了 1 號不限定為第一個入場的情況下坐法循環總數，與 1 號為第一個入場的情況下坐法循環總數，有著兩倍關係的存在。

(二)遞迴式 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}$ 的組合證明。

$$\text{遞迴式 } s_{n,i} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \times s_{n-1,i-1} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \times s_{n-2,i-1} + \dots + \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \times s_{i-1,i-1},$$

前篇研究已利用數學歸納法證明，以下針對此遞迴式進行直觀的組合解釋，用其組合上的意涵說明此公式是成立的。

組合證明： $s_{n,i}$ 為 $1 \sim n$ 的所有直線排列，形成 i 個 cycles 的方法，以下解釋等號右方各個 $s_{k,i-1}$ ，其中 $i-1 \leq k \leq n-1$ ，與其係數進行解釋。

$s_{n-1,i-1}$ 為 $1 \sim n-1$ 的所有直線排列，形成 $i-1$ 個 cycles 的方法數，現在要插入數字 n ，且數字 n 自成一個 cycle： (n) ，會多加一個 cycle，變為 $s_{n,i}$ ，可視為原先 $1 \sim n-1$ ，共有 $n-1$ 個數字，在每個數字後方都有一個空隙可以放入 n ，但數字 n 卻自己成一

個 cycle，故係數為 $P_0^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ 。

$s_{n-2,i-1}$ 為 $1 \sim n-2$ 的所有直線排列，形成 $i-1$ 個 cycles 的方法數，現在要插入數字 n 以及 $n-1$ ，且數字 $n-1$ 自成一個 cycle： $(n-1)$ ，會多加一個 cycle，變為 $s_{n-1,i}$ ，後續 $n-1$ 自成一個 cycle 後可視為共有 $n-1$ 個數字，在每個數字後方都有一個空隙可以放入

n ，故係數為 $P_1^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-2)!}$ 。

推廣至一般性的說法即為， $s_{k,i-1}$ 為 $1 \sim k$ 的所有直線排列，形成 $i-1$ 個 cycles 的方法數，其中 $i-1 \leq k \leq n-1$ 。現在要插入數字 $k+1, k+2, \dots, n$ ，且數字 $k+1$ 自成一個 cycle： $(k+1)$ ，會多加一個 cycle，變為 $s_{k,i}$ ，在多加一個 cycle 後可視為共有 $n-1$ 個數字，在每個數字後方都有一個空隙可以放入 $k+2, k+3, \dots, n$ ，故係數為

$$P_{n-k+1}^{n-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!}。$$

(三) $\text{rlmax}_a \sim \text{rlmax}$ 的組合證明。

本研究想找到一種置換方法，將排列透過某一種系統性的置換手段，得到的新排列計算 rlmax_a 為定值，進而說明兩者同分佈，以下是本研究的置換手法。

在前篇研究，作者有發現 $rlmax_a$ 所得的次數分佈表，剛剛好會與 $rlmax$ 有著 -1 的平移效果，因此本研究期待將排列計算 $rlmax = i$ ，置換過後的排列計算 $rlmax_a = i - 1$ 。

在明確定義置換方法前先以 7 8 5 3 6 4 1 2 這組排列為例，將此排列計算 $rlmax$ 會是 7 8 5 3 6 4 1 2， $rlmax = 4$ ，本研究希望置換過後的排列計算 $rlmax_a$ 的結果會是 $rlmax_a = 3$ ，以下針對 $rlmax_4$ 要如何置換進行說明：

原始排列：7 8 5 3 6 4 1 2

將 4 和 5 位置交換得到新的一組排列：7 8 4 3 6 5 1 2

將 4 和 6 位置交換得到新的一組排列：7 8 6 3 4 5 1 2

將 4 和 7 位置交換得到新的一組排列：4 8 6 3 7 5 1 2

最後將 4 和 8 位置交換得到新的一組排列：8 4 6 3 7 5 1 2

將最終得到的排列 8 4 6 3 7 5 1 2 計算 $rlmax_4$ ，結果為 8 4 6 3 7 5 1 2， $rlmax_4 = 3$ ，與本研究的預期相同，不僅如此所選取到的相對位置除了最大數 n 以外，其餘皆與原始排列相同。因此本研究定義置換方法為：將原始有 n 個數字排列中的 a 與 $a+1$ 互換位置，再將 a 與 $a+2$ 互換位置， $\dots$ ，直到最後將 a 與 n 互換位置，完成置換得到新的排列後，計算其 $rlmax_a$ ，可得 $rlmax_a = rlmax - 1$ 。

(四)若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位。

1. 探討坐錯人數的次數分佈。

在前篇研究中曾經探討了 1 號想要坐到 k 號位，1 號是否為第一個入場與否，其坐錯人數的次數分佈為 *stirling numbers of the first kind*，前篇研究也具體說明了其原因。

若將規則更改為共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想

坐到 k 號位的前提下，再次探討坐錯人數的次數分佈是否仍與 *stirling numbers of the first kind* 有關。

以下列舉 $p = 2$ 時此時坐錯人數的次數分佈表，如下表 (一)。

表 (一) 1 號和 2 號想坐到 k 號位，1~2 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位， x 人坐錯的次數分佈表。

$k \backslash x$	4	5	6	7
4	2			
5	2	4		
6	4	12	8	
7	12	44	48	16

觀察表 (一) 後，本研究有一個猜測，可以發現原本 *stirling numbers of the first kind* 的第一行的數值為 1, 1, 2, 6，將原本的第一行各個數字乘以 2^1 即可得到 2, 2, 4, 12，也就是表 (一) 的第一行。而原本 *stirling numbers of the first kind* 的第二行的數值為 1, 3, 11，將原本的第二行各個數字乘以 2^2 即可得到 4, 12, 44，也就是表 (一) 的第二行。更一般性的說法是，表 (一) 中第 i 行 ($i \geq 4$) 的數量剛好是 *stirling numbers of the first kind* 的第 $i-3$ 行乘上 2^{i-3} 。並且可以發現，將 *stirling numbers of the first kind* 每一行乘完 2 的冪次之後，列總和依然會是階乘數，這個現象並不直觀，因此本研究試圖找出排列上的一種統計量，使得其得到的次數分佈與表 (一) 相同，並且有以下發現。

【發現一】：若從排列中觀察數字 a 以右的排列 (此排列有包含 a)，若數字 a 為此排列中的最大數或是第二大數，則選取數字

a ，最後得出的取到數字的次數分佈為 stirling numbers of the first kind 的第 i 行，乘上 2^i 。

說明：當 $n=5$ 時，以下本研究以 $1\sim 5$ 其中一組直線排列 52341 為例，1 為排列 1 中的最大數、4 為排列 41 中的最大數、3 為排列 341 中的第二大數、2 為排列 2341 中的第三大數、5 為排列 52341 中的最大數，此排列最後取到數字的結果為 52341，其中有底線的數字為被選取到的數字，因此這組排列所選取的數字個數就紀錄為 4 個。本研究將 $1\sim n$ 的直線排列，透過此規則選取 i 個數字之次數分佈表列舉出來如表 (二)，且表格數值記為 $b_{n,i}$ 。

表 (二)： $1\sim n$ 的直線排列，若從排列中觀察數字 a 以右的排列 (此排列有包含 a)，若數字 a 為此排列中的最大數或第二大數，則選取數字 a 之次數分佈表。

$n \backslash i$	2	3	4	5
2	2			
3	2	4		
4	4	12	8	
5	12	44	48	16

可以發現此分佈表的遞迴式為 $b_{n,i} = 2b_{n-1,i-1} + (n-2)b_{n-1,i}$ ，以下本研究說明此遞迴式成立。

【引理】： $b_{n,i} = 2b_{n-1,i-1} + (n-2)b_{n-1,i}$

證明：以 $n=5$ 為例， $b_{5,i}$ 可以分類為 5 種情況進行觀察，分別為 1 在首、2 在首、3 在首、4 在首、5 在首，其中 1 在首 1 的後方為 $2\sim 5$ 的任意排列，且又因為 1 一定不會是整個排列的最大數或第二大數，故為後方 4 個數字排列取到 i 個數字的方

法，因此 1 在首有 $b_{4,i}$ ，而 2 在首與 3 在首與 1 在首相同，不可能為整個排列的最大或第二大數故有 $3b_{4,i}$ 。而 4 在首與 5 在首必為整個排列中的最大或第二大數，故為後方 4 個數字排列取到 $i-1$ 個數字的方法，因此 4 和 5 在首有 $2b_{4,i}$ ，由此可得 $b_{5,i} = 2b_{5,i-1} + 3b_{4,i}$ 。

$b_{n,i}$ 可以分類為 n 種情況進行觀察，分別為 $1 \sim n$ 在首，其中 $1 \sim n-2$ 在首 $1 \sim n-2$ 的後方為其餘 $n-1$ 個數字的任意排列，且又因為 $1 \sim n-2$ 一定不會是整個排列的最大或第二大數，故為後方 $n-1$ 個數字排列取到 i 個數字的方法，因此 $1 \sim n-2$ 在首有 $(n-2)b_{n-1,i}$ 。而 $n-1$ 在首與 n 在首必為整個排列中的最大或第二大數，故為後方 $n-1$ 個數字排列取到 $i-1$ 個數字的方法，因此 $n-1$ 和 n 在首有 $2b_{n-1,i}$ ，由此可得 $b_{n,i} = 2b_{n-1,i-1} + (n-2)b_{n-1,i}$ 。

【定理一】：若從排列中觀察數字 a 以右的排列（排列包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數字 a ，若統計量為 $b_{n,i}$ ，則 $b_{n,i} = pb_{n-1,i-1} + (n-p)b_{n-1,i}$ 。

證明： $b_{n,i}$ 可以分類為 n 種情況進行觀察，分別為 $1 \sim n$ 在首，其中 $1 \sim n-p$ 在首時， $1 \sim n-p$ 的後方為其餘 $n-1$ 個數字的任意排列，且又因為 $1 \sim n-p$ 一定不會是整個排列的最大數、第二大數、…、第 p 大數，故為後方 $n-1$ 個數字排列取到 i 個數字的方法，因此 $1 \sim n-p$ 在首時有 $(n-p)b_{n-1,i}$ 。而 $n-(p+1) \sim n$ 在首時，此 p 個數字在首時必為整個排列中的前 p 大數，故為後方 $n-1$ 個數字排列取到 $i-1$ 個數字的方法，因此 $n-(p+1) \sim n$ 在首時有 $pb_{n-1,i-1}$ ，至此可得 $b_{n,i} = pb_{n-1,i-1} + (n-p)b_{n-1,i}$ 。

若從排列中觀察數字 a 以右的排列（此排列有包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數

字 a ，若統計量為 $b_{n,i}$ ，則 $b_{n,i} = pb_{n-1,i-1} + (n-p)b_{n-1,i}$ 。將取法改為取最大數、第二大數或第三大數，分佈表的遞迴式有了剛剛的證明過程可知會是 $b_{n,i} = 3b_{n-1,i-1} + (n-3)b_{n-1,i}$ ，本研究靠著這個遞迴式列舉出了下表 (三)。

表 (三)：1~ n 的直線排列，若從排列中觀察數字 a 以右的排列 (此排列有包含 a)，若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數或第三大數，則選取數字 a 之次數分佈表。

$n \backslash i$	3	4	5	6
3	6			
4	6	18		
5	12	54	54	
6	36	198	324	162

觀察表 (三) 後，本研究發現此表一樣會與 *stirling numbers of the first kind* 相關，此時的坐錯人數的分佈表是 *stirling numbers of the first kind* 的第一行乘以 $3!$ ，第二行乘以 $3! \times 3$ ，第三行乘以 $3! \times 3^2$ ，第四行乘以 $3! \times 3^3$ ，可以發現乘的倍數會是一個首項為 $3!$ ，公比為 3 的等比數列。

【定理二】：若數字 a 為它以右的排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字的次數分佈表 (下方表(四)) 是 *stirling numbers of the first kind* 的第 i 行乘上 $p! \times p^{i-1}$ 。意即 $b_{n,i} = p! p^{i-p} s_{n-p+1, i-p+1}$ ，其中 $k \geq p$ 。

表 (四)：1~ n 的直線排列，若數字 a 為它以右的排列中的最大數、第二大數、...、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字的次數分佈表。

$n \backslash i$	p	$p+1$	$p+2$	$p+3$
p	$p! s_{1,1}$			
$p+1$	$p! s_{2,1}$	$p! p \times s_{2,2}$		
$p+2$	$p! s_{3,1}$	$p! p \times s_{3,2}$	$p! p^2 \times s_{3,3}$	
$p+3$	$p! s_{4,1}$	$p! p \times s_{4,2}$	$p! p^2 \times s_{4,3}$	$p! p^3 \times s_{4,4}$

證明：

由【定理一】，已知 $b_{n,i} = pb_{n-1,i-1} + (n-p)b_{n-1,i}$ 。

以下利用數學歸納法證明 $b_{n,i} = p! p^{i-p} s_{n-p+1,i-p+1}$ ，其中 $k \geq p$ 。

(i) 當 $n = p$

左式 = $b_{p,p} = p! s_{1,1} = p!$ ，右式 = $p! s_{1,1} = p!$ 。成立

(ii) 假設當 $n = k$ ($k \geq p$) 成立

代表 $b_{k,i} = p! p^{i-p} \times s_{k-p+1,i-p+1}$

(iii) 當 $n = k+1$

$$\begin{aligned}
 \text{左式} &= b_{k+1,i} = pb_{k,i-1} + (k+1-p)b_{k,i} \\
 &= p(p! p^{i-p-1} s_{k-p+1,i-p}) + (k+1-p)(p! p^{i-p} s_{k-p+1,i-p+1}) \\
 &= p! p^{i-p} [s_{k-p+1,i-p} + (k+1-p)s_{k-p+1,i-p+1}] \\
 &= p! p^{i-p} s_{k-p+2,i-p+1} = \text{右式}
 \end{aligned}$$

因此， $\forall n \geq p$ ，根據數學歸納法，原式成立。

同時我們將入座規則改為共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號都想坐到 k 號位，1 號為第一個入場、2 號為第二個入場、...、 p 號為第 p 個入場，在此前提下的坐錯人數次數分佈與表 (四) 相同。

【定理三】：若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位坐錯人數的次數分佈，與若從排列中觀察數字 a 以右的排列（此排列有包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數字 a ，兩者有相同的次數分佈。

證明：若 $n = k = 8, p = 2$ ，入座順序為

1-2-8-5-6-7-3-4，其對應的坐法循環為

${}_8(1, 8, 6, 4){}_8(2, 7, 3)$ ，若將入座順序觀察數字 a 以右的排列（此排列有包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數字 a ，選取的數字以底線表示如下

1 2 8 5 6 7 3 4，可以發現取到的數字剛好會是坐錯位置的人（除了 1 和 2）。5 號不在坐法循環裡意指它坐到了自己的位置，為了讓 5 號坐到自己的位置，他就必須在 6 和 7 之前進場，因為若 5 號不在 6 和 7 之前進場，他就會成為在 6 或 7 後方比他們小的最大數。而在取統計量的過程中觀察 5 時，看的排列為 5 6 7 3 4，因為 6 7 在此排列中且都比 5 大，故 5 並不會是最大數或第二大數，就不會被選取。

透過這個例子，即可了解一般性而言，坐法循環也會滿足此規則。故共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位的坐錯人數次數分佈，與若從排列中觀察數字 a 以右的排列（此排列有包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、…、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字數量的次數分佈相同。

2. 探討如何從入座順序得出坐法循環。

前篇研究已提出當 1 號首個進場且想要坐到 k 號位時（ $p=1$ ），如何從入座順序找出坐法循環。

【已知結果】：坐法循環為 ${}_n(1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m)$ ，其中 $b_2 = k$ ，則

b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。

本研究好奇若 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，又該以什麼樣的方法從入座順序得出坐法循環。

以下列舉 $n=k=4, p=2$ 入座順序以及對應的坐法循環。

$1-2-3-4 \Rightarrow_4(1,4)(2,3)$ ， $1-2-4-3 \Rightarrow_4(1,4,2,3)$

由上述列舉本研究觀察到一個非常重要的現象，原先在 1 號首個進場且想要坐到 k 號位時 ($p=1$)，坐法循環必只有一組循環，但改成 $1 \sim 2$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，坐法循環竟然可能會出現兩組循環，這個有趣的現象使本研究不單只好奇如何從入座順序看出有哪些人在坐法循環中，更想知道如何從原先的入座順序可看出最終的坐法循環是一組循環或兩組循環。

以下列舉 $n=k=5, p=2$ 入座順序以及對應的坐法循環。

$1-2-3-4-5 \Rightarrow_5(1,5)_5(2,4)$ ， $1-2-3-5-4 \Rightarrow_5(1,5,2,4)$

$1-2-4-3-5 \Rightarrow_5(1,5)_5(2,4,3)$ ， $1-2-4-5-3 \Rightarrow_5(1,5,2,4,3)$

$1-2-5-4-3 \Rightarrow_5(1,5,3)_5(2,4)$ ， $1-2-5-3-4 \Rightarrow_5(1,5,3,4,2)$

由上述列舉本研究認為兩組循環的坐法循環透過合併後即可成為一組循環的坐法循環，以 $1-2-5-4-3$ 為例，這組入座順序對應的坐法循環為 $_5(1,5)_5(3,2,4)$ ，而將 $4,3$ 交換變為 $1-2-5-3-4$ ，則對應的坐法循環為 $_5(1,5,3,2,4)$ ，像這種的坐法循環本研究就將它視是為 $(1,5)$ 與 $(3,2,4)$ 兩個序列合併而得的。因此本研究想先考慮如何看出兩個序列分別為何，接著再決定坐法循環是一組循環還是兩組循環，亦即如何決定序列是否發生合併，藉由上述的列舉觀察，得出了一套當 $p=2$ 如何找出兩個序列分別為何的方法。並找完序列後可以決定坐法循環為何。

【發現二】：當 1~2 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位時，建構兩個序列，其中第一個序列為 $c_1 = (1)$ 第二個序列為 $c_2 = (2)$ ，接著依照入座順序逐步調整這 2 個序列。

由入座順序： $a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} - a_n$ 從左往右依序觀察數字，觀察 a_i ，

若 a_i 已在其中一個序列中，則將入座順序在 a_i 之後比它小的最大數（不考慮此時已在序列中的數字）加入 a_i 所在的序列，若找不到此數則序列建構完畢。

若 a_i 不在任何序列中，則往後看下一個數字 a_{i+1} 。後續反覆操作直到數字皆觀察完後第 1 組序列為 $c_1 = (1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)})$ 、第 2 組序列為 $c_2 = (1, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 。

建構完兩組序列後，若 $b_m^{(1)}$ 為入座順序中最後一個加入序列的人，則坐法循環會是兩組循環為

$_n(1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)})_n(2, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 。若 $b_m^{(2)}$ 為入座順序中最後一個加入序列的人，則坐法循環會是一組循環為

$_n(1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)}, 2, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 。

證明：以下舉一個例子，若 $n=k=8, p=2$ ，入座順序為

1-2-8-7-5-6-3-4，由【發現二】可知兩組序列為 $c_1 = (1)$ 和 $c_2 = (2)$ 。以下幾個步驟說明讓讀者更明白如何從入座順序得出坐法循環的兩組循環分別為何。

步驟一：首先由入座順序由左至右依序觀察第一個數字為 1，1 已在 c_1 中，則將入座順序在 1 之後比它小的最大數（不考慮此時已在序列中的數字 2）為 8，將 8 加入 1 所在的序列 c_1 中，故序列變為 $c_1 = (1, 8)$ 和 $c_2 = (2)$ 。

步驟二：接著入座順序由左至右依序觀察第二個數字為 2，2 已在 c_2 中，則將入座順序在 2 之後比它小的最大數（不考慮此時已在序列中的數字 8）為 7 加入 2 所在的序列 c_2 中，故序列變為 $c_1 = (1, 8)$ 和 $c_2 = (2, 7)$ 。

步驟三：接著入座順序由左至右依序觀察第三個數字為 8，8 已

在 c_1 中，則將入座順序在 8 之後比它小的最大數 (不考慮此時已在序列中的數字 7) 為 6 加入 8 所在的序列 c_1 中，故序列變為 $c_1 = (1, 8, 6)$ 和 $c_2 = (2, 7)$ 。

反覆操作最後可得兩組序列為 $c_1 = (1, 8, 6, 3)$ 和 $c_2 = (2, 7, 5, 4)$ 。最後加入序列的為 $b_4^{(2)} = 4$ ，故坐法循環會是一組循環為 $_n(1, 8, 6, 3, 2, 7, 5, 4)$ 。

入座規則為 1 和 2 號皆想坐到 k 號位，但由於 1 號是第一個進場的人，因此 1 號必定坐到 k 號位，當下一個進場的 2 號發現 k 號位已被 1 號所坐，因此它會以逆時針方向尋找最近的空位入座，因此 2 號必定坐到 $k-1$ 號位，故兩個起始序列開頭必為 $c_1 = (1)$ 和 $c_2 = (2)$ 。

若 a_i 已在其中一個序列中，則將入座順序在 a_i 之後比它小的最大數 (不考慮此時已在序列中的數字) 加入 a_i 所在的序列，上述原因為 a_i 已在其中一個序列中，代表 a_i 坐錯了位置且因為自己的座位被坐了，以逆時針方向找尋新位置，尋找的過程中，因為名牌是以順時針方向擺放，所以 a_i 號位置的逆時針方向之座位編號皆比 a_i 小且由大到小排列。因為要由逆時針方向找離自己座位編號最近的座位入座，入座順序在 a_i 之後比它小的最大數加入 a_i 所在的序列 (意指 a_i 坐到了此數字號位)，而 (不考慮此時已在序列中的數字) 就代表此數字號位已被別人所坐，就不可能再去坐到那個位置。

a_i 不在任何序列中，代表它坐到了自己的位置並不會加入序列，故往後看下一個數字。考慮完序列後，若 $b_m^{(1)}$ 為入座順序中最後一個加入序列的人，則代表 $b_m^{(1)}$ 坐到了 1 號位，序列 $(1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)})$ 也表示 $b_m^{(1)}$ 坐到了 1 號位。因此序列不會進行合併，故坐法循環為

$_n(1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)})_n(2, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 。若 $b_m^{(2)}$ 為入座順序中最後一個加入序列的人，則代表 $b_m^{(2)}$ 坐到了 1 號位，但序列 $(2, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 表示 $b_m^{(2)}$ 坐到了 2 號位。因此序列會進行

合併才能滿足 $b_m^{(2)}$ 坐到了 1 號位，故坐法循環為 $_n(1, b_2^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)}, b_m^{(1)}, 2, b_2^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)}, b_m^{(2)})$ 。

至此本研究已有了 $p=2$ 如何從入座順序找出兩個序列分別為何，並且可以看出序列是否合併形成坐法循環。本研究好奇當 $p=3$ 又會如何，因此以下列舉了 $n=k=6, p=3$ 入座順序以及對應的坐法循環。

$$1-2-3-4-5-6 \Rightarrow_6 (1, 6)_6 (2, 5)_6 (3, 4)$$

$$1-2-3-4-6-5 \Rightarrow_6 (1, 6, 2, 5)_6 (3, 4)$$

$$1-2-3-5-4-6 \Rightarrow_6 (1, 6)_6 (2, 5, 3, 4)$$

$$1-2-3-5-6-4 \Rightarrow_6 (1, 6, 2, 5, 3, 4)$$

$$1-2-3-6-4-5 \Rightarrow_6 (1, 6, 3, 4, 2, 5)$$

$$1-2-3-6-5-4 \Rightarrow_6 (1, 6, 3, 4)_6 (2, 5)$$

可以發現 $p=2$ 時會至多會有兩組循環，而 $p=3$ 至多會有三組循環其餘坐法循環則是三個序列進行合併，因此本研究認為若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，坐法循環至多為 p 個循環，其餘為 p 個序列進行合併，又有了

【發現二】 可以類推得到共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，如何從入座順序找出 p 組序列分別為何。

【定理四】：若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，建構 p 個序列，其中第 i 個序列為 $c_i = (i)$ 。接著依照入座順序逐步調整這 p 個序列。由入座順序：

$a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} - a_n$ 從左往右依序觀察數字 a_i 。

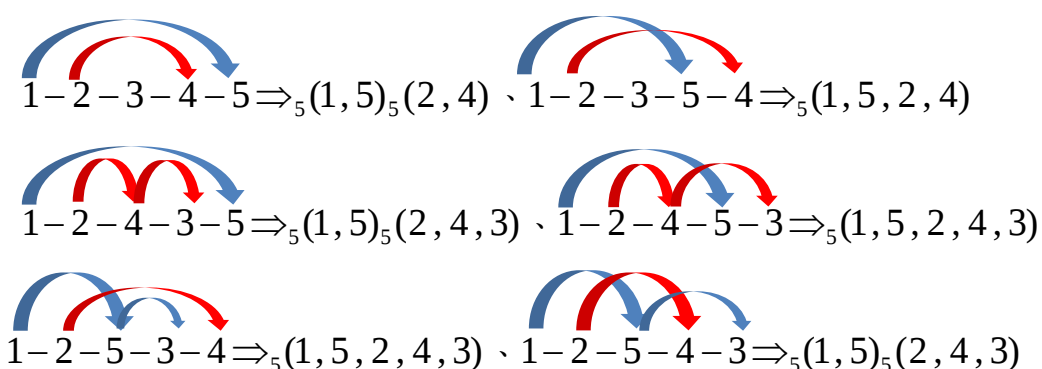
若 a_i 已在其中一個序列中，則將入座順序在 a_i 之後比它小的最大數（不考慮此時已在序列中的數字）加入 a_i 所在的序列，若找不到此數則序列建構完畢。

若 a_i 不在任何序列中，則往後看下一個數字 a_{i+1} 。後續反覆操作直到數字皆觀察完後第 i 組序列為 $c_i = (i, b_2^{(i)}, \dots, b_{m-1}^{(i)}, b_m^{(i)})$ 。

證明：證明的文字類推【發現二】的證明即可得到。

上述定理不足的地方在於，目前我們只能從入座順序得知 p 組序列為何，尚未找到如何決定序列彼此之間如何進行合併的方法。

【關於合併與交叉點的討論】：在研究過程中本研究還發現了一個有趣的現象，若是將入座順序中同一個序列中的數字彼此用曲線連起來，以下給出 $n=k=5, p=2$ 入座順序連起來的結果（以下藍線代表第一個序列，紅線代表第二個序列）以及對應的坐法循環。



可以發現若紅線與藍線的交點個數為偶數個時，則會是兩組循環的坐法循環，而若紅線與藍線的交點個數為奇數個時，則會是一組循環的坐法循環。

【猜想一】：當 n 人且 $p=2$ ，若是將入座順序中同一個序列中的數字彼此用曲線連起來，且藍線代表第一個序列，紅線代表第二個序列。① 若紅線與藍線的交點個數為偶數個時，則會是兩組循環的坐法循環。② 若紅線與藍線的交點個數為奇數個時，則會是一組循環的坐法循環。

3. 探討坐法循環總數與相關性質。

前篇作品中，研究了當 $p=1$ 時，坐法循環總數為 2^{k-2} 種，

本研究好奇若 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，是否可以有一個公式得以計算坐法循環總數。

回顧上篇研究當 $p=1$ 時，坐法循環總數為 2^{k-2} 種，原因為 1 號必定坐到 k 號位，因此所有坐法循環必為 ${}_n(1, k, \dots)$ ，在 k 的後方有 $k-1, k-2, \dots, 4, 3, 2$ 共 $k-2$ 個數字可能加入坐法循環中，而這 $k-2$ 個數字每一個都有加入或不加入坐法循環兩種選擇，在確定了加入坐法循環的數字後，再由大到小的順序擺放，意即排列順序已確定，因此坐法循環總數為 2^{k-2} 。

當 $p=2$ 時，若坐法循環為一組循環與兩組循環的數量是相等的假設成立，則需要考慮其中一組情況的坐法循環數乘以 2 倍就會是坐法循環總數了。若考慮兩組循環的坐法循環數量，因為 1 號必定坐到 k 號位，且 2 號必定坐到 $k-1$ 號位，因此所有坐法循環必為 ${}_n(1, k, \dots) {}_n(2, k-1, \dots)$ ，在 k 或 $k-1$ 的後方有 $k-2, k-3, \dots, 4, 3$ 共 $k-4$ 個數字可能加入坐法循環中，而這 $k-4$ 個數字每一個都有加入第一組循環、第二組循環或不加入坐法循環三種選擇，在確定了加入坐法循環的數字後，再由大到小的順序擺放，意即排列順序已確定，因此兩組循環的坐法循環數量為 3^{k-4} 。又因為一組循環與兩組循環的數量是相等的，故本研究猜測 $p=2$ 時坐法循環總數為 $2 \times 3^{k-4}$ 。

有了 $p=2$ 時坐法循環總數為 $2 \times 3^{k-4}$ 的猜測以後，本研究認為要解決坐法循環總數的關鍵條件會是一組循環、兩組循環、 $\dots$ 、 p 組循環的個數，因為在 $p=2$ 時本研究是在若一組循環與兩組循環的數量相等的前提下計算，因此只須考慮兩組循環的坐法循環數乘上 2 倍就會是坐法循環總數。基於上述原因本研究舉 $n=k=6, p=3$ 為例，說明入座順序以及對應的坐法循環，進而觀察一組循環、兩組循環和三組循環的個數為何。

若 $n=k=6, p=3$ 時

$$1-2-3-4-5-6 \Rightarrow_6 (1,6)_6 (2,5)_6 (3,4)$$

$$1-2-3-4-6-5 \Rightarrow_6 (1,6,2,5)_6 (3,4)$$

$$1-2-3-5-4-6 \Rightarrow_6 (1,6)_6 (2,5,3,4)$$

$$1-2-3-5-6-4 \Rightarrow_6 (1,6,2,5,3,4)$$

$$1-2-3-6-4-5 \Rightarrow_6 (1,6,3,4,2,5)$$

$$1-2-3-6-5-4 \Rightarrow_6 (1,6,3,4)_6 (2,5)$$

可以發現 $n=k=6, p=3$ 時，坐法循環為一組循環的有 2 組，兩組循環的有 3 組，三組循環的有 1 組。本研究後續透過列舉當 $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的次數分佈表如下表 (五)。

表 (五) $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的次數分佈表。

$p \backslash i$	1	2	3	4
1	1			
2	1	1		
3	2	3	1	
4	6	11	6	1

【猜想二】： $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的數量為 $s_{p,i}$ 。

說明：因為 $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位，故 p 組循環為 $_n(1, k)$ 、 $_n(2, k-1)$ 、 $\dots$ 、 $_n(p, k+1-p)$ 。

坐法循環為 i 組循環可以視為是這 p 個循環分成 i 個 cycles，而在同一個 cycle 裡循環就是前文所提的循環進行了合併動作，因此本研究認為 $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的次數分佈會是 *stirling numbers of the first kind*。

若【猜想二】成立，則得知一組循環、兩組循環、 $\dots$ 、 p 組循環的個數，本研究得以猜測 $1 \sim p$ 號都想坐到 k 號位， 1 號為第 1 個入場、 2 號為第 2 個入場、 $\dots$ 、 p 號為第 p 個入場時坐法循環總數。

【猜想三】：在【猜想二】成立的前提下， $1 \sim p$ 號都想坐到 k 號位， 1 號為第 1 個入場、 2 號為第 2 個入場、 $\dots$ 、 p 號為第 p 個入場，坐法循環總數為 $p! \times (p+1)^{k-2p}$ 。

說明：以下解釋本研究猜測坐法循環總數為 $p! \times (p+1)^{k-2p}$ 的原因。

考慮 p 組循環的坐法循環數，因為 1 號必定坐到 k 號位、 2 號必定坐到 $k-1$ 號位、 $\dots$ 、 p 號必定坐到 $k-p+1$ 號位，因此所有坐法循環必為 ${}_n(1, k) {}_n(2, k-1) \dots {}_n(p, k+1-p)$ ，在 k 、 $k-1$ 、 $\dots$ 、 $k-p+1$ 的後方有 $k-p, k-p-1, \dots, p+2, p+1$ 共 $k-2p$ 個數字可能加入坐法循環中，而 $k-2p$ 個數字都有加入第 $1 \sim p$ 組循環或不加入坐法循環共 $p+1$ 種選擇，在確定了加入坐法循環的數字後，再由大到小的順序擺放，意即排列順序已確定，因此 p 組循環的坐法循環數量為 $(p+1)^{k-2p}$ 。因為 $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的次數分佈是 *stirling numbers of the first kind*，故坐法循環總數為

$$\begin{aligned} & s_{p,1}(p+1)^{k-2p} + s_{p,2}(p+1)^{k-2p} + \dots + s_{p,p}(p+1)^{k-2p} \\ &= (s_{p,1} + s_{p,2} + \dots + s_{p,p})(p+1)^{k-2p} = p! \times (p+1)^{k-2p}。 \end{aligned}$$

(五)探討 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時，探討坐錯人數標準差公式

$$\sigma_k = \sqrt{H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2} \text{ 的遞增幅度。}$$

將 $k=2\sim 4$ 代入公式 $\sigma_k = \sqrt{H_{k-1} + 2\sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2}$:

$$k=2 \Rightarrow \sigma_2^{(1)} = \sqrt{1 - (1)^2} = \sqrt{0} = \sqrt{\frac{0}{1^2}}$$

$$k=3 \Rightarrow \sigma_3^{(1)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{0}{1^2} + \frac{1}{2^2}}$$

$$k=4$$

$$\Rightarrow \sigma_4^{(1)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} = \sqrt{\frac{0}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2}}$$

觀察後本研究認為標準差的公式有著更簡化的寫法如下：

$$\sigma_k^{(1)} = \sqrt{H_{k-1} + 2\sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2} = \sqrt{\sum_{m=2}^k \frac{m-2}{(m-1)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{證明：右式}^2 &= \sum_{m=2}^k \frac{m-2}{(m-1)^2} = \sum_{m=2}^k \frac{(m-1)-1}{(m-1)^2} = \sum_{m=2}^k \frac{1}{m-1} - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(m-1)^2} \\ &= H_{k-1} - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(m-1)^2} = H_{k-1} - (H_{k-1})^2 + 2h(k-1) \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

其中 $h(k)$ 為 $\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}\right)$ 之兩兩乘積和，後續只需證明出

$$h(k) = \sum_{m=2}^k \frac{H_{m-1}}{m} \text{ 即可得證。}$$

$$\text{【引理】 } h(k) = \sum_{m=2}^k \frac{H_{m-1}}{m}, \quad k \geq 2$$

證明：

(i) 當 $k=2$

$$\text{左式} = h(2) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{右式} = h(2) = \frac{1}{2} = \text{左式}，成立$$

(ii) 假設當 $k=t$ ($t \geq 2$) 成立

$$\text{代表 } h(t) = \sum_{m=2}^t \frac{H_{m-1}}{m}$$

(iii) 當 $k=t+1$

$$\begin{aligned} \text{左式} = h(t+1) &= h(t) + \frac{1}{t+1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{t} \right) = \sum_{m=2}^t \left(\frac{H_{m-1}}{m} \right) + \frac{H_t}{t+1} \\ &= \sum_{m=2}^{t+1} \left(\frac{H_{m-1}}{m} \right) = \text{右式}，成立 \end{aligned}$$

因此， $\forall k \geq 2$ ，根據數學歸納法，原式成立。

$$\textcircled{1} = H_{k-1} - (H_{k-1})^2 + 2h(k-1) = H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2 = \text{左式}^2$$

$$\text{至此得知 } \sigma_k^{(1)} = \sqrt{\sum_{m=2}^k \frac{m-2}{(m-1)^2}}，顯然這是個嚴格遞增函數，因此$$

本研究想了解標準差的遞增幅度以及所形成的圖形與何種函數圖形有

關。因此利用 Desmos 繪圖軟體進行函數擬合。

$$\text{回顧前篇研究的標準差公式 } \sigma_k^{(1)} = \sqrt{H_{k-1} + 2 \sum_{m=2}^{k-1} \frac{H_{m-1}}{m} - (H_{k-1})^2}，可$$

以發現此公式內含調和級

數，在閱讀文獻 [1] 時，

發現調和級數與對數的關

係為 $H_n \approx \gamma + \ln n$ ，其中

γ 為歐拉-馬歇羅尼常數，約為 0.5772。了解了調和級數與對數的關

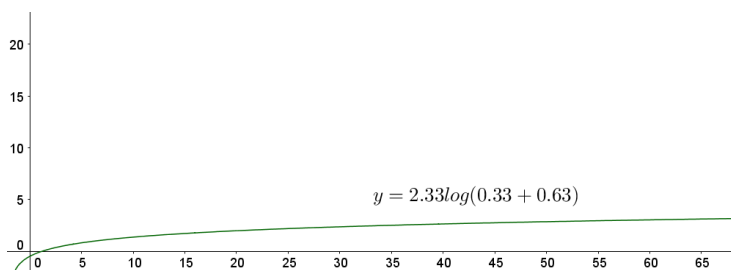


圖 (一) 擬合函數。本圖為研究者自製。

係後，本研究決定使用對數函數進行擬合，將 $(k, \sigma_k^{(1)})$ 輸入在直角坐標系統上，函數圖形繪製在 GeoGebra 如圖 (一)，得到 $R^2=1$ 的函數，意即完全曲線相關。

伍、研究結果與討論

一、研究結果

(一)探討 1 號為第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數，是 1 號不限定第一個入場且坐到 k 號位時的坐法循環總數的兩倍、

$$s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!} \sim \text{rlmax}_a \sim \text{rlmax} \quad \text{上述三點的組合證明。}$$

1. 無論 1 號是否為第一個入場，在討論坐法循環總數時都可將其分為兩類，一類是 1 號為第一個入場的情況，另一類是 1 號並非第一個入場的情況。兩類情況的坐法循環總數相等，因此 1 號不限定為第一個入場的情況下坐法循環總數，與 1 號為第一個入場的情況下坐法循環總數，有著兩倍關係的存在。
2. 透過直觀的組合作解釋，完整說明了 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{s_{k,i-1}}{k!}$ 成立的原因。
3. 本研究自創了一個置換手法，得以直觀地解釋 $\text{rlmax}_a \sim \text{rlmax}$ ，即兩者同分佈的原因。

(二)若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位。

1. 若從排列中觀察數字 a 以右的排列 (排列包含 a)，若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、...、第 p 大數，則選取數字 a ，若統計量為 $b_{n,i}$ ，則 $b_{n,i} = pb_{n-1,i-1} + (n-p)b_{n-1,i}$ 。
2. 若數字 a 為它以右的排列中的最大數、第二大數、...、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字數量的次數分佈是 stirling numbers of the first kind 的第 i 行乘上 $p! \times p^{i-1}$ 。
3. 若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位坐錯

人數的次數分佈，與若從排列中觀察數字 a 以右的排列（此排列有包含 a ），若數字 a 為此排列中的最大數、第二大數、...、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字數量的次數分佈相同。

4. 若共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，坐法循環有以下性質：建構 p 個序列，其中第 i 個序列為 $c_i = (i)$ 。接著依照入座順序逐步調整這 p 個序列。由入座順序：

$a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} - a_n$ 從左往右依序觀察數字，觀察 a_i ，若 a_i 已在其中一個序列中，則將入座順序在 a_i 之後比它小的最大數（不考慮此時已在序列中的數字）加入 a_i 所在的序列，若 a_i 不在任何序列中，則往後看下一個數字 a_{i+1} 。後續反覆操作直到數字皆觀察完後第 i 組序列為 $c_i = (i, b_2^{(i)}, \dots, b_{m-1}^{(i)}, b_m^{(i)})$ 。坐法循環是這 i 組序列的合併。

(三)若共有 n 人，且 1 號第一個入場坐到 k 號位。坐錯人數的標準差公

式 $\sigma_k^{(1)} = \sqrt{\sum_{m=2}^k \frac{m-2}{(m-1)^2}}$ 的遞增幅度形成的圖形經對數函數擬合，成完全曲線相關。

二、討論與未來展望

(一)A 型停車場問題

A 型停車場問題：在單行道上有 n 格停車格的停車場，編號依序為 $1 \sim n$ 號。有 n 輛車要進場停車，其中第 i 個進場的車想要停在 a_i ($1 \leq a_i \leq n$) 號停車格。第 i 個進場的車會去到 a_i 號停車格，若 a_i 號停車格已被其他車輛所停，則第 i 個進場的車會沿著單行道尋找最近的空停車格進行停車，若沿著單行道未能找到空停車格，則該台車輛會離開此停車場。

令車輛想要停車格的數對為 $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。以 $n=4$ 為例，若 $\pi = (2, 1, 3, 1)$ ，代表第 1 個進場的車想要停在 2 號停車格、第 2

個進場的車想要停在 1 號停車格、...、第 4 個進場的車想要停在 1 號停車格。最開始因為 2 號停車格是空的，所以第 1 個進場的車會停到 2 號停車格，類似的因為 1 和 3 號停車格皆為空的，所以第 2 以及 3 個進場的車分別會停到 1 和 3 號停車格，而第 4 個進場的車因為 1 號停車格已被第二個進場的司機所停，根據規則他會沿著單行道尋找最近的空停車格，因此第 4 個進場的車會停到 4 號停車格。上述的例子最終會使得每輛車都能完成停車，但事實上並非每一種 π 最終都能導致每輛車都能完成停車，以 $n=2$ 為例，若 $\pi=(2,2)$ ，則第 1 個進場的車停到 2 號停車格，但第 2 個進場的車已被別人所停，而沿著單行道又無其餘空停車格，則第 2 個進場的車將會離開此停車場。若 π 最終可以讓所有車輛都完成停車，則稱 π 為一組 parking function。

本研究問題是一個完全等價的 parking function 問題。本研究賦予了一個 parking function 新的規定為每位司機有自己原先屬於的停車位，題目如下：有 n 位司機，欲停在一個有 n 個停車格 ($1 \sim n$ 號) 的單行道的停車場完成停車，其中原先屬於 $n \sim n-p+1$ 號停車位的司機們按照順序進場，且他皆想要 1 號停車格，後續進場的原先屬於 $1 \sim n-p$ 號停車位的司機亂序入場，其中原先屬於 $1 \sim n-p$ 號停車位的司機想要的位置與原先所屬停車格的編號相同，若是想要的停車格被別人停走，則會繼續往前開尋找最近的停車格進行停車。

研究過程中在這樣 parking function 下討論了兩種統計量，分別為 $\text{unlucky}(\pi)$ ，意指沒停到想要停車格的人的數量，以及沒有停到自己所屬停車格的人的數量，其中本研究發現沒有停到自己所屬停車格的人之次數分佈為 stirling numbers of the first kind 的第 i 行乘上 $p! \times p^{i-1}$ (對應到本篇的坐錯人數的次數分佈)。而作者發現若是考慮 $\text{unlucky}(\pi)$ 則次數分佈則將會改變。因此本研究希望認為往後朝著 parking function 問題研究會有更多的有趣的結果。

(二)未證猜想

在本研究中共有以下 3 個猜想未能夠有嚴謹的證明：

1. 當 n 人且 $p=2$ ，若是將入座順序中同一個序列中的數字彼此用曲線連起來，且藍線代表第一個序列，紅線代表第二個序列。① 若紅線與藍線的交點個數為偶數個時，則會是兩組循環的坐法循環。② 若紅線與藍線的交點個數為奇數個時，則會是一組循環的坐法循環。
2. $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的數量為 $s_{p,i}$ 。
3. 在「 $1 \sim p$ 號都想坐 k 號位時，坐法循環為 i 組循環的數量為 $s_{p,i}$ 」成立的前提下， $1 \sim p$ 號都想坐到 k 號位， 1 號為第 1 個入場、 2 號為第 2 個入場、 $\dots$ 、 p 號為第 p 個入場，坐法循環總數為 $p! \times (p+1)^{k-2p}$ 。

事實上若知道如何從入座順序看出序列彼此之間如何合併，應該就能得到以上 3 點猜想的證明。因此往後研究會優先解決如何從入座順序看出序列彼此之間如何合併。

(三)組合證明

本研究發現若數字 a 為它以右的排列中的最大數、第二大數、 $\dots$ 、第 p 大數，則選取數字 a ，最後得出的取到數字的次數分佈是 *stirling numbers of the first kind* 的第 i 行乘上 $p! \times p^{i-1}$ 。但可惜的地方在於本研究目前只利用數學歸納法進行證明，期盼後續研究可以建立一個適切的對應關係，並利用組合解釋進行證明。

(四)入座規則改為不限制誰先進場

在前篇研究中作者考慮過 1 號第一個進場且坐到 k 號位，後續也改為不限定任何人先進場且 1 號想要坐到 k 號位。發現兩者坐錯人數的次

數分佈皆為 stirling numbers of the first kind，並且在研究的過程中還發現了 $rlmax_q$ 。這個有趣的統計量。目前只考慮了 $1 \sim p$ 號按照順序入場且皆想坐到 k 號位，往後會將規則改為不限定任何人先進場， $1 \sim p$ 號皆想坐到 k 號位，探討坐錯人數的次數分佈是否會發生變化，以及是否能從中研究出更多有趣的統計量。

陸、結論與應用

本研究主要針對 2024 年前篇研究作品「圓桌中對應編號的錯排問題」中，補足了許多尚未討論完備的內容並具體、完整證明以下五點：

- 一、無論 1 號是否為第一個入場，其坐法循環總數為 1 號為第一個入場的坐法循環總數的兩倍。
- 二、透過直觀的組合解釋，完整說明了 $s_{n,i} = (n-1)! \sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{S_{k,i-1}}{k!}$ 成立的原因。
- 三、本研究自創了一個置換手法，得以直觀地解釋 $rlmax_q \sim rlmax$ ，即兩者同分佈的原因。
- 四、研究了共有 n 人，且 $1 \sim p$ 號按照順序進場且皆想坐到 k 號位的前提下，坐錯人數的次數分佈、坐法循環總數與相關性質，更是發現了一個新統計量並與 stirling numbers of the first kind 有著高度關係。並且還研究出一套 $p=2$ 時如何從入座順序找出坐法循環的方法。
- 五、針對在 1 號為第一個入場的前提下，得出的標準差公式，探討標準差函數的遞增幅度為何。

柒、參考文獻

- [1] 小智雅匯 (2018 年)。趣味數學 | 不可思議的無窮級數的和及 pi 的無窮級數表示的由來。「每日頭條」。
- [2] 黃偲安 (2024 年)。圓桌中對應編號的錯排問題。「2024 年臺灣國際科學展覽會」。 <https://reurl.cc/vvM66l>

- [3] 溫顯然、張志傑 (2015 年)。乾坤大挪移。「2018 年臺灣國際科學展覽會」。
- [4] N. J. A. Sloane. (1964). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Retrieved from <https://reurl.cc/97x6ma>
- [5] Richard P. Stanley. A Survey of Parking Functions. Retrieved from <https://reurl.cc/93Kk6X>
- [6] Vital Sine (Producer), Vital Sine (Director) (2022). What are Stirling Numbers of the 1st Kind? [Discrete Mathematics] (video). Country of origin : Youtube

【評語】 010004

本作品考慮 n 個教授(編號 1 至 n)，坐進圓桌邊的坐位(逆時針依序編號 1 至 n)，其中， 1 至 p 號教授想坐 k 號位，其他人想坐對應自己編號的坐位。這些教授亂序進場，若自己想坐的位置空著則坐下，否則逆時針尋找空位。問最終有幾種可能的入坐方式。本作品在前作已解決 $p=1$ 的基礎上，解決了一般 p 的問題。這個推廣看似顯然，但其實需要處理許多細節，若直接採用前作的手法，計算必然變得複雜且冗長。作者將入坐問題，考慮為 1 至 X 的特殊置換問題，並觀察並證明置換的各種性質，得以用較簡潔的方式解問題，值得肯定。