

2025年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號	010002
參展科別	數學
作品名稱	塗色次數期望值之研究
得獎獎項	二等獎 美國國際科技展覽會 ISEF

就讀學校	國立臺南第一高級中學
指導教師	陳盈言
作者姓名	王奕翔 吳昶佑

關鍵詞	<u>期望值、遞迴關係式、最優化</u>
-----	----------------------

作者簡介



我是王奕翔，目前就讀台南一中二年級數理資優班。從小我就對數學抱有深厚的熱忱，除了在課堂中鑽研數學，我也喜愛將數學應用於解決現實生活中的挑戰，並在這個過程中感受到它的無窮魅力，因此決定投入數學科展研究。在與夥伴一同解決問題的過程中，不僅培養思辨能力，更加深我對數學的熱忱。

我是吳昶佑，目前就讀台南一中二年級數理資優班。數學一直是最感興趣的學科，它不僅教會我邏輯思考，更讓我體會到精確與耐心的重要性。我的性格開朗，喜歡和朋友分享自己的學習經驗，同時也樂於接受他人的建議和想法，這次參加國際科展，除了能夠展示自己在數學領域的探索，也希望能向其他同好學習，我相信這將是個寶貴的經驗。

2025 年臺灣國際科學展覽會

研究報告

區別：南區

科別：數學科

作品名稱：塗色次數期望值之研究

關鍵詞：期望值、遞迴關係式、最優化

編號：

（編號由國立臺灣科學教育館統一填列）

摘要

n 個圓圈以一維排列所構成圖形中，若指定當中一圓圈塗色時，其左右相鄰圓圈各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色，欲求出使得該圖形之指定塗色次數的期望值達最小之最優化塗色方法。本研究共探討了 n 個圓圈之「直線排列」、「環狀排列」與 n 個圓圈及 m 個圓圈之「環狀結合直線排列」等三種圖形。

研究中先由圖形的結構，找出各圖形之指定塗色次數期望值的遞迴關係式，進而求出生成函數及特徵方程式，由此推導出一般解。藉由一般解，配合複數的代數運算及幾何性質，先找出「直線排列」之最優化塗色方法，且同時發現「直線排列」與「環狀排列」之最優化塗色方法具有一致性，並進一步比較兩者間的異同之處。更發現 n 個圓圈及 m 個圓圈之「環狀結合直線排列」圖形之最優化塗色方法，會隨著 n 值、 m 值的不同而有不同的塗色方法之有趣現象。

Abstract

In a one-dimensional arrangement of n circles, when one specific circle is colored, each of its adjacent circles has a one-half probability of being colored as well. This study seeks to determine the optimal coloring method that minimizes the expected value of the specified colorings for the given arrangement. We investigate three configurations: "linear arrangement," "circular arrangement," and "circular combined linear arrangement" involving n circles and m circles.

By deriving a recursive relationship based on the structure of each configuration, we develop the generating function and characteristic equation, leading to a comprehensive general solution. Employing algebraic operations on complex numbers and geometric properties, we unveil the optimal coloring method for the "linear arrangement," revealing a fascinating consistency between the optimal strategies for both the linear and circular arrangements. Furthermore, we highlight the intriguing phenomenon where the optimal coloring methods for the "circular combined linear arrangement" vary with different values of n and m .

壹、前言

一、研究動機

由國立臺灣科學教育館出版的《科學研習》月刊第 60 卷第 6 期中的一個專欄「森棚教官數學題」，裡面提到以下問題：

三歲的小玄喜歡拿蠟筆著色，因為年紀小，著色時常常不經意塗到形狀的外面。有一天，他要對圍成一圈的 6 個圓圈著色，爸爸先指定一個圓圈後，由小玄塗色。然而，除了這個圓圈一定會被塗色外，其左邊的圓圈有 $1/2$ 的機率也會被染到顏色，右邊的圓圈也有 $1/2$ 的機率被染到顏色。

只要有染上顏色的圓圈就當作已經塗色了，接著爸爸再指定一個還沒染到顏色的圓圈給小玄塗色，如此反覆一樣的行為。

平均來說，爸爸最少需要指定圓圈多少次，才能讓每個圓圈都被塗到色呢？（用數學的術語來說，就是問爸爸指定次數的期望值喔！）

我們對這個問題非常感興趣，於是開啟研究之路。

二、研究目的

- （一）探討 n 個圓圈直線排列之最優化的塗色方法及其指定塗色次數的期望值。
- （二）探討 n 個圓圈環狀排列之最優化的塗色方法及其指定塗色次數的期望值。
- （三）探討 n 個圓圈環狀排列與 m 個圓圈直線排列之最優化的塗色方法及其指定塗色次數的期望值。

貳、研究工具與研究方法

一、研究工具

紙、筆、電腦、Microsoft Office Word。

二、名詞解釋及符號定義

（一）名詞解釋：

- 1. 圖形 G 之塗點：是指圖形 G 中被指定塗色的圓圈。
- 2. 圖形 G 之最優化塗色方法：是指可使圖形 G 之指定塗色次數期望值達最小的塗色方法。

（二）符號定義：

- 1. 圖形 L_n ：表示 n 個圓圈直線排列而成的圖形，如下圖 1-1 為 L_6 。
- 2. 圖形 C_n ：表示 n 個圓圈環狀排列而成的圖形，如下圖 1-2 為 C_6 。
- 3. 圖形 $Q_{n,m}$ ：表示 n 個圓圈環狀排列及 m 個圓圈直線排列而成的圖形，如下圖 1-3 為 $Q_{6,3}$ 。



圖 1-1

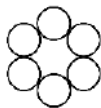


圖 1-2

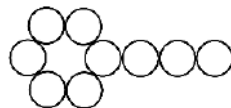


圖 1-3

4. $E(G)$ ：表示圖形 G 之指定塗色次數的期望值。
5. $E^*(G)$ ：表示圖形 G 之指定塗色次數期望值的最小值。
6. $E(G|g)$ ：表示圖形 G 中以圓圈 g 當第一個塗點之指定塗色次數的期望值。
7. $Arg(z)$ ：表示複數 z 的幅角，且 $-\pi \leq Arg(z) \leq \pi$ 。

參、研究過程

一、圖形 L_n

(一) 圖形 L_n 的塗色方法

令圖形 L_n 中之圓圈由左至右依序為 $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n$ ，如下圖 1-4。

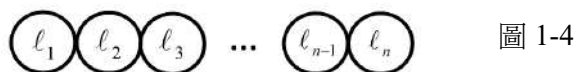


圖 1-4

現欲考慮圖形 L_n 中之第一個塗點圓圈 ℓ_k 位置，因圖形對稱性，故僅需考量 $1 \leq k \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 。

若選取圓圈 ℓ_k 當第一塗點，可視為下圖 1-5：

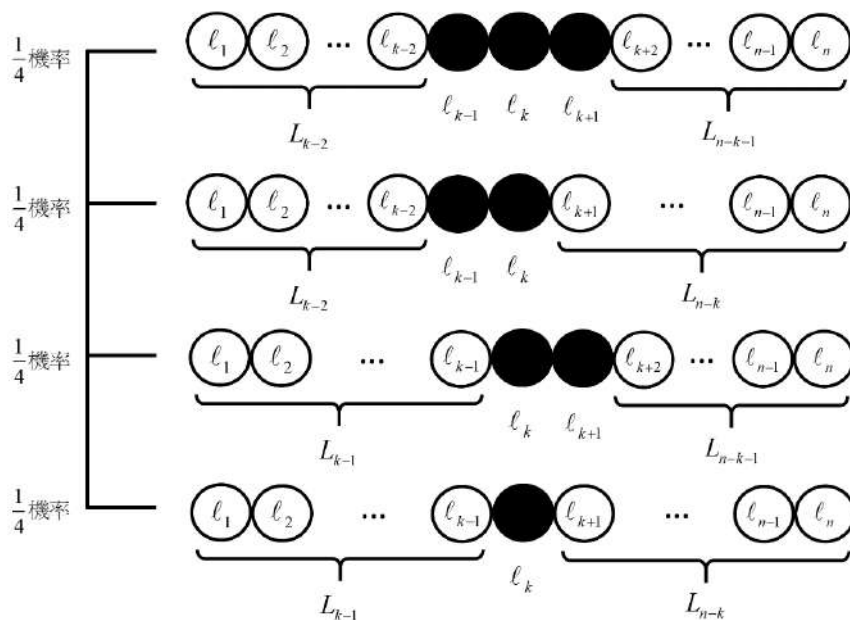


圖 1-5

故得以下關係式：
$$E(L_n | \ell_k) = 1 + \frac{1}{2}(E(L_{k-2}) + E(L_{k-1}) + E(L_{n-k-1}) + E(L_{n-k}))$$

【引理 1_1】 $n \in \mathbb{N}$

$$E^*(L_1) = E(L_1 | \ell_1) \quad ; \quad E^*(L_2) = E(L_2 | \ell_1) = E(L_2 | \ell_2) \quad ; \quad 3 \leq n \leq 5 \quad , \quad E^*(L_n) = E(L_n | \ell_2)$$

<證明>

$$n=1 \text{ 時 } , \quad E(L_1 | \ell_1) = 1 \quad \therefore E^*(L_1) = 1$$

$$n=2 \text{ 時 } , \quad E(L_2 | \ell_1) = 1 + \frac{1}{2} E(L_1) \geq \frac{3}{2} \quad \therefore E^*(L_2) = \frac{3}{2}$$

$$n=3 \text{ 時 } , \quad \begin{cases} E(L_3 | \ell_1) = 1 + \frac{1}{2} (E(L_1) + E(L_2)) \geq \frac{9}{4} \\ E(L_3 | \ell_2) = 1 + \frac{1}{2} (E(L_1) + E(L_1)) \geq 2 \end{cases} \quad \therefore E^*(L_3) = E(L_3 | \ell_2) = 2$$

$$n=4 \text{ 時 } , \quad \begin{cases} E(L_4 | \ell_1) = 1 + \frac{1}{2} (E(L_3) + E(L_2)) \geq \frac{11}{4} \\ E(L_4 | \ell_2) = 1 + \frac{1}{2} (2E(L_1) + E(L_2)) \geq \frac{11}{4} \end{cases} \quad \therefore E^*(L_4) = E(L_4 | \ell_1) = E(L_4 | \ell_2) = \frac{11}{4}$$

$$n=5 \text{ 時 } , \quad \begin{cases} E(L_5 | \ell_1) = 1 + \frac{1}{2} (E(L_4) + E(L_3)) \geq \frac{27}{8} \\ E(L_5 | \ell_2) = 1 + \frac{1}{2} (E(L_1) + E(L_2) + E(L_3)) \geq \frac{13}{4} \\ E(L_5 | \ell_3) = 1 + \frac{1}{2} (2E(L_1) + 2E(L_2)) \geq \frac{7}{2} \end{cases} \quad \therefore E^*(L_5) = E(L_5 | \ell_2) = \frac{13}{4}$$

【定理 1_1】 $n \in \mathbb{N}$

$$E(L_n | \ell_2) = \frac{7}{25} + \frac{3}{5} n + \lambda z^n + \overline{\lambda z^n}$$

$$\left(\text{其中 } \lambda = \frac{-7+i}{50} \quad , \quad z = \frac{-1+i}{2} \quad , \quad \overline{\lambda} \text{ 及 } \overline{z} \text{ 為其共軛複數} \right)$$

<證明>

令 $A_n = E(L_n | \ell_2)$, $A_n = 1 + \frac{1}{2} (A_1 + A_{n-2} + A_{n-3}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} A_{n-2} + \frac{1}{2} A_{n-3}$ 為非齊次線性遞迴關係式

設 αn (α 為常數) 為其特解, 則

$$(A_n - \alpha n) = \frac{1}{2} (A_{n-2} - \alpha(n-2)) + \frac{1}{2} (A_{n-3} - \alpha(n-3)) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\therefore (A_n - \frac{3}{5} n) = \frac{1}{2} (A_{n-2} - \frac{3}{5} (n-2)) + \frac{1}{2} (A_{n-3} - \frac{3}{5} (n-3))$$

令 $B_n = A_n - \frac{3}{5} n$, $B_n = \frac{1}{2} B_{n-2} + \frac{1}{2} B_{n-3}$ 為齊次線性遞迴關係式,

可改寫為 $x^n = \frac{1}{2} x^{n-2} + \frac{1}{2} x^{n-3}$ 兩邊同除以 x^{n-3} 得

$$2x^3 - x - 1 = 0 \text{ 為 } B_n \text{ 的特徵方程式} \Rightarrow x=1, x=\frac{-1+i}{2}, x=\frac{-1-i}{2}$$

$$\therefore B_n = \lambda_1 \cdot 1^n + \lambda_2 \left(\frac{-1+i}{2}\right)^n + \lambda_3 \left(\frac{-1-i}{2}\right)^n \quad (\text{其中 } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ 為常數})$$

$$\text{將 } B_1 = \frac{2}{5}, B_2 = \frac{3}{10}, B_3 = \frac{1}{5} \text{ 代入得 } \lambda_1 = \frac{7}{25}, \lambda_2 = \frac{-7+i}{50}, \lambda_3 = \frac{-7-i}{50}$$

$$\therefore B_n = \frac{7}{25} \cdot 1^n + \frac{-7+i}{50} \left(\frac{-1+i}{2}\right)^n + \frac{-7-i}{50} \left(\frac{-1-i}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{-7+i}{50} \left(\frac{-1+i}{2}\right)^n + \frac{-7-i}{50} \left(\frac{-1-i}{2}\right)^n$$

$$\text{即 } E(L_n | \ell_2) = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \lambda z^n + \overline{\lambda z^n} \quad (\text{其中 } \lambda = \frac{-7+i}{50}, z = \frac{-1+i}{2}, \bar{\lambda} \text{ 及 } \bar{z} \text{ 為其共軛複數})$$

【引理 1_2】 $t \in \mathbb{N}$

$$\text{若 } z = \frac{-1+i}{2}, \text{ 則 } \text{Arg}(1-z^t) \in [-\tan^{-1} \frac{1}{3}, \tan^{-1} \frac{1}{2}]$$

<證明>

$$z = \frac{-1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \Rightarrow z^t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t \left(\cos \frac{3t\pi}{4} + i \sin \frac{3t\pi}{4} \right)$$

$$(1) t = 8t', t' \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ 顯然 } \text{Arg}(1-z^t) = 0$$

$$(2) t = 8t' + 1, t' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{|-z^t|}{\sin \phi} = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \phi \right)}$$

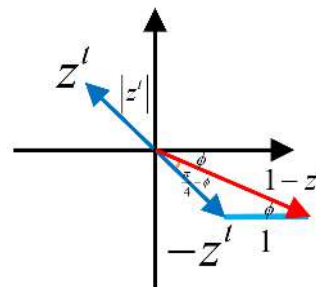
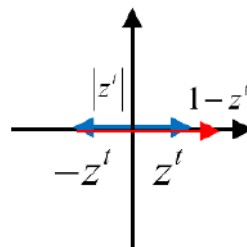
$$\Rightarrow \sin \phi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^t \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \phi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \phi \right)$$

$$\Rightarrow \sin \phi = \frac{1}{2^{4t'+1}} \cos \phi - \frac{1}{2^{4t'+1}} \sin \phi$$

$$\Rightarrow (1 + 2^{4t'+1}) \sin \phi = \cos \phi \Rightarrow \tan \phi = \frac{1}{2^{4t'+1} + 1} \leq \frac{1}{3}$$

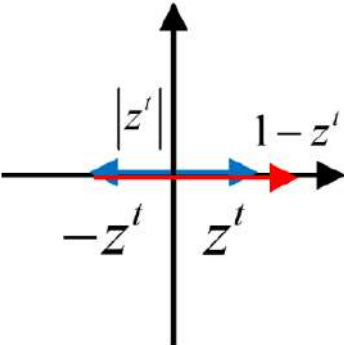
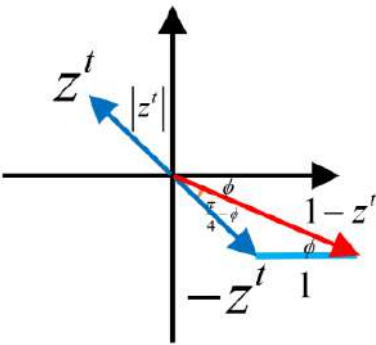
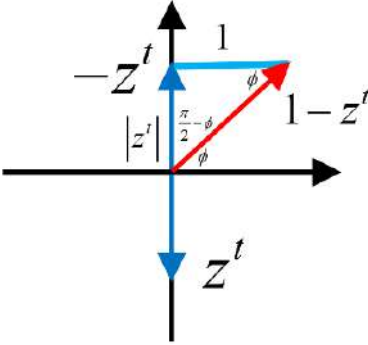
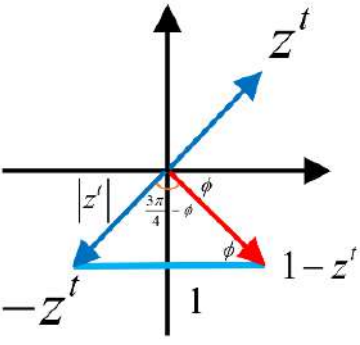
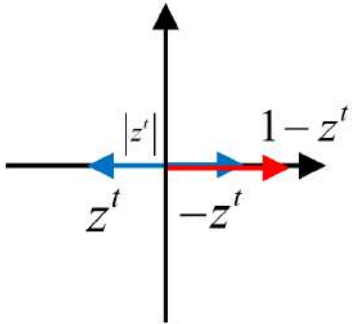
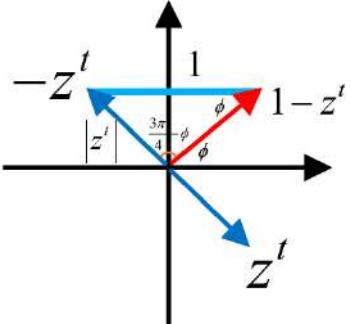
$$\therefore 0 < \phi = \tan^{-1} \frac{1}{2^{4t'+1} + 1} \leq \tan^{-1} \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\tan^{-1} \frac{1}{3} \leq \text{Arg}(1-z^t) = -\phi < 0$$



$$(3) t = 8t' + 2, t = 8t' + 3, t = 8t' + 4, t = 8t' + 5, t = 8t' + 6, t = 8t' + 7, t' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

同理可得如下表 1-1 之結果：

t 值	$8t'$	$8t'+1$
圖形		
$Arg(1-z^t)$ 範圍	0	$[-\tan^{-1}\frac{1}{3}, 0)$
t 值	$8t'+2$	$8t'+3$
圖形		
$Arg(1-z^t)$ 範圍	$(0, \tan^{-1}\frac{1}{2}]$	$[-\tan^{-1}\frac{1}{3}, 0)$
t 值	$8t'+4$	$8t'+5$
圖形		
$Arg(1-z^t)$ 範圍	0	$(0, \tan^{-1}\frac{1}{7}]$

t 值	$8t'+6$	$8t'+7$
圖形		
$Arg(1-z^t)$ 範圍	$[-\tan^{-1}\frac{1}{8}, 0)$	$(0, \tan^{-1}\frac{1}{17}]$

表 1-1

綜合上述討論， $Arg(1-z^t) \in [-\tan^{-1}\frac{1}{8}, \tan^{-1}\frac{1}{17}]$ $t \geq 1$

【定理 1_2】 $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 6$

$$E(L_n | \ell_2) \leq E(L_n | \ell_k) \quad (\text{其中 } 1 \leq k \leq [\frac{n+1}{2}])$$

<證明>

$$E(L_n | \ell_2) = 1 + \frac{1}{2}(E(L_1) + E(L_{n-3}) + E(L_{n-2}))$$

$$E(L_n | \ell_k) = 1 + \frac{1}{2}(E(L_{k-2}) + E(L_{k-1}) + E(L_{n-k-1}) + E(L_{n-k}))$$

$$\text{check: } 1 + E(L_{n-3} | \ell_2) + E(L_{n-2} | \ell_2) \leq E(L_{k-2} | \ell_2) + E(L_{k-1} | \ell_2) + E(L_{n-k-1} | \ell_2) + E(L_{n-k} | \ell_2)$$

(1) $k=1$

$$\text{定義 } E(L_{-1} | \ell_2) = 0, E(L_0 | \ell_2) = 0, E(L_1 | \ell_2) = 1$$

$$1 + E(L_{n-3} | \ell_2) + E(L_{n-2} | \ell_2) - E(L_{-1} | \ell_2) - E(L_0 | \ell_2) - E(L_{n-2} | \ell_2) - E(L_{n-1} | \ell_2)$$

$$= 1 + E(L_{n-3} | \ell_2) - E(L_{n-1} | \ell_2)$$

$$= 1 + \frac{3}{5}(n-3) + \lambda z^{n-3} + \overline{\lambda z^{n-3}} - \frac{3}{5}(n-1) - \lambda z^{n-1} - \overline{\lambda z^{n-1}} \quad (\text{由【定理 1_1】})$$

$$= -\frac{1}{5} + \lambda(1-z^2)z^{n-3} + \overline{\lambda(1-z^2)z^{n-3}} = -\frac{1}{5} + 2\operatorname{Re}((\frac{-3-i}{20})z^{n-3})$$

$$\leq -\frac{1}{5} + 2|(\frac{-3-i}{20})z^{n-3}| = -\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{10}}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-3} < 0$$

$$\therefore 1 + E(L_{n-3} | \ell_2) + E(L_{n-2} | \ell_2) \leq E(L_{k-2} | \ell_2) + E(L_{k-1} | \ell_2) + E(L_{n-k-1} | \ell_2) + E(L_{n-k} | \ell_2)$$

(2) $k=2$ 顯然成立

(3) $k \geq 3$

$$1 + E(L_{n-3} | \ell_2) + E(L_{n-2} | \ell_2) - E(L_{k-2} | \ell_2) - E(L_{k-1} | \ell_2) - E(L_{n-k-1} | \ell_2) - E(L_{n-k} | \ell_2)$$

$$\begin{aligned}
&= E(L_0|\ell_2) + E(L_1|\ell_2) + E(L_{n-3}|\ell_2) + E(L_{n-2}|\ell_2) - E(L_{k-2}|\ell_2) - E(L_{k-1}|\ell_2) - E(L_{n-k-1}|\ell_2) - E(L_{n-k}|\ell_2) \\
&= \lambda(z^0 + z + z^{n-2} + z^{n-3} - z^{k-2} - z^{k-1} - z^{n-k-1} - z^{n-k}) + \overline{\lambda(z^0 + z + z^{n-2} + z^{n-3} - z^{k-2} - z^{k-1} - z^{n-k-1} - z^{n-k})} \\
&= 2\operatorname{Re}(\lambda(1+z)(1-z^{k-2})(1-z^{n-k-1})) \\
&\because \lambda(1+z) = \frac{-4-3i}{50} \quad \therefore \operatorname{Arg}(\lambda(1+z)) = -\pi + \tan^{-1} \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

由【引理 1_2】知 $\operatorname{Arg}(1-z^t) \in [-\tan^{-1} \frac{1}{3}, \tan^{-1} \frac{1}{2}]$ ($t \geq 1$)

$$\therefore -\pi + \tan^{-1} \frac{3}{4} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} \leq \operatorname{Arg}(\lambda(1+z)(1-z^{k-2})(1-z^{n-k-1})) \leq -\pi + \tan^{-1} \frac{3}{4} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{2}$$

$$\because \tan^{-1} \frac{3}{4} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \operatorname{Re}(\lambda(1+z)(1-z^{k-2})(1-z^{n-k-1})) \leq 0$$

$$\therefore 1 + E(L_{n-3}|\ell_2) + E(L_{n-2}|\ell_2) \leq E(L_{k-2}|\ell_2) + E(L_{k-1}|\ell_2) + E(L_{n-k-1}|\ell_2) + E(L_{n-k}|\ell_2)$$

由 (1) (2) (3) 知, $E(L_n|\ell_2) \leq E(L_n|\ell_k)$

由【引理 1_1】及【定理 1_2】可得到圖形 L_n 最優化塗色方法, 即【定理 1_3】。

【定理 1_3】

圖形 L_n 最優化塗色方法: L_1 之第一個塗點為圓圈 ℓ_1 ; $n \geq 2$, L_n 之第一個塗點為圓圈 ℓ_2 , 塗色後隔開的 L_1 、 L_{n-3} 或 L_{n-2} 再依此模式接續塗色。

接下來我們將推導 $E^*(L_n)$ 的一般項 (n 值模 8 之同餘類):

【推論 1_1】 $n \in \mathbb{N}$

$$E^*(L_n) = \begin{cases} \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{3}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 1 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 2 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{4}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 3 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{7\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 4 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{3}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 5 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 6 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{4}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 7 \pmod{8}) \\ \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{7\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \end{cases}$$

<證明>

根據【定理 1_1】， $E(L_n | \ell_2) = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \lambda z^n + \overline{\lambda z^n} = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + 2\operatorname{Re}(\lambda z^n)$

(1) $n \equiv 1 \pmod{8}$

$$2\operatorname{Re}(\lambda z^n) = 2\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-7+i}{50}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow E^*(L_n) = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{3}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

(2) $n \equiv 2 \pmod{8}$

$$2\operatorname{Re}(\lambda z^n) = 2\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-7+i}{50}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow E^*(L_n) = \frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$n \equiv 3$ 、 $n \equiv 4$ 、 $n \equiv 5$ 、 $n \equiv 6$ 、 $n \equiv 7$ 、 $n \equiv 0 \pmod{8}$ 同理可得

$n=1 \sim 15$ 的 $E^*(L_n)$ 值，如下表 1-2：

L_n	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}
$E^*(L_n)$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{31}{8}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{91}{16}$	$\frac{201}{32}$	$\frac{55}{8}$	$\frac{479}{64}$	$\frac{517}{64}$	$\frac{1111}{128}$	$\frac{297}{32}$

表 1-2

(二) $E^*(L_n)$ 的生成函數

若將 $E^*(L_1)$ 、 $E^*(L_2)$ 、 $E^*(L_3)$... 之值視為數列 $\langle a_n \rangle_1^\infty = \langle 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{31}{8}, \frac{9}{2} \dots \rangle$ ，考慮生成函數時，增加 $a_0 = 0$ ，形成數列 $\langle a_n \rangle_0^\infty = \langle 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}, \frac{31}{8}, \frac{9}{2} \dots \rangle$ ，關於數列 $\langle a_n \rangle_0^\infty$ ， $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 稱為 $\langle a_n \rangle_0^\infty$ 的一般生成函數。

【定理 1_4】

若函數 $f(x)$ 為 $E^*(L_n)$ 的生成函數，則 $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ 。

<證明>

$$\langle a_n \rangle \text{ 的遞迴關係式：} \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2} \\ a_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-3} \quad n \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{令 } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ 則 } \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k = \frac{3}{2} \sum_{k=3}^{\infty} x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-3} x^k$$

$$\therefore f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 = \frac{3}{2} x^3 \sum_{k=3}^{\infty} x^{k-3} + \frac{1}{2} x^2 (f(x) - a_0) + \frac{1}{2} x^3 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - x - \frac{3}{2} x^2 = \frac{3x^3}{2(1-x)} + \frac{x^2}{2} f(x) + \frac{x^3}{2} f(x) \Rightarrow (1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3) f(x) = \frac{3x^3}{2(1-x)} + x + \frac{3}{2} x^2$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

(三) 圖形 L_n 最優化塗色方法之性質

接下來，我們將進一步探討在最優化的塗色方法下，圖形 L_n 中每個圓圈 ℓ_k 的塗色次數期望值與 k 之關係。由【定理 1_3】知， L_n 最優化塗色方法是以圓圈 ℓ_2 當第一個塗點，之後由左而右依序每相鄰兩個未被塗色圓圈再設一塗點，直到圓圈 ℓ_n 。

定義：存在相鄰兩個未被塗色圓圈狀態下，圓圈 ℓ_k 被選取當塗點的機率為 P_k 。

【定理 1_5】 $n \geq 2$

- (1) 滿足 P_k 的遞迴關係式：
$$\begin{cases} P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = 0 \\ P_k = \frac{1}{2}P_{k-3} + \frac{1}{2}P_{k-2} \quad 4 \leq k < n \end{cases}$$
- (2) 滿足 P_k 的遞迴關係式：
$$\begin{cases} P_1 = 0, P_2 = 1 \\ \frac{1}{2}P_{k-2} + P_{k-1} + P_k = 1 \quad 3 \leq k < n \end{cases}$$
- (3) $P_k = \frac{2}{5} + \delta z^k + \overline{\delta z^k}$ (其中 $\delta = \frac{-1+3i}{5}$, $z = \frac{-1+i}{2}$, $\overline{\delta}$ 及 $\overline{z}$ 為其共軛複數)

<證明>

圖形 L_n 最優化塗色方法是以圓圈 ℓ_2 當第一塗點，故 $P_1 = 0$ 、 $P_2 = 1$ 、 $P_3 = 0$

(1) 若圓圈 ℓ_k 被選取當塗點，此時必處於圓圈 ℓ_{k-2} 已塗色且圓圈 ℓ_{k-1} 未塗色之模式，而此模式有兩種可能：

①以圓圈 ℓ_{k-2} 當塗點（機率為 P_{k-2} ）且圓圈 ℓ_{k-1} 有 $\frac{1}{2}$ 機率未被塗色

②以圓圈 ℓ_{k-3} 當塗點（機率為 P_{k-3} ）且圓圈 ℓ_{k-2} 有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色

$\therefore$ ①②為互斥事件， $\therefore P_k = \frac{1}{2}P_{k-3} + \frac{1}{2}P_{k-2}$

(2) 圓圈 ℓ_k 不被選取當塗點的情形有兩種：

①以圓圈 ℓ_{k-1} 當塗點（機率為 P_{k-1} ），此時不論圓圈 ℓ_k 是否被塗色，接下來 ℓ_k 皆不會被選取當塗點。

②以圓圈 ℓ_{k-2} 當塗點（機率為 P_{k-2} ），圓圈 ℓ_{k-1} 有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色，此時 ℓ_k 不會被選取當塗點。

$\therefore$ ①②為互斥事件 $\therefore 1 - P_k = \frac{1}{2}P_{k-2} + P_{k-1} \Rightarrow \frac{1}{2}P_{k-2} + P_{k-1} + P_k = 1$

(3) 由 (1) $P_k = \frac{1}{2}P_{k-3} + \frac{1}{2}P_{k-2}$ 為齊次線性遞迴關係式，

可改寫為 $x^n = \frac{1}{2}x^{n-2} + \frac{1}{2}x^{n-3}$ 兩邊同除以 x^{n-3} 得

$2x^3 - x - 1 = 0$ 為 P_k 的特徵方程式 $\Rightarrow x = 1, \frac{-1+i}{2}, \frac{-1-i}{2}$

$\therefore P_k = \delta_1 \cdot 1^k + \delta_2 \left(\frac{-1+i}{2}\right)^k + \delta_3 \left(\frac{-1-i}{2}\right)^k$ (其中 δ_1 、 δ_2 、 δ_3 為常數)

將 $P_1 = 0$ ， $P_2 = 1$ ， $P_3 = 0$ 代入得 $\delta_1 = \frac{2}{5}$ ， $\delta_2 = \frac{-1+3i}{5}$ ， $\delta_3 = \frac{-1-3i}{5}$

$\therefore P_k = \frac{2}{5} + \delta z^k + \overline{\delta z^k}$ (其中 $\delta = \frac{-1+3i}{5}$ ， $z = \frac{-1+i}{2}$)

由【定理 1_5】之 (3) 可推導出 P_k 的一般項 (k 值模 8 之同餘類)：

【推論 1_2】 $1 \leq k < n$

$$P_k = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 1 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 2 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 3 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 4 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 5 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 6 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 7 \pmod{8}) \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} & (k \equiv 0 \pmod{8}) \end{cases}$$

<證明>

$$P_k = \frac{2}{5} + \delta z^k + \overline{\delta z^k} = \frac{2}{5} + 2 \operatorname{Re}(\delta z^k)$$

(1) $n \equiv 1 \pmod{8}$

$$2 \operatorname{Re}(\delta z^k) = 2 \operatorname{Re}\left(\left(\frac{-1+3i}{5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} \Rightarrow P_k = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2}$$

(2) $n \equiv 2 \pmod{8}$

$$2 \operatorname{Re}(\delta z^k) = 2 \operatorname{Re}\left(\left(\frac{-1+3i}{5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} \Rightarrow P_k = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2}$$

$n \equiv 3$ 、 $n \equiv 4$ 、 $n \equiv 5$ 、 $n \equiv 6$ 、 $n \equiv 7$ 、 $n \equiv 0 \pmod{8}$ 同理可得

由【推論 1_2】可知，隨著 k 值增加，圓圈 ℓ_k 被指定當塗點的機率趨近於 $\frac{2}{5}$ 。下表 1-3

列出 $k=1 \sim 15$ 的圓圈 ℓ_k 之 P_k 值：

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P_k	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{13}{32}$

表 1-3

【性質 1_1】

$$(1) P_2 = 1$$

$$(2) 0 \leq P_k \leq \frac{1}{2} \quad (1 \leq k \leq n, \text{ 但 } k \neq 2)$$

$$P_k = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ 或 } 3 ; \quad P_k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 4 \text{ 或 } 5 \text{ 或 } 7$$

<證明>

$$(1) \because \text{圓圈 } \ell_2 \text{ 為圖形 } L_n \text{ 之第一塗點} \quad \therefore P_2 = 1$$

$$(2) \because \text{【推論 1_2】中的 } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-2} \text{ 隨 } k \text{ 值增加而遞減,}$$

$$\therefore P_k \text{ 之最大值與最小值, 只需考慮 } 1 \leq k \leq 8, \text{ 但 } k \neq 2$$

$$\text{當 } k = 1 \text{ 或 } 3 \text{ 時, } P_k \text{ 有最小值 } 0 ; \quad \text{當 } k = 4 \text{ 或 } 5 \text{ 或 } 7 \text{ 時, } P_k \text{ 有最大值 } \frac{1}{2}。$$

圓圈 ℓ_1 、 ℓ_3 與第一個塗點 ℓ_2 相鄰，故在以相鄰兩個未被塗色圓圈條件下，選擇圓圈 ℓ_1 及 ℓ_3 當塗點的機率為 0。至於其他圓圈被選取當塗點的機率皆不超過 $\frac{1}{2}$ ，而且僅圓圈 ℓ_4 、 ℓ_5 及 ℓ_7 被選取當塗點的機率可達最大值 $\frac{1}{2}$ 。

換個方式，我們從組合的觀點來看 P_k 值。

【定理 1_6】

令 P_k 為圓圈 ℓ_k 被選取當塗點的機率 ($1 \leq k \leq n$, $0 \leq P_k \leq 1$)，則

$$P_k = \sum_{3t_1+2t_2=k-2} C_{t_1}^{t_1+t_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1+t_2}$$

<證明>

若圓圈 ℓ_k 當塗點，此時必處於 ℓ_{k-2} 被塗黑， ℓ_{k-1} 未被塗黑之模式，而此模式可視為從

1×3 $\bullet\bullet\bullet$ 或 1×2 $\bullet\bullet$ 兩種骨牌選取，每種骨牌被取到的機率皆為 $\frac{1}{2}$ ，之後將骨牌從圓圈 ℓ_1

開始，由左而右以不旋轉且不翻轉方式依序覆蓋至圓圈 ℓ_{k-2} 為止，而此機率為

$$\sum_{3t_1+2t_2=k-2} C_{t_1}^{t_1+t_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1+t_2}, \text{ 故 } P_k = \sum_{3t_1+2t_2=k-2} C_{t_1}^{t_1+t_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1+t_2}。$$

以圓圈 ℓ_{19} 為例：

$$\ell_{19} \text{ 被選擇當塗點機率為 } \sum_{3t_1+2t_2=17} C_{t_1}^{t_1+t_2} \left(\frac{1}{2}\right)^{t_1+t_2} = C_1^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_3^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_5^6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{51}{128}$$

【定理 1_7】 $n \geq 3$

令 $E(\ell_k)$ 為圓圈 ℓ_k 之塗色次數期望值，則

$$E(\ell_2)=1, \quad E(\ell_1)=\frac{1}{2}; \quad E(\ell_k)=\frac{1}{4}P_{k-2}+\frac{1}{4}P_{k-1}+P_k \quad 3 \leq k < n; \quad ;$$

$$E(\ell_n)=\frac{1}{2}P_{n-3}+P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$$

<證明>

(1) 圖形 L_n 中，以圓圈 ℓ_2 當第一個塗點，顯然 $E(\ell_2)=1$ ，且此時圓圈 ℓ_1 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色

或未被塗色，故 $E(\ell_1)=\frac{1}{2}$ 。

(2) 當 $3 \leq k < n$ 時，考慮圓圈 ℓ_k 尚需一次塗色的情形：

1° 若圓圈 ℓ_k 當塗點（機率為 P_k ），此時 ℓ_k 需一次塗色

2° 若圓圈 ℓ_k 不當塗點，此時必處於圓圈 ℓ_{k-1} 已塗色但圓圈 ℓ_k 未塗色之模式，而此模式有兩種可能：

①以圓圈 ℓ_{k-1} 當塗點（機率為 P_{k-1} ）且圓圈 ℓ_k 有 $\frac{1}{2}$ 機率未被塗色

②以圓圈 ℓ_{k-2} 當塗點（機率為 P_{k-2} ）且圓圈 ℓ_{k-1} 有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色

以上①②情形，圓圈 ℓ_{k+1} 皆會被選取當塗點，且圓圈 ℓ_k 有 $\frac{1}{2}$ 機率未被塗色，故此時期 ℓ_k 尚需一次塗色。

$$\text{由 } 1^\circ \& 2^\circ \text{ 知， } E(\ell_k) = P_k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{k-1} + \frac{1}{2} P_{k-2} \right) = \frac{1}{4} P_{k-2} + \frac{1}{4} P_{k-1} + P_k$$

(3) 考慮圓圈 ℓ_n 尚需一次塗色的情形：

1° 若圓圈 ℓ_{n-1} 當塗點（機率為 P_{n-1} ）且圓圈 ℓ_n 有 $\frac{1}{2}$ 機率未被塗色，此時 ℓ_n 尚需一次塗色。

2° 若圓圈 ℓ_{n-2} 當塗點（機率為 P_{n-2} ），此時圓圈 ℓ_n 皆需一次塗色。

3° 若圓圈 ℓ_{n-3} 當塗點（機率為 P_{n-3} ），且圓圈 ℓ_{n-2} 有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色，此時 ℓ_n 尚需一次塗色。

$$\text{由 } 1^\circ、2^\circ \& 3^\circ \text{ 知， } E(\ell_n) = \frac{1}{2} P_{n-3} + P_{n-2} + \frac{1}{2} P_{n-1}$$

將【推論 1_2】的結果代入【定理 1_7】的遞迴關係式，可分別得到 $E(\ell_k)$ 及 $E(\ell_n)$ 的一般項（ k 值、 n 值模 8 之同餘類），即【推論 1_3】。

【推論 1_3】 $n \geq 3$, $3 \leq k < n$

$$E(\ell_1) = \frac{1}{2} , \quad E(\ell_2) = 1$$

$$E(\ell_k) = \begin{cases} \frac{3}{5} - \frac{7}{5\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 3 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 4 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} + \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 5 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 6 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} + \frac{7}{5\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 7 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 0 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} - \frac{1}{5\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 1 \pmod{8}) \\ \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k & (k \equiv 2 \pmod{8}) \end{cases}$$

$$E(\ell_n) = \begin{cases} \frac{4}{5} - \frac{3}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 3 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 4 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} - \frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 5 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 6 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} + \frac{3}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 7 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 1 \pmod{8}) \\ \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-5} & (n \equiv 2 \pmod{8}) \end{cases}$$

$k=1\sim 15$ 的 $E(\ell_k)$ 值，如下表 1-4：

ℓ_k	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}	ℓ_{14}	ℓ_{15}
$E(\ell_k)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{37}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{77}{128}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{155}{256}$

表 1-4

$k=1\sim 15$ 的 $E(\ell_n)$ 值，如下表 1-5：

ℓ_n	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}	ℓ_{14}	ℓ_{15}
$E(\ell_n)$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{51}{64}$	$\frac{51}{64}$	$\frac{103}{128}$

表 1-5

【性質 1_2】

$$E(\ell_2)=1 \quad ; \quad \frac{1}{4} \leq E(\ell_k) \leq \frac{3}{4} \quad 1 \leq k < n, \text{ 但 } k \neq 2$$

<證明>

$\because$ 【推論 1_3】中的 $(\frac{1}{\sqrt{2}})^k$ 隨 k 值增加而遞減，

$\therefore E(\ell_k)$ 之最大值與最小值，只需考慮 $3 \leq k \leq 10$ ，又 $E(\ell_1)=\frac{1}{2}$ ，

當 $k=3$ 時， $E(\ell_k)=\frac{1}{4}$ 有最小值；當 $k=4$ 時， $E(\ell_k)=\frac{3}{4}$ 有最大值

由【性質 1_2】知，撇除當第一個塗點的圓圈 ℓ_2 外，圖形 L_n 中各圓圈平均塗色次數，以圓圈 ℓ_4 最多，為 $\frac{3}{4}$ 次，以圓圈 ℓ_3 最少，為 $\frac{1}{4}$ 次。

二、圖形 C_n

【定理 2_1】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

$$(1) E^*(C_n) = 1 + \frac{1}{4}E^*(L_{n-3}) + \frac{1}{2}E^*(L_{n-2}) + \frac{1}{4}E^*(L_{n-1})$$

$$(2) E^*(C_n) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{4}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3} + \overline{\lambda(z+1)^2 z^{n-3}})$$

(其中 $\lambda = \frac{-7+i}{50}$, $z = \frac{-1+i}{2}$, $\bar{\lambda}$ 及 $\bar{z}$ 為其共軛複數)

<證明>

(1) 因對稱性，故圖形 C_n 不論哪一個圓圈當第一個塗點，結果皆相同。不失一般性，以圓圈 c_2 當第一個塗點，塗色後剩餘的圓圈視為 L_{n-3} 或 L_{n-2} 或 L_{n-1} ，如下圖 2-1：

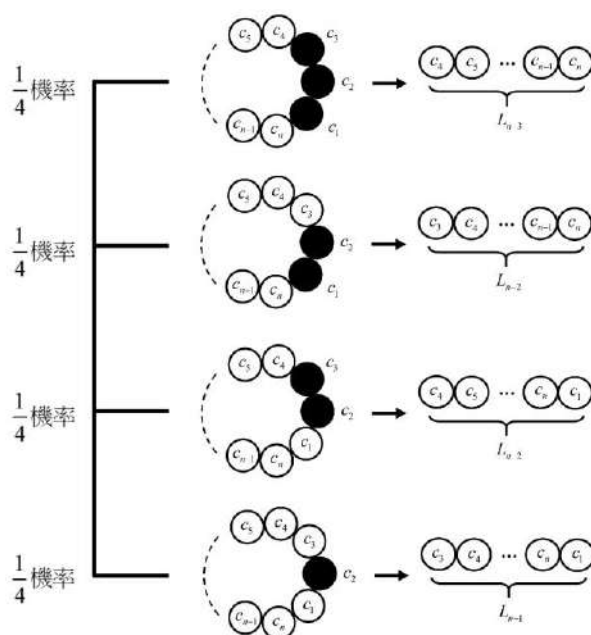


圖 2-1

$$\text{故 } E^*(C_n) = 1 + \frac{1}{4}E^*(L_{n-3}) + \frac{1}{2}E^*(L_{n-2}) + \frac{1}{4}E^*(L_{n-1})$$

(2) 由【定理 1_2】知，

$$\begin{aligned} E^*(C_n) &= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{25} + \frac{3}{5}(n-3) + \lambda z^{n-3} + \overline{\lambda z^{n-3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{25} + \frac{3}{5}(n-2) + \lambda z^{n-2} + \overline{\lambda z^{n-2}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{25} + \frac{3}{5}(n-1) + \lambda z^{n-1} + \overline{\lambda z^{n-1}}\right) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{4}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3} + \overline{\lambda(z+1)^2 z^{n-3}}) \end{aligned}$$

有了遞迴關係式，即可推導 $E^*(C_n)$ 的一般項（ n 值模 8 之同餘類）：

【推論 2_1】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

$$E^*(C_n) = \begin{cases} \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{1}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 3 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{2}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 4 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{7}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 5 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{3}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 6 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 7 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{7}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 1 \pmod{8}) \\ \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{3}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n & (n \equiv 2 \pmod{8}) \end{cases}$$

<證明>

$$E^*(C_n) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{4}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3} + \overline{\lambda(z+1)^2 z^{n-3}}) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3})$$

(1) $n \equiv 1 \pmod{8}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3}) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-7+i}{50}\right)\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{7}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\Rightarrow E^*(C_n) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{7}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

(2) $n \equiv 2 \pmod{8}$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3}) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{-7+i}{50}\right)\left(\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{-3}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$$\Rightarrow E^*(C_n) = \frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{3}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

$n \equiv 3$ 、 $n \equiv 4$ 、 $n \equiv 5$ 、 $n \equiv 6$ 、 $n \equiv 7$ 、 $n \equiv 0 \pmod{8}$ 同理可得

$n=3\sim 13$ 的 $E^*(C_n)$ 值，如下表 2-1：

C_n	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
$E^*(C_n)$	$\frac{15}{8}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{49}{16}$	$\frac{59}{16}$	$\frac{137}{32}$	$\frac{39}{8}$	$\frac{351}{64}$	$\frac{389}{64}$	$\frac{855}{128}$	$\frac{233}{32}$	$\frac{2017}{256}$	$\frac{2171}{256}$	$\frac{4649}{512}$

表 2-1

(二) $E^*(C_n)$ 的生成函數

若將圖形 C_1 、 C_2 視為 L_1 、 L_2 ，則可將 $E^*(C_1)$ 、 $E^*(C_2)$ 、 $E^*(C_3)\cdots$ 之值視為數列

$\langle b_n \rangle_1 = \langle 1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{5}{2}, \frac{49}{16}, \frac{59}{16}, \frac{137}{32}, \dots \rangle$ ，考慮生成函數時，增加 $b_0 = 0$ ，形成數列

$\langle b_n \rangle_0 = \langle 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{5}{2}, \frac{49}{16}, \frac{59}{16}, \frac{137}{32}, \dots \rangle$ ，關於數列 $\langle b_n \rangle_0$ ， $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 稱為 $\langle b_n \rangle_0$ 的一般

生成函數。

【定理 2_2】

若函數 $g(x)$ 為 $E^*(C_n)$ 的生成函數，則 $g(x) = \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ 。

<證明>

$$\because E^*(C_n) = 1 + \frac{1}{4}E^*(L_{n-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{n-2}) + \frac{1}{4}E^*(L_{n-3})$$

$$\therefore b_n = 1 + \frac{1}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2} + \frac{1}{4}a_{n-3}, \text{ 其中 } a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=3}^{\infty} x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n$$

$$\therefore g(x) - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 = x^3 \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3} + \frac{x}{4} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \frac{x^2}{2} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} + \frac{x^3}{4} \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^{n-3}$$

$$\Rightarrow g(x) - x - \frac{3}{2}x^2 = \frac{x^3}{1-x} + \frac{x}{4}(f(x) - x) + \frac{x^2}{2}f(x) + \frac{x^3}{4}f(x)$$

$$\text{由【定理 1_4】知 } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x(x^2 + 2x + 3)}{2(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

(三) 圖形 C_n 最優化塗色方法之性質

圖形 L_n 最優化塗色方法是以圓圈 ℓ_2 當第一個塗點，圖形 C_n 則是任選一圓圈皆可當第一個塗點，之後，兩者塗色方法皆同。因此我們不妨令圖形 C_n 以圓圈 c_2 當第一個塗點，此時 L_n 中每個圓圈 ℓ_k 的塗色次數期望值 $E(\ell_k)$ 與 C_n 中每個圓圈 c_k 的塗色次數期望值 $E(c_k)$ 只在 $k=1$ 時不同，其餘皆相同，故只需調整【定理 1_7】中的 $E(\ell_1)$ 即可得。

【定理 2_3】 $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 3$ ，

令 $E(c_k)$ 為圓圈 c_k 之塗色次數期望值，則

$$E(c_2)=1, \quad E(c_1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(P_{n-3}+2P_{n-2}+P_{n-1})$$

$$E(c_k)=\frac{1}{4}P_{k-2}+\frac{1}{4}P_{k-1}+P_k \quad 3 \leq k < n$$

$$E(c_n)=\frac{1}{2}P_{n-3}+P_{n-2}+\frac{1}{2}P_{n-1}$$

<證明>

考慮圓圈 c_1 在不當指定塗點下被塗色的兩種情形：

(1) 以圓圈 c_2 為塗點（機率為 1）且圓圈 c_1 有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色，此機率為 $\frac{1}{2}$ 。

(2) 以圓圈 c_2 為塗點（機率為 1）且圓圈 c_1 有 $\frac{1}{2}$ 機率未被塗色，再依最優化塗色方法下，

若以圓圈 c_n 為塗點且 $\frac{1}{2}$ 機率使得圓圈 c_1 被塗色，此機率為

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_n\right)=\frac{1}{8}P_{n-3}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-1}$$

$$\text{由 (1) (2) 知, } E(c_1)=1-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}P_{n-3}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}(P_{n-3}+2P_{n-2}+P_{n-1})$$

以下為 $E^*(C_n)$ 與 $E^*(L_n)$ 之關係：

【定理 2_4】 $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 3$

$$E^*(C_n)=E^*(L_n)-\frac{1}{8}(P_{n-3}+2P_{n-2}+P_{n-1})$$

<證明>

$$\text{由【定理 2_3】知, } E^*(L_n)-E^*(C_n)=E(\ell_1)-E(c_1)=\frac{1}{8}(P_{n-3}+2P_{n-2}+P_{n-1})$$

$$\therefore E^*(C_n)=E^*(L_n)-\frac{1}{8}(P_{n-3}+2P_{n-2}+P_{n-1})$$

將【推論 1_2】的結果代入【定理 2_4】的遞迴關係式，即可得到【推論 2_2】。

【推論 2_2】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

$$E^*(C_n) = E^*(L_n) + \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{80} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 3 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 4 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{2}}{80} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 5 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{40} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 6 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{80} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 7 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 0 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{80} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 1 \pmod{8}) \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{40} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-4} & (n \equiv 2 \pmod{8}) \end{cases}$$

由【推論 2_2】可知，隨著 n 值增加， $E^*(C_n)$ 與 $E^*(L_n)$ 之差值趨近於 $\frac{1}{5}$ 。下表 2-2 為 $n=3 \sim 12$ 之 $E^*(C_n)$ 與 $E^*(L_n)$ 的差值：

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$E^*(C_n) - E^*(L_n)$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{7}{32}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{13}{64}$	$-\frac{13}{64}$	$-\frac{25}{128}$	$-\frac{13}{64}$	$-\frac{51}{256}$

表 2-2

三、圖形 $Q_{n,m}$ ($n \geq 4$, $m \geq 1$)

(一) 圖形 $T_{j,2,k}$ ($j, k \geq 1$) 定義為如下圖 3-1：

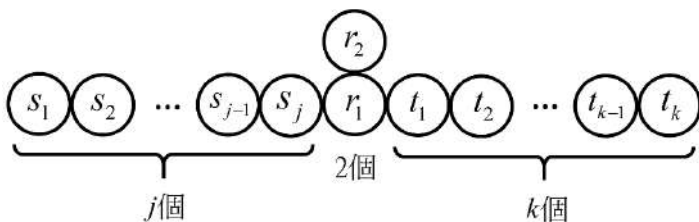


圖 3-1

【引理 3_1】 $j, k \in \mathbb{N}$, $j, k \geq 1$

$$(1) E^*(T_{j,2,k}) = E(T_{j,2,k} | r_1)$$

$$(2) E^*(T_{j,2,k}) = E^*(L_{j+2}) + \frac{1}{2}(E^*(L_{k-1}) + E^*(L_k)) = E^*(L_{k+2}) + \frac{1}{2}(E^*(L_{j-1}) + E^*(L_j))$$

<證明>

圖形 $T_{j,2,k}$ 之塗色方式可視為 $L_{j+2} \cup L_k$, 如下圖 3-2 ; 或 $L_j \cup L_{k+2}$, 如下圖 3-3 ; 或 $L_{j+1+k} \cup L_1$, 如下圖 3-4 。

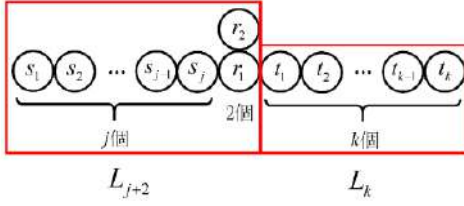


圖 3-2

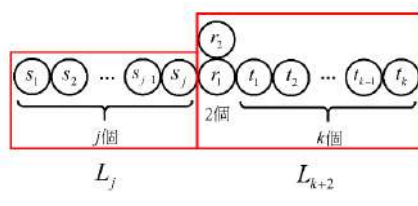


圖 3-3

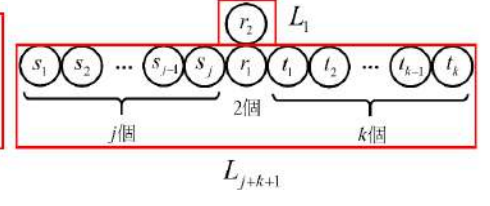


圖 3-4

若為 $L_{j+2} \cup L_k$, 圖形 L_{j+2} 之最優化塗色方法之第一個塗點為圓圈 r_1 或圓圈 s_2 :

①若第一個塗點為圓圈 r_1 , 則圖形 $T_{j,2,k}$ 可視為如下圖 3-5 :

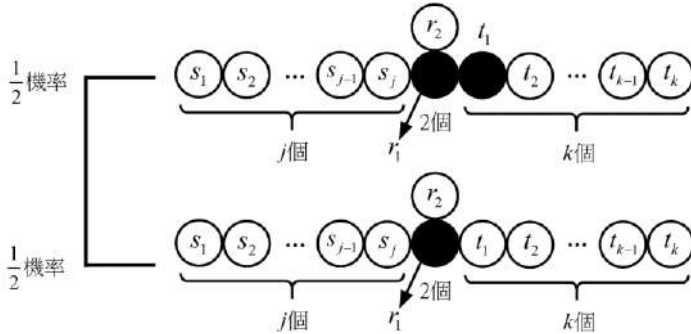


圖 3-5

$$\therefore E(T_{j,2,k} | r_1) = E(L_{j+2}) + \frac{1}{2}(E(L_{k-1}) + E(L_k))$$

②若第一個塗點為圓圈 s_2 , 由左而右開始塗色, 則當圓圈 s_j 當塗點 (機率為 P_{s_j}) 時, 圓圈 r_1 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色。若為前者, 圓圈 $t_1 \sim t_k$ 可視為 L_k , 如下圖 3-6 , 故指定塗色次數期望值為 $E(L_k)$; 若為後者, 剩餘圓圈可視為 L_{k+2} , 如下圖 3-7 , 接下來將以圓圈 r_1 為塗點, 圓圈 $t_1 \sim t_k$ 之指定塗色次數期望值為 $\frac{1}{2}(E(L_{k-1}) + E(L_k))$ 。

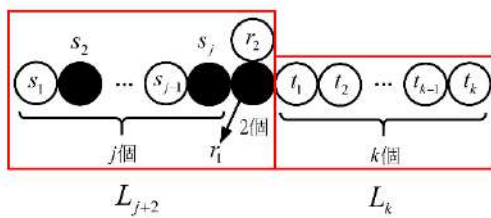


圖 3-6

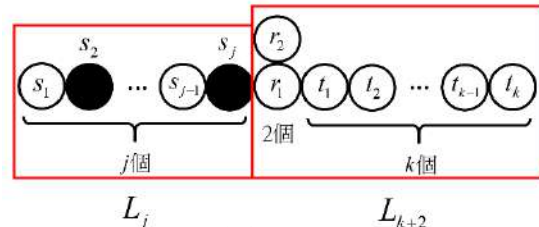


圖 3-7

$$\therefore E(T_{j,2,k} | s_2) = E(L_{j+2}) + \frac{1}{2} P_{s_j} E(L_k) + (1 - \frac{1}{2} P_{s_j}) \frac{1}{2} (E(L_{k-1}) + E(L_k))$$

$$\text{由【性質 1_1】知， } 0 \leq P_{s_j} \leq \frac{1}{2}, \quad \therefore E(T_{j,2,k} | r_1) \leq E(T_{j,2,k} | s_2)$$

若為 $L_j \cup L_{k+2}$ ，同理可得 $E(T_{j,2,k} | r_1) \leq E(T_{j,2,k} | t_{k-1})$

若為 $L_{j+1+k} \cup L_1$ ，依最優化塗色方法之第一個塗點為圓圈 s_2 或圓圈 t_{k-1} ，而此兩者已在前兩者討論。

$$\text{綜合上述， } E^*(T_{j,2,k}) = E^*(L_{j+2}) + \frac{1}{2} (E^*(L_{k-1}) + E^*(L_k)) = E^*(L_{k+2}) + \frac{1}{2} (E^*(L_{j-1}) + E^*(L_j))$$

(二) 圖形 $Q_{n,m}$

1. 圖形 $Q_{4,m}$ ($m \geq 1$)

圖形 $Q_{4,m}$ 可視為 $C_4 \cup L_m$ ，令 C_4 中與 L_m 相連的圓圈為 c_1 ，逆時針方向依序為 c_2 、 c_3 、 c_4 ，而 L_m 中與圓圈 c_1 相連為圓圈 ℓ_1 ，由左而右依序為 ℓ_2 、 ℓ_3 、 $\dots$ 、 ℓ_m ，如下圖 3-8。

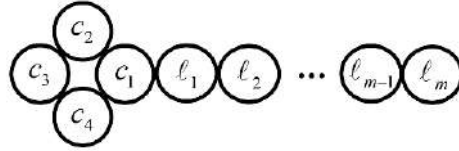


圖 3-8

【引理 3_2】 $m \geq 1$

$$E(Q_{4,m} | c_3) \leq E(Q_{4,m} | c_k) \quad (1 \leq k \leq 4) \quad ; \quad \text{其中 } m=1 \text{ 或 } 3, \quad E(Q_{4,m} | c_3) = E(Q_{4,m} | c_1)$$

<證明>

$$\begin{aligned} E(Q_{4,m} | c_3) &= 1 + \frac{1}{4} E(L_{m+1}) + \frac{1}{2} E(L_{m+2}) + \frac{1}{4} E(T_{1,2,m}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{4} E^*(L_{m+1}) + \frac{1}{2} E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{4} (E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2} E^*(L_1)) = \frac{1}{4} E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4} E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\text{同理 } E(Q_{4,m} | c_1) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2} E^*(L_m)$$

$$E(Q_{4,m} | c_2) = E(Q_{4,m} | c_4) \geq \frac{13}{8} + \frac{1}{2} E^*(L_m) + \frac{1}{4} E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{4} E^*(L_{m+3})$$

$$(1) \quad E(Q_{4,m} | c_3) - E(Q_{4,m} | c_1) = \frac{-11}{8} + \frac{1}{4} E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4} E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2} E^*(L_{m-1}) - \frac{1}{2} E^*(L_m)$$

$$\text{check : } \frac{-11}{8} + \frac{1}{4} E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4} E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2} E^*(L_{m-1}) - \frac{1}{2} E^*(L_m) \leq 0$$

$$m=1, \quad \frac{-11}{8} + \frac{1}{4} E^*(L_2) + \frac{3}{4} E^*(L_3) - \frac{1}{2} E^*(L_0) - \frac{1}{2} E^*(L_1) = 0$$

$$\begin{aligned}
m=2, & \quad \frac{-11}{8} + \frac{1}{4}E^*(L_3) + \frac{3}{4}E^*(L_4) - \frac{1}{2}E^*(L_2) - \frac{1}{2}E^*(L_1) = \frac{-1}{16} < 0 \\
m=3, & \quad \frac{-11}{8} + \frac{1}{4}E^*(L_4) + \frac{3}{4}E^*(L_5) - \frac{1}{2}E^*(L_3) - \frac{1}{2}E^*(L_2) = 0 \\
m \geq 4, & \quad \frac{-11}{8} + \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}E^*(L_m) - \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) \\
& = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{10} + \lambda(z-1)(3z^2+4z+2)z^{m-1} + \overline{\lambda(z-1)(3z^2+4z+2)z^{m-1}} \right) \\
& = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{10} + 2 \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1+2i}{20} \right) z^{m-1} \right) \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{10} + 2 \left| \frac{1+2i}{20} \right| |z^{m-1}| \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{10} + \frac{\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{m-1} \right) < 0
\end{aligned}$$

$\therefore E(Q_{4,m}|c_3) \leq E(Q_{4,m}|c_1)$ ，其中當 $m=1$ 或 3 時，等號成立

$$(2) \quad E(Q_{4,m}|c_3) - E(Q_{4,m}|c_2) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}E^*(L_m) - \frac{1}{4}E^*(L_{m+3})$$

$$\text{check : } \frac{-1}{2} + \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}E^*(L_m) - \frac{1}{4}E^*(L_{m+3}) \leq 0$$

$$\begin{aligned}
& \therefore \frac{-1}{2} + \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}E^*(L_m) - \frac{1}{4}E^*(L_{m+3}) \\
& = \frac{-1}{5} + \frac{\lambda}{4}(z-2)(1-z^2)z^m + \frac{\overline{\lambda}}{4}(z-2)(1-z^2)z^m = \frac{-1}{5} + 2 \operatorname{Re} \left(\left(\frac{8+i}{80} \right) (z^m) \right) \\
& \leq \frac{-1}{5} + 2 \left| \frac{8+i}{80} \right| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m = \frac{-1}{5} + \frac{\sqrt{65}}{40} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m < 0
\end{aligned}$$

$$\therefore E(Q_{4,m}|c_3) < E(Q_{4,m}|c_2)$$

由 (1) (2) 知， $E(Q_{4,m}|c_3) \leq E(Q_{4,m}|c_k)$ ，其中當 $m=1$ 或 3 ， $E(Q_{4,m}|c_3) = E(Q_{4,m}|c_1)$

接下來我們將依 m 值討論 $Q_{4,m}$ 之最優化塗色方法。

(1) $\boxed{m=1}$

$$E(Q_{4,1}|\ell_1) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(L_3) + E^*(C_4)) = \frac{13}{4}$$

又由【引理 3_2】知， $E(Q_{4,1}|c_1) = E(Q_{4,1}|c_3) = 3$

$$\therefore E^*(Q_{4,1}) = E(Q_{4,1}|c_1) = E(Q_{4,1}|c_3)$$

(2) $\boxed{m=2}$

$$E(Q_{4,2}|\ell_1) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(L_3) + E^*(C_4)) + \frac{1}{2}E^*(L_1) = \frac{15}{4}$$

$$E(Q_{4,2}|\ell_2) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(C_4) + E^*(Q_{4,1})) = \frac{15}{4}$$

$$\text{又由【引理 3_2】知，} E(Q_{4,2}|c_3) = \frac{59}{16} = E(Q_{4,2}|c_1) - \frac{1}{16}$$

$$\therefore E^*(Q_{4,2}) = E(Q_{4,2}|c_3)$$

(3) $\boxed{m=3}$

$$E(Q_{4,3}|\ell_1) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(L_3) + E^*(C_4)) + \frac{1}{2}(E^*(L_1) + E^*(L_2)) = \frac{9}{2}$$

$$E(Q_{4,3}|\ell_2) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(C_4) + E^*(Q_{4,1})) + \frac{1}{2}E^*(L_1) = \frac{17}{4}$$

$$E(Q_{4,3}|\ell_3) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(Q_{4,1}) + E^*(Q_{4,2})) = \frac{139}{32}$$

$$\text{又由【引理 3_2】知， } E(Q_{4,3}|c_1) = E(Q_{4,3}|c_3) = \frac{17}{4}$$

$$\therefore E^*(Q_{4,3}) = E(Q_{4,3}|c_1) = E(Q_{4,3}|c_3) = E(Q_{4,3}|\ell_2)$$

(4) $\boxed{m \geq 4}$

圖形 $Q_{4,m}$ 若以圓圈 ℓ_{m-1} 當第一個塗點，且依 L_m 之最優化塗色方法，由右而左塗色，

①當圓圈 ℓ_4 當塗點（機率為 P_{m-3} ），左邊剩餘圓圈有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{4,2}$ ，有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{4,3}$ 。

②當圓圈 ℓ_3 當塗點（機率為 P_{m-2} ），左邊剩餘圓圈有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{4,1}$ ，有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{4,2}$ 。

故有 $\frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2}$ 機率出現 $Q_{4,2}$ 。

$$\therefore E^*(Q_{4,1}) = E(Q_{4,1}|c_1) \text{、} E^*(Q_{4,2}) = E(Q_{4,2}|c_1) - \frac{1}{16} \text{、} E^*(Q_{4,3}) = E(Q_{4,3}|c_1) \text{，}$$

且由【定理 1_5】之（1）知， $\frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2} = P_m$

$$\therefore E(Q_{4,m}|\ell_{m-1}) = E(Q_{4,m}|c_1) - P_m \cdot \frac{1}{16} \geq E^*(C_4) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m$$

【引理 3_3】 $m \geq 3$

$$E^*(L_m) - E^*(L_{m-2}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}$$

<證明>

根據【定理 1_7】，

$$\begin{aligned} E^*(L_m) - E^*(L_{m-2}) &= (\frac{1}{2}P_{m-3} + P_{m-2} + \frac{1}{2}P_{m-1}) + (\frac{1}{4}P_{m-3} + \frac{1}{4}P_{m-2} + P_{m-1}) + (\frac{1}{4}P_{m-4} + \frac{1}{4}P_{m-3} + P_{m-2}) \\ &\quad - (\frac{1}{2}P_{m-5} + P_{m-4} + \frac{1}{2}P_{m-3}) = -\frac{1}{2}P_{m-5} - \frac{3}{4}P_{m-4} + \frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{9}{4}P_{m-2} + \frac{3}{2}P_{m-1} \\ &= (-\frac{1}{2}P_{m-5} - P_{m-4} - P_{m-3}) + (\frac{1}{4}P_{m-4} + \frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2}) + (P_{m-3} + 2P_{m-2} + 2P_{m-1}) - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1} \\ &= -1 + \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1} \quad (\text{由【定理 1_5】之(2)}) \end{aligned}$$

【引理 3_4】 $m \geq 4$

$$\frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8} = (E^*(C_4) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m$$

<證明>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8} \\ &= \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}E^*(L_{m-2}) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_1)) + \frac{3}{4}(1 + \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m) + \frac{1}{2}E^*(L_1)) + \frac{9}{8} \\ &= (\frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m) + \frac{5}{2}) + \frac{1}{8}(E^*(L_{m-2}) - E^*(L_m) + 1) \\ &= (\frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m) + \frac{5}{2}) + \frac{1}{8}(-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}P_{m-2} + \frac{1}{2}P_{m-1} + 1) \quad (\text{由【引理 3_3】}) \\ &= (\frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m) + \frac{5}{2}) + \frac{1}{8}(\frac{1}{4}P_{m-2} + \frac{1}{2}P_{m-1} - \frac{1}{2}) \\ &= (\frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m) + \frac{5}{2}) + \frac{1}{8}(-\frac{1}{2}P_m) \quad (\text{由【定理 1_5】之(2)}) \\ &= (E^*(C_4) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m \end{aligned}$$

【引理 3_5】 $m \geq 4$

$$E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{4,m} | \ell_k) \quad (1 \leq k \leq m)$$

<證明>

$$E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) \geq (E^*(C_4) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m = \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m + \frac{5}{2}$$

(1) $k=1$

$$E(Q_{4,m} | \ell_1) = 1 + \frac{1}{2}(E(L_3) + E(C_4)) + \frac{1}{2}(E(L_{m-2}) + E(L_{m-1})) \geq \frac{13}{4} + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-2}) + E^*(L_{m-1}))$$

$$\therefore E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) - E(Q_{4,m} | \ell_1) = \frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-2})) - \frac{1}{16}P_m - \frac{3}{4}$$

根據【引理 3_3】，

$$\therefore E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) - E(Q_{4,m} | \ell_1) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}) - \frac{1}{16}P_m - \frac{3}{4} = -\frac{1}{8}P_{m-2} - \frac{1}{4}P_{m-1} - \frac{1}{16}P_m < 0$$

$$\therefore E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) < E(Q_{4,m} | \ell_1)$$

(2) $k=2$

$$E(Q_{4,m} | \ell_2) = 1 + \frac{1}{2}(E(C_4) + E(Q_{4,1})) + \frac{1}{2}(E(L_{m-3}) + E(L_{m-2})) \geq \frac{15}{4} + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-3}) + E^*(L_{m-2}))$$

$$\therefore E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) - E(Q_{4,m} | \ell_2) = \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) - E^*(L_{m-3})) + \frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-2})) - \frac{1}{16}P_m - \frac{5}{4}$$

根據【引理 3_3】及【定理 1_5】之(2)，

$$\begin{aligned}
E(Q_{4,m}|\ell_{m-1}) - E(Q_{4,m}|\ell_2) &= \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-3} - \frac{1}{2}P_{m-2}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}) - \frac{1}{16}P_m - \frac{5}{4} \\
&= \frac{1}{4} - (\frac{1}{8}P_{m-3} + \frac{1}{4}P_{m-2} + \frac{1}{4}P_{m-1}) - \frac{1}{8}P_{m-2} - \frac{1}{16}P_m = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}P_{m-2} - \frac{1}{16}P_m < 0 \\
\therefore E(Q_{4,m}|\ell_{m-1}) &< E(Q_{4,m}|\ell_2)
\end{aligned}$$

(3) $k \geq 3$

若圖形 $Q_{4,m}$ 以圓圈 ℓ_k 當第一個塗點，則

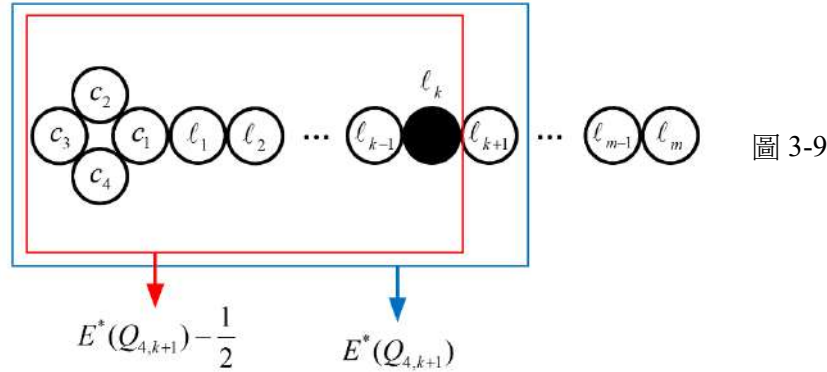
$$E(Q_{4,m}|\ell_k) = 1 + \frac{1}{2}(E(Q_{4,k-2}) + E(Q_{4,k-1})) + \frac{1}{2}(E(L_{m-k-1}) + E(L_{m-k}))$$

接下來塗點的選取有以下兩種：

①根據【引理 3_2】以圓圈 c_3 當塗點，則

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2}(E(Q_{4,k-2}|c_3) + E(Q_{4,k-1}|c_3)) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4}E^*(L_{k-1}) + \frac{3}{4}E^*(L_k) + \frac{9}{8} + \frac{1}{4}E^*(L_k) + \frac{3}{4}E^*(L_{k+1}) + \frac{9}{8}) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) \\
&= \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}E^*(L_{k-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_k) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-k-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{m-k})) + \frac{3}{4}(1 + \frac{1}{2}E^*(L_k) + \frac{1}{2}E^*(L_{k+1})) \\
&\quad + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) + \frac{9}{8} = \frac{1}{4}(E(L_{m+1}|\ell_{k+1}) + \frac{3}{4}(E(L_{m+2}|\ell_{k+2}) + \frac{9}{8} \\
&\geq \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8}
\end{aligned}$$

②以圓圈 ℓ_k 當第一個塗點後，依 L_{k+1} 之最優化塗色方法，由右而左塗色，如下圖 3-9：



$$\begin{aligned}
&\text{如第 25 頁 (4) 之討論，} E(Q_{4,m}|\ell_k) = E(Q_{4,k+1}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(E(L_{m-k-1}) + E(L_{m-k})) \\
&\geq (E^*(C_4) + \frac{1}{2}(E^*(L_k) + E^*(L_{k+1})) - \frac{1}{16}P_{k+1}) - \frac{1}{2}E^*(L_1) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) \\
&\therefore E(Q_{4,m}|\ell_{m-1}) - E(Q_{4,m}|\ell_k) \\
&= \frac{1}{2}((E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1}))
\end{aligned}$$

check :

$$(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1}) \leq 0$$

由【定理 1_1】及【定理 1_5】之 (3) 得，

$$\begin{aligned} & (E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1) + E^*(L_0)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k}) + E^*(L_{m-k-1})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1}) \\ &= \lambda(z^0 + z + z^{m-1} + z^m - z^k - z^{k+1} - z^{m-k-1} - z^{m-k}) + \overline{\lambda(z^0 + z + z^{m-1} + z^m - z^k - z^{k+1} - z^{m-k-1} - z^{m-k})} \\ & \quad - \frac{1}{8}\delta(z^m - z^{k+1}) - \frac{1}{8}\overline{\delta(z^m - z^{k+1})} \\ &= (\lambda - \frac{1}{8}\delta)(z^m - z^{k+1}) + \lambda(1 + z - z^k)(1 - z^{m-k-1}) + \overline{(\lambda - \frac{1}{8}\delta)(z^m - z^{k+1}) + \lambda(1 + z - z^k)(1 - z^{m-k-1})} \\ &= (1 - z^{m-k-1})((\frac{1}{8}\delta - \lambda)z^{k+1} + \lambda(1 + z - z^k)) + \overline{(1 - z^{m-k-1})((\frac{1}{8}\delta - \lambda)z^{k+1} + \lambda(1 + z - z^k))} \\ &= (1 - z^{m-k-1})((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40})) + \overline{(1 - z^{m-k-1})((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40}))} \\ &= 2 \operatorname{Re}((1 - z^{m-k-1})((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40}))) \\ &\because \operatorname{Arg}(\frac{-11-2i}{200}) = -\pi + \tan^{-1} \frac{2}{11}, \quad \operatorname{Arg}(\frac{-1-2i}{40}) = -\pi + \tan^{-1} 2 \\ &\text{由【引理 1_3】知, } \operatorname{Arg}(1 - z^t) \in [-\tan^{-1} \frac{1}{3}, \tan^{-1} \frac{1}{2}] \quad t \geq 1 \\ &\therefore -\pi + \tan^{-1} \frac{2}{11} - \tan^{-1} \frac{1}{3} \leq \operatorname{Arg}((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k)) \leq -\pi + \tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{1}{2} \\ &\because \tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{1}{2} < \tan^{-1} 2 \\ &\therefore -\pi + \tan^{-1} \frac{2}{11} - \tan^{-1} \frac{1}{3} \leq \operatorname{Arg}((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40})) < -\pi + \tan^{-1} 2 \\ &-\pi + \tan^{-1} \frac{2}{11} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} \leq \operatorname{Arg}((1 - z^{m-k-1})((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40}))) \leq -\pi + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} \frac{1}{2} \\ &\because \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \operatorname{Re}((1 - z^{m-k-1})((\frac{-11-2i}{200})(1 - z^k) + (\frac{-1-2i}{40}))) \leq 0 \end{aligned}$$

綜合①②討論 $\therefore E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{4,m} | \ell_k)$

由 (1) (2) (3) 知, $E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{4,m} | \ell_k) \quad (1 \leq k \leq m)$

由【引理 3_2】、【引理 3_4】及【引理 3_5】，我們可以得到以下定理：

【定理 3_1】 $m \geq 4$

$$E^*(Q_{4,m}) = E(Q_{4,m} | c_3) = E(Q_{4,m} | \ell_{m-1}) = \frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8}$$

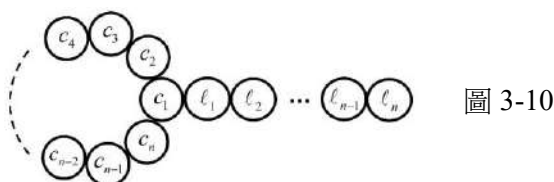
我們將上述結果整理成下表 3-1：

圖形	$Q_{4,1}$	$Q_{4,2}$	$Q_{4,3}$	$Q_{4,m} (m \geq 4)$
最優化塗色方法之 第一個塗點位置	圓圈 c_1 、 c_3	圓圈 c_3	圓圈 c_1 、 c_3 、 圓圈 ℓ_2	圓圈 c_3 、 圓圈 ℓ_{m-1}

表 3-1

2. 圖形 $Q_{n,m}$ ($n \geq 5$)

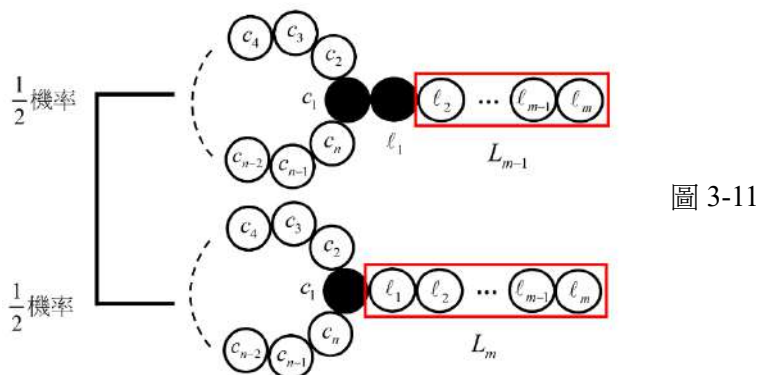
圖形 $Q_{n,m}$ 可視為 $C_n \cup L_m$ ，令 C_n 中與 L_m 相連的圓圈為 c_1 ，逆時針方向依序為 c_2 、 c_3 、 $\dots$ 、 c_n ，而 L_m 中與圓圈 c_1 相連為圓圈 ℓ_1 ，由左而右依序為 ℓ_2 、 ℓ_3 、 $\dots$ 、 ℓ_m ，如下圖 3-10。



圖形 $Q_{n,m}$ 的第一個塗點選取，我們可以分成 C_n 中的圓圈與 L_m 中的圓圈來討論。在 C_n 諸個圓圈中，任選哪一個當塗點， $E^*(C_n)$ 皆相同，因此需要考量哪個圓圈 c_j ($1 \leq j \leq [\frac{n}{2}+1]$) 當第一個塗點，可使 $E(L_m)$ 達最小。

L_m 部分的指定塗色次數期望值有以下三種可能模式：

<模式一> 在圓圈 c_1 未塗色的狀態下，以 c_1 當塗點，此時 L_m 部分的指定塗色次數期望值為 $\frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m))$ ，如下圖 3-11。



<模式二> 在圓圈 c_i 已塗色的狀態下，此時 L_m 部分的指定塗色次數期望值為

$$E^*(L_m) = \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) + \boxed{\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}))}, \text{ 如下圖 3-12。}$$

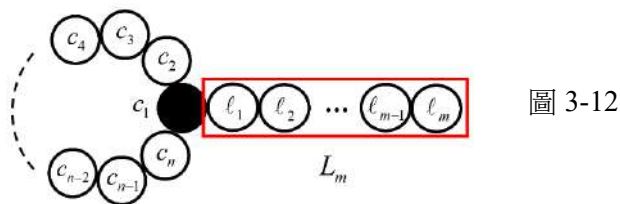


圖 3-12

<模式三> 在圓圈 c_2 及 c_n 皆已塗色的狀態下，若先進行圓圈 c_1 的塗色，則圓圈 c_1 、 $l_1 \sim l_m$ 的指定塗色次數期望值為 $E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}$ ，如下圖 3-13，但這並非最優化。若改以圓圈

圈

l_1 當塗點，則圓圈 c_1 、 $l_1 \sim l_m$ 的指定塗色次數期望值為 $E^*(L_{m+1})$ ，如下圖 3-14，較前者減少 $E^*(L_{m+1}) - (E^*(L_{m+2}) - \frac{1}{2}) = E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}$ ，因此可視 L_m 部分的

指定塗色次數期望值為 $\frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) + \boxed{E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}}$ 。

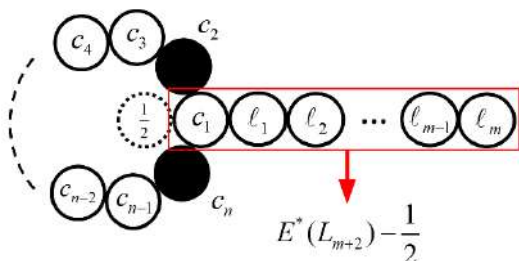


圖 3-13

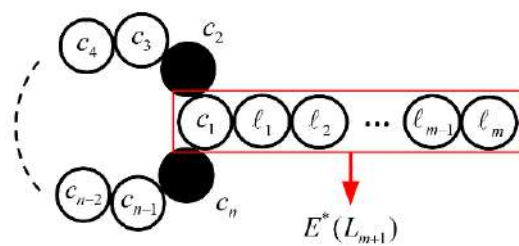


圖 3-14

接下來我們進一步分析 C_n 中的圓圈當塗點時， L_m 部分的指定塗色次數期望值所對應的模式：

- (I) 圓圈 c_1 當指定塗點，此時 L_m 部分的指定塗色次數期望值全為模式一。
- (II) 圓圈 c_2 當指定塗點，則圓圈 c_1 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色，如下圖 3-15。此時前者為模式二；後者剩餘圓圈將視為圖形 L_m 的塗色。

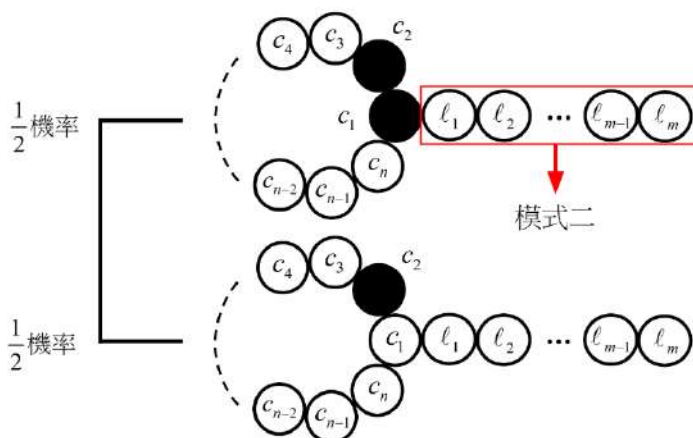


圖 3-15

現接續考量圖形 L_m 的塗色方法，其有以下兩種可能：

- ①若圓圈 c_{n-1} 當塗點，則圓圈 c_n 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色，此時前者為模式三，
後者接下來將以圓圈 c_1 當塗點，是為模式一，如下圖 3-16。
- ②若圓圈 c_n 當塗點，則圓圈 c_1 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色，此時前者為模式二，
後者為模式三，如下圖 3-17。

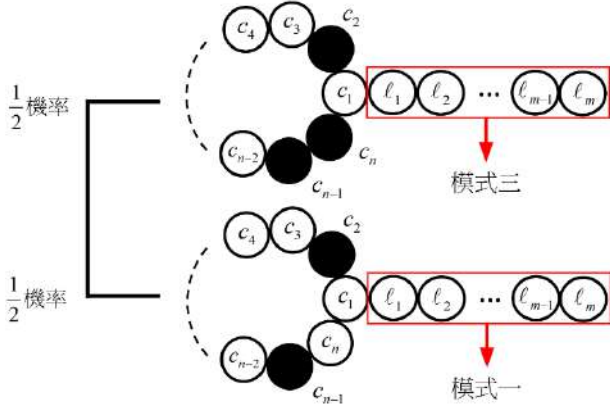


圖 3-16

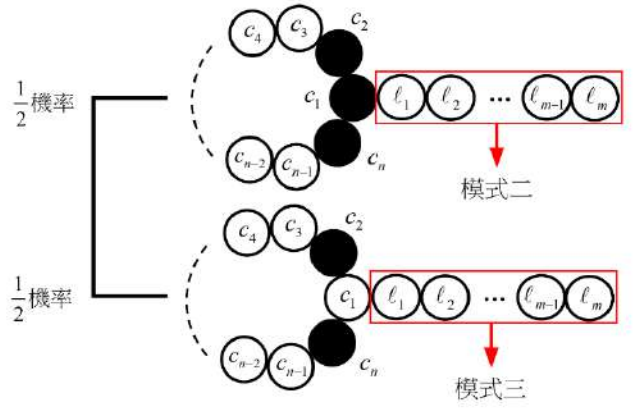


圖 3-17

- (III) 圓圈 c_3 當指定塗點，則圓圈 c_2 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色，如下圖 3-18。

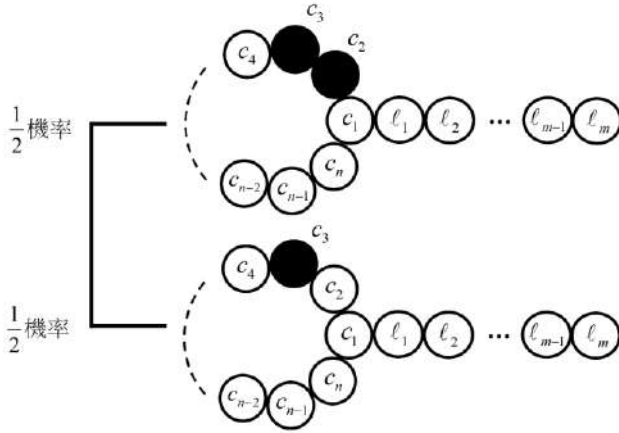


圖 3-18

此時前者中的剩餘圓圈將視為圖形 L_m 的塗色，同 (2) 中的討論；後者中的剩餘圓圈將視為圖形 $T_{j',2,k'}$ ，接下來將以圓圈 c_1 當塗點，是為模式一。

由上討論後我們可知，

若以圓圈 c_1 當第一個塗點，則 $E(Q_{n,m}|c_1) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m))$ ；

若以圓圈 c_k ($2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$) 當第一個塗點，依最優化塗色分法，之後圓圈 c_2 、 c_3 、 c_{n-1} 、 c_n

當指定塗點的機率依序為 P_k 、 P_{k-1} 、 P_{n-k+1} 、 P_{n-k+2} ，如下圖 3-19：

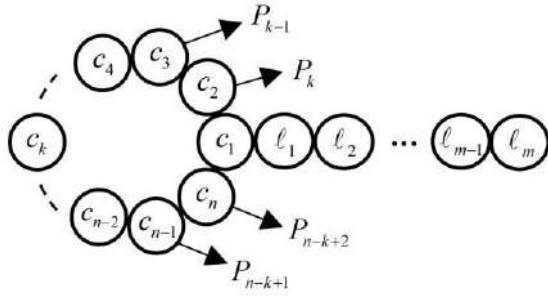


圖 3-19

$$\begin{aligned}
 \text{故 } E(Q_{n,m}|c_k) &= E(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) + \underbrace{\frac{1}{2}P_k(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})))}_{\text{模式二}} + \\
 &\quad \frac{1}{2}P_k(\frac{1}{2}P_{n-k+2}(\underbrace{\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}))}_{\text{模式二}} + (\underbrace{E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}}_{\text{模式三}}))) + \frac{1}{2}P_{n-k+1}(\underbrace{E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}}_{\text{模式三}})) + \\
 &\quad \frac{1}{2}P_{k-1}(\frac{1}{2}P_{n-k+2}(\underbrace{\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}))}_{\text{模式二}} + (\underbrace{E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}}_{\text{模式三}}))) + \frac{1}{2}P_{n-k+1}(\underbrace{E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}}_{\text{模式三}}))
 \end{aligned}$$

接下來我們考慮以下三值： $\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}))$ 、 $E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})$ ，其中 $\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) \geq 0$ 顯然成立。

【引理 3_6】 $m \in \mathbb{N}$ ， $m \geq 2$

$$E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_{m-2}$$

<證明>

根據【定理 1_7】，

$$\begin{aligned}
 E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}) &= (\frac{1}{2}P_{m-3} + P_{m-2} + \frac{1}{2}P_{m-1}) + (\frac{1}{4}P_{m-3} + \frac{1}{4}P_{m-2} + P_{m-1}) - (\frac{1}{2}P_{m-4} + P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2}) \\
 &= (-\frac{1}{2}P_{m-4} - P_{m-3} - P_{m-2}) + (\frac{3}{4}P_{m-3} + \frac{3}{2}P_{m-2} + \frac{3}{2}P_{m-1}) + \frac{1}{4}P_{m-2} \\
 &= -1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}P_{m-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_{m-2} \quad (\text{由【定理 1_5】之(2)})
 \end{aligned}$$

【引理 3_7】 $m \in \mathbb{N}$ ， $m \geq 2$

$$\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}) \geq 0$$

<證明>

$$\begin{aligned} & \text{由【引理 3_6】知，} \frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_{m-2}) + (-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}P_m + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}P_{m-2} - P_m) \geq 0 \end{aligned}$$

計算 $E(Q_{n,m}|c_k)$ 之值時，一旦 P_k 決定， P_{k-1} 、 P_{n-k+1} 、 P_{n-k+2} 的值也隨之決定。且與 $E(Q_{n,m}|c_1) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m))$ 該式比較後，我們的目標將是尋求是否有圓圈 c_k

$$\begin{aligned} & (2 \leq k \leq [\frac{n}{2} + 1]) \text{ 當第一個塗點時，可使得 } \frac{1}{2}P_k(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1}))) + \\ & \frac{1}{2}P_k(\frac{1}{2}P_{n-k+2}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}))) + \frac{1}{2}P_{n-k+1}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) + \\ & \frac{1}{2}P_{k-1}(\frac{1}{2}P_{n-k+2}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}))) + \frac{1}{2}P_{n-k+1}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) < 0 \end{aligned}$$

由【引理 3_6】、【引理 3_7】知，上式中紅色字體之值大於或等於 0，藍色字體之值小於或等於 0，故令 $P_k = 0$ 。由【性質 1_1】知此時唯一解為 $k = 3$ ，即以圓圈 c_3 當第一個塗點。又因 $P_2 = 1$ ，故現在僅需考慮是否

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}))) + \frac{1}{2}P_{n-2}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) < 0。 \\ & \text{若 } \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2}))) + \frac{1}{2}P_{n-2}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) < 0， \\ & \text{則 } E(Q_{n,3}|c_3) < E(Q_{n,3}|c_1)；\text{反之，則 } E(Q_{n,3}|c_1) < E(Q_{n,3}|c_3)。 \end{aligned}$$

(1) 圖形 $Q_{n,m}$ ($1 \leq m \leq 3$)

<I> $\boxed{m=1}$

$$\therefore \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{2}(E^*(L_1) - E^*(L_0)) + (E^*(L_2) - E^*(L_3) + \frac{1}{2}))) + \frac{1}{2}P_{n-2}(E^*(L_2) - E^*(L_3) + \frac{1}{2})) = \frac{1}{8}P_{n-1} > 0$$

$$\therefore E(Q_{n,1}|c_1) < E(Q_{n,1}|c_3)$$

【引理 3_8】 $n \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 5$

$$E^*(C_n) - E^*(L_{n-1}) \leq \frac{1}{2}$$

<證明>

$$\begin{aligned} & E^*(C_n) - E^*(L_{n-1}) - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4}E^*(L_{n-1}) + \frac{1}{2}E^*(L_{n-2}) + \frac{1}{4}E^*(L_{n-3}) - E^*(L_{n-1}) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(E^*(L_{n-3}) + 2E^*(L_{n-2}) - 3E^*(L_{n-1}) + 2) = \frac{1}{4}(-\frac{2}{5} + 2\operatorname{Re}(\lambda(1+3z)(1-z)z^{n-3})) \end{aligned}$$

$$\leq -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \left| \frac{-1-7i}{20} \right| \|z^{n-3}\| = -\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2} < 0$$

【定理 3_2】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$

$$E^*(Q_{n,1}) = E(Q_{n,1}|c_1) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}$$

<證明>

$$E(Q_{n,1}|c_1) \geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_1) + E^*(L_0)) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}$$

若考慮以 L_1 中之圓圈 ℓ_1 當第一個塗點，則圓圈 c_1 各有 $\frac{1}{2}$ 機率被塗色或未被塗色，此時剩餘

圓圈分別可視為 L_{n-1} 及 C_n ，故 $E(Q_{n,1}|\ell_1) \geq 1 + \frac{1}{2}E^*(L_{n-1}) + \frac{1}{2}E^*(C_n)$

$$\therefore E(Q_{n,1}|c_1) - E(Q_{n,1}|\ell_1) = \frac{1}{2}(E^*(C_n) - E^*(L_{n-1}) - 1) \leq 0 \quad (\text{由【引理 3_8】})$$

$$\therefore E^*(Q_{n,1}) = E(Q_{n,1}|c_1) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}$$

<II> $\boxed{m=2}$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{n-1} \left(\frac{1}{2} (E^*(L_2) - E^*(L_1)) + (E^*(L_3) - E^*(L_4) + \frac{1}{2}) \right) + \frac{1}{2} P_{n-2} (E^*(L_3) - E^*(L_4) + \frac{1}{2}) \right) = -\frac{1}{16} P_{n-2} \leq 0$$

$$\therefore E(Q_{n,2}|c_3) \leq E(Q_{n,2}|c_1), \text{ 其中 } n=5 \text{ 時等號成立}$$

再考慮 L_2 中的圓圈當第一個塗點的情形：

【引理 3_9】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$

$$E(Q_{n,2}|\ell_2) \leq E(Q_{n,2}|\ell_1)$$

<證明>

$$E(Q_{n,2}|\ell_1) = 1 + \frac{1}{2}(E(L_{n-1}) + E(C_n) + \frac{1}{2}E(L_1)) \geq \frac{1}{2}E^*(L_{n-1}) + \frac{1}{2}E^*(C_n) + \frac{3}{2}$$

$$E(Q_{n,2}|\ell_2) = 1 + \frac{1}{2}(E(C_n) + E(Q_{n,1})) \geq 1 + \frac{1}{2}E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(C_n) + \frac{1}{2}) \quad (\text{由【定理 3_2】})$$

$$\therefore E(Q_{n,2}|\ell_2) - E(Q_{n,2}|\ell_1) = \frac{1}{2}(E^*(C_n) - E^*(L_{n-1}) - \frac{1}{2}) \leq 0 \quad (\text{由【引理 3_8】})$$

$$\therefore E(Q_{n,2}|\ell_2) \leq E(Q_{n,2}|\ell_1)$$

【引理 3_10】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$

$$E^*(C_{n+1}) - E^*(C_n) = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} P_{n-2}$$

<證明>

$$\begin{aligned} & E^*(C_{n+1}) - E^*(C_n) + \frac{1}{16} P_{n-2} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{4} (\lambda(z+1)^2(z-1)z^{n-3} + \overline{\lambda(z+1)^2(z-1)z^{n-3}}) + \frac{1}{16} \left(\frac{2}{5} + \delta z^{n-2} + \overline{\delta z^{n-2}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{40} \right) + \frac{1}{8} (\operatorname{Re}(\frac{1+2i}{5} z^{n-3}) + \operatorname{Re}(\frac{-1-2i}{5} z^{n-3})) = \frac{5}{8} \Rightarrow E^*(C_{n+1}) - E^*(C_n) = \frac{5}{8} - \frac{1}{16} P_{n-2} \end{aligned}$$

【定理 3_3】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$

$$E^*(Q_{n,2}) = E(Q_{n,2} | c_3) = E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8}$$

<證明>

$$\begin{aligned} E(Q_{n,2} | c_3) &\geq E^*(C_n) + \frac{1}{2} (E^*(L_2) + E^*(L_1)) - \frac{1}{16} P_{n-2} = E^*(C_n) + \frac{5}{4} - \frac{1}{16} P_{n-2} \\ E(Q_{n,2} | \ell_2) &\geq 1 + \frac{1}{2} E^*(C_n) + \frac{1}{2} (E^*(C_n) + \frac{1}{2}) = E^*(C_n) + \frac{5}{4} \\ \because P_{n-2} > 0 \quad \therefore E(Q_{n,2} | c_3) &\leq E(Q_{n,2} | \ell_2) \\ \text{故 } E^*(Q_{n,2}) = E(Q_{n,2} | c_3) &= E^*(C_n) + \frac{5}{4} - \frac{1}{16} P_{n-2} = E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8} \quad (\text{由【引理 3_10】}) \end{aligned}$$

<III> m=3

$$\because \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_{n-1} \left(\frac{1}{2} (E^*(L_3) - E^*(L_2)) + (E^*(L_4) - E^*(L_5) + \frac{1}{2}) \right) + \frac{1}{2} P_{n-2} (E^*(L_4) - E^*(L_5) + \frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{16} P_{n-1} > 0$$

$$\therefore E(Q_{n,3} | c_1) < E(Q_{n,3} | c_3)$$

再考慮 L_3 中的圓圈當第一個塗點的情形：

【引理 3_11】 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$

$$E(Q_{n,3} | \ell_2) \leq E(Q_{n,3} | \ell_k) \quad (1 \leq k \leq 3)$$

<證明>

$$\begin{aligned} E(Q_{n,3} | \ell_1) &= 1 + \frac{1}{2} (E(L_{n-1}) + E(C_n)) + \frac{1}{2} (E(L_1) + E(L_2)) \geq \frac{1}{2} E^*(L_{n-1}) + \frac{1}{2} E^*(C_n) + \frac{9}{4} \\ E(Q_{n,3} | \ell_2) &= 1 + \frac{1}{2} (E(C_n) + E(Q_{n,1})) + \frac{1}{2} E(L_1) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} E^*(C_n) + \frac{1}{2} (E^*(C_n) + \frac{1}{2}) \quad (\text{由【定理 3_2】}) \end{aligned}$$

$$E(Q_{n,3}|\ell_3) = 1 + \frac{1}{2}(E(Q_{n,1}) + E(Q_{n,2})) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(C_n) + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8})$$

$$\because E(Q_{n,3}|\ell_2) - E(Q_{n,3}|\ell_1) = \frac{1}{2}(E^*(C_n) - E^*(L_{n-1})) - \frac{1}{2} \leq 0 \quad (\text{由【引理 3_8】})$$

$$\therefore E(Q_{n,3}|\ell_2) \leq E(Q_{n,3}|\ell_1)$$

$$\because E(Q_{n,3}|\ell_2) - E(Q_{n,3}|\ell_3) = \frac{1}{2}(E^*(C_n) - E^*(C_{n+1}) + \frac{3}{8}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{16}P_{n-2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8}) \quad (\text{由【引理 3_10】})$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{16}P_{n-2} - \frac{1}{4}) \leq 0 \quad (\because 0 \leq P_{n-2} \leq \frac{1}{2})$$

$$\therefore E(Q_{n,3}|\ell_2) \leq E(Q_{n,3}|\ell_3)$$

綜合上述， $E(Q_{n,3}|\ell_2) \leq E(Q_{n,3}|\ell_k) \quad (1 \leq k \leq 3)$

【定理 3_4】 $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$

$$E^*(Q_{n,3}) = E(Q_{n,3}|c_1) = E(Q_{n,3}|\ell_2) = E^*(C_n) + \frac{7}{4}$$

<證明>

$$\because E(Q_{n,3}|c_1) \geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_3) + E^*(L_2)) = E^*(C_n) + \frac{7}{4}$$

$$E(Q_{n,3}|\ell_2) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(C_n) + \frac{1}{2}) = E^*(C_n) + \frac{7}{4}$$

$$\therefore E^*(Q_{n,3}) = E(Q_{n,3}|c_1) = E(Q_{n,3}|\ell_2) = E^*(C_n) + \frac{7}{4}$$

(2) 圖形 $Q_{n,m} \quad (m \geq 4)$

圖形 $Q_{n,m}$ 若以圓圈 ℓ_{m-1} 當第一個塗點，依最優化塗色方法，由右而左塗色，

①當圓圈 ℓ_4 當塗點（機率為 P_{m-3} ），左邊剩餘圓圈有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{n,2}$ ，有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{n,3}$ 。

②當圓圈 ℓ_3 當塗點（機率為 P_{m-2} ），左邊剩餘圓圈有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{n,1}$ ，有 $\frac{1}{2}$ 機率為 $Q_{n,2}$ 。

故有 $\frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2}$ 機率出現 $Q_{n,2}$ 。

由【定理 3_2】、【定理 3_3】、【定理 3_4】知，

$$E^*(Q_{n,1}) = E(Q_{n,1}|c_1), \quad E^*(Q_{n,2}) = E(Q_{n,2}|c_1) - \frac{1}{16}P_{n-2}, \quad E^*(Q_{n,3}) = E(Q_{n,3}|c_1),$$

且由【定理 1_5】之（1）知， $\frac{1}{2}P_{m-3} + \frac{1}{2}P_{m-2} = P_m$

$$\text{故 } E(Q_{n,m}|\ell_{m-1}) = E(Q_{n,m}|c_1) - P_m \cdot \frac{1}{16}P_{n-2} \geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_mP_{n-2}$$

顯然 $E(Q_{n,m}|\ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m}|c_1)$ ，因此接下來考慮 $E(Q_{n,m}|\ell_{m-1})$ 與 $E(Q_{n,m}|c_3)$ 之大小關係。

【引理 3_12】 $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $m \geq 4$

$$E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m} | c_3)$$

<證明>

$$\begin{aligned} \because E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) &\geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \\ E(Q_{n,m} | c_3) &\geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) + \frac{1}{2}P_{n-2}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) \\ \therefore E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) - E(Q_{n,m} | c_3) &= -\frac{1}{16}P_m P_{n-2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-1})) \\ &\quad + (E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) + \frac{1}{2}P_{n-2}(E^*(L_{m+1}) - E^*(L_{m+2}) + \frac{1}{2})) \\ &= -\frac{1}{16}P_m P_{n-2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P_{n-1}(\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2}P_{m-2} - P_m) + \frac{1}{2}P_{n-2}(-\frac{1}{4}P_m)) \quad (\text{由【引理 3_3】及【引理 3_6】}) \\ &= -\frac{1}{16}P_{n-1}(1 + \frac{1}{2}P_{m-2} - P_m) \leq 0 \implies E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m} | c_3) \end{aligned}$$

【引理 3_13】 $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, $m \geq 4$

$$E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m} | \ell_k) \quad (1 \leq k \leq m)$$

<證明>

$$\begin{aligned} E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) &\geq E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \\ \boxed{1^\circ \quad k=1} \\ E(Q_{n,m} | \ell_1) &\geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(L_{n-1}) + E^*(C_n)) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-2}) + E^*(L_{m-1})) \\ \text{由【定理 2_4】知, } E^*(C_n) &= E^*(L_n) - \frac{1}{8}P_{n-3} - \frac{1}{4}P_{n-2} - \frac{1}{8}P_{n-1} \\ \therefore E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) - E(Q_{n,m} | \ell_1) &= \frac{1}{2}(E^*(L_n) - E^*(L_{n-1})) + \frac{1}{2}(E^*(L_m) - E^*(L_{m-2})) - \frac{1}{16}P_{n-3} - \frac{1}{8}P_{n-2} - \frac{1}{16}P_{n-1} - 1 - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}P_{n-2}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}) - \frac{1}{16}P_{n-3} - \frac{1}{8}P_{n-2} - \frac{1}{16}P_{n-1} - 1 - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \\ &\quad (\text{由【引理 3_3】及【引理 3_6】}) \\ &= -\frac{1}{16}(P_{n-3} + P_{n-1}) - \frac{1}{8}(P_{m-2} + 2P_{m-1}) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \leq 0 \implies E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m} | \ell_1) \end{aligned}$$

$$\boxed{2^\circ \quad k=2}$$

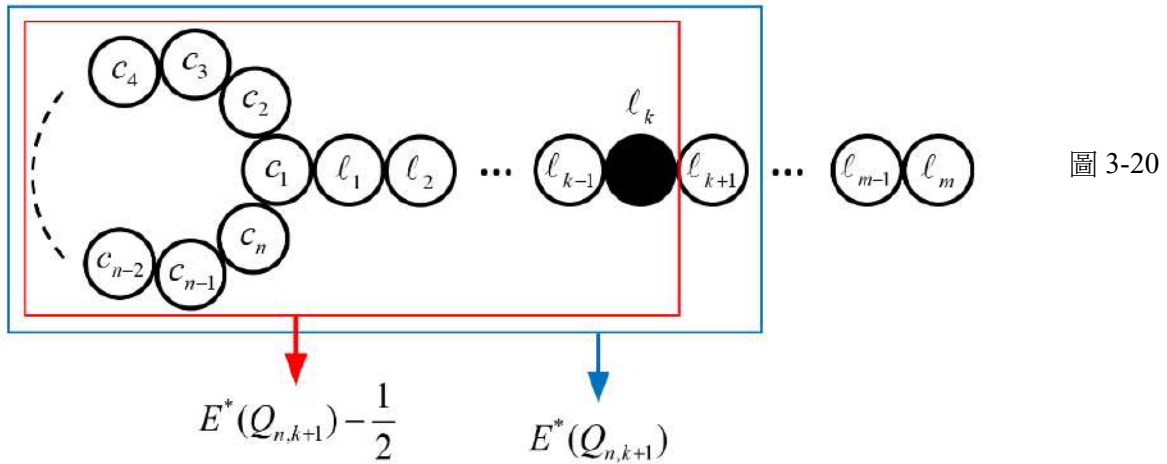
$$E(Q_{n,m}|\ell_2) \geq 1 + \frac{1}{2}(E^*(C_n) + E^*(Q_{n,1})) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-3}) + E^*(L_{m-2}))$$

由【定理 3_2】知， $E^*(Q_{n,1}) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}$ ，

$$\begin{aligned} \therefore E(Q_{n,m}|\ell_{m-1}) - E(Q_{n,m}|\ell_2) &= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} + (E^*(L_m) - E^*(L_{m-2})) + (E^*(L_{m-1}) + E^*(L_{m-3})) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}P_{m-3} - \frac{1}{2}P_{m-2}\right) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2}\right) \quad (\text{由【引理 3_3】}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}P_{m-3} - \frac{1}{2}P_{m-2} - \frac{1}{2}P_{m-1}\right) - \frac{1}{4}P_{m-2}\right) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}P_{m-2}\right) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} = -\frac{1}{8}P_{m-2} - \frac{1}{16}P_m P_{n-2} \leq 0 \quad (\text{由【定理 1_5】之(2)}) \\ \therefore E(Q_{n,m}|\ell_{m-1}) &\leq E(Q_{n,m}|\ell_2) \end{aligned}$$

3° $k \geq 3$

若圖形 $Q_{n,m}$ 以圓圈 ℓ_k 當第一個塗點，如下圖 3-20：



$$\begin{aligned} \text{故 } E(Q_{n,m}|\ell_k) &\geq E(Q_{n,k+1}) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) \\ &= (E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_k) + E^*(L_{k+1})) - \frac{1}{16}P_{k+1}P_{n-2}) - \frac{1}{2}E^*(L_1) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) \\ \therefore E(Q_{n,m}|\ell_{m-1}) - E(Q_{n,m}|\ell_k) &= \frac{1}{2}((E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2}) \end{aligned}$$

① 當 $P_m - P_{k+1} \geq 0$ 時，

$$\begin{aligned} &(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1) + E^*(L_0)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2} \\ &= \lambda((z^{m-1} + z^m + z + z^0) - (z^k + z^{k+1} + z^{m-k-1} + z^{m-k})) + \overline{\lambda((z^{m-1} + z^m + z + z^0) - (z^k + z^{k+1} + z^{m-k-1} + z^{m-k}))} \\ &\quad - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2} \end{aligned}$$

$$= \lambda(1+z)(1-z^k)(1-z^{m-k-1}) + \overline{\lambda(1+z)(1-z^k)(1-z^{m-k-1})} - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2}$$

$$= 2\operatorname{Re}(\lambda(1+z)(1-z^k)(1-z^{m-k-1})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2}$$

由【定理 1_2】(3) 之證明知， $2\operatorname{Re}(\lambda(1+z)(1-z^k)(1-z^{m-k-1})) \leq 0$ ，故

$$(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2} \leq 0$$

②當 $P_m - P_{k+1} < 0$ 時，

由【引理 3_5】(3) 之證明知，

$$(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1}) \leq 0$$

又由【性質 1_1】知， $0 < P_{n-2} \leq \frac{1}{2}$ ，故

$$(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m) + E^*(L_1)) - (E^*(L_k) + E^*(L_{k+1}) + E^*(L_{m-k-1}) + E^*(L_{m-k})) - \frac{1}{8}(P_m - P_{k+1})P_{n-2} \leq 0$$

綜合 1°、2° 及 3°，可得 $E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) \leq E(Q_{n,m} | \ell_k)$

由【引理 3_12】及【引理 3_13】，可得到【定理 3_5】。

【定理 3_5】 $n, m \in \mathbb{N}$ ， $n \geq 5$ ， $m \geq 4$

$$E^*(Q_{n,m}) = E(Q_{n,m} | \ell_{m-1}) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2}$$

綜合【定理 3_2】、【定理 3_3】、【定理 3_4】、【定理 3_5】，我們得到如下表 3-2 之結果：

圖形	最優化塗色方法之 第一個塗點位置	指定塗色次數期望值
$Q_{n,1}$ ($n \geq 5$)	圓圈 c_1	$E^*(C_n) + \frac{1}{2}$
$Q_{n,2}$ ($n \geq 5$)	$n = 5$ 圓圈 c_1 、 c_3	$E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8}$
	$n \neq 5$ 圓圈 c_3	
$Q_{n,3}$ ($n \geq 5$)	圓圈 c_1 、圓圈 ℓ_2	$E^*(C_n) + \frac{7}{4}$
$Q_{n,1}$ ($n \geq 5, m \geq 4$)	圓圈 ℓ_{m-1}	$E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2}$

表 3-2

(三) 圖形 $Q_{n,m}$ 之生成函數

1. 若將 $E^*(Q_{4,1})$ 、 $E^*(Q_{5,1})$ 、 $E^*(Q_{6,1})$ 、 $E^*(Q_{7,1})$ 、 $E^*(Q_{8,1})$ 、 $E^*(Q_{9,1})$... 之值視為數列

$\langle e_n \rangle_4^\infty = \langle 3, \frac{57}{16}, \frac{67}{16}, \frac{153}{32}, \frac{43}{8}, \frac{383}{64}, \dots \rangle$ ，考慮生成函數時，增加 $e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$ ，形成數

列 $\langle e_n \rangle_0^\infty = \langle 0, 0, 0, 0, 3, \frac{57}{16}, \frac{67}{16}, \frac{153}{32}, \frac{43}{8}, \frac{383}{64}, \dots \rangle$ ，關於數列 $\langle e_n \rangle_4^\infty$ ， $r_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k$ 稱為

$\langle e_n \rangle_4^\infty$ 的一般生成函數。

【定理 3_6】 $n \geq 4$

若函數 $r_1(x)$ 為 $E^*(Q_{n,1})$ 的生成函數，則 $r_1(x) = \frac{-19x^7 - 14x^6 + 9x^5 + 48x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ 。

<證明>

$$\because E^*(Q_{n,1}) = E^*(C_n) + \frac{1}{2}$$

$$\text{令 } e_k = b_k + \frac{1}{2} \quad (k \geq 4) \text{ 且 } e_0 = e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

$$\text{當 } k=0, b_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \text{ 當 } k=1, b_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; \text{ 當 } k=2, b_2 + \frac{1}{2} = 2; \text{ 當 } k=3, b_3 + \frac{1}{2} = \frac{19}{8};$$

$$\begin{aligned} \therefore r_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x - 2x^2 - \frac{19}{8}x^3 \\ &= g(x) + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x - 2x^2 - \frac{19}{8}x^3 \\ &= \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x - 2x^2 - \frac{19}{8}x^3 \quad (\text{由【定理 2_2】}) \\ &= \frac{-19x^7 - 14x^6 + 9x^5 + 48x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} \end{aligned}$$

2. 若將 $E^*(Q_{4,2})$ 、 $E^*(Q_{5,2})$ 、 $E^*(Q_{6,2})$ 、 $E^*(Q_{7,2})$ 、 $E^*(Q_{8,2})$ 、 $E^*(Q_{9,2})$... 之值視為數列

$\langle u_n \rangle_4^\infty = \langle \frac{59}{16}, \frac{69}{16}, \frac{157}{32}, \frac{11}{2}, \frac{391}{64}, \frac{429}{64}, \dots \rangle$ ，考慮生成函數時，增加 $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ，形

成數列 $\langle u_n \rangle_0^\infty = \langle 0, 0, 0, 0, \frac{59}{16}, \frac{69}{16}, \frac{157}{32}, \frac{11}{2}, \frac{391}{64}, \frac{429}{64}, \dots \rangle$ ，關於數列 $\langle u_n \rangle_4^\infty$ ， $r_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$

稱為 $\langle u_n \rangle_4^\infty$ 的一般生成函數。

【定理 3_7】 $n \geq 4$

若函數 $r_2(x)$ 為 $E^*(Q_{n,2})$ 的生成函數，則 $r_2(x) = \frac{-25x^7 - 20x^6 + 10x^5 + 59x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ 。

<證明>

$$\because E^*(Q_{n,2}) = E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8}$$

$$\text{令 } u_k = b_{k+1} + \frac{5}{8} \ (k \geq 4) \text{ 且 } u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

$$\text{當 } k=0, \ b_1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}; \text{ 當 } k=1, \ b_2 + \frac{5}{8} = \frac{17}{8}; \text{ 當 } k=2, \ b_3 + \frac{5}{8} = \frac{5}{2}; \text{ 當 } k=3, \ b_4 + \frac{5}{8} = \frac{25}{8};$$

$$\begin{aligned} \therefore r_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} x^k + \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{13}{8} - \frac{17}{8}x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{25}{8}x^3 \\ &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} x^{k+1} + \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{13}{8} - \frac{17}{8}x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{25}{8}x^3 \\ &= \frac{1}{x} (g(x) - b_0) + \frac{5}{8(1-x)} - \frac{13}{8} - \frac{17}{8}x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{25}{8}x^3 \quad (\text{其中 } b_0 = 0) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} + \frac{5}{8(1-x)} - \frac{13}{8} - \frac{17}{8}x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{25}{8}x^3 \quad (\text{由【定理 2_2】}) \\ &= \frac{-25x^7 - 20x^6 + 10x^5 + 59x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} \end{aligned}$$

3. 若將 $E^*(Q_{4,3})$ 、 $E^*(Q_{5,3})$ 、 $E^*(Q_{6,3})$ 、 $E^*(Q_{7,3})$ 、 $E^*(Q_{8,3})$ 、 $E^*(Q_{9,3}) \cdots$ 之值視為數列

$$\langle v_n \rangle_4^\infty = \langle \frac{17}{4}, \frac{77}{16}, \frac{87}{16}, \frac{193}{32}, \frac{53}{8}, \frac{463}{64}, \dots \rangle, \text{ 考慮生成函數時, 增加 } v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 0, \text{ 形成}$$

$$\text{數列 } \langle v_n \rangle_0^\infty = \langle 0, 0, 0, 0, \frac{17}{4}, \frac{77}{16}, \frac{87}{16}, \frac{193}{32}, \frac{53}{8}, \frac{463}{64}, \dots \rangle, \text{ 關於數列 } \langle v_n \rangle_4^\infty, \ r_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k$$

稱為 $\langle v_n \rangle_4^\infty$ 的一般生成函數。

【定理 3_8】 $n \geq 4$

$$\text{若函數 } r_3(x) \text{ 為 } E^*(Q_{n,3}) \text{ 的生成函數, 則 } r_3(x) = \frac{-29x^7 - 24x^6 + 9x^5 + 68x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

<證明>

$$\because E^*(Q_{n,3}) = E^*(C_n) + \frac{7}{4}$$

$$\text{令 } v_k = b_k + \frac{7}{4} \ (k \geq 4) \text{ 且 } v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

$$\text{當 } k=0, \ b_0 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}; \text{ 當 } k=1, \ b_1 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4}; \text{ 當 } k=2, \ b_2 + \frac{7}{4} = \frac{13}{4}; \text{ 當 } k=3, \ b_3 + \frac{7}{4} = \frac{29}{8}$$

$$\therefore r_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + \frac{7}{4} \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{7}{4} - \frac{11}{4}x - \frac{13}{4}x^2 - \frac{29}{8}x^3$$

$$\begin{aligned}
&= g(x) + \frac{7}{4(1-x)} - \frac{7}{4} - \frac{11}{4}x - \frac{13}{4}x^2 - \frac{29}{8}x^3 \\
&= \frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} + \frac{7}{4(1-x)} - \frac{7}{4} - \frac{11}{4}x - \frac{13}{4}x^2 - \frac{29}{8}x^3 \quad (\text{由【定理 2_2】}) \\
&= \frac{-29x^7 - 24x^6 + 9x^5 + 68x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}
\end{aligned}$$

肆、研究結果

一、圖形 L_n 、 C_n 之最優化塗色方法及指定塗色次數期望值之最小值與生成函數：

圖形	最優化塗色方法之第一個塗點位置	指定塗色次數期望值之最小值	指定塗色次數期望值之最小值的生成函數
L_n	圓圈 ℓ_1 ($n=1$) 圓圈 ℓ_2 ($n \geq 2$) (見【定理 1_2】、 【定理 1_3】)	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \lambda z^n + \overline{\lambda z^n}$ (其中 $\lambda = \frac{-7+i}{50}$, $z = \frac{-1+i}{2}$) (見【定理 1_1】)	$\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ (見【定理 1_4】)
C_n	任一圓圈 c_k ($1 \leq k \leq n$)	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{4}(\lambda(z+1)^2 z^{n-3} + \overline{\lambda(z+1)^2 z^{n-3}})$ (其中 $\lambda = \frac{-7+i}{50}$, $z = \frac{-1+i}{2}$) (見【定理 2_1】)	$\frac{x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x}{4(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ (見【定理 2_2】)

二、 $E^*(L_n)$ 與 $E^*(C_n)$ 的一般項 (n 值模 8 之同餘類)：

(見【推論 1_1】、【推論 2_1】)

	$E^*(L_n)$	$E^*(C_n)$
$n \equiv 1 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{3}{25}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{7}{50\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
$n \equiv 2 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{\sqrt{2}}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{3}{50}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

$n=3 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{4}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{1}{50\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
$n=4 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{7\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{2}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
$n=5 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{3}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{7}{50\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
$n=6 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{3}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
$n=7 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{4}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n + \frac{1}{50\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$
$n=0 \pmod{8}$	$\frac{7}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{7\sqrt{2}}{50}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}$	$\frac{2}{25} + \frac{3}{5}n - \frac{2}{25}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n$

三、圖形 L_n 之最優化塗色方法中，存在相鄰兩個未被塗色圓圈狀態下，圓圈 ℓ_k 被選取當塗點的機率 P_k ：

1. $P_k = \frac{2}{5} + \delta z^k + \overline{\delta z^k}$ （其中 $\delta = \frac{-1+3i}{5}$ ， $z = \frac{-1+i}{2}$ ）（見【定理 1_5】）
2. 圓圈 ℓ_2 被選取當塗點的機率為 1，其餘各圓圈被選取當塗點的機率介於 $0 \sim \frac{1}{2}$ 。其中以圓圈 ℓ_4 、 ℓ_5 、 ℓ_7 的機率最大，為 $\frac{1}{2}$ ；圓圈 ℓ_1 、 ℓ_3 的機率最小，為 0。（見【性質 1_1】）

四、 $E^*(L_n)$ 與 $E^*(C_n)$ 之關係：

1. $E^*(C_n) = 1 + \frac{1}{4}E^*(L_{n-3}) + \frac{1}{2}E^*(L_{n-2}) + \frac{1}{4}E^*(L_{n-1})$ （見【定理 2_1】）
2. $E^*(C_n) = E^*(L_n) - \frac{1}{8}(P_{n-3} + 2P_{n-2} + P_{n-1})$ （見【定理 2_4】）
3. 隨著 n 值增加， $E^*(C_n)$ 與 $E^*(L_n)$ 之差值趨近於 $\frac{1}{5}$ 。（見【推論 2_2】）

五、圖形 L_n 與 C_n 中各圓圈指定塗色次數期望值：

1. L_n 中圓圈 ℓ_2 的塗色次數為 1 次，其餘各圓圈塗色平均次數介於 $\frac{1}{4}$ 次 $\sim \frac{3}{4}$ 次。其中以圓圈 ℓ_4 最多，為 $\frac{3}{4}$ 次；圓圈 ℓ_3 最少，為 $\frac{1}{4}$ 次。（見【性質 1_2】）
2. C_n 中圓圈 $c_2 \sim c_n$ 的指定塗色次數期望值與 L_n 中圓圈 $\ell_2 \sim \ell_n$ 的指定塗色次數期望值皆相同，僅 c_1 與 ℓ_1 不同，兩者關係如下：

$$(1) E(c_k) = E(\ell_k) \quad (2 \leq k \leq n) \quad (2) E(c_1) = E(\ell_1) - \frac{1}{8}(P_{n-3} + 2P_{n-2} + P_{n-1})$$

(見【定理 2_3】)

六、圖形 $Q_{n,m}$ 之最優化塗色方法及指定塗色次數期望值之最小值與生成函數：

圖形	最優化塗色方法之第一個塗點位置	指定塗色次數期望值	指定塗色次數期望值之最小值的生成函數
$Q_{n,1}$ ($n \geq 4$)	$n = 4$ 圓圈 c_1 、 c_3	$E^*(C_n) + \frac{1}{2}$ (見【定理 3_2】)	$\frac{-19x^7 - 14x^6 + 9x^5 + 48x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ (見【定理 3_6】)
	$n > 4$ 圓圈 c_1		
$Q_{n,2}$ ($n \geq 4$)	$n = 5$ 圓圈 c_1 、 c_3	$E^*(C_{n+1}) + \frac{5}{8}$ (見【定理 3_3】)	$\frac{-25x^7 - 20x^6 + 10x^5 + 59x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ (見【定理 3_7】)
	$n \neq 5$ 圓圈 c_3		
$Q_{n,3}$ ($n \geq 4$)	$n = 4$ 圓圈 c_1 、 c_3 、 圓圈 ℓ_2	$E^*(C_n) + \frac{7}{4}$ (見【定理 3_4】)	$\frac{-29x^7 - 24x^6 + 9x^5 + 68x^4}{8(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ (見【定理 3_8】)
	$n > 4$ 圓圈 c_1 、 ℓ_2		
$Q_{n,m}$ ($n, m \geq 4$)	$n = 4$ 圓圈 c_3 、 ℓ_{m-1}	$\frac{1}{4}E^*(L_{m+1}) + \frac{3}{4}E^*(L_{m+2}) + \frac{9}{8}$ (見【定理 3_1】)	
	$n > 4$ 圓圈 ℓ_{m-1}	$E^*(C_n) + \frac{1}{2}(E^*(L_{m-1}) + E^*(L_m)) - \frac{1}{16}P_m P_{n-2}$ (見【定理 3_5】)	

伍、結論

一、結論

本研究在探討「 n 個圓圈直線排列(圖形 L_n)、環狀排列(圖形 C_n)及 n 個圓圈與 m 個圓圈環狀結合直線排列(圖形 $Q_{n,m}$)之最優化的塗色方法及其指定塗色次數的期望值。」我們先由圖形的結構,找出各圖形之指定塗色次數期望值的遞迴關係式,進而求出生成函數及特徵方

程式，由此推導出一般解。

藉由一般解，配合複數的代數運算及幾何性質，先找出圖形 L_n 之最優化塗色方法，且同時發現圖形 L_n 、 C_n 之最優化塗色方法具有一致性，並進一步比較兩者間的異同之處。之後更發現圖形 $Q_{n,m}$ 之最優化塗色方法會隨著 n 值、 m 值的不同而有不同的塗色方法之有趣現象。

二、未來展望

我們已經成功解決 n 個圓圈以一維排列所構成的相關圖形之最優化的塗色方法及其指定塗色次數的期望值等相關問題，未來可朝 $2n$ 個圓圈以 $2 \times n$ 的二維陣列排法所構成的圖形之最優化的塗色方法而努力。

陸、參考文獻

- 一、游森棚（2021）。森棚教官數學題：三歲的小畫家。國立台灣科學教育館 科學研習 第 60 卷第 6 期。取自：
<https://www.ntsec.edu.tw/liveSupply/detail.aspx?a=6829&cat=6842&p=1&lid=17594>
- 二、張福春、莊淨惠（2010）。線性遞迴關係之求解（下）。數學傳播 34 卷 1 期 pp.35-57。取自：<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d341/34104.pdf>
- 三、張福春、曾介玫（2008）。一般生成函數之應用。數學傳播 32 卷 3 期 pp.12-35。取自：
<https://www.math.sinica.edu.tw/media/pdf/d323/32302.pdf>

【評語】 010002

本作品的設定如下，給定一排未重合之圓圈，隨機選一個圓圈著色，接著設定其兩側的圓圈都各有 0.5 的機率被著色，重複以上法則，問將全部的圓圈都著色所需次數的期望值。作者得出此問題的解析解，也給出該解所對應的生成函數，內容充實，值得佳許。