2024年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010053

參展科別　數學

作品名稱　圓桌中對應編號的錯排問題

得獎獎項　三等獎

突尼西亞國際工程與科技節 I-FEST2

就讀學校　臺北市立永春高級中學
指導教師　高晟鈞
作者姓名　黃偲安

關鍵詞　stirlingnumbersofthefirstkind、parking function、permutation

作者簡介

教授、老師及同學大家好！我是黃偲安，就讀永春高中數理資優班二年級，數學是我從小到大最感興趣的科目，時常能在學習數學的過程中感到快樂，我也會時常參加數學類的檢定及比賽，增進自己的數學實力。高中是我第一次接觸數學科展，在指導老師的教導下，讓我認識數學分成了許多不同領域，其中我對於組合這塊領域是最感興趣的。因此在看國際科展歷屆作品時，我選擇閱讀「乾坤大挪移」進而發現一些值得研究的部分，延伸成自己的研究。我也在做研究的過程中得到愉悅感，時常發現到某定理並證明出來而成就感滿滿。自己時常留校研究到天黑，加上指導老師的用心指導，讓我這次有機會參加2024國際科展，是對我研究最大的鼓勵，我會好好把握這次機會，讓更多人了解我的研究。

摘要

本研究主要探討，有 n 位教授要在一個圓桌上舉行會議，其中每位教授都有自己的編號 ($1 \sim n$ 號)，同時圓桌的 n 個位置上也有各自的名牌編號 ($1 \sim n$ 號) 以順時針擺放置圓桌上與教授們的編號對應。其中第一個進來的 1 號教授坐到了圓桌上 k 號位，此後的教授們亂序一個一個進入，若發現與自己編號相同的位置是空的，就直接入座；若與自己編號相同的位置被占走了，就以逆時針方向尋找空位，直到有空入座。在這樣的遊戲規則下，本研究探討了，有 n 位教授，且 1 號教授坐到 k 號位，如何給定一組教授入場的順序，就能即刻的找出對應的坐法，以及計算坐錯人數的期望值和坐錯人數次數分佈表等等，後續再將遊戲規則改為，1 號教授不限定為第一個入場的人，同樣的探討上述問題。

Abstract

This research primarily investigates a scenario in which there are n professors convening a meeting at a round table. Each professor has their own number (ranging from 1 to n), and simultaneously, there are nameplates with corresponding numbers (1 to n) placed in a clockwise manner on the n positions around the table to correspond with the professors's numbers. The first professor to enter, Professor 1, sits at seat number k on the round table. Subsequently, the other professors enter in a random order. If they find an unoccupied seat with a matching number to their own, they sit down directly. If a seat with their number is already taken, they search counterclockwise for an unoccupied seat until they find one to sit in. Under these game rules, this study explores how to determine the order in which a group of professors enter when there are n professors, and Professor 1 takes seat number k on the round table. This investigation seeks to find an immediate corresponding seating arrangement, calculate the expected number of misseated professors, and create a distribution table for the frequency of misseated professors. Furthermore, the study extends its examination to scenarios where Professor 1 is not restricted to being the first to enter. The same issues mentioned above are explored in this modified context.

壹、前言

一、研究動機

2018 年國際科展三等獎作品「乾坤大挪移」的原始題目為：有 12 位教授要在一個圓桌上舉行會議，其中每位教授都有自己的編號 (1~12 號)，圓桌的 12 個位置也有各自對應的名牌 (即位置編號 1~12 號) 以順時針擺放在圓桌上，每一位教授的編號與每一個位置編號若一一對應代表教授坐到了正確的位置。該研究之初 1 號教授坐錯位置坐到了 2 號位，之後的教授們逐一亂序進入會場找位置入座。若發現與自己編號相同的位置是空的就直接入座；若與自己編號相同的位置已被占走了，就以順時針方向尋找空位，直到有空位才入座。這剩下的十一位教授分別進入時有很多種不同的入座順序，而又有多少種不同的坐法？

原作者解決了上述的問題，並將教授人數推廣至 n 位時的坐法循環總數之通解，(例如：坐法循環 $(1,3,4)$ 是指 1 號教授坐到 3 號位；3 號教授坐到 4 號位；4 號教授坐到 1 號位)。另外還解決了以下三點：

(一) 直接從入座順序得出坐法循環的方法。
(二) 得出坐法循環方法數。意即同一個坐法循環有多少種不同的入座順序與之對應。
(三) 計算出坐錯位置人數的期望值。

原規則為名牌 (即位置編號) 以順時針擺放，若與自己編號相同的位置被占走時，就以順時針方向尋找最近的空位入坐。本研究之初先從名牌 (位置編號) 依然是順時針擺放，但若自己的位置被占了，就以逆時針尋找空位，看看找尋空位的方向從順時針變為逆時針方向後，其結果會與原作者的研究結果有什麼不同，並著重於討論坐錯人數的次數分佈。後續再將 1 號教授改為不限定是第一個入場的人，再次探討相關結論。

二、研究目的

(一) 若共有 n 位教授，且 1 號教授坐到 k 號位，1 號教授為第一個入場的前提下，探討如何從入座順序找出坐法循環、坐法循環的總數、坐法循環方法數、坐錯人數的次數分佈、期望值和標準差。

(二) 若共有 n 位教授，且 1 號教授想坐到 k 號位，1 號教授不限定為第一個入場的前提下，探討如何從入座順序找出坐法循環、坐法循環的總數、和坐錯人數的次數分佈。

貳、研究方法或過程

一、名詞解釋

(一) 假設 n 人的圓桌問題，教授入座的順序 a_1、a_2、......、a_{n-1}、a_n 稱為入座順序，記載方式：$a_1-a_2-......-a_{n-1}-a_n$。

(二) 假設 n 人的圓桌問題，坐錯位置的教授有 m 人 $(m \le n)$，其中 b_1 號教授坐到 b_2 號位，.......，b_{m-1} 號教授坐到 b_m 號位，b_m 號教授坐 1 號位稱為坐法循環，記載方式：${}_n(b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m)$，其中 ${}_n(\ )$ 代表沒人坐錯位置。

(三) 假設 n 人的圓桌問題，有幾種的入座順序能造成相同的坐法循環，稱為坐法循環方法數，記載方式：$\#_n(b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m)$。

(四) 假設 n 人的圓桌問題，且 1 號教授坐到 k 號位，設隨機變數 X 表坐錯位置的人數，且 $E_k(X)$ 為坐錯位置人數的期望值。

(五) 假設 n 人的圓桌問題，且 1 號教授坐到 k 號位，記 $a_{k,x}$ 為 x 人坐錯的方法數。

假設今天有五位教授要開會，且 1 號教授坐到 2 號位，入座順序 1−4−2−5−3 根據遊戲規則 1 號教授會坐到 2 號位；4 號教授進來時，因為自己的位置是空的，所以坐 4 號位；2 號教授進來時，因為自己的座

位被 1 號教授所坐，所以以逆時針方向到 1 號位入座；最後入場的 5 號教授和 3 號教授同樣依照逆時針分向尋找空位十會與 4 號教授相同，因為自己的位置是空的，因此都會坐到自己的位置，即分別坐到 5 號位以及 3 號位。因此，入座順序 $1-4-2-5-3$ 中，僅有 1 號教授坐到 2 號位，以及 2 號教授坐到 1 號位，其餘三位教授均坐在自己對應的位置，其坐法循環為 ${}_5(1,2)$。然而，上述的入座順序僅是造成這樣的坐法循環的其中一種方法，事實上，會造成坐法循環為 ${}_5(1,2)$ 的入座順序一共有 24 種方法，即坐法循環方法數 $\#_5(1,2)=24$。(待公式出來就可計算得知)

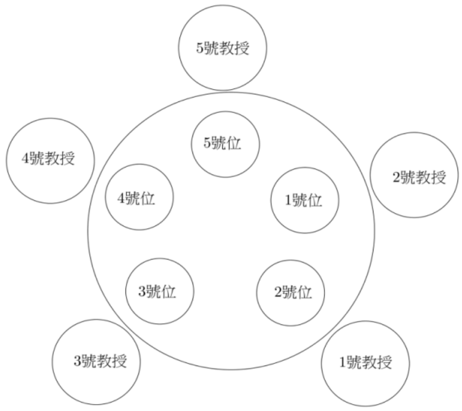


圖 (一) 入座順序
$1-4-2-5-3$ 對應的座位

二、研究過程

(一) 如何從入座順序，找出坐法循環。

假設一個 n 人的圓桌問題且 1 號教授坐到 k 號位，1 號教授為第一個入場的前提下。

1. $k=2$：

當 $n=2$ 時，入座順序 $1-2$ 將導致 1 號教授坐到 2 號位，且 2 號教授坐到 1 號位，坐法循環為 ${}_2(1,2)$。當 $n=3$ 時，無論入座順序為 $1-2-3$ 或 $1-3-2$，顯然坐法循環皆為 ${}_3(1,2)$。當 $n=4$ 時，無論入座順序為 $1-2-3-4$ 或 $1-2-4-3$ 或 …… (共 6 種不同的入座順序)，顯然坐法循環皆為 ${}_4(1,2)$。從上述討論可以發現，無論 n 的大小如何改變，只要指定了 $k=2$，代表 1 號教授坐到 2 號位，後續在 2 號進場時由於自己的位置被坐，在逆時針方向找尋空位時，必定使得 2 號教授坐到 1 號位，且其餘編號的教授無論何時進場，都必會坐到自己對應編號的位置。意即只要

給定 k 之值，無論 n 的大小為何，都不會產生新的坐法循環。

【定理一】：n 人的圓桌問題，1 號教授為第一個入場且坐到 k 號位，$k\neq 1$，$n\geq k$，不會因為人數增加 (n 的數值變大)，就產生新的坐法循環。

證明：因為名牌是以順時針擺放在圓桌上，而 k 號教授進場時，會由 k 號位以逆時針尋找位置，因此編號比 k 大的教授，不會加入坐法循環，因此不會因為 n 的數值變大，就產生更多的坐法循環。

下方表 (一) 與表 (二) 為列舉 $n=k$ 的情況。

2. $n=3, k=3$

表 (一) $n=3, k=3$

入座順序	$1-2-3$	入座順序	$1-3-2$
坐法循環	$_3(1,3)$	坐法循環	$_3(1,3,2)$
方法數	$\#_3(1,3)=1$	方法數	$\#_3(1,3,2)=1$

3. $n=4, k=4$

表 (二) $n=4, k=4$

入座順序	$1-2-3-4$、 $1-3-2-4$	入座順序	$1-2-4-3$、 $1-4-2-3$
坐法循環	$_4(1,4)$	坐法循環	$_4(1,4,3)$
方法數	$\#_4(1,4)=2$	方法數	$\#_4(1,4,3)=2$
入座順序	$1-3-4-2$	入座順序	$1-4-3-2$
坐法循環	$_4(1,4,2)$	坐法循環	$_4(1,4,3,2)$
方法數	$\#_4(1,4,2)=1$	方法數	$\#_4(1,4,3,2)=1$

列到表 (二) 時，發現坐法循環必為 $_n(1, k, \ldots\ldots)$ 的形式，其中在 k 之後的編號皆比 k 小。坐法循環 $_4(1,4,3)$ 對應的兩種入座順序分別

為 1−2−4−3、1−4−2−3。1−2−4−3 這組入座順序 4 的後方只有 3 ，所以不難想像坐法循環為 ${}_4(1,4,3)$；1−4−2−3 這組入座順序 4 的後方依序為 2 和 3 ，4 號教授並非坐到緊接在他入場順序後的 2 號教授對應的位置，而是坐到了 3 號位。原因可能是因為編號 3 號比 2 號大。本研究猜測：1 號教授會坐到 k 號位，k 號教授會坐到入座順序中在他之後入場編號比他小的最大數，後續以此類推，直到在入座順序中找不到這樣的數。

【定理二】：給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授第一個入場坐到 k 號位 (即 $b_1=1$)，坐法循環為 ${}_n(1,b_2,\ldots\ldots,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止，其中 $i\geq 2$。

上述定理說明如下：當 $n=7,k=7$， 1−6−7−3−5−2−4 這組入座順序的坐法循環找法為：根據【定理二】可知 $b_2=k$，所以 $b_2=7$，而 b_3 為在 b_2 之後且比 b_2 小的最大數，所以 $b_3=5$，最後 b_4 為在 b_3 之後且比 b_3 小的最大數，所以 $b_4=4$，因此入座順序 1−6−7−3−5−2−4 對應的坐法循環為 ${}_7(1,7,5,4)$。

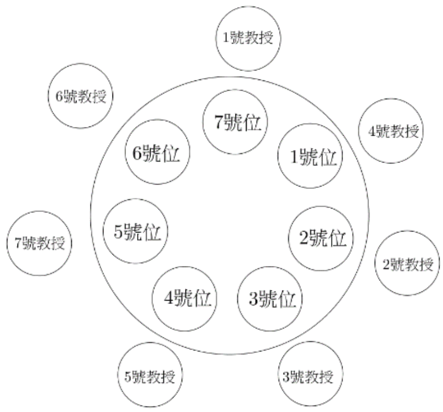


圖 (二) 入座順序
1−6−7−3−5−2−4 對應的座位

證明：1 號教授進來時坐到了 k 號教授的位置，即 $b_1=1$。這時在場只有 k 號教授的位置被坐，所以在 k 號教授入座之前，其餘編號的教授們皆能坐到自己的位置。當 k 號教授入場時，會因為自己的座位被坐了 (k 號教授坐錯位置，必進入坐法循環中，即 $b_2=k$)，以逆時針方向找尋新位置，尋找的過程中，因為名牌是以順時針方向擺放，所以 k 號教授位置的逆時針方向之座位編號皆比 k 小且由大到小排列。因為 k 號

教授由逆時針方向找離自己座位編號最近的座位入坐，扣除在 k 號教授之前入座的人 (這些人都已坐到自己的座位)，要坐到剩餘座位編號中的最大號位，故此座位編號 b_3 即為在 k 之後比 k 小的最大數，b_3 號教授入座時也要尋找比它小的最大數 b_4，後續以此類推，直到找不到這樣的數為止。

(二) 探討坐法循環的總數。

解決如何直接從入座順序找出坐法循環後，本研究猜想 1 號教授坐到 $k-1$ 號位與 1 號教授坐到 k 號位的坐法循環總數有著固定的關係。

觀察：

$k=2$

$$n^{(1,2)}$$

圖 (三) $k=2$

$k=3$

$$n^{(1,3)} — n^{(1,3,2)}$$

圖 (四) $k=3$

$k=4$

$$\begin{array}{lll} n^{(1,4)} & n^{(1,4,3)} & — \; n^{(1,4,3,2)} \\ & n^{(1,4,2)} & \end{array}$$

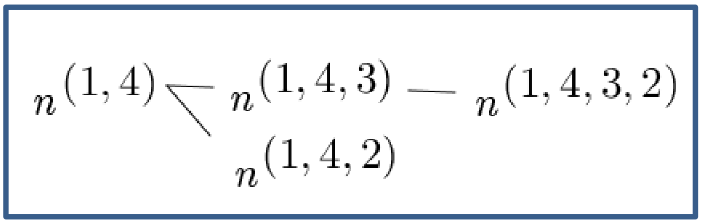
圖（五）$k=4$

$k=5$

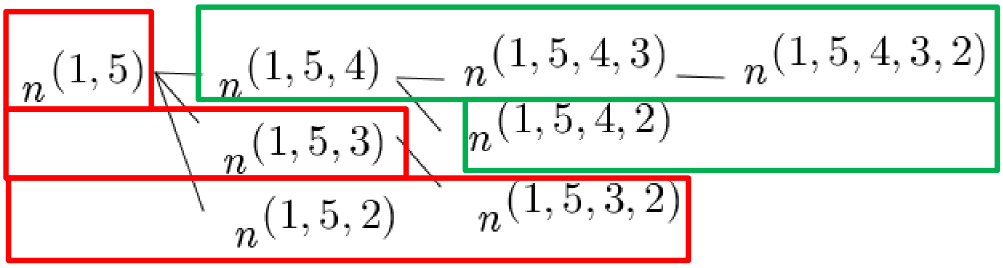
$$\begin{array}{llll} n^{(1,5)} & n^{(1,5,4)} & n^{(1,5,4,3)} & — \; n^{(1,5,4,3,2)} \\ & & n^{(1,5,4,2)} & \\ & n^{(1,5,3)} & n^{(1,5,3,2)} & \\ & n^{(1,5,2)} & & \end{array}$$

圖 (六) $k=5$

由圖（三）至圖（六）的觀察可以發現 1 號教授坐到 k 號位的坐法循環總數會是 1 號教授坐到 $k-1$ 號位的坐法循環總數的 2 倍。假設 c_k 表 1 號教授坐到 k 號位，其坐法循環的總數。將上述觀察利用一階遞迴式表示為 $\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_k = 2c_{k-1}, k \geq 3 \end{cases}$。至於造成此遞迴式成立的原因，以下透過 $k=4$ 和 $k=5$ 進行說明。



圖（七）c_4 示意圖



圖（八）c_5 示意圖

可以發現在 c_4 示意圖中的藍色框線結構與 c_5 示意圖中的紅色框線結構是相同的。藍色框線部分是 $_n(1, 4, ...)$ 開頭的坐法循環，所以後面只能接比 4 小的數字 3 和 2，坐法循環共計是 4 種。紅色框線部分是 $_n(1, 5, ...)$ 開頭的坐法循環，5 後面接比 5 小的數字 3 和 2，所以藍、紅色框線結構相同。

類似地，綠色框線之結構也與藍色框線之結構相同。因為綠色框線的結構是以 $_n(1, 5, 4, ...)$ 開頭的坐法循環，後面只能接比 4 小的數字 3 和 2。因此其結構與藍色框線之結構相同。所以 c_k 會是 c_{k-1} 的 2 倍（1 號教授坐到 k 號位的坐法循環總數會是坐到 $k-1$ 號位的坐法

循環總數的 2 倍)，又因為 $c_2=1$，因此可將 1 號教授坐到 k 號位的坐法循環總數 c_k 視為以 1 為首項，2 為公比的等比數列，即 $c_k=c_2\times 2^{k-1-1}=2^{k-2}$ 。

【定理三】: 給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授為第一個入場坐到 k 號位，其坐法循環總數為 2^{k-2} 。

證明：考慮 ${}_n(1,\, k\,,......)$ 開頭的坐法循環，在 k 的後方有 $k-1, k-2, ..., 4, 3, 2$ 共 $k-2$ 個數字可能加入坐法循環中，而這 $k-2$ 個數字每一個都有加入或不加入坐法循環兩種選擇，在確定了加入坐法循環的數字後，再由大到小的順序擺放，意即排列順序已確定，因此坐法循環總數為 2^{k-2} 。

(三) 計算坐法循環方法數。

1. 對於坐法循環方法數公式，本研究先以坐錯人數最少的坐法循環進行計算，如 ${}_n(1,2)$ 和 ${}_n(1,k), k\neq 2$ 。

首先 ${}_n(1,2)$ 代表的是 1 號教授坐到 2 號位，2 號教授坐到 1 號位，不在坐法循環之中的有 3、4、...、n，共 $n-2$ 位教授，也就代表這 $n-2$ 位教授都坐到了自己的位置，接著考慮這 $n-2$ 位教授該在何時入場才能導致坐法循環為 ${}_n(1,2)$。根據 【定理二】(坐法循環為 ${}_n(1, b_2\,, ..., b_{m-1}\,, b_m)$ ，其中 $b_2=2$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止) 可以得知，由於這 $n-2$ 位教授編號都比 2 大，所以他們無論在 2 號教授前或後入場，坐法循環皆為 ${}_n(1,2)$。計算坐法循環為 ${}_n(1,2)$ 的入座順序分法數符號定義為 $\#_n(1,2)$ ，為了計算總共有幾種不同的入座順序使得坐法循環為 ${}_n(1,2)$，考慮在 1 與 2 之間，以及 2 之後共有兩個空隙能放這 $n-2$ 位教授進入座順序。因為這 $n-2$ 位教授有先後順序的差異，所以方法數計算時應乘以 $(n-2)!$；又因為每個空隙可能放進不止 1 位教授，可將其視為相同物之重複組合，算法為 H^{2}_{n-2}。由以上所述可知：

$$\#_n(1,2)=(n-2)!\times H^{2}_{n-2}=(n-2)!\times C^{n-1}_{n-2}=(n-2)!\times\frac{(n-1)!}{1!(n-2)!}=(n-1)!$$

接著考慮坐法循環 $_n(1,k)$，$k\neq 2$。不在坐法循環當中且編號比 k 小的教授有 2、3、…、$k-1$，共 $k-2$ 位教授，而不在坐法循環當中且編號比 k 大的教授有 $k+1$、$k+2$、…、n 共 $n-k$ 位教授，根據【定理二】(坐法循環為 $_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止) 可以得知，那些編號比 k 小的 $k-2$ 位教授都要在 k 號教授入場前入座，才能使得這些教授都坐到自己的位置。所以放這 $k-2$ 位教授進入座順序時，只能放在 1 與 k 之間。如同前述的算法，其算法為 $(k-2)!\times H^{1}_{k-2}$；接著考慮編號比 k 大的那 $n-k$ 位教授，他們可以放在入座順序中除了 1 以前的任何地方，在放進了比 k 小的那 $k-2$ 位教授後，將會產生共計 k 個空隙可以放進入座順序，因此算法為 $(n-k)!\times H^{k}_{n-k}$。由以上所述可知：

$$\#_n(1,k)=(k-2)!\times H^{1}_{k-2}\times(n-k)!\times H^{k}_{n-k}=(k-2)!\times C^{k-2}_{k-2}\times(n-k)!\times C^{n-1}_{n-k}\quad(k\neq 2)$$

$$=(k-2)!\times\frac{(k-2)!}{1!(k-2)!}\times(n-k)!\times\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=\frac{(n-1)!}{k-1}\text{，}k\neq 2$$

綜合以上，$\#_n(1,2)=(n-1)!$，$\#_n(1,k)=\dfrac{(n-1)!}{k-1},k\neq 2$。可得：

$$\#_n(1,k)=\frac{(n-1)!}{k-1},k\geq 2$$

2. 推導一般坐法循環的方法數公式。

【公式一】：給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授第一個入場坐到 k 號位，坐法循環為 $_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)$，令 $d_i=b_i-b_{i+1}-1$

，其方法數為 $\#_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)=\prod_{i=2}^{m-1}P_{d_i}^{k-b_i+d_i}\times P_{n-k}^{n-1}$

在證明此公式之前，以下舉一個例子說明方法數的算法邏輯。

舉例：若坐法循環為 ${}_{12}(1,12,11,10,7,6,5,2)$，可以發現 10 與 7 號教授之間缺漏了 8 號及 9 號教授不在坐法循環當中，因此這兩位教授要在 10 號教授之前入場，才能坐到自己的位置。圖(九) 可知共 3 個空隙可以放進 8 與 9，同時他們有先後順序的差異，算法為 $2!\times H_2^3$。5 與 2 號教授之間缺漏了 3 號以及 4 號教授，圖 (十) 可知有 8 個空隙可以放進 3 與 4 號教授，同理可知算法為 $2!\times H_2^8$，最後根據乘法原理將兩段方法數相乘，可得到總方法數。

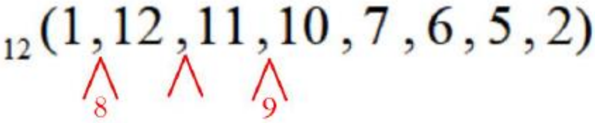


圖 (九) 放入 8 和 9 的示意圖

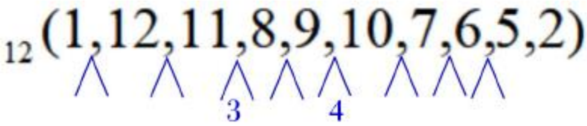


圖 (十) 放入 3 和 4 的示意圖

證明：此公式的算法邏輯為將不在坐法循環當中的教授，也就是坐到自己位置的教授們，在合適的位置放進，即可得到所有的入座順序，也就是方法數。其中 d_i 代表的是 b_i 與 b_{i+1} 中間缺漏的人，算法為 $d_i=b_i-b_{i+1}-1$，根據【定理二】(坐法循環為 ${}_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止) 得知，共 d_i 位教授，想要坐到自己的位置，他們必須要在 b_i 教授之前入場，考慮在 b_i 前有幾個空隙可以放進 d_i 位教授，顯然在 b_i 前有 k 到 b_i+1 號教授，總共有 $k-(b_i+1)+1=k-b_i$ 位教授，而 $k-b_i$ 位教授共會產生 $k-b_i+1$ 個空隙可以放進 d_i 位教授，同時 d_i 有先後順序的差異，所以方法數計算時應乘以 $d_i!$。且一個空隙可以放進不只一位教授故用重覆組合符號 H 來計算，因此

算法為 $d_i!\times H_{d_i}^{k-b_i+1}$。$i$ 變量從 2 到 $m-1$，因此可以用連乘符號表示數量為 $\prod_{i=2}^{m-1} d_i!\times H_{d_i}^{k-b_i+1}$。

最後考慮編號比 k 還大的 $n-k$ 位教授，他們可以放在入座順序中除了 1 以前的任何地方，所以在 1 號後共有 $k-1$ 位教授產生 k 個空隙，算法為 $(n-k)!\times H_{n-k}^{k}$。

至此可以得知 $\#_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)$

$$=\prod_{i=2}^{m-1} d_i!\times H_{d_i}^{k-b_i+1}\times(n-k)!\times H_{n-k}^{k}$$

$$=\prod_{i=2}^{m-1} d_i!\times C_{d_i}^{k-b_i+d_i}\times(n-k)!\times C_{n-k}^{n-1}$$

$$=[\prod_{i=2}^{m-1} d_i!\times\frac{(k-b_i+d_i)!}{d_i!(k-b_i)!}]\times(n-k)!\times\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$=[\prod_{i=1}^{v}\frac{(k-b_i+d_i)!}{(k-b_i)!}]\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

$$=\prod_{i=2}^{m-1} P_{d_i}^{k-b_i+d_i}\times P_{n-k}^{n-1}$$

至此本研究發現，透過階乘與重覆組合符號 H 來計算的公式，最後卻能化簡成相當乾淨只有排列符號 P 的連乘。因此本研究試圖找到另一種直觀的解釋，解釋只有排列符號 P 的公式。

排列符號 P 的公式的解釋：同上述證明，在 b_i 前有 k 到 b_i+1 號教授，總共有 $k-(b_i+1)+1=k-b_i$ 位教授，而 $k-b_i$ 位教授共會產生 $k-b_i+1$ 個空隙可以放進 d_i 個人，而這 d_i 個人可以放進同一個空隙，為了滿足 1 個空隙最多可放進 d_i 個人的情況，將原本 $k-b_i+1$ 個空隙，額外加上 d_i-1 個空隙，再加上空隙後共有 $k-b_i+d_i$ 個空隙，d_i 個人排列，算法為 $P_{d_i}^{k-b_i+d_i}$，i 變量從 2 到 $m-1$，因此可以用連乘符號表示數量為 $\prod_{i=2}^{m-1} P_{d_i}^{k-b_i+d_i}$。放入編

號比 k 大的人，同理原有 k 個空隙要補上 $n-k-1$ 個空隙，所以補完以後共有 $n-1$ 個空隙，$n-k$ 個人排列，算法為 P_{n-k}^{n-1}。根據乘法原理將方法數相乘，即可得總方法數為 $\prod_{i=2}^{m-1} P_{d_i}^{k-b_i+d_i} \times P_{n-k}^{n-1}$。

(四) 計算坐錯人數的期望值並探討坐錯人數的次數分佈為何。

1. 解釋期望值的數值會被 k 所決定。

首先根據【定理一】(不會因為人數增加 (n 的數值變大)，就產生新的坐法循環) 可知坐法循環個數是被 k 的數值所決定，事實上期望值的數值，也會被 k 所決定。

【定理四】：設隨機變數 X 表坐錯位置的人數，$n=k$ 時的期望值，與 $n=k+t, t\in N$ 時的期望值相同，也就是期望值的數值是被 k 所決定的證明：列出表 (三) 可計算當 $n=k$ 時的期望值。

表 (三) $n=k$ 機率分佈表

x	2	3	…	k
P_x	$\frac{a_{k,2}}{(k-1)!}$	$\frac{a_{k,3}}{(k-1)!}$	…	$\frac{a_{k,k}}{(k-1)!}$

$$E(X)=2\times\frac{a_{k,2}}{(k-1)!}\times 3\times\frac{a_{k,3}}{(k-1)!}\times\ldots\times k\times\frac{a_{k,k}}{(k-1)!}$$

$$=\sum_{x=2}^{k} x\times\frac{a_{k,x}}{(k-1)!}$$

列出表 (四) 可計算出當 $n=k+t, t\in N$ 時的期望值

表（四）$n=k+t, t\in N$ 機率分佈表

x	2	…	k
P_x	$\dfrac{a_{k,2}\times k(k+1)...(k+t-1)}{(k+t-1)!}$	…	$\dfrac{a_{k,k}\times k(k+1)...(k+t-1)}{(k+t-1)!}$

根據【定理二】(坐法循環為 ${}_n(1,b_2,......,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止) 可知，由於 $k+1\sim k+t$ 號教授們編號都比 k 號還大，所以他不管在何時進場，必定會坐到自己的位置，不會加入坐法循環當中。在 $n=k$ 時，共有 k 個空隙可以放進 $k+1$ 號教授，而放完 $k+1$ 號教授後，又有 $k+1$ 個空隙可以放進 $k+2$ 號教授，以此類推最後共有 $k+t-1$ 個空隙可以放進 $k+t$ 號教授。因此可以想成在 $n=k$ 時的 $a_{k,x}$，因為 $k+1\sim k+t$ 號教授們的放進，都乘以 $k(k+1)...(k+t-1)$，因此得到的機率分佈表化簡後會與表 (三) $n=k$ 時相同，故期望值也會相同。

$$E(X)=\sum_{x=2}^{k}x\times\frac{a_{k,x}\times k(k+1)...(k+t-1)}{(k+t-1)!}$$

$$=\sum_{x=2}^{k}x\times\frac{a_{k,x}}{(k-1)!}$$

至此本研究得知當 $n=k$ 和 $n=k+t$ 的期望值 $E(X)$ 皆相等，所以期望值的數值，是被 k 的大小所決定。

2. 探討坐錯人數的次數分佈表。

本研究製作了一個 1 號教授坐到 k 號位，x 位教授坐錯位置的次數分佈表。($x\le k$)

$a_{2,2}$：$\#_2(1,2)=1\Rightarrow a_{2,2}=1$

$a_{3,2}$：$\#_3(1,3)=1\Rightarrow a_{3,2}=1$

$a_{3,3}$：$\#_3(1,3,2)=1\Rightarrow a_{3,3}=1$

$a_{4,2}$：$\#_4(1,4)=2\Rightarrow a_{4,2}=2$

$a_{4,3}$：$\#_4(1,4,3)=2$、$\#_4(1,4,2)=1 \Rightarrow a_{4,3}=1+2=3$

$a_{4,4}$：$\#_4(1,4,3,2)=1 \Rightarrow a_{4,4}=1$

$a_{5,2}$：$\#_5(1,5)=6 \Rightarrow a_{5,2}=6$

$a_{5,3}$：$\#_5(1,5,4)=6$、$\#_5(1,5,3)=3$、$\#_5(1,5,2)=2$

$\Rightarrow a_{5,3}=6+3+2=11$

$a_{5,4}$：$\#_5(1,5,4,3)=3$、$\#_5(1,5,4,2)=2$、$\#_5(1,5,3,2)=1$

$\Rightarrow a_{5,4}=3+2+1=6$

$a_{5,5}$：$\#_5(1,5,4,3,2)=1 \Rightarrow a_{5,5}=1$

$a_{6,2}$：$\#_6(1,6)=24 \Rightarrow a_{6,2}=24$

$a_{6,3}$：$\#_6(1,6,5)=24$、$\#_6(1,6,4)=12$、$\#_6(1,6,3)=8$、

$\#_6(1,6,2)=6 \Rightarrow a_{6,3}=24+12+8+6=50$

$a_{6,4}$：$\#_6(1,6,5,4)=12$、$\#_6(1,6,5,3)=8$、$\#_6(1,6,5,2)=6$、

$\#_6(1,6,4,3)=4$、$\#_6(1,6,4,2)=3$、$\#_6(1,6,3,2)=2$

$\Rightarrow a_{6,4}=12+8+6+4+3+2=35$

$a_{6,5}$：$\#_6(1,6,5,4,3)=4$、$\#_6(1,6,5,4,2)=3$、

$\#_6(1,6,5,3,2)=2$、$\#_6(1,6,4,3,2)=1$

$\Rightarrow a_{6,5}=4+3+2+1=10$

$a_{6,6}$：$\#_6(1,6,5,4,3,2)=1 \Rightarrow a_{6,6}=1$

表（五） 1 號教授坐到 k 號位，x 人坐錯的次數分佈表

k \ x	2	3	4	5	6
2	1				
3	1	1			
4	2	3	1		
5	6	11	6	1	
6	24	50	35	10	1

此時，本研究發現此次數分佈與 stirling numbers of the first kind 有著相同的次數分佈，因此本研究將先了解 stirling numbers of the first kind 以及與它有著相同的次數分佈的統計量。

首先本研究先了解 stirling numbers of the first kind 是如何計算的。

對稱群 $S_n = \{1 \sim n$ 的所有直線排列$\}$

當 $n=3$，$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

令 $S_{n,i} = \#\{\pi \in S_n \mid \pi$ 有 i 個cycles$\}$

$\mathrm{cyc}(\pi)$：π 中的 cycles 數量

當 $n=3$

$123 = \binom{123}{123} = (1)(2)(3) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 3$

$132 = \binom{123}{132} = (1)(23) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 2$

$213 = \binom{123}{213} = (12)(3) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 2$

$231 = \binom{123}{231} = (123) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 1$

$312 = \binom{123}{312} = (132) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 1$

$321 = \binom{123}{321} = (13)(2) \Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi) = 2$

表（六）$n=3$ cycles 次數分佈表

i	1	2	3
次數	2	3	1

表（七） stirling numbers of the first kind 次數分佈表

n \ i	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	2	3	1		
4	6	11	6	1	
5	24	50	35	10	1

其中存在著一個遞迴式：$S_{n,i} = S_{n-1,i-1} + (n-1)S_{n-1,i}$。

證明：主要分為兩類來討論，第一類為 n 自成一個 cycle，第二類為 n 跟在 $1 \sim n-1$ 其中一個數字後方。對於第一類從 $S_{n-1,i-1}$ 加入 (n)，會多加一個 cycle，變為 $S_{n,i}$，而對於第二類從 $S_{n-1,i}$ 中

加入 n 可以跟在 $1\sim n-1$ 其中一個數字後方，形成 cycle，故有 $n-1$ 種選擇，所以乘以 $n-1$ 倍。因此
$S_{n\,,\,i}=S_{n-1\,,\,i-1}+(n-1)\,S_{n-1\,,\,i}$ 。

認識 stirling numbers of the first kind 之後在查找文獻時，同時認識了 4 種統計量

$\mathrm{lrmin}(\pi)$ ：由左至右的選取比前面還小的數字，如：7 8 6 4 9 2，$\mathrm{lrmin}(\pi)=5$

$\mathrm{lrmax}(\pi)$ ：由左至右的選取比前面還大的數字，如：7 8 6 4 9 2，$\mathrm{lrmax}(\pi)=3$

$\mathrm{rlmin}(\pi)$ ：由右至左的選取比前面還小的數字，如：7 8 6 4 9 2，$\mathrm{rlmin}(\pi)=1$

$\mathrm{rlmax}(\pi)$ ：由右至左的選取比前面還大的數字，如：7 8 6 4 9 2，$\mathrm{rlmax}(\pi)=2$

這四種統計量，都會跟 stirling numbers of the first kind 有著相同的次數分佈。後續本篇研究將先說明以下幾個統計量皆同分佈，即 cyc～lrmin～lrmax～rlmin～rlmax 。

【引理一】：lrmin～rlmin

證明：首先舉 $S_3=\{123,132,213,231,312,321\}$ 計算 lrmin

1 2 3， $\mathrm{lrmin}(\pi)=1$

1 3 2， $\mathrm{lrmin}(\pi)=1$

2 1 3， $\mathrm{lrmin}(\pi)=2$

2 3 1， $\mathrm{lrmin}(\pi)=2$

3 1 2， $\mathrm{lrmin}(\pi)=2$

3 2 1， $\text{lrmin}(\pi)=3$

接著將每一組排列倒過來寫計算 lrmin

3 2 1， $\text{lrmin}(\pi)=3$

2 3 1， $\text{lrmin}(\pi)=2$

3 1 2， $\text{lrmin}(\pi)=2$

1 3 2， $\text{lrmin}(\pi)=1$

2 1 3， $\text{lrmin}(\pi)=2$

1 2 3， $\text{lrmin}(\pi)=1$

事實上倒過來寫計算 lrmin 這個動作其實就是計算 $S_3=\{123,132,213,231,312,321\}$ 的 rlmin，可以發現將數字倒過來寫後，6 種排列只是調換了位置，統計出的結果勢必會相同，因此 lrmin～rlmin 。

【引理二】：lrmax～rlmax

證明：置換手法與【引理一】相同，同樣是將所有排列倒過來寫，可以得到 lrmax～rlmax。

【引理三】：lrmin～lrmax

證明：首先舉 5 7 1 10 3 8 9 4 6 2 這組排列計算 lrmin 和 lrmax

5 7 1 10 3 8 9 4 6 2， $\text{lrmin}(\pi)=2$

5 7 1 10 3 8 9 4 6 2， $\text{lrmax}(\pi)=3$

置換方法為將最大數以及最小數交換位置，也就是 10 和 1 兩數的位置交換，再將第二大數以及第二小數交換位置，也就是 9 和 2 兩數的位置交換。將數字 i 與 $n+1-i$ 兩數交換位置，可以得到 6 4 10 1 8 3 2 7 5 9 此組新的排列，同樣將此組排列計算 lrmin 和 lrmax。

6 4 10 1 8 3 2 7 5 9，$\text{lrmin}(\pi)=3$

6 4 10 1 8 3 2 7 5 9，$\text{lrmax}(\pi)=2$

透過此置換手法，置換過後取到的數字 i 剛剛好是交換後的數字 $n+1-i$，也就是原先排列的排列取到 5，置換過後新的排列取到 6；原先的排列取到 1，置換過後新的排列取到 10；原先的排列取到 7，置換過後新的排列取到 4，置換過後的 lrmin 和 lrmax 剛好相反。因此置換前的 $\text{lrmin}(\pi)$ 會與置換後的 $\text{lrmax}(\pi)$ 相同，意即 lrmin～lrmax，根據【引理一】(lrmin～rlmin) 和【引理二】(lrmax～rlmax) 可以得知 lrmin～lrmax～rlmin～rlmax。

【引理四】：cyc～lrmin

說明：首先舉 $S_3=\{123,132,213,231,312,321\}$ 計算 cyc

$123=\binom{123}{123}=(1)(2)(3)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=3$

$132=\binom{123}{132}=(1)(23)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=2$

$213=\binom{123}{213}=(12)(3)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=2$

$231=\binom{123}{231}=(123)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=1$

$312=\binom{123}{312}=(132)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=1$

$321=\binom{123}{321}=(13)(2)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=2$

置換手法為將 cycle 裡的數字由小排到大，後續將 cycle 按照最左邊的數的大小，將 cycle 由大排到小，去掉括號再計算 lrmin。下方為置換過程和計算 lrmin。

$123=\binom{123}{123}=(1)(2)(3)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=3\Rightarrow(3)(2)(1)\Rightarrow 3\ 2\ 1$，$\text{lrmin}(\pi)=3$

$132=\binom{123}{132}=(1)(23)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=2\Rightarrow(23)(1)\Rightarrow 2\ 3\ 1$，$\text{lrmin}(\pi)=2$

$213=\binom{123}{213}=(12)(3)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=2\Rightarrow(3)(12)\Rightarrow 3\ 1\ 2$，$\text{lrmin}(\pi)=2$

$231=\binom{123}{231}=(123)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=1\Rightarrow(123)\Rightarrow 1\ 2\ 3$，$\text{lrmin}(\pi)=1$

$312=\binom{123}{312}=(132)\Rightarrow \text{cyc}(\pi)=1\Rightarrow(123)\Rightarrow 1\ 2\ 3$，$\text{lrmin}(\pi)=1$

$3\,2\,1=\binom{123}{321}=(13)(2)\Rightarrow \mathrm{cyc}(\pi)=2\Rightarrow(2)(13)\Rightarrow 2\;1\;3$，$\mathrm{lrmin}(\pi)=2$

由此可知置換過後的 $\mathrm{lrmin}(\pi)$ 數量剛好與置換前的 $\mathrm{cyc}(\pi)$ 相同，因此 cyc～lrmin，至此本研究了說明 cyc～lrmin～lrmax～rlmin～rlmax。

上述【引理一】至【引理四】雖都是已知結果，但為了方便閱讀，將其證明過程一一陳述。

【定理五】：X 人坐錯的坐法循環，入座順序的 $\mathrm{rlmax}(\pi)=X-1$，且坐錯人數與 rlmax 造成相同的次數分佈。

證明：本研究舉 ${}_{12}(1,12,11,10,7,6,5,2)$ 這組 8 人坐錯的坐法循環之其中一組對應的入座順序進行說明，比如：$1-9-12-8-11-10-4-3-7-6-5-2$ 將這組入座順序計算 rlmax。1 9 12 8 11 10 4 3 7 6 5 2，$\mathrm{rlmax}(\pi)=7$，可以發現選取到的數字剛好會是坐法循環除了 1 以外的數字，所以 X 人坐錯的坐法循環，入座順序的 $\mathrm{rlmax}(\pi)=X-1$。

造成此現象的原因為，根據【定理二】(坐法循環為 ${}_{n}(1,b_2,\ldots\ldots,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止) 可知，3 和 4 號教授要在 5 號教授之前入場，所以計算 rlmax 時從右到左一定會先取到 5，後續選取過程 3 和 4 號編號都小於 5，所以一定不會被 rlmax 選取到，而 8 和 9 號教授同理可知一定不會被 rlmax 選取到。因此 rlmax 不會選取到坐到自己位置的教授們對應的編號，換句話說 rlmax 會選取到坐法循環中除了 1 以外的數字。透過這個例子，不難知道一般性坐法循環也會滿足此規則。故 X 人坐錯的坐法循環，入座順序的 $\mathrm{rlmax}(\pi)=X-1$，同時也說明本研究坐錯人數的次數分佈與 stirling numbers of the first kind 有著相同的次數分佈。

靠著【定理五】(本篇研究坐錯人數與 rlmax 造成相同的次數分佈) 可知 X 人坐錯的坐法循環，$\text{rlmax}(\pi)=X-1$，因此 $a_{k,x}=S_{n-1,i-1}$，遞迴式為：$a_{k,x}=a_{k-1,x-1}+(k-2)\,a_{k-1,x}$。

3. 計算坐錯位置的人數之期望值與標準差。

【定理六】：$E_k(X)=1+H_{k-1}$，$H_{k-1}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}$

證明：$E_k(X)=\dfrac{\sum_{x=2}^{k}x\times a_{k,x}}{(k-1)!}$，$\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,x-1}=(k-2)!$

表 (八) 機率分佈表

x	2	3	…	k
P_x	$\dfrac{a_{k,2}}{(k-1)!}$	$\dfrac{a_{k,3}}{(k-1)!}$	…	$\dfrac{a_{k,k}}{(k-1)!}$

$$=\frac{\sum_{x=2}^{k}[x\times a_{k-1,x-1}+x(k-2)\,a_{k-1,x}]}{(k-1)!}$$

$$=\frac{\sum_{x=2}^{k}x\times a_{k-1,x-1}+\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}x\times a_{k-1,x-1}}{(k-2)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}[(x-1)\times a_{k-1,x-1}+a_{k-1,x-1}]}{(k-2)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}(x-1)\times a_{k-1,x-1}+\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,x-1}}{(k-2)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\left(\frac{\sum_{x=2}^{k}(x-1)\times a_{k-1,x-1}}{(k-2)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,x-1}}{(k-2)!}\right)+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\left(E_{k-1}(X)+\frac{(k-2)!}{(k-2)!}\right)+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}(E_{k-1}(X)+1)+\frac{\sum_{x=2}^{k}x(k-2)a_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{E_{k-1}(X)+1}{k-1}+(k-2)\frac{\sum_{x=2}^{k} xa_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{E_{k-1}(X)+1}{k-1}+(k-2)\frac{\sum_{x=2}^{k} xa_{k-1,x}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{E_{k-1}(X)+1}{k-1}+\frac{k-2}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k} xa_{k-1,x}}{(k-2)!}$$

$$=\frac{E_{k-1}(X)+1}{k-1}+\frac{k-2}{k-1}E_{k-1}(X)$$

$$=\frac{(k-1)E_{k-1}(X)+1}{k-1}$$

$$\Rightarrow E_k(X)=E_{k-1}(X)+\frac{1}{k-1}$$

$$E_2(X)=2$$

$$E_3(X)=E_2(X)+\frac{1}{2}$$

$$E_4(X)=E_3(X)+\frac{1}{3}$$

.

.

.

$$\underline{+)E_k(X)=E_{k-1}(X)+\frac{1}{k-1}}$$

$$\begin{aligned}E_k(X)&=2+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{k-1})\\&=1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k-1})\\&=1+H_{k-1}\end{aligned}$$

【定理七】: $\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-(H_{k-1})^2}$

證明： $E_k(X^2)=\dfrac{\sum_{x=2}^{k} x^2\times a_{k,x^2}}{(k-1)!}$ ， $\sum_{x=2}^{k} a_{k-1,(x-1)^2}=(k-2)!$

$$=\frac{\sum_{x=2}^{k}[x^2\times a_{k-1,(x-1)^2}+x^2(k-2)\times a_{k-1,x^2}]}{(k-1)!}$$

$$=\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-1)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2(k-2)\times a_{k-1,x^2}}{(k-1)!}$$

令 $a=\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-1)!}$ ，$b=\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2(k-2)\times a_{k-1,x^2}}{(k-1)!}$

$$a=\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-1)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}x^2\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}[(x-1)^2\times a_{k-1,(x-1)^2}+(2x-1)a_{k-1,(x-1)^2}]}{(k-2)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k}(x-1)^2\times a_{k-1,(x-1)^2}+\sum_{x=2}^{k}(2x-1)a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}$$

$$=\frac{1}{k-1}[\frac{\sum_{x=2}^{k}(x-1)^2\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}+\frac{\sum_{x=2}^{k}(2x-1)a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$=\frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2)+\frac{\sum_{x=2}^{k}(2x-1)a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$=\frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2)+\frac{2\sum_{x=2}^{k}x\times a_{k-1,(x-1)^2}-\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$=\frac{1}{k-1}\{E_{k-1}(X^2)+\frac{2[\sum_{x=2}^{k}(x-1)\times a_{k-1,(x-1)^2}+\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}]}{(k-2)!}-\frac{\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}\}$$

$$=\frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2)+\frac{2\sum_{x=2}^{k}(x-1)\times a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}+\frac{2\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}-\frac{\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$=\frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2)+2E_{k-1}(X)+\frac{2\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}-\frac{\sum_{x=2}^{k}a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$= \frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2) + 2E_{k-1}(X) + \frac{\sum_{x=2}^{k} a_{k-1,(x-1)^2}}{(k-2)!}]$$

$$= \frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2) + 2E_{k-1}(X) + \frac{(k-2)!}{(k-2)!}]$$

$$= \frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2) + 2E_{k-1}(X) + 1]$$

$$b = \frac{\sum_{x=2}^{k} x^2 (k-2) \times a_{k-1,x^2}}{(k-1)!}$$

$$= (k-2)\frac{\sum_{x=2}^{k} x^2 \times a_{k-1,x^2}}{(k-1)!}$$

$$= \frac{k-2}{k-1}\frac{\sum_{x=2}^{k} x^2 \times a_{k-1,x^2}}{(k-2)!}$$

$$= \frac{1}{k-1}(k-2)E_{k-1}(X^2)$$

$$E_k(X^2) = a + b$$

$$= \frac{1}{k-1}[E_{k-1}(X^2) + 2E_{k-1}(X) + 1] + \frac{1}{k-1}(k-2)E_{k-1}(X^2)$$

$$= E_{k-1}(X^2) + \frac{2E_{k-1}(X) + 1}{k-1}$$

$$= E_{k-1}(X^2) + \frac{2(1 + H_{k-2}) + 1}{k-1}$$

$$= E_{k-1}(X^2) + \frac{2H_{k-2} + 3}{k-1}$$

$$E_2(X^2) = 4$$

$$E_3(X^2) = E_2(X^2) + \frac{2H_1 + 3}{2}$$

$$E_4(X^2) = E_3(X^2) + \frac{2H_2 + 3}{3}$$

.

.

$$+)E_k(X^2)=E_{k-1}(X^2)+\frac{2H_{k-2}+3}{k-1}$$

$$\begin{aligned}E_k(X^2)&=4+(\frac{2H_1+3}{2}+\frac{2H_2+3}{3}+...+\frac{2H_{k-2}+3}{k-1})\\&=4+\sum_{m=2}^{k-1}(\frac{2H_{m-1}+3}{m})\\&=4+3\sum_{m=2}^{k-1}\frac{1}{m}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}\\&=1+3\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}\\&=1+3H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^2&=E_k(X^2)-[E_k(X)]^2\\&=1+3H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-(1+H_{k-1})^2\\&=1+3H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-[1+2H_{k-1}+(H_{k-1})^2]\\&=1+3H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-1-2H_{k-1}-(H_{k-1})^2\\&=H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-(H_{k-1})^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-(H_{k-1})^2}$$

(五) 1 號教授不限定在第一個入場，如何從入座順序，找出坐法循環。

研究至此可以發現，研究目的 (一) 中，不管是「坐法循環方法數公式」或是「算出坐錯人數之期望值，並探討次數分佈」，都會運用到「從入座順序得出坐法循環的方法」。因此本研究認為從入座順序得出坐法循環的方法，將會是至關重要的條件，所以對於研究目的 (二)「1 號教授不限定在第一個入場」，在此遊戲規則下，要如何從入座順序得出坐法循環，為了後續研究說明的順暢性，此問題應當優先解決。

【定理八】：給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐在 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，坐法循環為 $_n(b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m)$，若 k 號教授在 1 號教授之後入場，則如同【定理二】「$b_1 = 1$，$b_2 = k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。」。若 k 號教授在 1 號教授之前入場，則 b_2 為入座順序中 1 號教授之後且編號比 1 大但比 k 小的最大編號位，而後續 b_{i+1} 為入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小之最大數，直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。若 1 號教授在最後一位入場，則坐法循環為 $_n(\ )$。

證明：首先在 1 號教授之前進場的人必定會坐到自己的位置，若 k 號教授在 1 號教授之後入場，則代表 1 號教授進場時 k 號位是空的，1 號教授會坐到 k 號位，後續會發生與【定理二】同樣的現象 k 號教授會坐到比他小的最大編號位置，之後同理類推。若 k 號教授在 1 之前入場，則代表 k 號教授會坐到自己的位置，因為此時 1 號教授尚未進場，而當 1 號教授入場時，則會與【定理二】的現象雷同，差在 1 號教授會坐到比 1 大但比 k 小中最大編號位。而若 1 號教授為最後一位入場，則代表其餘的 $n-1$ 位教授都坐到了自己的位置上，所以 1 號教授進場時，必定會坐到自己的 1 號位，因此坐法循環為 $_n(\ )$。

以下我們舉幾個例子

當 $n=5, k=5$

$2-1-5-3-4 \Rightarrow {}_5(1,5,4)$：$k$ 在 1 後方

$5-1-2-4-3 \Rightarrow {}_5(1,4,3)$：$k$ 在 1 前方

$4-3-2-5-1 \Rightarrow {}_5(\ )$：1 在最後

(六) 1 號教授不限定在第一個入場，探討坐法循環的總數。

在研究目的 (一) 的遊戲規則下，坐法循環總數為 2^{k-2} 是 2 的冪次。本研究好奇，若 1 號教授不限定為第一個入場的人，坐法循環總數是否一樣為 2 的冪次？

【定理九】：給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐到 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，坐法循環總數為 2^{k-1} 種。

證明：將 $k=2\sim4$ 的所有坐法循環列舉說明

表 (九) $k=2\sim4$ 的坐法循環

$k=2$	${}_2(\ )$、${}_2(1,2)$
$k=3$	${}_3(\ )$、${}_3(1,2)$、${}_3(1,3)$、${}_3(1,3,2)$
$k=4$	${}_4(\ )$、${}_4(1,2)$、${}_4(1,3)$、${}_4(1,4)$、 ${}_4(1,3,2)$、${}_4(1,4,3)$、${}_4(1,4,2)$、${}_4(1,4,3,2)$

可以發現 $k=4$ 的坐法循環就會是原先 1 號教授第一個入場的坐法循環加上此限制條件下 $k=3$ 的所有坐法循環，同樣的在此限制條件下 $k=3$ 與 $k=2$ 的坐法循環也有這樣的關係存在。導致這樣的現象的原因為：原先 1 號教授第一個入場 $k=4$ 的情況下 4 號教授一定在 1 號教授後方入場，則坐法循環會有原先 1 號教授第一個入場的坐法循環，而若 4 號教授在 1 號教授之前入場，1 號教授就有可能會坐到 3 號位或 2 號位，會新增此規則下 $k=3$ 與 $k=2$ 的坐法循環，而此規則下 $k=3$ 時的坐法循環包含了此規則下 $k=2$ 的坐法循環，因此 $k=4$ 的坐法循環為原先 1 號教授第一個入場的坐法循環加上 $k=3$ 的所有坐法循環，又因為 $k=2$ 時有 2^1 種，k 與 $k+1$ 有著 2 倍關係，因此 1 號坐到 k 時，坐法循環總數為 2^{k-1} 種。

(七) 1 號教授不限定在第一個入場，探討坐錯人數之次數分佈。

接續本研究之前的研究，繪製出了一個 1 號教授坐到 k 號位，x 位教授坐錯位置的次數分佈表。$(x\le k)$，並有著驚人的發現。

表 (十) 1 號教授坐到 k 號位，x 人坐錯的次數分佈表

k \ x	0	2	3	4	5
2	1	1			
3	2	3	1		
4	6	11	6	1	
5	24	50	35	10	1

此分佈表一樣會與 stirling numbers of the first kind 有著相同的次數分佈表，而有著之前【定理五】的經驗，本研究猜想原因一樣會與 rlmax 有關，而本研究也確實發現若只取入座順序 1 之右方的排列計算 rlmax，會是導致同分佈的原因，但在證明這件事之前需要【定理十】，說明在入座順序 1 之右方的排列計算 rlmax 之分佈，也會與 stirling numbers of the first kind 同分佈。

【定理十】：令 rlmax_a 為在排列中，指定一個數字 a，在它的右方切一刀，計算 rlmax (只對其右邊的排列計算) 會與原本的 rlmax 有著相同的次數分佈。

證明：首先舉對稱群 S_4，rlmax_2 來進行說明。

1. 2 在第一位

$2|134$，$\text{rlmax}_2=1$　$2|143$，$\text{rlmax}_2=2$

$2|314$，$\text{rlmax}_2=1$　$2|341$，$\text{rlmax}_2=2$

$2|413$，$\text{rlmax}_2=2$　$2|431$，$\text{rlmax}_2=3$

表 (十一) 2 在第一位 rlmax_2 統計表

rlmax_2	1	2	3
個數	2	3	1

2. 2 在第二位

$12|34$，$\text{rlmax}_2=1$　$32|41$，$\text{rlmax}_2=2$

$12|43$，$\text{rlmax}_2=2$　$42|13$，$\text{rlmax}_2=1$

$32|14$，$\text{rlmax}_2=1$　$42|31$，$\text{rlmax}_2=2$

表 (十二) 2 在第二位 rlmax_2 統計表

rlmax_2	1	2
個數	3	3

3. 2 在第三位

$132|4$，$\text{rlmax}_2=1$ $342|1$，$\text{rlmax}_2=1$

$142|3$，$\text{rlmax}_2=1$ $412|3$，$\text{rlmax}_2=1$

$312|4$，$\text{rlmax}_2=1$ $432|1$，$\text{rlmax}_2=1$

表（十三）2 在第三位 rlmax_2 統計表

rlmax_2	1
個數	6

4. 2 在第四位

$1342|$，$\text{rlmax}_2=0$ $3412|$，$\text{rlmax}_2=0$

$1432|$，$\text{rlmax}_2=0$ $4132|$，$\text{rlmax}_2=0$

$3142|$，$\text{rlmax}_2=0$ $4312|$，$\text{rlmax}_2=0$

表（十四）2 在第四位 rlmax_2 統計表

rlmax_2	0
個數	6

上述表列可以發現 2 在第一位的統計表，正好是 stirling numbers of the first kind 的第 3 列，而 2 在第二位的統計表，正好是 3 倍的 stirling numbers of the first kind 的第 2 列，而 2 在第三位的統計表，正好是 6 倍的 stirling numbers of the first kind 的第 1 列。而 2 在第四位的統計表是 6 非常顯然。因為 rlmax_2 只可能等於 0，而把 2 擺在第四位，所以個數為 3！。

將各個分段討論 rlmax_2 的個數加總起來，其過程如下：

$\text{rlmax}_2=1$：$1\times2+3\times1+6\times1=11$

$$\Rightarrow \frac{3!}{3!}\times2+\frac{3!}{2!}\times1+\frac{3!}{1!}\times1=11 \Rightarrow \frac{3!}{3!}\times S_{3,1}+\frac{3!}{2!}\times S_{2,1}+\frac{3!}{1!}\times S_{1,1}=S_{4,2}$$

$\text{rlmax}_2=2$：$1\times3+3\times1=6$

$$\Rightarrow \frac{3!}{3!}\times3+\frac{3!}{2!}\times1=6 \Rightarrow \frac{3!}{3!}\times S_{3,2}+\frac{3!}{2!}\times S_{2,2}=S_{4,3}$$

$\text{rlmax}_2=3$：$1\times1=1$

$$\Rightarrow \frac{3!}{3!}\times1=1 \Rightarrow \frac{3!}{3!}\times S_{3,3}=S_{4,4}$$

類似地可以得到一般式，共 n 個數字進行排列：$\text{rlmax}_a=i-1$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1)!}\times S_{n-1,i-1}+\frac{(n-1)!}{(n-2)!}\times S_{n-2,i-1}+\ldots+\frac{(n-1)!}{(i-1)!}\times S_{i-1,i-1}=S_{n,i}$$

此時本研究發現了一些有趣的性質，猜想在 stirling numbers of the first kind 的分佈表上，還存在一個遞迴式：$S_{n,i}=(n-1)!\sum_{k=i-1}^{n-1}\frac{S_{k,i-1}}{k!}$，當此遞迴式存在，就可以說明【定理十】是正確無誤的，因為加起來後的數仍會落在分佈表上，以及 $\text{rlmax}_2=0$ 時，分佈表上第一行的數值一定是 $(k-1)!$，也與 stirling numbers of first kind 的次數分佈表第一行的數值相同。

【定理十一】：$S_{n,i}=(n-1)!\sum_{k=i-1}^{n-1}\frac{S_{k,i-1}}{k!}$，$n,i\geq 2$，$i\leq n$，$n,i\in N$

證明：利用數學歸納法證明

(i) 當 $n=2\Rightarrow i=2$

$\Rightarrow S_{2,2}=S_{1,1}=1$，成立

(ii) 假設 $n=t(t\geq 2,t\in N)$，成立

代表 $S_{t,i}=(t-1)!\sum_{k=i-1}^{t-1}\frac{S_{k,i-1}}{k!}$

(iii) 當 $n=t+1$

$$\begin{aligned}
\text{左式} &= S_{t+1,i}\\
&= S_{t,i-1}+t\times S_{t,i}\\
&= S_{t,i-1}+t!\times\sum_{k=i-1}^{t-1}\frac{S_{k,i-1}}{k!}\\
&= t!\times\sum_{k=i-1}^{t}\frac{S_{k,i-1}}{k!}\\
&= \text{右式}
\end{aligned}$$

因此，$\forall n\geq 2,n\in N$，根據數學歸納法，原式成立。

至此本研究成功的證明出此遞迴式，於是 $\text{rlmax}_a\sim\text{rlmax}$，【定理十】成立。透過【定理十一】就可以說明為什麼給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐到 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場的次數分佈表會是 stirling numbers of the first kind 了。

【定理十二】：給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐到 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，坐錯人數與 rlmax 在 1 的右方切一刀造成相同的次數分佈。

證明：當 $n=8,k=8$，入座順序為 $6-8-1-3-7-5-4-2$，根據【定理八】(若 k 號教授在 1 之前入場，則代表 k 號教授會做到自己的位置，因為此時 1 號教授尚未進場，而當 1 號教授入場時，則會與【定理二】的現象雷同，差在 1 號教授會坐到比 1 大但比 k 小中最大編號位。) 可知它對應的坐法循環為 ${}_{10}(1,7,5,4,2)$，將入座順序計算 rlmax_1 會為 3 7 5 4 2 $\Rightarrow \text{rlmax}_1=4$，可以發現選取到的數字又剛好會是除了 1 以外其餘坐錯的編號，與【定理五】有異曲同工之妙。在 2 與 4 之間缺少的 3 根據【定理八】知道它一定要在 4 號教授之前入場才會做到自己的位置，因此不會被選取到。因此 rlmax_1 會選取到坐法循環除了 1 以外的數字，不難知道一般性坐法循環也會滿足此規則。

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一) 給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授第一個入場坐到 k 號位。

1. 坐法循環為 ${}_n(1,b_2,\ldots\ldots,b_{m-1},b_m)$，其中 $b_2=k$，則 b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。
2. 坐法循環總數為 2^{k-2}。
3. 坐法循環為 ${}_n(1,b_2,\ldots\ldots,b_{m-1},b_m)$，令 $d_i=b_i-b_{i+1}-1$，則方法數為

   $$\#_n(1,b_2,\ldots\ldots,b_{m-1},b_m)=\prod_{i=2}^{m-1}P_{d_i}^{k-b_i+d_i}\times P_{n-k}^{n-1}$$ 。

4. 坐錯人數分佈為 stirling numbers of the first kind，$E_k(X)=1+H_{k-1}$、

   $$\boldsymbol{\sigma}=\sqrt{H_{k-1}+2\sum_{m=2}^{k-1}\frac{H_{m-1}}{m}-(H_{k-1})^2}$$ 。

(二) n 人的圓桌問題，且 1 號教授的一個入場想要坐到 k 號位，

1. 給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐在 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，坐法循環為 ${}_n(b_1, b_2, ..., b_{m-1}, b_m)$，若 k 號教授在 1 號教授之後入場，則如同【定理二】「$b_1 = 1$，$b_2 = k$，b_{i+1} 為在入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小的最大數，反覆操作直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。」。若 k 號教授在 1 號教授之前入場，b_2 為入座順序中 1 號教授之後且編號比 1 大比 k 小的最大編號位，而 b_{i+1} 為入座順序中在 b_i 之後且比 b_i 小之最大數，直到找不到這樣的 b_{i+1} 為止。若 1 號教授在最後一位入場，則坐法循環為 ${}_n(\ )$。
2. 給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐到 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，坐法循環總數為 2^{k-1} 種。
3. 令 rlmax_a 為在排列中，指定一個數字 a，在它的右方切一刀，計算 rlmax (只對其右邊的排列計算) 會與原本的 rlmax 有著相同的次數分佈。
4. $S_{n,i} = (n-1)!\sum_{k=i-1}^{n-1} \frac{S_{k,i-1}}{k!}$，$n,i \ge 2$，$i \le n$，$n,i \in N$
5. 給定 1 個 n 人的圓桌問題，且 1 號教授想要坐到 k 號位，1 號教授不限定在第一個入場，次數分佈表仍與 stirling numbers of the first kind 的次數分佈表相同。

二、討論

其實本篇研究所談的轉圓桌找座位，事實上是一個非常有名的數學問題：B 型停車場問題 (parking function type B)。B 型停車場問題為：在一個有 n 個車位的環狀停車場，車位編號 $(1 \sim n)$ 順時針方向由小到大，每位司機 $(1 \sim n)$ 都有自己想停的車位，且想要的車位可以重複，司機們進入順序為 $(1 \sim n)$，若自己想要的停車位被停時，則以順時針方向找尋最近的車位停車，並探討特定結果，以下舉了其中一項已知研究結果。

令 $(w_1, w_2, ..., w_n)$ 為 $1 \sim n$ 號司機想要的車位的數對，則有多少種想要車位的數對，可以使得 1 號司機停到 1 號位，2 號司機停到 2 號位，……，n 號司機停到 n 號位，而此數列為卡特蘭數 (Catalan numbers)。

本篇研究的題目可想成 1 號司機想停到 k 號停車格，而其餘司機想停到自己編號的停車格，若車位被停時，則以逆時針找尋最近的空位的一種特定情況的停車場問題。期盼往後繼續研究，有朝一日能將此作品與 B 型停車場問題結合，並探討更多的組合性質。

本篇研究在【定理十一】發現在 stirling numbers of the first kind 分佈表上遞迴式：$S_{n,i} = (n-1)!\sum_{k=i-1}^{n-1}\frac{S_{k,i-1}}{k!}$，本研究成功利用數學歸納法證明出這個遞迴式是完全正確的。但可惜在本篇研究沒有給出一個直觀的組合解釋，直接說明此遞迴式的存在。在往後的研究路上，本篇研究會試著對此遞迴式給出直觀的組合解釋。

肆、結論與應用

一、結論

本篇研究主要探討了如何從入座順序找出坐法循環、坐法循環方法數以及坐錯人數的分佈為何，並討論了 1 號教授為第一個入場，以及 1 號教授不限定為第一個入場，共兩種狀況，並發現這兩種情況的坐錯人數分佈，都會與現今已知的 stirling numbers of the first kind 有著相同的次數分佈，並證明之。

二、未來展望

(一) 未來主要希望能與討論所提及的 B 型停車場問題 (parking function type B) 結合一起，研究出更多新的組合性質。

(二) 圓桌上 n 個號碼牌，以圖論的角度想就是 n 個點的 *cycle*，所以本篇研究是在探討在 *cycle* 上的錯排問題，未來希望朝著不同有向圖探討錯排問題。

伍、參考文獻

[1] 陳彥宏、蘇慧珍 (2023) 級數。載於陳彥宏 (主編)，普通型高中數學 2 教學講義 (頁 113)。臺北市：三民書房股份有限公司。

[2] 溫顥然、張志傑 (2015 年)。乾坤大挪移。「2018 年臺灣國際科學展覽會」。

[3] 鄭惟厚等 (2023)。完全相異物的直線排列。載於鄭惟厚 (主編)，普通型高中數學2 (頁177-178)。臺北市：三民書房股份有限公司。

[4] Marilena Barnabei ,＆ Frederique Bassino ,＆ Valerie Berthe(2018). Polyominoes, permutominoes and permutations . Enrica Duchi，4.4.1 89-90

[5] Vital Sine (Producer) , Vital Sine (Director) (2022) . What are Stirling Numbers of the 1st Kind? [Discrete Mathematics] (video) . Country of origin：Youtube

【評語】010053

本作品是一個計數問題，利用聰明地分析一個組合問題，結果相當完整，而且提出一個新的統計量相當有創意。未來要怎麼發展要再想一想，應該是有一些更深層的連結可以找到才對。