# 2024年臺灣國際科學展覽會
# 優勝作品專輯

作品編號 010048

參展科別 數學

作品名稱 排排相扣—2341和3421 – avoiding 交替排列的組合關係探討

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學
指導教師 徐祥峻、洪允東
作者姓名 韋載祐

關鍵詞 三維卡特蘭數、交替排列、雙射變換

# 作者簡介

我是韋載祐，就讀師大附中高三科學班。喜歡各式各樣的音樂，之前也參加過管樂隊，在升上高三沒有社團課之後變成在放學後跟班上的同學去操場草地踢足球到天黑。我從國小開始就有做科展，這次是從高二開始進行交替排列的相關研究，遇到了許多困難，我從其中不斷練習腦力激盪，也體會到堅持的價值。

# 摘要

abcd – avoiding 交替排列中的任一偶數項都要大於相鄰之奇數項，且其中任意四項皆不能有「abcd」的大小關係（「abcd」為 1～4 的一種排序），而偶數長度的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列皆為三維卡特蘭數的組合表徵。

本研究欲探討這兩種交替排列的組合關係以及可能的互相變換方法，我們發現兩種排列中「數字 1 在各項出現次數」有相同的分佈。我們推測可以透過移動數字 1 的位置在兩種排列中分別建立不同排列之間的對應的關係，並找到了兩種排列中部分的「數字 1 在第 $(2k-1)$ 項」排列和全部的「數字 1 在第 $(2k+1)$ 項」排列互相變換的方法。利用這種排列關係，我們還證明了「數字 1 在第 $(2n-1)$ 項」的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列具有一一對應的雙射變換法。

# Abstract

In abcd – avoiding alternating permutations, any even-indexed element must be greater than its adjacent odd-indexed element, and no four elements within the permutation can have the same relative order as "abcd" (where "abcd" represents one of the permutations of 1 to 4). Interestingly, alternating permutations of even length in the forms 2341 and 3421 represent combinations of 3-dimensional Catalan numbers.

This study aims to explore the combinatorial relationships between these two types of alternating permutations and possible transformations between them. We have found that the distribution of the occurrences of the number 1 in each position is the same in both types of permutations. Therefore, in both types of permutations, we hypothesize that by shifting the position of the number 1 in the permutation. Then we can establish a correspondence and discover methods for interchanging part of "number 1 in the $(2k-1)$-th position" permutations to all "number 1 in the $(2k+1)$-th position" permutations. Using these permutation relationships mentioned above, we have demonstrated bijective transformations for the 2341 and 3421-avoiding alternating permutations with number 1 in the $(2n-1)$-th position.

# 壹、前言

## 一、研究動機

某次數學課，老師提及到一個神奇的數列——卡特蘭數。卡特蘭數有上百種不同的組合表徵。其中老師提到了在 1 ~ $n$ 排列中剔除（avoiding）排列中任意 3 項出現123大小關係的情況，剩下的排列數也是卡特蘭數，換成其他 5 種的任意 3 項大小關係也成立。

而排除任意 4 項大小關係的交替排列有找到其中幾種的數量是另一種有遞迴關係的三維卡特蘭數，我們決定研究這些 avoiding 交替排列的組合關係。

## 二、研究目的

(一) 觀察偶數長度的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列，尋找共同規律或性質。

(二) 分別在 2341 – avoiding 交替排列和 3421 – avoiding 交替排列中，探討「數字 1 位置」不同的交替排列之間的可變換條件和變換方法。

(三) 探討兩種交替排列的組合關係，推測兩者之間一一對應的變換方法。

# 貳、研究方法與過程

## 一、定義：

(一) 三維卡特蘭數（3 – dimentional Catalan numbers）：

根據參考資料四，三維卡特蘭數 $C_n^{(3)}$ 的一般式為：

$$C_n^{(3)} = \frac{2 \cdot (3n)!}{n! \cdot (n+1)! \cdot (n+2)!}$$

(二) alternating permutations（以下稱為交替排列）：

在 1~$2n$ 的交替排列 $\langle \pi_{2n} \rangle$（以下簡寫為 $\pi$）中，規定每兩個相鄰項中偶數項都大於奇數項，即 $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \cdots > \pi_{2n-1} < \pi_{2n}$ 。

(三) abcd – avoiding ：(a,b,c,d 皆為 1～4 的數字)

在 1~$2n$ 的 abcd – avoiding 排列 $\langle \pi_{2n} \rangle$ 中，對於其中任意四項（不一定連續）由左到右皆不能有和「abcd」相同的大小順序排列。以 1234 – avoiding 為例，其中任意由左到右四項 $\pi_p\pi_q\pi_r\pi_s$ $(p<q<r<s)$ 皆不符合 $\pi_p<\pi_q<\pi_r<\pi_s$ 。

我們將大小關係為「abcd」的數字組稱為「abcd」的 pattern 。

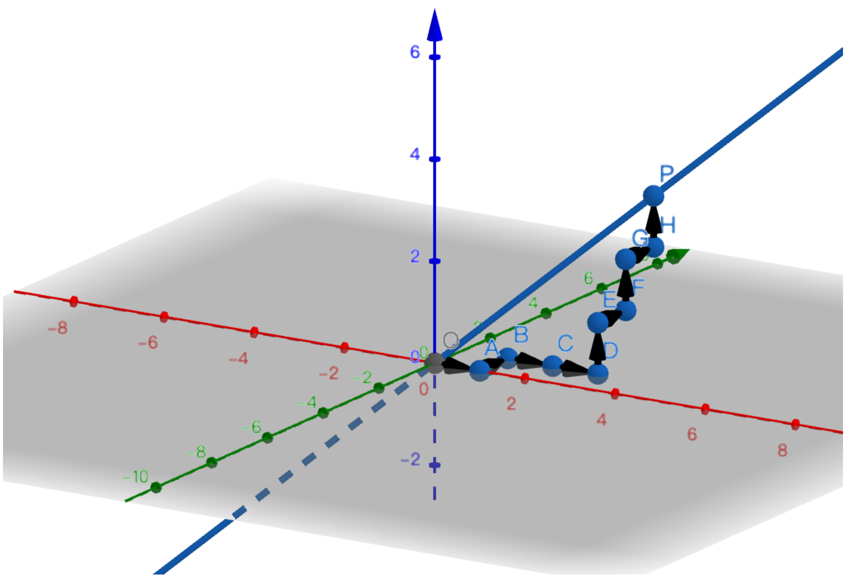
我們之後也會把「abcd」換作 $\alpha$ 表示，即 $\alpha$ – avoiding 。

二、文獻探討：

(一) 對於三維卡特蘭數 $C_n^{(3)}$ 的一種定義為：

在三維座標空間中從 (0,0,0) 出發，每一步可以由 (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) 選擇其中一種向量進行移動，在保持位置 $(x,y,z)$ 滿足 $x\geq y\geq z$ 的情況下，走到 $(n,n,n)$ 的路徑數量。

這種路徑和一般卡特蘭數中「一路領先」的組合解釋類似。




圖一：三維座標空間中其中一條 (2,2,2) 一路領先路徑

（由 3D GeoGebra 繪製）

(二) 楊表（Young tableaux，以下皆稱為楊表）：對於每一種從原點 (0,0,0) 走到 $(n,n,n)$ 的三維「一路領先」路徑，都可以用一個 $(n,n,n)$ （$n$ 行 3 列）的楊表表示，方法如下：

對於第 $k$ 步，如果是走 (1,0,0) ，則將 $k$ 寫在楊表第 1 列中最左邊的空白格子；如果是 (0,1,0) 則寫在第 2 列，如果是 (0,0,1) 則寫在第 3 列。

（每格只寫一個數字，同一列的數字由左往右寫）

某個走到 (3,3,3) 路徑的楊表表示法如圖二：

$$\begin{array}{ccccccc} (0,0,0) & \to (1,0,0) & \to (1,1,0) & \to (2,1,0) & \to (2,1,1) & \to (2,2,1) & \to (2,2,2) \\ & +(1,0,0) & +(0,1,0) & +(1,0,0) & +(0,0,1) & +(0,1,0) & +(0,0,1) \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 5 |
| 4 | 6 |

圖二：一路領先路徑表示法（擷取自參考資料四）

(三) 長度為 $2n$ 的 abcd – avoiding 交替排列數量表：

如表一，在參考資料四中有利用電腦計算得出的 24 種 abcd – avoiding 排列數量並整理成以下 9 類，其中第 1 類和三維卡特蘭數相等。

表一：abcd – avoiding 交替排列數量表

| Patterns | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1234, (1243, 2134), (1432, 3214), 2143, (2341, 4123), (3421, 4312) | 1 | 5 | 42 | 462 | 6006 | 87516 |
| 3142, (3241, 4132) | 1 | 5 | 42 | 444 | 5337 | 69657 |
| (1423, 2314), 2413 | 1 | 4 | 28 | 260 | 2844 | 34564 |
| 3412 | 1 | 4 | 29 | 290 | 3532 | 49100 |
| 1324 | 1 | 4 | 29 | 292 | 3620 | 51866 |
| (1342, 3124) | 1 | 5 | 42 | 453 | 5651 | 77498 |
| (2431, 4213) | 1 | 5 | 42 | 454 | 5680 | 78129 |
| 4231 | 1 | 5 | 42 | 462 | 6070 | 90686 |
| 4321 | 1 | 5 | 61 | 744 | 10329 | 157586 |

(四) 在參考資料四中，作者構造 $(n,n,n)$ 楊表和 2143 – avoiding 交替排列的 generating trees 並證明兩者等價，進而得出兩者的數量相同：

1. $(n,n,n)$ 楊表的生成樹：

(1) 子代：對於一個 $(n,n,n)$ 楊表 $S$，其子代為 $(n+1)\times 3$ 的楊表，且滿足：將第 $(n+1)$ 行刪除後的楊表和 $S$ 同構。

(2) 標籤：對於每個 $(n,n,n)$ 楊表 $S$，定義其標籤 $(a,b)$ 為

$$(a,b)=\big(3n+1-S(2,n),3n+1-S(1,n)\big)$$

其中 $S(2,n)$ 和 $S(1,n)$ 為第 $n$ 行第 2 列，和第 $n$ 行第 1 列格子中的數字。

(3) 作者證明對於一個標籤為 $(a,b)$ 的 $(n,n,n)$ 楊表，其子代的標籤 $(x,y)$ 必滿足

$$(a,b)\mapsto\{(x,y)|2\leq x\leq a+1,\ x+1\leq y\leq b+2\}$$

且對於每個符合條件的標籤 $(x,y)$ 都恰有一個對應的子代，即這些標籤數字在範圍內呈連續且不重複的分佈，可藉由用上述的範圍表示楊表的生成樹，即子代的衍生規則。

2. 2143 – avoiding 交替排列的生成樹：

(1) 插入最後一項：對於 $1\sim 2n$ 數列 $\omega=\omega_1\omega_2\ldots\omega_{2n}$ 在最右邊加上一個數字 $k$ $(1\leq k\leq 2n+1)$ 並依以下規則將 $\omega_i$ 變成 $\omega_i'$：

$$\omega_i'=\begin{cases}\omega_i,\ \ \omega_i<k\\ \omega_i+1,\ \ \omega_i\geq k\end{cases}$$

該過程我們以 $\omega\to k$ 表示。

(2) Active values：對於一個長度為 $2n$ 的 2143 – avoiding 交替排列 $\omega$，若 $\omega\to k$ 也滿足 2143 – avoiding，則我們稱 $k$ 為 $\omega$ 的 active value。

(3) 子代：長度為 $2n$ 的 2143 – avoiding 交替排列 $\omega$ 的子代為長度為 $(2n+2)$ 的 2143 – avoiding 交替排列，且將最後兩項 $\omega_{2n+1},\omega_{2n+2}$ 去除後與 $\omega$ 同構。

(4) 標籤：一個長度為 $2n$ 的 2143 – avoiding 交替排列 $\omega$ 的標籤為 $(a,b)$，其中 $a=\omega_{2n-1}$，$b$ 是 $\omega$ 的 active values 的個數。

(5) 作者藉由 2143 – avoiding 和 alternating 的性質，利用反證法得出對於標籤為 $(a,b)$ 的 2143 – avoiding 交替排列，其子代的標籤 $(x,y)$ 必滿足

$$(a,b) \mapsto \{(x,y) | 1 \le x \le a+1,\ x+2 \le y \le b+2\}$$

且對於每個符合條件的標籤 $(x,y)$ 都恰有一個對應的子代。

也可藉由用上述的範圍表示楊表的生成樹。

3. 生成樹的等價證明：兩個 generating trees 分別為

(1)根為(2,3), $(a,b) \mapsto \{(x,y) | 2 \le x \le a+1,\ x+1 \le y \le b+2\}$

(2)根為(1,3), $(a,b) \mapsto \{(x,y) | 1 \le x \le a+1,\ x+2 \le y \le b+2\}$

第一個樹中每一個標籤 $(a,b)$ 都可對應到第二個樹的一個標籤$(a-1,b)$，所以兩個生成樹同構，由此可證明兩者的數量相同。

在其他的文獻中，利用類似的構造生成樹方法，以及集合的元素個數對應，證明了表一中第一類的交替排列數量能對應到三維卡特蘭數。但不容易看出個別排列之間的對應關係，所以我們想觀察其中兩種交替排列之間的個別排列對應關係。

三、2341 和 3421 – avoiding 交替排列觀察：如表二至表五，我們觀察長度為 4, 6, 8, 10 的交替排列：以橫項為第幾項，縱項為數字數值，統計每一項中各個數值出現個次數。

如表二，長度為 4 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列完全相同，有下列 5 個：

1324, 1423, 2314, 2413, 3412

其中數字 3 在第 2 項的排列有 2 個（1324, 2314)，所以「數字 3」和「第 2 項」的那一格為 2，也就是數字 3 出現在第 2 項的次數。

表二：長度為 4 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中各項數字分佈

| | 第1項 | 第2項 | 第3項 | 第4項 |
|---|---|---|---|---|
| 數字1 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 數字2 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 數字3 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 數字4 | 0 | 3 | 0 | 2 |

表三：長度為 6 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中各項數字分佈

| | 第1項 | 第2項 | 第3項 | 第4項 | 第5項 | 第6項 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 數字1 | 16 | 0 | 16 | 0 | 10 | 0 |
| 數字2 | 8 | 0 | 16 | 0 | 16 | 2 |
| 數字3 | 6 | 4 | 8 | 6 | 12 | 6 |
| 數字4 | 7 | 6 | 2 | 13 | 4 | 10 |
| 數字5 | 5 | 11 | 0 | 14 | 0 | 12 |
| 數字6 | 0 | 21 | 0 | 9 | 0 | 12 |

| | 第1項 | 第2項 | 第3項 | 第4項 | 第5項 | 第6項 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 數字1 | 16 | 0 | 16 | 0 | 10 | 0 |
| 數字2 | 8 | 0 | 16 | 0 | 16 | 2 |
| 數字3 | 6 | 4 | 8 | 6 | 12 | 6 |
| 數字4 | 7 | 6 | 2 | 13 | 4 | 10 |
| 數字5 | 5 | 11 | 0 | 14 | 0 | 12 |
| 數字6 | 0 | 21 | 0 | 9 | 0 | 12 |

表四：長度為 8 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中各項數字分佈

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 168 | 0 | 168 | 0 | 91 | 0 | 35 | 0 |
| 2 | 77 | 0 | 138 | 0 | 152 | 0 | 90 | 5 |
| 3 | 40 | 32 | 66 | 32 | 127 | 20 | 125 | 20 |
| 4 | 36 | 24 | 49 | 64 | 66 | 62 | 116 | 45 |
| 5 | 45 | 35 | 31 | 81 | 22 | 102 | 72 | 74 |
| 6 | 54 | 58 | 10 | 99 | 4 | 115 | 24 | 98 |
| 7 | 42 | 103 | 0 | 109 | 0 | 98 | 0 | 110 |
| 8 | 0 | 210 | 0 | 77 | 0 | 65 | 0 | 110 |

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 168 | 0 | 168 | 0 | 91 | 0 | 35 | 0 |
| 2 | 168 | 0 | 77 | 0 | 122 | 0 | 90 | 5 |
| 3 | 91 | 32 | 122 | 0 | 72 | 0 | 125 | 20 |
| 4 | 30 | 80 | 75 | 40 | 76 | 0 | 116 | 45 |
| 5 | 5 | 82 | 20 | 98 | 69 | 42 | 72 | 74 |
| 6 | 0 | 66 | 0 | 130 | 32 | 112 | 24 | 98 |
| 7 | 0 | 80 | 0 | 118 | 0 | 154 | 0 | 110 |
| 8 | 0 | 122 | 0 | 76 | 0 | 154 | 0 | 110 |

表五：長度為 10 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中各項數字分佈

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2112 | 0 | 2112 | 0 | 1200 | 0 | 456 | 0 | 126 | 0 |
| 2 | 912 | 0 | 1656 | 0 | 1832 | 0 | 1144 | 0 | 448 | 14 |
| 3 | 464 | 336 | 710 | 336 | 1418 | 182 | 1538 | 70 | 882 | 70 |
| 4 | 354 | 231 | 444 | 568 | 781 | 517 | 1394 | 285 | 1236 | 196 |
| 5 | 310 | 252 | 388 | 549 | 431 | 812 | 902 | 630 | 1330 | 402 |
| 6 | 348 | 260 | 366 | 652 | 232 | 975 | 416 | 985 | 1104 | 668 |
| 7 | 472 | 418 | 246 | 807 | 92 | 1035 | 132 | 1200 | 660 | 944 |
| 8 | 572 | 705 | 84 | 1023 | 20 | 1003 | 24 | 1191 | 220 | 1164 |
| 9 | 462 | 1230 | 0 | 1201 | 0 | 857 | 0 | 982 | 0 | 1274 |
| 10 | 0 | 2574 | 0 | 870 | 0 | 625 | 0 | 663 | 0 | 1274 |

| | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2112 | 0 | 2112 | 0 | 1200 | 0 | 456 | 0 | 126 | 0 |
| 2 | 2112 | 0 | 912 | 0 | 1488 | 0 | 1032 | 0 | 448 | 14 |
| 3 | 1200 | 336 | 1488 | 0 | 800 | 0 | 1230 | 0 | 882 | 70 |
| 4 | 456 | 840 | 1032 | 385 | 929 | 0 | 932 | 0 | 1236 | 196 |
| 5 | 112 | 899 | 392 | 966 | 913 | 280 | 712 | 0 | 1330 | 402 |
| 6 | 14 | 724 | 70 | 1180 | 526 | 840 | 712 | 168 | 1104 | 668 |
| 7 | 0 | 542 | 0 | 1046 | 150 | 1356 | 624 | 684 | 660 | 944 |
| 8 | 0 | 500 | 0 | 892 | 0 | 1512 | 308 | 1410 | 220 | 1164 |
| 9 | 0 | 781 | 0 | 829 | 0 | 1250 | 0 | 1872 | 0 | 1274 |
| 10 | 0 | 1384 | 0 | 708 | 0 | 768 | 0 | 1872 | 0 | 1274 |

我們在這些數據和排列資料中發現一些共同的數字分佈規律。

(一) 以數字 1 的位置對排列進行分組，各組的交替排列數分佈相同。

(二) 每個「1 的位置」相同的兩種交替排列中，再以最後兩項 $\pi_{2n-1}\pi_{2n}$ 的數值進行第二次分組，各組的交替排列數分佈也會相同。

(三) 在「1 的位置」和「倒數第二項 $\pi_{2n-1}$」相同的 2341 – avoiding 交替排列中，再以「最後一項 $\pi_{2n}$ 數值」進行分組，每一組的交替排列數相同。在 3421 – avoiding 交替排列中也有一樣的情況。

(四) 「數字 1 在第 1 項」和「數字 1 在第 3 項」的兩種交替排列數都相同。

綜合(一)～(三)，我們推測可以依據「數字 1 的位置」和「排列中最後兩項 $\pi_{2n-1}\pi_{2n}$ 的值」，把兩種 avoiding 交替排列各自分配成相同的分組情形，並且可能存在變換方法可以在不移動「數字 1」和「排列中最後兩項數字」的前提下完成變換。

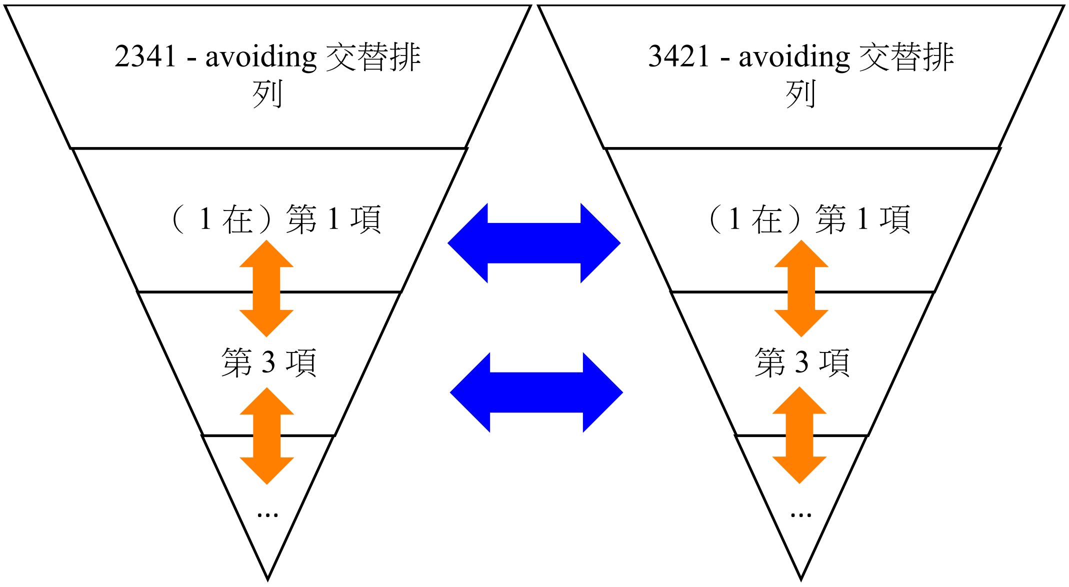
四、2341 和 3421 – avoiding 交替排列的變換結構推測：因為排列數量龐大，利用上述觀察得到的可能相似結構，我們推測可以用以下兩種方法將兩種交替排列分成數量較少的若干組，探討各個對應組的兩組間變換，可以減少需要探討的變換排列數量。

(一) 以「數字 1 的位置」和「最後兩項 $\pi_{2n-1}\pi_{2n}$ 之數值」分組，探討各個對應組中的兩組間變換：

因為其餘數字的組成複雜，未能再找到進一步的分類方式，沒有找到此分組方法下能適用於多數交替排列的變換方式。

(二) 我們發現「數字 1 的位置」不同的排列中，存在相似的數字結構，我們推測可以利用「數字 1 的位置變換」構造出「數字 1 的位置」不同的排列之間的排列變換，除了能利用這種變換關係讓需要探討變換的排列變少，還可以利用「符合條件下數字 1 的移動上限」性質，對「數字 1 的位置」相同的排列進行分類，有利於探討兩種交替排列之間的變換。

除此之外，我們也可以先將所有排列皆對應到「數字 1 在特定位置」的排列，再探討這種情況下排列的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列的雙射變換關係。




圖二：2341 和 3421 – avoiding 交替排列的對應關係猜測示意圖

五、在觀察到的規律第(三)點中，我們發現在「1 的位置」和「倒數第二項 $\pi_{2n-1}$」相同的 2341 – avoiding 交替排列中，再以「最後一項 $\pi_{2n}$ 數值」進行分組，每一組的交替排列數相同，在 3421 – avoiding 交替排列中也有一樣的情況。這是可以證明的。

性質 1.1：若 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 滿足 $\pi_{2n-1} < \pi_{2n} < 2n$，則存在一個對應的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足 $\pi'_{2n} = \pi_{2n} + 1$。反之，若 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足 $\pi'_{2n-1} + 1 < \pi'_{2n}$，則 $\pi'$ 也能對應到一個 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 滿足 $\pi_{2n} = \pi'_{2n} - 1$。

證明：我們構造一個變換法 $\pi \leftrightarrow \pi'$ 如下：

因為 $\pi_{2n-1} < \pi_{2n}$，且 $\pi_{2n} < 2n$ 代表 $\pi_{2n}$ 不是排列中最大的數字。所以在 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2n-2}$ 之中必存在一項 $\pi_a$ 滿足 $\pi_a = \pi_{2n} + 1$，將 $\pi_a$ 和 $\pi_{2n}$ 互換即可得 $\pi'$。

我們考慮 $\pi_a$ 和 $\pi_{2n}$ 以外的其他任意一項 $\pi_b$ 和 $\pi_a$ 變換前後的大小關係：

$(b = 1,2, \dots, a-1, a+1, \dots, 2n-1)$

1. 若變換前 $\pi_b > \pi_a$ ，會有 $\pi_b > \pi_a > \pi_{2n}$，變換後

$\pi_b' = \pi_b > \pi_a = \pi_{2n}' > \pi_{2n} = \pi_a'$ ，仍為 $\pi_b' > \pi_a'$ 。

2. 若變換前 $\pi_b < \pi_a$ ，又 $\pi_b \neq \pi_{2n} = \pi_a - 1$，所以 $\pi_b < \pi_a - 1 < \pi_{2n}$ ，

所以 $\pi_b < \pi_{2n} < \pi_a$ ，變換後 $\pi_b' = \pi_b < \pi_{2n} = \pi_a' < \pi_a = \pi_{2n}'$ ，仍為 $\pi_b' < \pi_a'$ 。

所以 $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{a-1}, \pi_{a+1}, \dots, \pi_{2n-1}$，即所有的 $\pi_b$ ，和 $\pi_a$ 的大小關係在變換前後不變，又 $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_{a-1}, \pi_{a+1}, \dots, \pi_{2n-1}$ 的數值在變換前後不變，任兩項的大小關係也不變，所以 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{2n-1}$在變換成 $\pi_1', \pi_2', \dots, \pi_{2n-1}'$ 之後任兩項的大小關係皆不變。

又因為 $\pi_1 \sim \pi_{2n-1}$ 滿足 2341 – avoiding，所以變換後 $\pi_1' \sim \pi_{2n-1}'$ 也滿足 2341 – avoiding。

假設 $\pi'$ 中存在「2341」的 pattern ，由上所述可知該 pattern 必定包含 $\pi_{2n}'$，否則會和上述結果矛盾。所以我們可以令該 pattern 為 $\pi_i'\pi_j'\pi_k'\pi_{2n}'$ $(i < j < k < 2n, \pi_{2n}' < \pi_i' < \pi_j' < \pi_k')$，又 $\pi_{2n-1}' < \pi_{2n}' < \pi_k' < \pi_j' < \pi_i'$，所以 $\pi_{2n-1}'$ 不是該 pattern 的其中一項。

又 $\pi_{2n} = \pi_a' < \pi_{2n}' < \pi_k' = \pi_k$ ，所以在變換前有 $\pi_{2n-1} < \pi_{2n} < \pi_k < \pi_j < \pi_i$ ，此時我們可以找到原排列 $\pi$ 有 $\pi_i\pi_j\pi_k\pi_{2n-1}$ 為「2341」的 pattern，與上述結果矛盾。

所以 $\pi'$ 滿足 2341 – avoiding。

反之，若 $\pi'$ 滿足 $\pi_{2n-1}' + 1 < \pi_{2n}'$ ，$\pi_{2n}' - 1 > \pi_{2n-1}'$ ，在 $\pi_1', \pi_2', \dots, \pi_{2n-2}'$ 之中必存在一項 $\pi_a'$ 滿足 $\pi_a' = \pi_{2n}' - 1$ ，將 $\pi_a'$ 和 $\pi_{2n}'$ 互換即可得 $\pi$ ，和上述同理可知 $\pi$ 滿足 2341 – avoiding，且 $\pi_{2n-1} = \pi_{2n-1}' < \pi_{2n}' - 1 = \pi_{2n}$。

性質 1.2：若 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 滿足 $\pi_{2n-1} < \pi_{2n} < 2n$，則存在一個對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足 $\pi_{2n}' = \pi_{2n} + 1$ 。反之，若 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足 $\pi_{2n-1}' + 1 < \pi_{2n}'$ ，則 $\pi'$ 也能對應到一個 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 滿足 $\pi_{2n} = \pi_{2n}' - 1$ 。

和性質 1.1 同理可證明之。

利用性質 1.1 的對應關係，在「1 的位置」和「倒數第二項 $\pi_{2n-1}$」相同的 2341 – avoiding 交替排列中，滿足「$\pi_{2n} = \pi_{2n-1} + 1$」的排列都能一一對應到「$\pi_{2n} = \pi_{2n-1} + 2$」的排列，所以這兩種排列數量相同，以此類推可以得到「$\pi_{2n} = \pi_{2n-1} + k$」對於每一個 $k$ 值的排列數量都相同，換作是 3421 – avoiding 交替排列也有一樣的結果，也就印證了觀察到的規律(三)。

基於上述結果，在只觀察 2341 和 3421 – avoiding 交替排列的前提下，我們可以只處理 $\pi_{2n} = 2n$ 的交替排列，而其他 $\pi_{2n}$ 值的排列可以用性質 1.1 提到的變換法處理。

六、在我們發現規律(四)：「數字 1 在第 1 項」和「數字 1 在第 3 項」的兩種交替排列數都相同之後，我們發現 2341 和 3421 – avoiding 中的這兩種排列各自有比較簡單的變換方式，也證實了排列數相等。

| |
|---|
| 引理 2.1：若一個長度為 6 以上的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1 = 1$，則存在一個對應的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第三項數字 $\pi'_3 = 1,\ \pi'_k = \pi_k\ (k \geq 5)$。反之亦然。 |

證明：我們可以構造只移動前 4 項的變換法。

$\Longrightarrow$：我們構造一個變換法 $\pi \rightarrow \pi'$ 如下：

A.若第 3 項大於第 5 項 $(\pi_3 > \pi_5)$，且第 2 項小於第 4 項 $(\pi_2 < \pi_4)$，則將前四項 $\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4$ 變換為 $\pi_2\pi_4\pi_1\pi_3$。

B.若不符合上述其中一條件，則將 $\pi_1$ 和 $\pi_3$ 互換即可。

例 1：15462…，因為 $4 > 2,\ 5 < 6$ 屬於 A.情況 → 56142…。

例 2：17265…，因為 $2 < 5$ 屬於 B.情況 → 27165…。

例 3：16452…，因為 $6 > 5$ 屬於 B.情況 → 46152…。

數字 1 確定被移動到第三項（$\pi'_3 = 1$），接下來我們證明 $\pi'$ 滿足 2341 – avoiding：

1. 若 $\pi_3 = \pi_1' > \pi_5$ ，假設 $\pi'$ 中存在2341的 pattern，可以再分成以下兩種情況討論：

(1) 若 $\pi_2 > \pi_4$ ，則是 A.的情況，互換結果為 $\pi_1' = \pi_3,\ \pi_2' = \pi_2,\ \pi_4' = \pi_4,$

$\pi_2' > \pi_4' > \pi_1'$。所以 2341 的 pattern 不可能為$\pi_1'\pi_2'\pi_4'\pi_i'\ (5 \le i)$，所以我們可以令 2341 的 pattern 為 $\pi_1'\pi_4'\pi_i'\pi_j'\ (5 \le i < j)$，所以 $\pi_j' < \pi_1' < \pi_4' < \pi_i'$，所以 $\pi_j < \pi_3 < \pi_4 < \pi_i$，所以排列 $\pi$ 中存在 $\pi_3\pi_4\pi_i\pi_j$ 為 2341 的 pattern，矛盾。

(2) 若 $\pi_2 < \pi_4$ ，則是 B.的情況，互換結果為 $\pi_1' = \pi_2,\ \pi_2' = \pi_4,\ \pi_4' = \pi_3,\ \pi_2' > \pi_1' > \pi_4'$。所以 2341 的 pattern 不可能為$\pi_1'\pi_2'\pi_4'\pi_i'\ (5 \le i)$，所以我們可以令 2341 的 pattern 為 $\pi_1'\pi_2'\pi_i'\pi_j'\ (5 \le i < j)$，所以 $\pi_j' < \pi_1' < \pi_2' < \pi_i'$，所以 $\pi_j < \pi_2 < \pi_4 < \pi_i$，所以排列 $\pi$ 中存在 $\pi_2\pi_4\pi_i\pi_j$ 為 2341 的 pattern，矛盾。

2. 若 $\pi_3 < \pi_5$ ，無論變換結果，假設 $\pi'$ 中存在2341的 pattern，因為 $\pi'$ 中前5項無法形成2341的 pattern，代表在第6項之後存在一項 $\pi_k'$ 滿足 $\pi_3 = \pi_1' > \pi_k'\ (k \ge 6)$ ，所以 $\pi_3 > \pi_k$，又因為 $\pi$ 是交替排列所以 $\pi_5 < \pi_6$，所以原排列 $\pi$ 中存在 $\pi_3\pi_5\pi_6\pi_k$ 為2341的 pattern，矛盾。

3. 綜上所述 $\pi'$ 滿足 2341 – avoiding。

$\Longleftarrow$：我們構造一個變換法 $\pi' \to \pi$ 如下：

A. 若第 1 項大於第 4 項 $(\pi_1' > \pi_4')$ ，則將前四項 $\pi_1'\pi_2'\pi_3'\pi_4'$ 變換為 $\pi_3'\pi_1'\pi_4'\pi_2'$ 。

B. 若第 1 項小於第 4 項 $(\pi_1' < \pi_4')$ ，則將 $\pi_1'$ 和 $\pi_3'$ 互換即可。

例 1：56142…，因為 $5 > 2,\ 5 > 4$ 屬於 A. 情況 → 15462… 。

例 2：27165…，因為 $2 < 6$ 屬於 B. 情況 → 17265…。

例 3：46152…，因為 $4 < 5$ 屬於 B. 情況 → 16452…。

和證明「$\Longrightarrow$」同理，可得知 $\pi$ 滿足 2341 – avoiding。證畢。

引理 2.2：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n}=2n$ 的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1=1$ ，則存在一個對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第三項數字 $\pi'_3=1,\ \pi'_k=\pi_k\ (k\geq 5)$。反之亦然。

證明：將第 1 項和第 3 項互換即可完成 $\pi\leftrightarrow\pi'$。

$\Longrightarrow$：假設 $\pi'$ 中存在 3421 的 pattern。若該 pattern 不包含 $\pi'_1$ ，則排列 $\pi$ 也會有相同的 pattern，矛盾，所以 pattern 包含 $\pi'_1$，又 $\pi'_1$ 只有可能是 3421 的 pattern 的「3」，

又 $\pi'_1=\pi_3<\pi_2=\pi'_2$，$\pi'_1=\pi_3<\pi_4=\pi'_4$，所以必存在兩項 $\pi'_i\pi'_j\ (i\geq 5)$

滿足 $\pi'_1>\pi'_i>\pi'_j$，所以 $\pi_4>\pi_3>\pi_i>\pi_j$，所以排列 $\pi$ 中存在 $\pi_3\pi_4\pi_i\pi_j$ 為 3421 的 pattern，矛盾。所以 $\pi'$ 滿足 3421 – avoiding。

$\Longleftarrow$：首先證明 $\pi_3<\pi_4$ ：若 $\pi_3>\pi_4$ ，即 $\pi'_1>\pi'_4$ ，則 $\pi'_2>\pi'_1>\pi'_4>\pi'_5$ ，則 $\pi'$ 存在 $\pi'_2\pi'_1\pi'_4\pi'_5$ 為 3421 的 pattern ，矛盾。所以 $\pi_3<\pi_4$ 。

假設 $\pi$ 中存在 3421 的 pattern。若該 pattern 不包含 $\pi_3$ ，則排列 $\pi'$ 也會有相同的 pattern，矛盾。所以 pattern 包含 $\pi_3$，又 $\pi_1=1,\ \pi_2>\pi_3$，所以 $\pi_3$ 只有可能是 3421 的 pattern 的「3」，又 $\pi_3<\pi_4$，所以必存在兩項 $\pi_i\pi_j\ (i\geq 5)$ 滿足 $\pi_3>\pi_i>\pi_j$，所以 $\pi'_4>\pi'_3>\pi'_i>\pi'_j$，所以排列 $\pi'$ 中存在 $\pi'_3\pi'_4\pi'_i\pi'_j$ 為 3421 的 pattern，矛盾。

所以 $\pi$ 滿足 3421 – avoiding。證畢。

七、我們發現兩種 avoiding 的排列中，數字 1 的位置越往後存在的排列數會越少。我們發現存在廣義的變換方式將部分的「數字 1 在第 $(2k-1)$ 項」和全部的「數字 1 在第 $(2k+1)$ 項」互相變換。我們先從比較簡單的「1 在第 $(2k+1)$ 項」變換到「1 在第 $(2k-1)$ 項」開始。

| |
|---|
| 引理 3.1.1：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 $2341 -$ avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi_{2k+1} = 1\ (k \geq 2)$ ，則存在一個對應的 $2341 -$ avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi'_{2k-1} = 1$ 。 |

證明：我們構造變換法 $\pi \to \pi'$ 如下：

A. 若 $\pi_{2k-1} > \pi_{2k+2}$，則將 $\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+1}\pi_{2k+2}$ 變換成 $\pi_{2k+1}\pi_{2k-1}\pi_{2k+2}\pi_{2k}$。

例如： …56142… → …15462… 。

B. 若 $\pi_{2k-1} > \pi_{2k+2}$ ，則將 $\pi_{2k-1}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換即可 。

例如：…27165… → …17265… ， …46152… → …16452…。

和證明引理 2.1 過程相似，若 $\pi'$ 中存在「2341」pattern，原排列 $\pi$ 也會存在「2341」的 pattern，所以 $\pi'$ 滿足 $2341 -$ avoiding。

| |
|---|
| 引理 3.1.2：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 $3421 -$ avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi_{2k+1} = 1\ (k \geq 2)$ ，則存在一個對應的 $3421 -$ avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi'_{2k-1} = 1$ 。 |

證明：首先證明 $\pi_{2k-1} < \pi_{2k+2}$。

1. 若 $2k+2 = 2n$ ，根據我們預設 $\pi_{2n} = 2n$ ，所以 $\pi_{2k-1} < 2n = \pi_{2k+2}$ 。

2. 若 $2k+2 < 2n$ ，則存在 $\pi_{2k+3} < \pi_{2k+2}$ ， 若 $\pi_{2k-1} < \pi_{2k+2}$ ， 則會有 $\pi_{2k} > \pi_{2k-1} > \pi_{2k+2} > \pi_{2k+3}$ ，則 $\pi$ 存在 $\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+2}\pi_{2k+3}$ 為3421的 pattern ，矛盾。所以 $\pi_{2k-1} < \pi_{2k+2}$ 。

我們構造變換法 $\pi \to \pi'$ 如下：

A. 若在第 $(2k+2)$ 項之後不存在數字比 $\pi_{2k-1}$ 小，則 $\pi_{2k-1}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換即可。

例如：2 7 3 6 4 8 1 9 5 10 → 2 7 3 6 1 8 4 9 5 10 。

B. 若在第 $(2k+2)$ 項之後存在數字 $\pi_l$ 比 $\pi_{2k-1}$ 小 （$\pi_{2k-1} > \pi_l$），則尋找 $\pi_{2k-1}$ 之前所有的數字 $\pi_a$ 滿足 $\pi_{2k-1} < \pi_a < \pi_{2k}$ ，令這些 $\pi_a$ 由左往右為 $\pi_{a_1}\pi_{a_2} \dots \pi_{a_m}$ 。

特別的是 $\pi_{a_1}\pi_{a_2}\dots\pi_{a_m}$ 必定遞減，否則若其中出現 $\pi_{a_p} < \pi_{a_{p+1}}$ ，則會有

$\pi_{2k+1} = 1 < \pi_{2k-1} < \pi_{a_p} < \pi_{a_{p+1}}$ ，則 $\pi_{a_p}\pi_{a_{p+1}}\pi_{2k-1}\pi_{2k+1}$ 為 3421 的 pattern，

矛盾。最後將 $\pi_{a_1}\pi_{a_2}\dots\pi_{a_m}\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+1}$ 變換成 $\pi_{a_2}\dots\pi_{a_m}\pi_{2k-1}\pi_{2k+1}\pi_{2k}\pi_{a_1}$ 即可

（僅為改變上述數字的相對順序，其他未提及的數字皆不移動）

和證明 $\pi_{2k-1} < \pi_{2k+2}$ 同理，我們也能證明 $\pi_{a_1} < \pi_{2k+2}$ 確保 $\pi'$ 為交替排列。

若不存在這樣的 $\pi_a$ ，則 $\pi_{2k-1}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換即可。

（此變換是避免出現 $\pi_a\pi_{2k}\pi_{2k-1}\pi_l$ 的 3421 pattern 。）

例如：2 7 4 6 5 9 1 8 3 10 → 2 6 4 5 1 9 7 8 3 10 。

和證明引理 2.2 過程相似，若 $\pi'$ 中存在「3421」pattern，原排列 $\pi$ 也會存在「3421」的 pattern，所以 $\pi'$ 滿足 3421 – avoiding。

接著我們處理「1 在第 $(2k-1)$ 項」到「1 在第 $(2k+1)$ 項」的變換和可變換之條件。

引理 3.2.1：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi_{2k-1} = 1\ (k \geq 2)$ ，且 $\pi_{2k-1}$ 之前的奇數項都比 $\pi_{2k+1}$ 大 $(\pi_{2i-1} > \pi_{2k+1},\ \forall\ 1 \leq i < k)$ ，則存在一個對應的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi'_{2k+1} = 1$ 。

證明：若存在 $\pi_{2i-1} < \pi_{2k+1}$ ，則當 $\pi_{2k-1}$ 變換到 $\pi_{2k+1}$ 之後時，會有 $\pi_{2i-1}\pi_{2k+1}\pi_{2k}\pi_{2k-1}$ 為 2341 的 pattern 。所以必須不存在這樣的 $\pi_{2i-1}$ 。

在上述條件下，我們構造變換法 $\pi \to \pi'$ 如下：

A. 若 $\pi_{2k+1} > \pi_{2k+3}$ ，且 $\pi_{2k} < \pi_{2k+2}$，則將 $\pi_{2k+1}\pi_{2k-1}\pi_{2k+2}\pi_{2k}$ 變換成 $\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+1}\pi_{2k+2}$ 。例如： …15462… → …56142… 。

B. 若不符合上述其中一條件，或 $k = n-1$ $\left(2k+2 = 2n，不存在\ \pi_{2k+3}\right)$ ，則將 $\pi_{2k-1}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換即可 。例如：…27165… → …17265… ， …46152… → …16452… 。

和證明引理 2.1 過程相似，若 $\pi'$ 中存在「2341」pattern，原排列 $\pi$ 也會存在「2341」的 pattern，所以 $\pi'$ 滿足 2341 – avoiding。

引理 3.2.2：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi_{2k-1} = 1$ $(k \geq 2)$ ，且符合以下兩條件：

1. 在 $\pi_{2k-1}$ 之前不能有兩項 $\pi_i\pi_j$ 滿足 $\pi_{2k+1} < \pi_i < \pi_j$ $(i < j)$ 。
2. 在第 $(2k+2)$ 項之後存在數字 $\pi_l$ 比 $\pi_{2k-2}$ 小，或 $\pi_{2k-2} > \pi_{2k+1}$。

則存在一個對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi'_{2k+1} = 1$ 。

證明：

1. 若在 $\pi_{2k-1}$ 之前存在 $\pi_i\pi_j$ 滿足 $\pi_{2k+1} < \pi_i < \pi_j$ ，則當 $\pi_{2k-1}$ 變換到 $\pi_{2k+1}$ 之後時，會有 $\pi_i\pi_j\pi_{2k+1}\pi_{2k-1}$ 為 3421 的 pattern 。所以必須不存在這樣的 $\pi_i\pi_j$ 。
2. 若 $\pi_{2k-2} < \pi_{2k+1}$ ，則如果第 $(2k+2)$ 項之後不存在數字 $\pi_l$ 比 $\pi_{2k-2}$ 小，可將 $\pi_{2k-2}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換，得到另一個 3421 – avoiding 交替排列 $\pi^*$。

   例如 2 3 1 7 6 8 4 9 5 10 變換成 2 6 1 7 3 8 4 9 5 10 ，即使經過一些調整使變換結果為交替排列，這兩個交替排列 $\pi$ 和 $\pi^*$ 會有一樣的變換結果，所以必須將這樣的 $\pi$ 排除掉，故設定條件 2.。

在上述條件下，我們構造變換法 $\pi \rightarrow \pi'$ 如下：

C. 若 $\pi_{2k-2} > \pi_{2k+1}$ ，則 $\pi_{2k-1}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 互換即可。

例如： 2 7 3 6 1 8 4 9 5 10 → 2 7 3 6 4 8 1 9 5 10 。

D. 若 $\pi_{2k-2} < \pi_{2k+1}$ ，則尋找 $\pi_{2k-2}$ 之前所有的數字 $\pi_a$ 滿足 $\pi_{2k-2} < \pi_a < \pi_{2k+1}$ ，令這些 $\pi_a$ 由左往右為 $\pi_{a_1}\pi_{a_2}\ldots\pi_{a_m}$ 。

特別的是 $\pi_{a_1}\pi_{a_2}\ldots\pi_{a_m}$ 必定遞減，否則若其中出現 $\pi_{a_p} < \pi_{a_{p+1}}$ ，則會有 $\pi_{2k-1} = 1 < \pi_{2k-2} < \pi_{a_p} < \pi_{a_{p+1}}$，則 $\pi_{a_p}\pi_{a_{p+1}}\pi_{2k-2}\pi_{2k-1}$ 為 3421 的 pattern，矛盾。最後將 $\pi_{a_1}\pi_{a_2}\ldots\pi_{a_m}\pi_{2k-2}\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+1}$ 變換成 $\pi_{2k+1}\pi_{a_1}\pi_{a_2}\ldots\pi_{a_m}\pi_{2k-2}\pi_{2k}\pi_{2k-1}$ 即可。

（僅為改變上述數字的相對順序，其他未提及的數字皆不移動）

因為 $\pi_{2k-2} < \pi_{2k+1} < \pi_{2k}$ ，所以 $\pi'$ 必為交替排列。

（此變換是避免出現 $\pi_a\pi_{2k+1}\pi_{2k-2}\pi_{2k-1}$ 的 3421 pattern 。）

例如：2 6 4 5 1 9 7 8 3 10 → 2 7 4 6 5 9 1 8 3 10。

和證明引理 2.2 過程相似，若 $\pi'$ 中存在「3421」pattern，原排列 $\pi$ 也會存在「3421」的 pattern，所以 $\pi'$ 滿足 3421 – avoiding。

將上述的引理整合，我們可以得出排列中數字 1 變換的廣義變換條件：

| |
|---|
| 定理 3.3.1：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi_{2k-1} = 1$ ，則 $\pi$ 有以下兩不互斥之性質。<br>1. 若 $k \geq 2$ ，則有一對應的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 第 $(2k-3)$ 項數字 $\pi'_{2k-3} = 1$ 。<br>2. 若 $k \leq n-1$ ，且 $\pi_{2k-1}$ 之前的奇數項都比 $\pi_{2k+1}$ 大 $(\pi_{2i-1} > \pi_{2k+1}, \forall\, 1 \leq i < k)$ ，則存在一個對應的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi'_{2k+1} = 1$ 。 |
| 定理 3.3.2：若一個長度為 6 以上，最後一項 $\pi_{2n} = 2n$ 的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第 $(2k-1)$ 項數字 $\pi_{2k-1} = 1\ (k \geq 2)$ ，則 $\pi$ 有以下兩不互斥之性質。<br>1. 若 $k \geq 2$ ，則有一對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 第 $(2k-3)$ 項數字 $\pi'_{2k-3} = 1$ 。<br>2. 若 $k \leq n-1$ ，且符合以下兩條件：<br>(1) 在 $\pi_{2k-1}$ 之前不能有兩項 $\pi_i\pi_j$ 滿足 $\pi_{2k+1} < \pi_i < \pi_j\ (i < j)$ 。<br>(2) 在第 $(2k+2)$ 項之後存在數字 $\pi_l$ 比 $\pi_{2k-2}$ 小，或 $\pi_{2k-2} > \pi_{2k+1}$ ，或 $\pi_{2k-2}$ 不存在 $(k = 1)$。<br>則存在一個對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 滿足第 $(2k+1)$ 項數字 $\pi'_{2k+1} = 1$ 。 |

八、利用定理 4.1, 4.2 和上述變換方法，我們將「數字 1 在第 1 項」的排列中，依據數字 1 在條件下的可移動上限進行分類，其中我們發現「數字 1 在第 1 項，且能移動到第 $(2n-1)$ 項」的排列具有相同的奇數項分佈，我們也找到了一一對應的變換法。

引理 4.1：若一個最後一項 $\pi_{2n}=2n$ 的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1=1$ ，且該排列可以變換成一個第 $(2n-1)$ 項數字為 1 的排列，則該排列需滿足：

1. 奇數項從第 3 項開始由左往右遞減：$\pi_3>\pi_5>\cdots>\pi_{2n-1}$
2. 偶數項從第 4 項開始由左往右遞減至第 $(2n-1)$ 項 $\pi_2>\pi_4>\cdots>\pi_{2n-2}$

證明：

1. 由引理 3.2.1 推廣，因為數字 1 能移動到第 $(2n-1)$ 項，所以從第 3 項開始每個奇數項都要比前面的奇數項小（除了數字 1），即奇數項從第 3 項開始由左往右遞減。
2. 若有 $\pi_{2k}<\pi_{2k+2}$ $(4\le k\le n-2)$ 則在 1. 的前提下有 $\pi_{2k+3}<\pi_{2k-1}<\pi_{2k}<\pi_{2k+2}$，則 $\pi_{2k+3}\pi_{2k-1}\pi_{2k}\pi_{2k+2}$ 為 2341 的 pattern 。所以對於 $4\le k\le n-2$ 皆有 $\pi_{2k}<\pi_{2k+2}$ ，即偶數項從第 4 項開始由左往右遞減至第 $(2n-1)$ 項。

引理 4.2.1：若一個最後一項 $\pi_{2n}=2n$ 的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1=1$ ，且該排列可以變換成一個第 $(2n-1)$ 項數字為 1 的排列，則該排列需滿足：

1. 奇數項由左往右遞增：$\pi_1=1<\pi_3<\pi_5<\cdots<\pi_{2n-1}$。
2. 對於 $4\le k\le n-1$ 皆有 $\pi_{2k-2}>\pi_{2k+1}$ 。但在 $\pi_{2k-2}$ 之前不能有偶數項 $\pi_{2i}$ 在 $\pi_{2k-2}$ 和 $\pi_{2k+1}$ 之間 $(\pi_{2k+1}<\pi_{2i}<\pi_{2k-2},\ i<k-1)$

證明：由引理 3.2.2 的條件推廣可以進行證明。

1. 若有兩相鄰奇數項滿足 $\pi_{2k-1}>\pi_{2k+1}$ ，則當數字 1 移動到第 $(2k-1)$ 項時，$\pi_{2k-1}$ 之數字被移動到 $\pi_{2k-2}$ 之前，會有 $\pi_{2k+1}<\pi_{2k-1}<\pi_{2k-2}$ ，不滿足引理 3.2.2 的條件 1.，所以相鄰奇數項皆要滿足 $\pi_{2k-1}<\pi_{2k+1}$ ，即奇數項由左往右遞增。
2. 在奇數項由左往右遞增的前提下，因為排列滿足引理 3.2.2 的條件 2.，所以對於 $4\le k\le n-1$ 皆有 $\pi_{2k-2}>\pi_{2k+1}$ 。又如果在 $\pi_{2k-2}$ 之前出現 $\pi_{2i}$ 使得 $\pi_{2k+1}<\pi_{2i}<\pi_{2k-2}$ ，則當數字 1 移動到第 $(2k-1)$ 項時會不滿足引理 3.2.2 的

條件 1.，所以在 $\pi_{2k-2}$ 之前不能有 $\pi_{2i}$ 滿足此大小關係。

而對於此種 3421 – avoiding 交替排列，我們發現偶數項具有特殊的排列規則。

引理 4.2.2：若一個最後一項 $\pi_{2n}=2n$ 的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1=1$ ，且該排列可以變換成一個第 $(2n-1)$ 項數字為 1 的排列。由引理 5.2.1 得知奇數項由左往右遞增，則若其中相鄰兩奇數項數值不連續： $\pi_{2k-1}=x,\ \pi_{2k+1}=x+d$ $(d\geq 2)$ ， $x$ 和 $x+d$ 之間的數字位置必如下：

$\pi_{2k-4}=x+1,\ \pi_{2k-6}=x+2,\dots,\pi_{2k-2d}=x+d-1$ 。

證明：對於 $x$ 和 $x+d$ 之間的任一數字 $x+c\ (1\leq c<d)$ 皆有 $x+c<\pi_{2k+1}<\pi_{2k+3}\dots$ ，且此排列須滿足引理 5.1.1 的 2.，$\pi_{2k-2}>\pi_{2k+1}$ ，所以 $x+c$ 只能是位於第 $(2k-4)$ 項之前的偶數項（包含第 $(2k-4)$ 項）。

又因引理 5.1.1 的 2.，在 $\pi_{2k-4}$ 之前不能有偶數項 $\pi_{2i}$ 滿足 $\pi_{2k-1}<\pi_{2i}<\pi_{2k-4}$ ，

即 $\pi_{2k-4}$ 之前所有比 $x$ 大的數字為遞減排列，所以其中最小的數字 $x+1$ 會在最右邊的第 $(2k-4)$ 項，即 $\pi_{2k-4}=x+1$ ，接著是 $\pi_{2k-6}=x+2$ ，以此類推，最後是 $\pi_{2k-2d}=x+d-1$ 。

整理出「數字 1 能移動到第$(2n-1)$ 項」的排列性質後，我們先改變奇數項，再調整偶數項的排列方式，完成滿足該性質下 2341 和 3421 – avoiding 交替排列的變換。

引理 4.3：若一個最後一項 $\pi_{2n}=2n$ 的 2341 – avoiding 交替排列 $\pi$ 的第一項數字 $\pi_1=1$ ，且該排列可以變換成一個第 $(2n-1)$ 項數字為 1 的排列，則存在一個對應的 3421 – avoiding 交替排列 $\pi'$ 第一項數字 $\pi'_1=1$（最後一項 $\pi'_{2n}=2n$），且該排列可以變換成一個第 $(2n-1)$ 項數字為 1 的排列。反之亦然。

$\Longrightarrow$：利用 $\pi$ 中的奇數項 $\pi_3\sim\pi_{2n-1}$和 $\pi_2$ ，就能構造出對應的 $\pi'$ ：

1. 將 $\pi_3\sim\pi_{2n-1}$ 倒著排列，即 $\pi'_3=\pi_{2n-1},\dots,\pi'_{2k-1}=\pi_{2(n-k)+3},\dots,\pi'_{2n-1}=\pi_3$ 。

2. 令 $\pi'_{2n-2}=\pi_2$ ，$\pi'_{2n}=2n$。

3. 參考引理 5.2.2 ，若有其中相鄰兩奇數項數值不連續： $\pi'_{2k-1}=x,\ \pi'_{2k+1}=x+d$

$(d \geq 2)$，則令 $\pi'_{2k-4} = x+1,\ \pi'_{2k-6} = x+2, \dots, \pi'_{2k-2d} = x+d-1$。

4. 尚未填入的數字皆比 $\pi'_{2n-1}$ 大，也就比所有奇數項大，在未填入數字的位置遞減填入即得到對應排列 $\pi'$。

以 $\pi =$ 1 10 8 11 7 9 5 6 3 4 2 12 為例：取 87532 和 10 。

$\pi'$：1 x 2 x 3 x 5 x 7 10 8 12 → 1 4 2 6 3 x 5 x 7 10 8 12 → 1 4 2 6 3 11 5 9 7 10 8 12 。

$\Longleftarrow$：利用 $\pi'$ 中的奇數項 $\pi'_3 \sim \pi'_{2n-1}$ 和 $\pi'_{2n-2}$，就能構造出對應的 $\pi$：

1. 將 $\pi'_3 \sim \pi'_{2n-1}$ 倒著排列，即 $\pi_3 = \pi'_{2n-1}, \dots, \pi_{2k-1} = \pi'_{2(n-k)+3}, \dots, \pi_{2n-1} = \pi'_3$。

2. 令 $\pi_2 = \pi'_{2n-2}$，$\pi'_{2n} = 2n$。

3. 尚未填入的數字在未填入數字的位置遞減填入即得到對應排列 $\pi'$。

以 $\pi' =$ 1 4 2 6 3 11 5 9 7 10 8 12 為例：取 23578 和 10 。

$\pi$：1 10 8 x 7 x 5 x 3 x 2 12 → 1 10 8 11 7 9 5 6 3 4 2 12 。

由此我們建構了「數字 1 在第 1 項，且能移動到第 $(2n-1)$ 項」的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列之間一一對應的變換法，再加上（定理 3.3）數字 1 位置變換的排列對應，「數字 1 在第 1 項，且能移動到第 $(2n-1)$ 項」的排列可以對應到「數字 1 在第 $(2n-1)$ 項」的排列。所以我們也能證實定理 4.4 如下。

定理 4.4：滿足 $\pi_{2n-1} = 1$ 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列有一一對應的關係，同時具有雙射的變換法。

# 參、 研究結果與討論

## 一、研究結果

(一) 若一個長度為 $2n$ 的 1 ~ $2n$ 數字排列 $\pi$ 中，若 $\pi_1$~$\pi_{2n-1}$ 自成一個 $\alpha$ – avoiding 交替排列，且 $\pi_{2n} > \pi_{2n-1}$，則 $\pi$ 也是 $\alpha$ – avoiding 交替排列，其中 $\alpha = 2341, 3421$ 。

(二) 在相同長度的 $\alpha$ – avoiding 交替排列中，「數字 1 在第 1 項」和「數字 1 在第 3 項」的兩種交替排列數量相等，且存在一對一對應關係，其中 $\alpha = 2341, 3421$ 。

(三) 在相同長度的 $\alpha$ – avoiding 交替排列中，部分符合條件的「數字 1 在第 $(2k-1)$ 項」的排列可以和「數字 1 在第 $(2k+1)$ 項」的排列相互變換，其中 $\alpha = 2341, 3421$ 。

(四) 滿足 $\pi_{2n-1} = 1$ 的 2341 和 3421 – avoiding 交替排列有一一對應的關係，同時具有雙射的變換法。

## 二、討論

(一) 關於數字 1 位置無法移動到第$(2n-1)$ 項的排列變換，因為此情況下需要考慮的排列性質跟數字關係比較複雜，排列的組合結構也比較不易整理，目前尚未找到可適用於多種情況下的排列變換法。我們推測可用以下方式探討可能的排列變換規律：

1. 依據造成「排列中數字 1 變換限制」的原因，或其中特定項的大小關係，以及和「數字 1 能移動到第$(2n-1)$ 項」的排列之關係，將排列分成不同的情況。
2. 對於每種情況都整理出有規律性的變換法，經由一些比較或簡化後嘗試統整出能適用於全部排列的排列雙射變換法。

(二) 在依據數字 1 的可移動上限進行分類後，2341 和 3421 – avoiding 交替排列各分類中第$(2n-1)$ 項數字分佈開始出現差異，這使得一開始觀察到「2341 和 3421 – avoiding 交替排列中第$(2n-1)$ 項數字具有相同分佈」的猜想成為一個需要另外再

證明的問題。

目前我們推測可能的證明方式為建構一個不改變第$(2n-1)$項數字的雙射變換法，而這樣的變換會得到一個和目前求得之部分對應關係不同的對應方法。

# 肆、 結論與應用

## 一、結論：

本研究嘗試從排列中的各項數字關係直接在 2341 和 3421 – avoiding 交替排列之間建構一一對應的關係，觀察到數字 1 相同的位置分佈，利用數字 1 的變換先分別在 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中對其中數字 1 在不同位置的排列建構變換關係，減少要探討的排列數量。最後成功建構了 2341 和 3421 – avoiding 交替排列中「數字 1 能移動到第$(2n-1)$項」的排列雙射變換法。

## 二、應用：

本研究發現兩組不同性質排列之間的雙射變換，可以給較長的數字排列建構不直觀的對應關係，這種對應關係和變換可以作為數據加密、分析、壓縮等演算的工具，可應用於資訊、工程及密碼等相關領域。

## 三、未來展望

在完成部分排列的對應關係之後，我們將探討更多排列的對應關係和其他特殊性質：

(一) 證明「2341 和 3421 – avoiding 交替排列之間有一對一的對應關係和雙射變換法」。

(二) 證明「2341 和 3421 – avoiding 交替排列中第$(2n-1)$項數字具有相同分佈」。

(三) 探討其他具有類似情況的 abcd – avoiding 交替排列對應關係和變換方法。

# 伍、 參考文獻

[1] Richard P. Stanley. (2015). Catalan Numbers. Cambridge University Press.

[2] Thomas Koshy. (2009). Catalan numbers with applications. Oxford University Press.

[3] Svante Linusson. (2014). Pattern avoidance and Catalan numbers.

[4] Joel Brewster Lewis. (2019). Generating trees and pattern avoidance in alternating permutations. Massachusetts Institute of Technology.

[5] Sherry H.F. Yan and Yuexiao Xu. (2012). Alternating permutations with restrictions and standard Young tableaux. Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, P.R. China.

[6] Joanna N. Chen, William Y.C. Chen, Robin D.P Zhou. (2014). On pattern avoiding alternating permutations. European Journal of Combinatorics, Volume 40, August 2014, Pages 11-25.

## 【評語】010048

本文討論兩種 avoiding 排列的組合對應關係，透過排列數的計算與一系列不顯然的觀察，建立起兩者間的對應關係，具有一定的數學內涵，可惜的是目前結果不夠多。 類似的尋找雙射的問題問題建議先確定學界目前的現況，才能清楚知道作品的定位以及與其他問題的連結。