2024年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010030

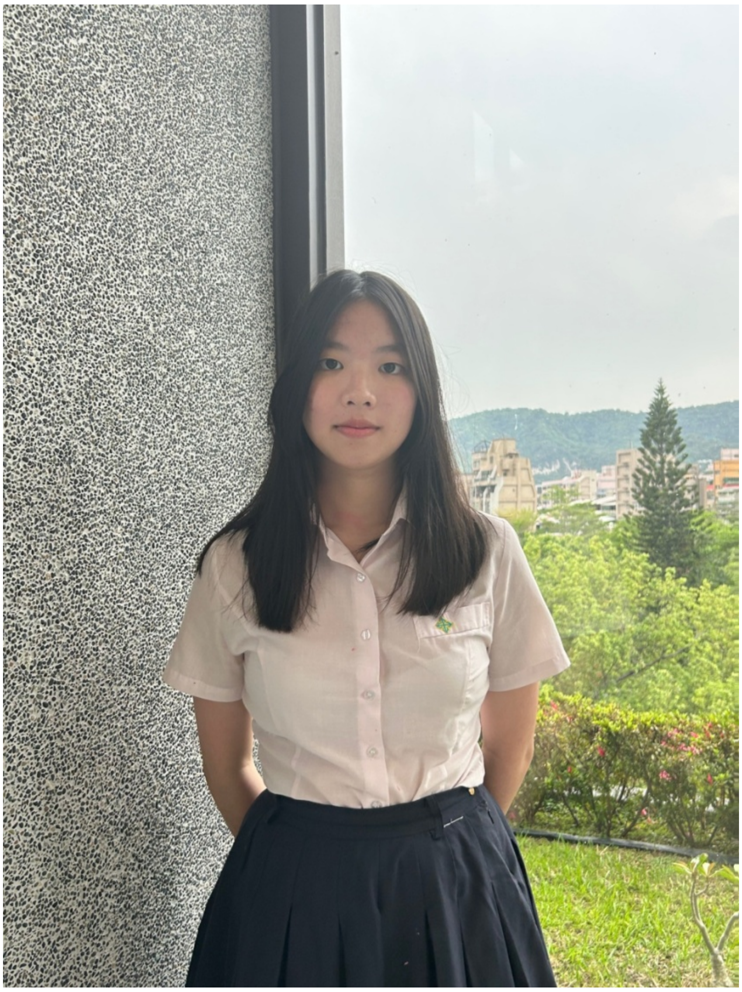
參展科別　數學

作品名稱　以分塊矩陣及生成函數探討多人跳躍數列在多顆球下的方法數

就讀學校　臺北市私立薇閣高級中學
指導教師　吳林建宏、吳千穎
作者姓名　王宣棋

關鍵詞　分塊矩陣、生成函數、多人跳躍數列

作者照片



Abstract

This report is focused on multi-player juggling sequences with multiple balls related to particular cases' analyses. The rules for multi-player juggling sequences are: in the Same time period, only one ball would be caught by the same player, the ball should be thrown and caught continuously and unendingly, and there can be time to prepare before throwing the ball.

To simulate every circumstance of multi-juggling sequences, I used matrixes and directed graphs to discuss. The vertex of the directed graph represent the time for a ball to be caught, the edge represent the ways of changing the situation of throwing the balls. Then, I turn the directed graph into adjacency matrix. Moreover , categorize the vertex by binary so it can be an organized block matrix. I applied Cayley Hamilton theorem in order to calculate its characteristic function. Utilizing all the theory provided, I organized its generating function of some special cases. For instance, all the balls tossed would be caught in the same period of time.

摘要

本研究針對多人的跳躍數列在多顆球下的相關特例進行分析；多人跳躍數列規則為「同一個時間點任一人只會有一顆球回到手中」、「丟球期間需要連續、規律的接及丟出球並且無限持續下去」、「在多人丟球前可以有準備的時間」。

為了能呈現多人跳躍數列各個情況則用矩陣形式並採用有向圖進行討論，該圖的點元素代表當下每一顆球在幾秒中回到手中的狀態、邊元素則為每個狀態轉移時的丟球方式，接著將有向圖轉換為鄰接矩陣形式，並將點元素用類似 2 進位的形式進行分類以便整理成規則一致的分塊矩陣，接著由 Cayley–Hamilton 定理計算特徵方程式後，利用相關定理整理出各個特例分析的生成函數，如特定顆球同時回到手上的情況。

壹、前言

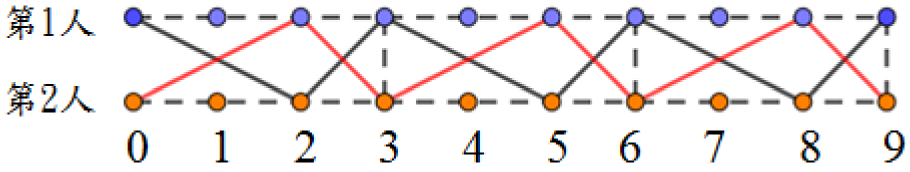
一、研究動機

跳躍數列的問題在以往相關研究皆有相關討論，在 Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)和 2019 年臺灣國際科學展覽會高中組數學科作品(參考文獻[1])主要探討 1 人的跳躍數列問題，而臺北市第 56 屆中小學展覽會高中組數學科作品(參考文獻[2])則探討多人丟球問題，其問題本身針對 1 顆球及$(ms-1)$顆球進行討論。

本篇研究針對多人跳躍數列的多顆球問題進行探討，而多人跳躍數列的相關規則引用**王宣棋**等人(民 112)的規則，並採取部分改寫：

1. 在多人丟球時，同一個時間點任一人只會有一顆球回到手中。
2. 在多人丟球時，期間需要連續、規律的**接及丟出球**，並且無限持續下去。
3. **在多人丟球前可以有準備的時間，代表著不同的準備時間代表不同的跳躍數列。**

Primitive Juggling Sequences(Fan Chung and Ron Graham,2008.)所提及之跳躍數列針對丟球的循環進行討論，而本研究則以實際丟球狀況進行討論。以下圖為例，代表著有 2 人共丟 2 顆球的情況，且為每三秒為一週期、第 1 人丟球 2 秒後第 2 人接到球、第 2 人丟球 2 秒後第 1 人接到球。



(圖 1：2 人跳躍數列。)

二、研究目的

本研究主要討論**多人跳躍數列丟多顆球下之方法數問題**，主要針對丟多顆球在不同情況下進行討論，而在一開始的研究方法將針對多人跳躍數列進行定義和介紹，最後針對多顆球的跳躍數列進行延伸探討。

(一)討論多人跳躍數列丟k顆球且k顆球每次皆同時回到手上之方法數

(二)討論多人跳躍數列丟$(\mathrm{ms}-k)$顆球且某一秒固定k人不會接到球之方法數

貳、研究方法與過程

一、丟球狀況說明及定義

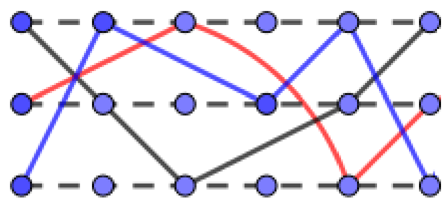
(一)多人丟球問題說明

在多人進行丟球過程中，若有m人丟球且丟球狀況符合以下三點：「

1. 在多人丟球時，同一個時間點任一人只會有一顆球回到手中。
2. 在多人丟球時，期間需要連續、規律的**接及丟出球**，並且無限持續下去。
3. **在多人丟球前可以有準備的時間，代表著不同的準備時間代表不同的跳躍數列。**

」，則稱為m人跳躍數列。

如下方為 1 種 3 人跳躍數列情況，在一開始時同時丟出 3 顆球，可觀察各時間點發現同一時間不會有 2 顆球同時回到同一人手中。



(圖 2：3 人跳躍數列，3 顆球。)

由上圖觀察會有固定的規律，為了進行此狀況的表示方式整理，將以此概念整理城一個舉陣形式代表m人跳躍數列。

定義一：矩陣$H_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{s,t} & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m\times n}$，表其中一種$m$人($m\geq 2$)跳躍數列丟球的狀況、$n$為此情況所用的秒數，其中定義$a_{s,t}=(a_t)_{s,e}$**表第 s 個人在$t$秒初時將球丟出並經過$a_t$秒後回到第 e 個人手中、若該秒第 s 個人沒丟球則$a_{s,t}=0$。**

而在討論多人跳躍數列時，以討論該情況所用秒數為主，因此針對m人跳躍數列計算其方法數時，可將每個紀錄秒數做為項數並依序整理成一個m人跳躍數列的遞迴關係式。

(二)名詞定義

1. $JU_n(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且計錄秒數為n之多人跳躍數列方法數。

2. $M(m,b,s)$：m人丟 b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之多人跳躍數列鄰接矩陣。

3. $f(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之多人跳躍數列鄰接矩陣的特徵方程式。

4. $G(m,b,s,x)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之多人跳躍數列方法數生成函數。

5. $M^{same}(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**b顆球在同一時間回到手上**之多人跳躍數列鄰接矩陣。

6. $f^{same}(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**b顆球在同一時間回到手上**之多人跳躍數列鄰接矩陣的特徵方程式。

7. $G^{same}(m,b,s,x)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**b顆球在同一時間回到手上**之多人跳躍數列方法數之生成函數。

8. $M_k^{without}(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**有某一秒鐘其中k個人沒接到球**之跳躍數列鄰接矩陣。

9. $f_k^{without}(m,b,s)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**有某一秒鐘其中k個人沒接到球**之跳躍數列鄰接矩陣的特徵方程式。

10. $G_k^{without}(m,b,s,x)$：m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒且**有某一秒鐘其中k個人沒接到球**之跳躍數列方法數之生成函數。

11. J_s：表s列、s行且全部元素為 1 的矩陣。

(三)多人跳躍數列的接球狀況定義

定義一在探討多人跳躍數列時以將球丟出為主，而為了後續探討方法數方便，在此針對「接球狀況」進行討論，可知多人跳躍數列的情況中，兩顆球**不能同時回到同一人手中**，由接球狀況討論時，可以 1 代表下一秒有球回到手上、0 代表下一秒沒有球回到手上，因此可使用類似 2 進位方式進行討論。

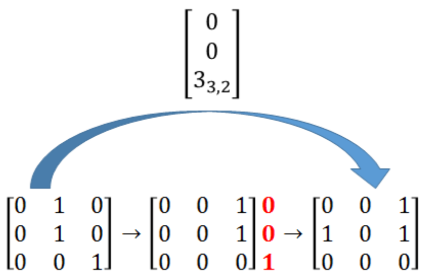
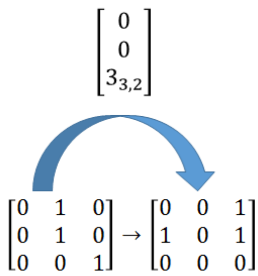
定義二：符合多人跳躍數列的規定下，某一秒後的接球狀況為

$$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$$

，其中$V_{u,t}\in\{0,1\}$，而$V_{u,t}=1$，表有球在第 t 秒後回到第 u 人手中；$V_{u,t}=0$，表第 t 秒第 u 人沒有球回到手中。

1. 多人跳躍數列接球狀況之矩陣形式轉換過程

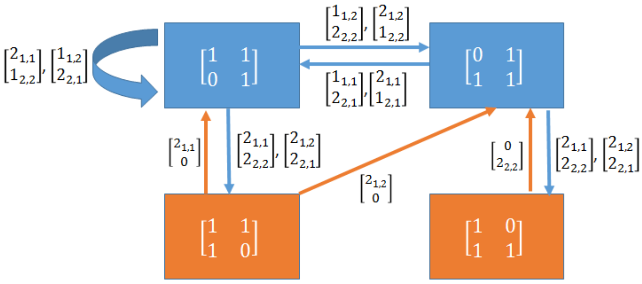
由定義二可知，**多人跳躍數列接球狀況矩陣形式為**$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$，由此定義可知下一秒需將所有數字向右推一位，並且在最後一位補上 0，然而最後一行的數字若有 1 被推出後即代表球回到手中，因此此時則需選擇某 1 人在幾秒鐘後又回到手上，如下圖 3、4 所示，可由圖 4 觀察出為 3 人跳躍數列，且接球狀況依序為第 1 人 2 秒後接到球、第 2 人 2 秒後接到球、第 3 人 1 秒後接到球；而過 1 秒後，第 3 人將球丟給第 2 人且 3 秒後到的 2 人手上，因此可被表為$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，而在此將接球狀況當「點」，以$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{3}_{3,2} \end{bmatrix}$做為連接兩點邊元素表示其丟球方式為 **3** 秒第 3 人丟給第 2 人的球會落下。

	
(圖 3：接球狀況轉換過程)	(圖 4：接球狀況轉換過程簡化)

(四)多人跳躍數列有向圖討論

由定義二可知，多人跳躍數列的接球狀況為$V_{m\times s}=\begin{pmatrix} V_{1,s} & \cdots & V_{1,1} \\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1} \end{pmatrix}_{m\times s}$，而在每次某一秒接球狀況到下一秒的接球狀況皆會產生丟球方式，將接球狀況當作點元素、丟球方式當作邊元素，則可將此做為一個有向圖，在本篇文章稱其為多人跳躍數列的有向圖。

針對 2 人跳躍數列丟 3 顆球且球在空中時間最多為 2 秒為例，可知道其中一個接球狀況可被表示為$V_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，而將其所有情況及轉換方式整理後可得到下圖 5 之情況，其中可發現產生的點元素共有$C_3^4=4$個點；以$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$為例，可知道過一秒後有 2 顆球回到手上，則此 2 顆球有 2 種方法給予 2 人，因此其邊元素表示法為：$\begin{bmatrix} 2_{1,1} \\ 2_{2,2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2_{1,2} \\ 2_{2,1} \end{bmatrix}$，因此在有向圖上將其所有情況皆表示上。



(圖 5：2 人的跳躍數列丟 3 顆球且球在空中最多 2 秒有向圖)

由二元字串和有向圖的結合，接球狀況為有向圖的點元素、邊元素則為轉換方式，因此可整理出下列定義。

定義三：多人跳躍數列有向圖的頂點之點元素表示法為$V_{m\times s}=\begin{pmatrix}V_{1,s} & \cdots & V_{1,1}\\ \vdots & V_{u,t} & \vdots \\ V_{m,s} & \cdots & V_{m,1}\end{pmatrix}_{m\times s}$，$V_{u,t}\in\{0,1\}$，邊元素的集合為$E$，若有向圖的其中兩頂點$V$傳遞至$V'$，且$V$和$V'$ 連接的標號為$y, y\in E$，則y為多人跳躍數列此兩點的轉換表示法。

二、文獻探討

(一)**Cayley–Hamilton 定理**

若矩陣 H 為的$n\times n$矩陣，I_n為$n\times n$的單位矩陣，假設矩陣 H 的特徵方程式為$f(x)=\det(x\cdot I_n-H)$，則$f(H)=O_{n\times n}$。

(二)分塊矩陣公式：若H,A為方陣(方陣大小可不同)，則$\begin{vmatrix}H & B\\ O & A\end{vmatrix}=det(H)\det(A)$。

(三)多人跳躍數列接球狀況的有向圖和多人跳躍數列方法關係

多人跳躍數列在進行討論時能容易發現其情況可以一直持續下去，因此若能從多人跳躍數列有向圖中找出循環時，則能容易發現多人跳躍數列的其中方法數，因此若從多人跳躍數列的其中一個頂點出發，最後回到出發的頂點形成一個封閉迴圈，其邊元素即為一種多人跳躍數列方法數。

以 2 人跳躍數列空中 3 顆球且在空中最長 2 秒為例，圖 5 中以$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$出發經過$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，最後回到$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，邊元素分別為：$\begin{bmatrix}2_{1,1}\\0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2_{1,1}\\2_{2,2}\end{bmatrix}$，則可由多人跳躍數列的**定義**可假設出此多人跳躍數列為$\boldsymbol{H_{2\times 2}}=\begin{bmatrix}\mathbf{2_{1,1}} & \mathbf{2_{1,1}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2_{2,2}}\end{bmatrix}$，由此可發現其為一種多人跳躍數列。而此部分引用**王宣棋**等人(民 112)的相關內容，並進行改寫為以下的定理。

[定理 1]若多人跳躍數列接球狀態的有向圖中的點能形成一個封閉迴圈，則其必能被表示為一個跳躍數列矩陣$H_m = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & a_{s,t} & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m\times n}$。

若將多人跳躍數列有向圖整理為鄰接矩陣，利用鄰接矩陣的性質可發現鄰接矩陣的n次方取**跡進行計算，其主對角的方法數**即為多人跳躍數列在記錄秒數為n的方法數。

(四)鄰接矩陣轉換成遞迴關係式的方法探討

由鄰接矩陣性質及定理 1 可知鄰接矩陣的n次方取跡(trace)即為在記錄秒數為n的跳躍數列方法數，而利用鄰接矩陣直接計算n次方時，其計算量過大且沒有一個通解，因此本研究利用 **Cayley–Hamilton 定理**討論鄰接矩陣的特徵方程式，並求出其中的方法數。

以一個鄰接矩陣$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$為例，假設其為一種多人跳躍數列的鄰接矩陣，$M$的特徵方程式為$f(x) = det(x \cdot I_2 - M) = x^2 - x - 1$，由 **Cayley–Hamilton 定理**得到$A^2 - A - I = O$，則$A^2 = A + I$，因此$A^n = A^{n-1} + A^{n-2}$，由**定理 1** 可得$tr(M^n)$即為在多人跳躍數列紀錄秒數為n 的多人跳躍數列方法數，因此$tr(A^n) = tr(A^{n-1} + A^{n-2}) = tr(A^{n-1}) + tr(A^{n-2})$。假設此鄰接矩陣方法數的表示法為$\mathrm{JU_n}$，由此可以推得此遞迴關係式為$\mathrm{JU_n} = JU_{n-1} + JU_{n-2}$。

(五)以生成函數表示多人跳躍數列方法數之方法

多人跳躍數列方法數在記錄秒數為n時，若利用遞迴關係式探討，其情況較難整理出一個通解形式，在此引用**王宣棋**等人(民 112)對於以生成函數表示多人跳躍數列方法數之定理：

[定理2]假設m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒之跳躍數列鄰接矩陣$M(m,b,s)$的特徵方程式$f(m,b,s,x) = \boldsymbol{x^i} \sum_{j=0}^{K} a_i x^j \,, i \geq 0, a_0 \neq 0$，則$J_n(m,b,s)$形成的生成函數為：

$$G(m,b,s,x) = K - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}，且\ h(x) = \sum_{j=0}^{K} a_{K-j} x^j\ 。$$

proof：

已知m人丟b顆球、每顆球在空中時間不超過s秒之多人跳躍數列鄰接矩陣$M(m,b,s)$，則由定理 1 可知，$JU_n(m,b,s) = tr\left(\left(M(m,b,s)\right)^n\right)$。假設多人跳躍數列的鄰接矩陣$M(m,b,s)$

的特徵方程式

$$f(m,b,s,x)=x^i\sum_{j=0}^{K}a_0x^j=x^i(x-y_1)\cdots(x-y_k)=0,i\geq 0,a_0\neq 0$$

，已知其特徵方程式之根有 0(重根i次)$,y_1,\cdots,y_K$(可以重根)，則由線性代數基本理論可得

$tr\left(\left(M(m,b,s)\right)^n\right)=\sum_{j=1}^{K}y_j{}^n$ (根為 0 省略)，則可知$JU_n(m,b,\mathrm{s})=\sum_{j=1}^{K}y_j{}^n$ ；

已知對於$JU_n(m,b,\mathrm{s})$的數列，令生成函數為

$G(x)=\sum_{q\geq 0}JU_q(m,b,\mathrm{s})\,x^q=JU_0(m,b,\mathrm{s})+\sum_{q\geq 1}JU_q(m,b,\mathrm{s})\,x^q$ 。

令$\sum_{q\geq 1}JU_q(m,b,\mathrm{s})\,x^q=\left(\sum_{j=1}^{K}y_j\right)x+\left(\sum_{j=1}^{K}y_j{}^2\right)x^2+\cdots=\sum_{q\geq 1}\left(\sum_{j=1}^{K}y_j{}^qx^q\right)$，

則$\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{j=1}^{K}y_j{}^qx^q\right)=\sum_{j=1}^{K}(y_jx+y_j{}^2x^2+\cdots)=\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{y_jx}{1-y_jx}\right)=-x\frac{h'(x)}{h(x)}$

，其中$h(x)=(1-y_1x)(1-y_2x)\ldots(1-y_Kx)$ 。

已知$h(x)=(1-y_1x)(1-y_2x)\ldots(1-y_Kx)=x^K\left(\frac{1}{x}-y_1\right)\ldots\left(\frac{1}{x}-y_K\right)=\frac{x^Kf\left(m,b,s,\frac{1}{x}\right)}{x^i}$，則

$h(x)=x^K\sum_{j=0}^{K}a_0(\frac{1}{x})^j=\sum_{j=0}^{K}a_0x^{k-j}=\sum_{j=0}^{K}a_{K-j}x^j$ ；又$JU_0(m,b,\mathrm{s})=\sum_{j=1}^{K}y_j{}^0=K$，

故多人跳躍數列的生成函數$G(m,b,s,x)=K-x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}$，且 $h(x)=\sum_{j=0}^{K}a_{K-j}x^j$ 。■

參、研究結果

一、探討m人跳躍數列丟m顆球且m顆球皆在同一時間回到手中的方法數

(一)鄰接矩陣探討

為了討論m人跳躍數列丟m顆球方法數的情況，我一開始先假設此兩顆球皆會同一時間回到手中，在此討論的狀況即會較為有規律，因此若為m人跳躍數列丟兩顆球且球皆在同一時間回到手中，則以 3 人跳躍數列丟 3 顆球、球在空中時間不超過 3 秒且球皆在同一時間回到手中，其鄰接矩陣的表格化如下：

	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	6	1	0
$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	6	0	1
$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	6	0	0

則可整理出鄰接矩陣$M^{same}(3,3,3)=\begin{bmatrix}6&1&0\\6&0&1\\6&0&0\end{bmatrix}$。以此概念整理出$M^{same}(m,b,s)$在**人數及丟球數一樣**時的鄰接矩陣如下：

s 秒 / 人數(球數)	2 秒	3 秒	4 秒
2	$\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1&0\\2&0&1\\2&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\2&0&1&0\\2&0&0&1\\2&0&0&0\end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix}6&1\\6&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&1&0\\6&0&1\\6&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&1&0&0\\6&0&1&0\\6&0&0&1\\6&0&0&0\end{bmatrix}$

由此可將其推導出 m 人丟 m 顆球、且球在空中時間不超過 s 秒的鄰接矩陣：

$$M^{same}(m,m,s)=\begin{bmatrix} m! & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ m! & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ m! & 0 & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}_{s\times s}$$ 。

(二)特徵方程式探討

[整理 1] m人跳躍數列丟m顆球且球在空中最多 s 秒、m顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式為 $f^{same}(m,k,s) = -x^{s} + m!\sum_{k=0}^{s-1} x^{s-k-1}$ 。

Proof：

已知m人跳躍數列丟 m 顆球且球在空中最多 s 秒、m 顆球同時落下的鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$\det(M^{same}(m,m,s)-xI_s)=\begin{vmatrix} m!-x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m! & -x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ m! & \vdots & \ddots & \ddots & -x & 1 \\ m! & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$=\begin{vmatrix} m!-x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m! & -x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ m!+\frac{m!}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ m! & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s} = \begin{vmatrix} m!-x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m! & -x & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots \\ m!+\frac{m!}{x}+\frac{m!}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ m!+\frac{m!}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ m! & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s} = \cdots$$

$$=\begin{vmatrix} m!-x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m!+m!\sum_{k=1}^{s-2}\frac{1}{x^k} & -x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots \\ m!+\frac{m!}{x}+\frac{m!}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ m!+\frac{m!}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ m! & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s} = \begin{vmatrix} m!-x+m!\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{x^k} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m!+m!\sum_{k=1}^{s-2}\frac{1}{x^k} & -x & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -x & \ddots & \ddots & \vdots \\ m!+\frac{m!}{x}+\frac{m!}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ m!+\frac{m!}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ m! & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$= x^{s-1}(m!-x+m!\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{x^k}) = -x^{s} + m!\,x^{s-1} + m!\sum_{k=1}^{s-1} x^{s-k-1}$$

故可知其特徵方程式為 $f^{same}(m, k, s) = -x^{s} + m!\sum_{k=0}^{s-1} x^{s-k-1}$

(三)生成函數討論

依照上述內容，可以由定理 2 及整理 1 得到下方的定理 3。

[定理 3]假設m人丟m顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒、m顆球同時落下跳躍數列鄰接矩陣 $M^{same}(m, m, s)$ 的特徵方程式 $f^{same}(m, m, s) = -x^{s} + m!\sum_{k=0}^{s-1} x^{s-k-1}$，則生成函數為：

$G^{same}(m, m, s, x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = -1 + m!\sum_{k=1}^{s} x^{k}$ 。

proof：

由整理 1 可知m人跳躍數列丟m顆球且球在空中最多 s 秒、m顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式為 $f^{same}(m, k, s) = -x^{s} + m!\sum_{k=0}^{s-1} x^{s-k-1}$，則由定理 2 可得到生成函數為：

$G^{same}(m, m, s, x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = -1 + m!\sum_{k=1}^{s} x^{k}$，故定理 3 得證。

二、探討m人跳躍數列丟k顆球且k顆球$(m > k)$皆在同一時間回到手中的方法數

m人跳躍數列丟k顆球且k顆球$(m > k)$皆在同一時間回到手中的方法數問題，主要針對k顆球進行討論，此部分和以往僅討論 1 顆或$(ms - 1)$顆球之情況不同，整體而言將問題真正的提升至多顆球之問題。

(一)探討m人跳躍數列丟 2 顆球且 2 顆球皆在同一時間回到手中的方法數

為了討論多人跳躍數列丟 2 顆球方法數的情況，我一開始先假設此兩顆球皆會同一時間回到手中，在此討論的狀況即會較為有規律，因此若為m人跳躍數列丟兩顆球且球皆在同一時間回到手中，則以 3 人跳躍數列丟兩顆球、球在空中時間不超過 3 秒且球皆在同一時間回到手中為例，其鄰接矩陣的表格化如下：

	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$	2	2	2	1	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$	2	2	2	0	1	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	1	0	0	0
$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	1	0	0
$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	0	1	0
$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	0	0	1
$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$	2	2	2	0	0	0	0	0	0

則可整理出鄰接矩陣為：

$$M^{same}(3,2,3)=\begin{bmatrix}2&2&2&1&0&0&0&0&0\\2&2&2&0&1&0&0&0&0\\2&2&2&0&0&1&0&0&0\\2&2&2&0&0&0&1&0&0\\2&2&2&0&0&0&0&1&0\\2&2&2&0&0&0&0&0&1\\2&2&2&0&0&0&0&0&0\\2&2&2&0&0&0&0&0&0\\2&2&2&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由此可觀察出當其為m人、2 顆球、球在空間時間不超過s秒且所有球在同一時間同時回到手中的情況，$m\geq 2$為其中一個條件，且同時可利用上述鄰接矩陣進行觀察觀察並整理出下方矩陣：

$$M^{same}(m,2,s)=\begin{bmatrix}A&I&O&\cdots&O\\\vdots&O&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&O&\ddots&I&O\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&I\\A&O&\cdots&O&O\end{bmatrix}_{sC_2^m\times sC_2^m},\ A=\begin{bmatrix}2!&\cdots&2!\\\vdots&\ddots&\vdots\\2!&\cdots&2!\end{bmatrix}_{C_2^m\times C_2^m},\ I=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{bmatrix}_{C_2^m\times C_2^m}$$

[整理 2] m人跳躍數列丟 2 顆球且球在空中最多 s 秒、2 顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式

為 $f^{same}(m,2,s) = x^{sC_2^m} - 2C_2^m\sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_2^m - j - 1}$ 。

Proof：

由上述內容可知：

$$M^{same}(m,2,s) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I \\ A & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{sC_2^m \times sC_2^m}, A = \begin{bmatrix} 2! & \cdots & 2! \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2! & \cdots & 2! \end{bmatrix}_{C_2^m \times C_2^m}$$

$$, I_{C_2^m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{C_2^m \times C_2^m}$$

已知m人跳躍數列丟m顆球且球在空中最多 s 秒、2 顆球同時落下的鄰接矩陣的特徵方程式

計算方式為：

$$\det(M^{same}(m,2,s) - xI_{C_2^m}) = \begin{vmatrix} A - xI_{C_2^m} & I_{C_2^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_2^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I_{C_2^m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I_{C_2^m} \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_2^m} \end{vmatrix}_{sC_2^m \times sC_2^m}$$

$$= \begin{vmatrix} A - xI_{C_2^m} & I_{C_2^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_2^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I_{C_2^m} & 0 \\ A + \frac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_2^m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - xI_{C_2^m} & I_{C_2^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_2^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ A + \frac{A}{x} + \frac{A}{x^2} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ A + \frac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_2^m} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$
=\begin{vmatrix}
A-xI_{C_2^m} & I_{C_2^m} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
A+A\sum_{j=1}^{s-2}\frac{1}{x^j} & -xI_{C_2^m} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & -xI_{C_2^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\
A+\frac{A}{x}+\frac{A}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
A+\frac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -xI_{C_2^m} & 0 \\
A & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -xI_{C_2^m}
\end{vmatrix}_{sC_2^m\times sC_2^m}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
A-xI_{C_2^m}+A\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
A+A\sum_{j=1}^{s-2}\frac{1}{x^j} & -xI_{C_2^m} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\
\vdots & 0 & -xI_{C_2^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\
A+\frac{A}{x}+\frac{A}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
A+\frac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -xI_{C_2^m} & 0 \\
A & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -xI_{C_2^m}
\end{vmatrix}_{sC_2^m\times sC_2^m}
$$

$$
=\left|A-xI_{C_2^m}+A\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}\right|\left|-xI_{C_2^m}\right|^{s-1}
$$

$$
=\left|2J_{C_2^m}-xI_{C_2^m}+2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}J_{C_2^m}\right|\left|-xI_{C_2^m}\right|^{s-1}
$$，令

$K=2+2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}$，則原式為

$$\left|KJ_{C_2^m} - xI_{C_2^m}\right|\left|-xI_{C_2^m}\right|^{s-1} = \left|KJ_{C_2^m} - xI_{C_2^m}\right| \times (-x)^{C_2^m(s-1)}$$

$$= \begin{vmatrix} K-x & \cdots & & \cdots & \cdots & K \\ K & & K-x & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ K & & \cdots & \cdots & \cdots & K-X \end{vmatrix}_{C_2^m \times C_2^m} \times (-x)^{C_2^m(s-1)}$$

$$= (-x)^{C_2^m(s-1)}(C_2^m K - x)\begin{vmatrix} 1 & K & \cdots & \cdots & K \\ 0 & -x & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -x \end{vmatrix}_{C_2^m \times C_2^m} = (-x)^{C_2^m(s-1)}(C_2^m K - x) \times (-x)^{C_2^m - 1}$$

$$= (-x)^{sC_2^m - 1}[C_2^m(2 + 2\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}) - x]$$

$$= (-x)^{sC_2^m} + 2(-1)^{sC_2^m - 1}C_2^m\sum_{j=1}^{s-1} x^{sC_2^m - j - 1} + 2C_2^m(-x)^{sC_2^m - 1} = 0$$

故可知其特徵方程式為 $f^{same}(m,2,s) = x^{sC_2^m} - 2C_2^m\sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_2^m - j - 1}$ 。

(二) 探討m人跳躍數列丟 2 顆球且 2 顆球皆在同一時間回到手中的方法數之生成函數討論

依照上述內容，可以由定理 2 及整理 2 得到下方的定理 4。

[定理 4]假設 m 人丟 m 顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒、m 顆球同時落下跳躍數列鄰接矩陣 $M^{same}(m,2,s)$的特徵方程式 $f^{same}(m,2,s) = x^{sC_2^m} - 2C_2^m\sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_2^m - j - 1}$ ，則生成函數為：$G^{same}(m,k,s,x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = 1 - 2C_2^m\sum_{j=1}^{s} x^j$ 。

proof：

由整理 2 可知m人跳躍數列丟m顆球且球在空中最多 s 秒、m顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式為 $f^{same}(m,2,s) = x^{sC_2^m} - 2C_2^m\sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_2^m - j - 1}$ ，則由定理 2 可得到生成函數為：

$$G^{same}(m,k,s,x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)} \text{、} h(x) = 1 - 2C_2^m \sum_{j=1}^{s} x^j$$ ，故定理 4 得證。

(三)探討m人跳躍數列丟m顆球且k顆球$(m > k)$皆在同一時間回到手中的方法數

由上方內容觀察出當其為m人、k顆球、球在空間時間不超過s秒且所有球在同一時間同時回到手中的情況，$m \geq 2$為其中一個條件，且同時可利用上述鄰接矩陣進行觀察觀察並整理出下方矩陣：

$$M^{same}(m,k,s) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I \\ A & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{sC_k^m \times sC_k^m}, A = \begin{bmatrix} k! & \cdots & k! \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k! & \cdots & k! \end{bmatrix}_{C_k^m \times C_k^m}, I_{C_k^m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{C_k^m \times C_k^m}$$

[整理 3] m人跳躍數列丟k顆球$(m > k)$且球在空中最多s秒、k顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式為 $f^{same}(m,k,s) = x^{sC_k^m} - k!\,C_k^m \sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_k^m - j - 1}$ 。

Proof：

由上述內容可知：

$$M^{same}(m,k,s) = \begin{bmatrix} A & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I \\ A & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{sC_k^m \times sC_k^m}, A = \begin{bmatrix} k! & \cdots & k! \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k! & \cdots & k! \end{bmatrix}_{C_k^m \times C_k^m},$$

$$I_{C_k^m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{C_k^m \times C_k^m}$$

已知m人跳躍數列丟 m 顆球且球在空中最多 s 秒、k 顆球同時落下的鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$
\det(M^{same}(m,k,s) - xI_{C_k^m}) = \begin{vmatrix} A - xI_{C_k^m} & I_{C_k^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_k^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I_{C_k^m} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & I_{C_k^m} \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_k^m} \end{vmatrix}_{sC_k^m \times sC_k^m}
$$

$$
= \begin{vmatrix} A - xI_{C_k^m} & I_{C_k^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_k^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & I_{C_k^m} & 0 \\ A + \dfrac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_k^m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - xI_{C_k^m} & I_{C_k^m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & -xI_{C_k^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ A + \dfrac{A}{x} + \dfrac{A}{x^2} & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ A + \dfrac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A & 0 & \cdots & 0 & -xI_{C_k^m} \end{vmatrix} = \cdots
$$

$$
= \begin{vmatrix} A - xI_{C_k^m} & I_{C_k^m} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A + A\sum_{j=1}^{s-2} \dfrac{1}{x^j} & -xI_{C_k^m} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -xI_{C_k^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ A + \dfrac{A}{x} + \dfrac{A}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ A + \dfrac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -xI_{C_k^m} & 0 \\ A & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -xI_{C_k^m} \end{vmatrix}_{sC_k^m \times sC_k^m}
$$

$$
= \begin{vmatrix} A - xI_{C_k^m} + A\sum_{j=1}^{s-1} \dfrac{1}{x^k} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A + A\sum_{j=1}^{s-2} \dfrac{1}{x^k} & -xI_{C_k^m} & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -xI_{C_k^m} & \ddots & \ddots & \vdots \\ A + \dfrac{A}{x} + \dfrac{A}{x^2} & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ A + \dfrac{A}{x} & \vdots & \ddots & \ddots & -xI_{C_k^m} & 0 \\ A & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -xI_{C_k^m} \end{vmatrix}_{sC_k^m \times sC_k^m}
$$

$$= \left| A - xI_{C_k^m} + A\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j} \right| \left| -xI_{C_k^m} \right|^{s-1}$$

$$= \left| k\,!\,J_{C_k^m} - xI_{C_k^m} + k\,!\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}\,J_{C_k^m} \right| \left| -xI_{C_k^m} \right|^{s-1}$$，令

$K = k\,! + k\,!\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}$，則原式為

$$\left| KJ_{C_k^m} - xI_{C_k^m} \right| \left| -xI_{C_k^m} \right|^{s-1} = \left| KJ_{C_k^m} - xI_{C_k^m} \right| \times (-x)^{C_k^m(s-1)}$$

$$= \begin{vmatrix} K-x & \cdots & & \cdots & \cdots & K \\ K & & K-x & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ K & \cdots & & \cdots & \cdots & K-X \end{vmatrix}_{C_k^m \times C_k^m} \times (-x)^{C_k^m(s-1)}$$

$$= (-x)^{C_k^m(s-1)}(C_k^m K - x)\begin{vmatrix} 1 & K & \cdots & \cdots & K \\ 0 & -x & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -x \end{vmatrix}_{C_k^m \times C_k^m} = (-x)^{C_k^m(s-1)}(C_k^m K - x) \times (-x)^{C_k^m - 1}$$

$$= (-x)^{sC_k^m - 1}\left[C_k^m\left(k\,! + k\,!\sum_{j=1}^{s-1}\frac{1}{x^j}\right) - x\right]$$

$$= (-x)^{sC_k^m} + k\,!(-1)^{sC_k^m - 1}C_k^m\sum_{j=1}^{s-1}x^{sC_k^m - j - 1} + k\,!\,C_k^m(-x)^{sC_k^m - 1} = 0$$

故可知其特徵方程式為 $f^{same}(m,k,s) = x^{sC_k^m} - k\,!\,C_k^m\sum_{j=0}^{s-1}x^{sC_k^m - j - 1}$

(四)探討m人跳躍數列丟m顆球且k顆球$(m > k)$皆在同一時間回到手中的方法數之生成函數

依照上述內容，可以由定理 2 及整理 3 得到下方的定理 5。

[定理 5]假設m人丟 k 顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒、k 顆球同時落下跳躍數列鄰接矩陣 $M^{same}(m,k,s)$ 的特徵方程式 $f^{same}(m,k,s) = x^{sC_k^m} - k\,!\,C_k^m\sum_{j=0}^{s-1}x^{sC_k^m - j - 1}$，則生成函數

為：$G^{same}(m,k,s,x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$ 、 $h(x) = 1 - k!C_k^m \sum_{j=1}^{s} x^j$ 。

proof：

由整理 3 可知m人丟 k 顆球、每顆球在空中時間不超過 s 秒、k 顆球同時落下的鄰接矩陣特徵方程式為$f^{same}(m,k,s) = x^{sC_k^m} - k!C_k^m \sum_{j=0}^{s-1} x^{sC_k^m - j - 1}$，則由定理 2 可得到生成函數為：

$G^{same}(m,k,s,x) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$ 、 $h(x) = 1 - k!C_k^m \sum_{j=1}^{s} x^j$ ，故定理 5 得證。

三、m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的方法數

m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中此情況代表著在丟球的 s 秒中，有一秒是沒有任何球落下而其他時間則皆有m顆球回到手上，其情況代表著m人在丟球時，每過$s-1$秒後有 1 秒沒有球落下；以此情況可整理出其方法數。

(一)探討m人跳躍數列丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的鄰接矩陣

為了討論多人跳躍數列丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的情況，以 3 人跳躍數列丟 6 顆球、球在空中時間不超過 3 秒且有一秒沒有球回到手中為例，其鄰接矩陣的表格化如下：

	$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$	3!	3!	1
$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$	3!	0	0
$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$	0	3!	0

則可整理出鄰接矩陣為：

$$M_m^{without}(3,2,3) = \begin{bmatrix}3! & 3! & 1\\3! & 0 & 0\\0 & 3! & 0\end{bmatrix}$$

由此可觀察出當其為m人、$m(s-1)$顆球、球在空間時間不超過s秒有一秒沒有球回到手中的情況，$m \geq 2$為其中一個條件，且同時可利用上述鄰接矩陣進行觀察並歸納出下方鄰接矩陣形

式：

$$M_m^{without}(m, ms-m, s) = \begin{bmatrix} m! & m! & \cdots & m! & 1 \\ m! & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & 0 \end{bmatrix}_{s\times s}$$ 。

(二) m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的特徵方程式

由上方討論情況，在得知 $M_m^{without}(m, ms-m, s)$後，

$$M_m^{without}(m, ms-m, s) = \begin{bmatrix} m! & m! & \cdots & m! & 1 \\ m! & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & 0 \end{bmatrix}_{s\times s}$$

，由此鄰接矩陣可整理出特徵方程式。

[整理 4] m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的特徵方程式為 $f_m^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^{s-k}x^k - (m!)^{s-1}$ 。

<u>*Proof*：</u>

由上述內容可知： $M_m^{without}(m, ms-m, s) = \begin{bmatrix} m! & m! & \cdots & m! & 1 \\ m! & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & 0 \end{bmatrix}_{s\times s}$

已知 m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$\det(M_m^{without}(m, ms-m, s) - xI_s) = \begin{vmatrix} m!-x & m! & \cdots & m! & 1 \\ m! & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & -x \end{vmatrix}_{s\times s} =$$

$$\begin{vmatrix} m!-x & m! & \cdots & m!+\frac{m!}{x} & 1 \\ m! & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} m!+\sum_{k=1}^{s-2}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-1}-x & m!+\sum_{k=1}^{s-3}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-2} & \cdots & m!+\frac{m!}{x} & 1 \\ 0 & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$= (-x)^{s-1}(m!+\sum_{k=1}^{s-2}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-1}-x)$$

$$= (-1)^s x^s + (-1)^{s-1} m!\, x^{s-1} + (-1)^{s-1}\sum_{k=1}^{s-2}(m!)^{k+1}x^{s-k-1} + (-1)^{s-1}(m!)^{s-1} = 0$$

則可得到$f_m^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^{s-k}x^k - (m!)^{s-1}$。

(三) m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球回到手中的生成函數

由定理 2 及整理 4 可計算出生成函數$G_m^{without}(m, ms-m, s)$，因此將其整理為下方定理 5。

[定理 6]假設m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球落下跳躍數列鄰接矩陣$M_m^{without}(m, ms-m, s)$的特徵方程式

$f_m^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^{s-k}x^k - (m!)^{s-1}$，則生成函數為：

$G_m^{without}(m, ms-m, s) = s - x\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = 1 - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^k x^k - (m!)^{s-1}x^s$。

<u>*proof*</u>：

由整理 4 可知m人跳躍數列丟m顆球球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且有一秒沒有球落下

的鄰接矩陣特徵方程式為 $f_m^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^{s-k}x^k - (m!)^{s-1}$，則由定理 2 可得到生成函數為：

$G_m^{without}(m, ms-m, s) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = 1 - \sum_{k=1}^{s-1}(m!)^k x^k - (m!)^{s-1}x^s$，故定理 6 得證。

四、探討m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$ms-k(1 \le k \le m-1)$顆球且一定有一秒時有固定k人不能接到球的方法數

(一) m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$ms-k$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球的鄰接矩陣及特徵方程式

由本節討論情況，可將其鄰接矩陣整理如下：

$$M_k^{without}(m, ms-k, s) = \begin{bmatrix} m! & m! & \cdots & m! & (m-k)! \\ m! & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & 0 \end{bmatrix}_{s \times s}$$

，由此鄰接矩陣可整理出特徵方程式。

[整理 7] m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$ms-k$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球的特徵方程式為 $f_k^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{j=1}^{s-1}(m!)^{s+1-j}x^j - (m!)^{s-1}(m-k)!$。

Proof：

由上述內容可知：

$$M_k^{without}(m, ms-k, s) = \begin{bmatrix} m! & m! & \cdots & m! & (m-k)! \\ m! & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & 0 \end{bmatrix}_{s \times s}$$

已知 m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球鄰接矩陣的特徵方程式計算方式為：

$$\det(M_k^{without}(m, ms-m, s) - xI_s) = \begin{vmatrix} m!-x & m! & \cdots & m! & (m-k)! \\ m! & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & m! & -x \end{vmatrix}_{s\times s} =$$

$$\begin{vmatrix} m!-x & m! & \cdots & m!+\frac{m!(m-k)!}{x} & (m-k)! \\ m! & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & m! & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} m!+\sum_{k=1}^{s-2}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-1}(m-k)!-x & m!+\sum_{k=1}^{s-3}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-2}(m-k)! & \cdots & m!+\frac{m!(m-k)!}{x} & (m-k)! \\ 0 & -x & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$= (-x)^{s-1}(m!+\sum_{k=1}^{s-2}\frac{(m!)^{k+1}}{x^k}+(\frac{m!}{x})^{s-1}(m-k)!-x)$$

$$= (-1)^s x^s + (-1)^{s-1} m!\, x^{s-1} + (-1)^{s-1}\sum_{k=1}^{s-2}(m!)^{k+1}x^{s-k-1} + (-1)^{s-1}(m!)^{s-1}(m-k)! = 0$$

則可得到$f_k^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{j=1}^{s-1}(m!)^{s+1-j}x^j - (m!)^{s-1}(m-k)!$。

(二) m人跳躍數列、球在空中最多s秒、丟$m(s-1)$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球的生成函數

依照上述內容，可以由定理 2 及整理 5 得到下方的定理 5。

[定理 6]假設m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$ms-k$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球 $M_k^{without}(m, ms-k, s)$的特徵方程式

$f_k^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{j=1}^{s-1}(m!)^{s+1-j}x^j - (m!)^{s-1}(m-k)!$，則生成函數為：

$$G_k^{without}(m, ms-m, s) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)} \text{、} h(x) = 1 - \sum_{j=1}^{s-1} (m!)^{j+1} x^j - (m!)^{s-1}(m-k)!\, x^s \text{。}$$

<u>*proof*</u>：

由整理 7 可知m人跳躍數列球在空中最多s秒、丟$ms-k$顆球且一定有一秒有固定k人不能接到球的鄰接矩陣特徵方程式為 $f_m^{without}(m, ms-m, s) = x^s - \sum_{k=1}^{s-1} (m!)^{s-k} x^k - (m!)^{s-1}$，

則由定理 2 可得到生成函數為：

$G_m^{without}(m, ms-m, s) = s - x \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}$、$h(x) = 1 - \sum_{k=1}^{s-1} (m!)^k x^k - (m!)^{s-1} x^s$，故定理 6 得證。

肆、討論

多人跳躍數列在以往文獻討論中針對 1 顆及$(ms-1)$顆球的討論時，情況較為簡單，其原因在於鄰接矩陣的大小為$ms \times ms$，其情況也不會因為m和s的值過大而突然讓鄰接矩陣大小爆增，然而在探討 2 顆球以上的情況時，其鄰接矩陣大小為$C_2^{ms} \times C_2^{ms}$，即若僅討論 4 人、球在空中不超過 4 秒時其鄰接矩陣大小為$C_2^{16} \times C_2^{16}$，即代表需要討論 120 行、120 列的矩陣大小。

本篇研究針對多人跳躍數列在特定情況下進行深入討論，以k顆球同時回到手上做為本研究的主要研究結果，能夠發現在限制特定情況下仍然可以計算出其通式，並且其情況讓多人跳躍數列在探討多顆球時有著其他方向能深入探討。

伍、結論

本篇研究針對多人的跳躍數列在多顆球在特定情況下進行分析，m人跳躍數列每顆球在空中時間不超過s秒的情況，針對「k顆球$(k \le m)$同時回到手上」及「$m(s-1)$顆球且一定有一秒有固定k人$(k \le m)$不能接到球」，此情況已將原先文獻中僅能探討 1 顆球及$(ms-1)$顆球(代表某一秒不能接 1 顆球)的情況延伸至多顆球的探討；雖然在文獻及本篇研究的討論中，理論上已討論出所有多人跳躍數列的計算方式，但以往進行討論多人且多顆球的情況下，無法

馬上寫出一個代表任意項的生成函數形式，而本篇研究成功討論出特定情況下多顆球的生成函數，此部分在未來將能延伸至多顆球的任意情況下計算其上下限問題。而本篇研究因為從原先文獻的 1 顆球及$(ms-1)$顆球延伸至多顆球，此部分在未來也能將其做為交通運輸工具在模擬其到站之情況，如：m人可視為m條跑道、空中時間不超過s秒可視為飛機在空中僅能飛行多少時間，而跳躍數列的規則要求不能同一時間丟球、同一時間接球也符合機場的相關要求，由此將可針對不同種安排計算其可能的方法數，進而討論各個方案的可行性。

陸、參考文獻

[1] 蔡宗祐、曾健耘、洪珞婷、吳林建宏、王聖淵(民 108)。以狀態有向圖探討跳躍數列方法數。中華民國 2019 年臺灣國際科學展覽會，未出版，臺北市。

[2] 王宣棋、鄭淇容、吳林建宏(民112)。跳躍數列在多人丟球下的方法數探討。臺北市第56屆中小學展覽會，未出版，臺北市。

[3] 黃哲男、陳佩佩、郭懿慧、黃映親(民 98)。小丑的秘密-循環跳躍的數列。中華民國第49 屆中小學科學展覽會，未出版，台南市。

[4] Fan Chung and Ron Graham(2008).Primitive Juggling Sequences. The Mathematical Association of America,America.

【評語】010030

本作品在一個固定的週期內，多人不斷同時互相丟、接球的總方法數。主要討論 1.丟 k顆球且 k顆球每次皆同時回到手上之方法數; 2.丟 (ms−k)顆球且某一秒固定 k人不會接到球之方法數。作者參考文獻的作法，將每種丟法用一個矩陣表示，並且發現其鄰接矩陣是分塊矩陣，且其中各塊是單位矩陣或全 k 矩陣。由此結果，作者可以用生成函數法給出不同限制條件下的丟、接球總方法數。然而本作品從一開始的定義一，矩陣 H 的定義就很不清楚，也沒有舉例子幫忙呈現。鄰接矩陣所相對應的圖也沒有清楚定義，因此，縱使作者用矩陣的方式使計算變得相對簡單，也因此觀察到一些有趣的結論，但事實上整個作品的正確性難以驗證。其次，整個作品的研究停在建構出生成函數，卻對利用生成函數來計算一些原丟球問題有趣的數量，例如球在空中停留時間的平均值等等，完全未作衍生探討，相當可惜。