2024年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010018

參展科別　數學

作品名稱　正n邊形內接正m邊形

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學
指導教師　洪允東
作者姓名　李俊諺

關鍵詞　正多邊形 、 內接 、 和差化積

作者簡介

我是李俊諺，目前就讀於師大附中的高三科學班，我對數學抱有深厚的熱忱，並且花時間投入於競賽數學和科展，進一步增進自己的數學能力。

高二上學期，我開始了我的專題研究：正 n 邊行內接正 m 邊形，在數學四大領域中，我最喜歡的幾何領域，投入研究，嘗試找出相關圖形的關聯。

摘要

先前已證明正n邊形內接正m邊形，當$m=3$或4時n為任意數皆有解，本篇我探討正n邊形內接正m邊形($n \geq m \geq 5$)，當(n,m)滿足何種關係時有解。

在研究中，我從最小(6,5)開始，依次遞增討論，我發現了，有解的一些規律(稱之為標準型)，藉由標準型嘗試規律。同時(n,m)為一般數時，找出何種情形必無解，藉此探討、驗證一般項於何時有解。

在找出有解關係後，探討出規律後找出如何產生構圖的方式，以 GGB 做出構圖。

Abstract

It has been proved before that a regular n-polygon inscribed regular m-polygon. When m=3or4, n is any number, there is a solution. In this article, I will discuss the regular n-polygon inscribed regular m-polygon (n≥m≥5). , there is a solution when (n, m) satisfies which relationship.

In the research, I started from the minimum (6,5) and discussed in ascending order. I found that there are some laws with solutions (called standard forms), and I tried the laws through the standard forms. At the same time, when (n, m) is a general number, find out what kind of situation must have no solution, so as to explore and verify when the general term has a solution.

After finding the solution relationship, explore the rules and find out how to create the composition, and use GGB to create the composition.

壹、前言

一、研究動機

我在看歷屆科展作品時，發現了正 n 邊形內接正四邊形這個作品，經過尋找後，發現了正 n 邊形內接正三角形這個作品。在作品中提到正 n 邊形內接三角形、四邊形皆有解，並且兩篇報告分別給予了不同的作圖方式，但經過比對後我發現正 n 邊形內接正三角形這個作品的作圖方式是正 n 邊形內接正四邊形的一部份

於是我想探討是否 n,m 為一般數時皆有解?或當n,m滿足何種規律才有解?是否文獻中的作圖方式在n,m 為一般數時也能適用?又或是需要另一種作圖方式

二、研究目的及研究問題

(一) 構造正 n 邊形內接正5、6邊形。

(二) 找出 (n,m) 有解的規律或條件。

(三) 以這個規律用 GeoGebra 繪圖驗證。

(四) 以一般的數學證明 (n,m) 有解條件。

(五) 構造出有解圖形，以及構圖方式。

貳、研究過程或方法

一、文獻探討

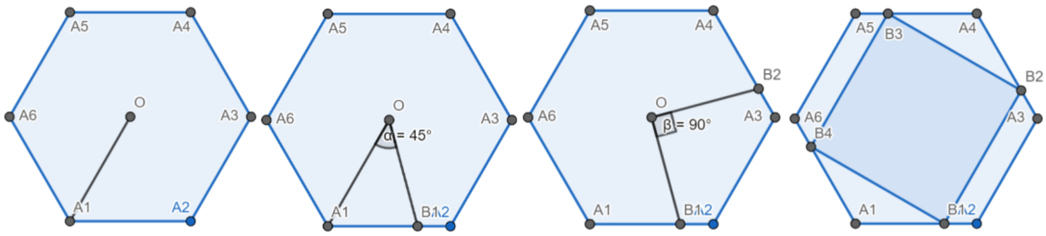
(一) 正 n 邊形內接正四邊形

構圖方式

1. $n=4k$ 或 $4k+2$

表一：正 $4k$ 或 $4k+2$ 邊形內接正四邊形作圖步驟

	$4k$	$4k+2$
1.	取正 n 邊形的中心 O 。	
2.	在正 n 邊形的邊長上取任意 B_1 作為正4邊形頂點。	以一頂點 A_1 和 O 連線，以 O 為頂點，將 OA_1 旋轉 $45°$ ，並和正 n 邊形交於點 B_1 。
3.	以 B_1 為頂點，將 OB_1 旋轉 $90°$ ，並和正 n 邊形交於點 B_2 。	
4.	以 B_1B_2 為邊長作正 4 邊形。	
5.	正 4 邊形 $B_1B_2B_3B_4$ 即所求。	



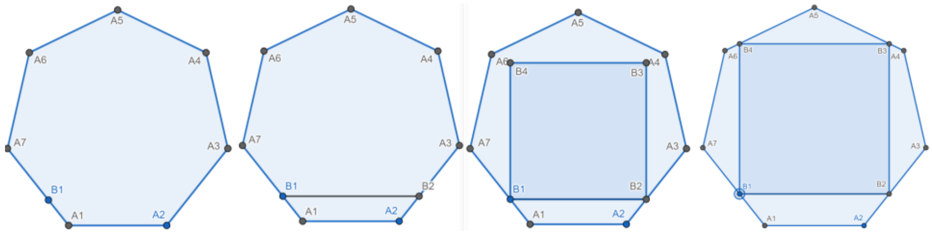
圖一: 正 $4k$ 或 $4k+2$ 邊形內接正四邊形作圖步驟(以 n=6 為例)

2. $n = 4k + 1$ 或 $4k + 3$

表二：正 $4k + 1$ 或 $4k + 3$ 邊形內接正四邊形作圖步驟

1.	在正 n 邊形上取一點C_1。
2.	做過 C_1 平行底邊 A_1A_2 交正 n 邊形於另一點 C_2
3.	以 C_1、C_2 為邊長作正 4 邊形。
4.	調整 C_1 使得另 2 點也位於正n邊形上
5.	正 4 邊形 $C_1C_2C_3C_4$ 即所求。

在文獻中此方法亦稱之為平行法



圖二：正 $4k + 1$ 或 $4k + 3$ 邊形內接正四邊形作圖步驟(以 n =7 為例)

3. 兩種構圖方式分別對應到後述兩種有解情形。

令 $(n, m) = d$ ，$n > m \geq 5$ 時，

當 $\frac{m}{d} = 1 \vee 2$ 時有解)的構圖方式。

(1) $\frac{m}{d} = 1$ 對應到 $m = 4$， $n = 4k$

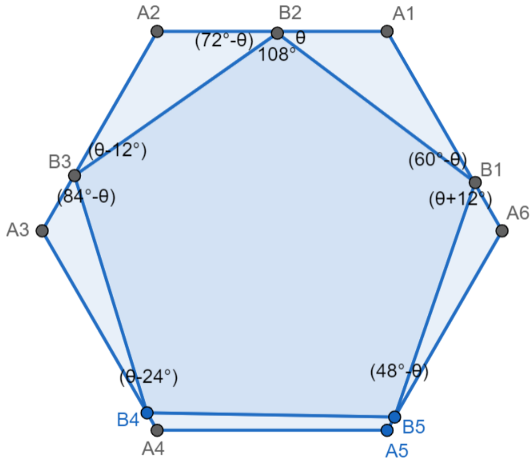
(2) $\frac{m}{d} = 2$ 對應到 $m = 4$ ， $n = 4k + 1 \vee 4k + 3$

其中(2)的作圖結果產生的圖形中

會與(1)的其中一個作圖結果相同。

二、正 n 邊形內接正 5 邊形

(一) $n = 6$



圖三：正 6 邊形內接正 5 邊形

令正 5 邊形邊長$= L$

設外正 n 邊形頂點為A_i，內正 n 邊形頂點為B_i

設正 n 邊形邊長為l_n。

設$\angle A_1B_2B_1 = \theta$

用反證法:

由正弦定理知在 $\Delta A_1B_2B_1$ 中

$$L_1 = \frac{l_5}{sin120°} = \frac{\overline{A_1B_1}}{sin\theta} = \frac{\overline{A_1B_2}}{sin(60°\theta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A_1B_1} = L_1 sin\theta \\ \overline{A_1B_2} = L_1 sin(60° - \theta) \end{cases}$$

在$\Delta A_6B_5B_1$中得

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A_6B_1} = L_1 sin(48° - \theta) \\ \overline{A_6B_5} = L_1 sin(12° + \theta) \end{cases}$$

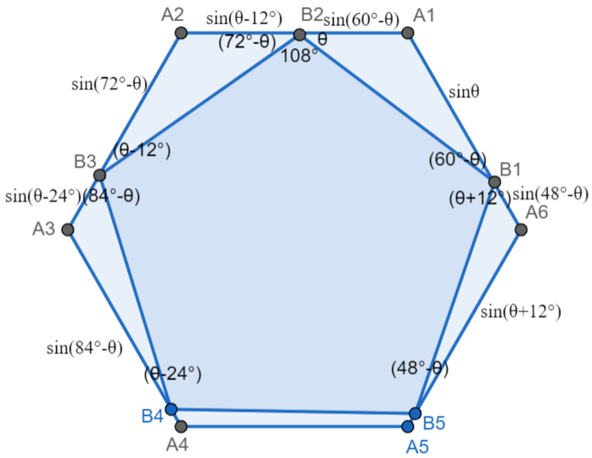
在$\Delta A_2B_2B_3$中得

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A_2B_2} = L_1 sin(\theta + 12°) \\ \overline{A_2B_3} = L_1 sin(72° - \theta) \end{cases}$$

在$\Delta A_3B_4B_3$中得

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{A_3B_3} = L_1 sin(\theta - 24°) \\ \overline{A_3B_4} = L_1 sin(84° - \theta) \end{cases}$$

可根據正弦定理將正 6 邊形各邊長等長標示，如下圖；



圖四：正 6 邊形內接正 5 邊形 (標示長度後)

根據正 6 邊形各邊長等長的條件，可以列出

$\overline{A_1A_6} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$，約掉$L_1$

$\Rightarrow \sin\theta + \sin(48° - \theta) = \sin(\theta - 12°) + \sin(60° - \theta) = \sin(\theta - 24°) + \sin(72° - \theta)$

運用和差化積運算:

$\Rightarrow 2\sin 24°\ \cos(24° - \theta) = 2\sin 24°\ \cos(36° - \theta) = 2\sin 24°\ \cos(48° - \theta)$

計算化簡後:

$\Rightarrow\ \cos(24° - \theta) =\ \cos(36° - \theta) =\ \cos(48° - \theta)$

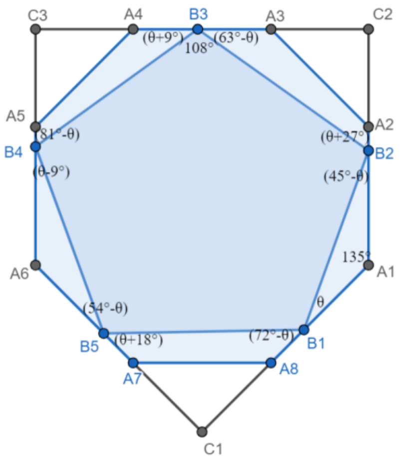
$\Rightarrow no\ solution$

正 6 邊形內接正 5 邊形無解。

PS:在此證明過程可發現L_1的值會在計算時約掉，不影響計算過程，故我們可以令正 5 邊形邊長=sin120°(正 m 邊形邊長= $\sin\left(\frac{(n-2)}{n}\pi\right)$使得 $L_1 = 1$，精簡計算，且往後證明皆以相同方式精簡計算。

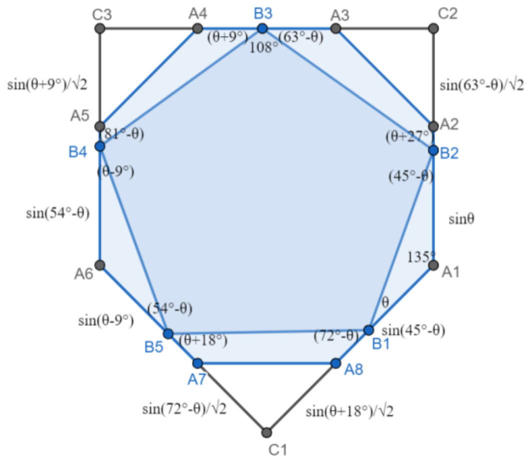
(二) $n=8$

以正 6 邊形內接正 5 邊形相同的計算方式標式角度列式



圖五：正 8 邊形內接正 5 邊形

令正 5 邊形邊長$=\sin 135°$，以正弦定理標示角度後:



圖六：正 8 邊形內接正 5 邊形，標示後

根據$\overline{A_1C_1}=\overline{A_6C_1}=\overline{A_4C_2}=\overline{A_3B_3}$

$$\sin\theta+\frac{\sin(63°-\theta)}{\sqrt{2}}=\frac{\sin(\theta+9°)}{\sqrt{2}}+\sin(54°-\theta)$$

$$=\sin(\theta-9°)+\frac{\sin(72°-\theta)}{\sqrt{2}}=\frac{\sin(\theta+18°)}{\sqrt{2}}+\sin(45°-\theta)$$

以第一、第二條式子運算

$$\sin(54° - \theta) - \sin\theta = \frac{\sin(63°-\theta)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\theta+9°)}{\sqrt{2}}$$

$$2\cos(27°)\sin(27° - \theta) = \sqrt{2}\cos(36°)\sin(27° - \theta)$$

$$\theta = 27°$$

以第一、第四條式子運算

$$\sin(45° - \theta) - \sin\theta = \frac{\sin(63°-\theta)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\theta+18°)}{\sqrt{2}}$$

$$2\cos(22.5°)\sin(22.5° - \theta) = \sqrt{2}\cos(40.5°)\sin(22.5° - \theta)$$

$$\theta = 22.5°$$

以第一、第三條式子運算

$$\sin(\theta - 9°) - \sin\theta = \frac{\sin(63°-\theta)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(72°-\theta)}{\sqrt{2}}$$

$$2\cos(\theta - 4.5°)\sin(-4.5°) = \sqrt{2}\cos(\theta - 67.5°)\sin(-4.5°)$$

$\theta \neq 27°$、$22.5°$

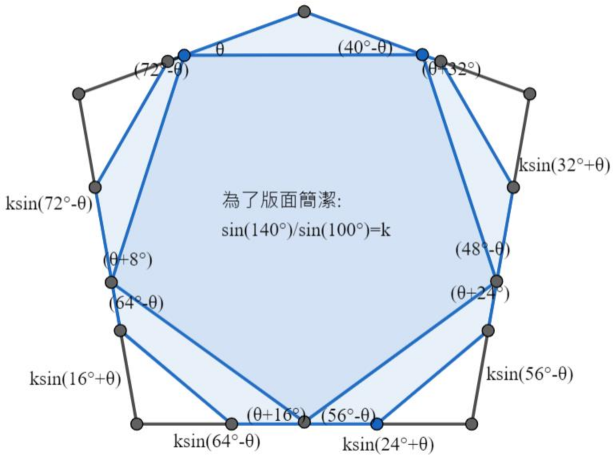
⇒有第三個θ值

正 8 邊形內接正 5 邊形無解。

後續的驗證方式因為也會如正 8 邊形內接正 5 邊形一般，

因為產生算式時會出現分數，而以相似的方式進行驗證

(三) $n = 9$



圖七：正 9 邊形內接正 5 邊形

令正 5 邊形邊長$\sin 140°$

$$\frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(\theta + 32°) + \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(56° - \theta)$$

$$= \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(\theta + 24°) + \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(64° - \theta)$$

$$= \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(\theta + 16°) + \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(72° - \theta)$$

以正 8 邊形內接正 5 邊形相同方法

先計算前二條等式

$$\Rightarrow \sin(64° - \theta) - \sin(\theta + 32°) \ = \sin(56° - \theta) - \sin(\theta + 24°)$$

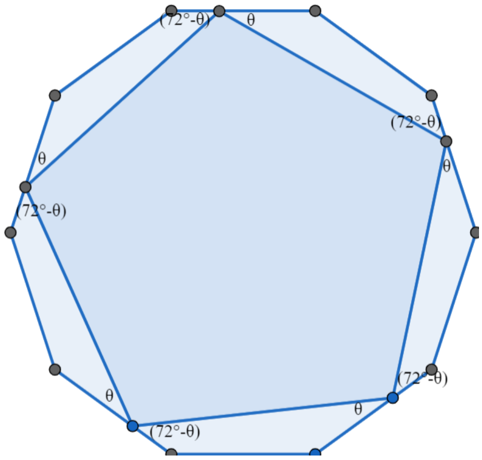
$$\Rightarrow 2\cos(48°)\sin(16° - \theta) = \sqrt{2}\cos(40°)\sin(16° - \theta)$$

$\theta = 16°$ 帶入第三式中不合⇒有第二個值

$\Rightarrow$ *no solution*

正 9 邊形內接正 5 邊形無解。

(四) $n=10$



圖八：正 10 邊形內接正 5 邊形

若 5 邊形外的五圖形全等，則構造出正 10 邊形內接正 5 邊形，故證 10 邊形內接正 5 邊形有解，且不只一解。

在構造有解圖形時，我們也可以在正 10 邊形中對應邊取 5 段等長線段以確保取出圖形為全等圖形

正 6、8、9 邊形內接正 5 邊形皆無解。正 10 邊形內接正 5 邊形有解且不只 1 解　⇒猜測：正 n 邊形內接正 m 邊形於 $m|n$ 有解。

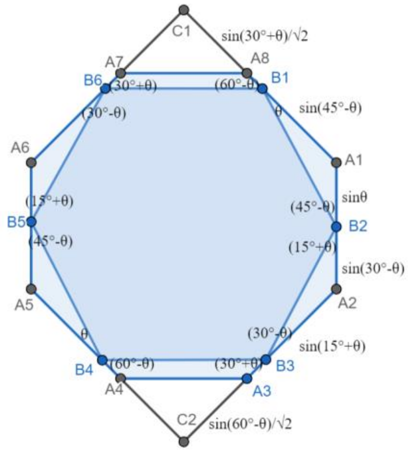
⇒等價於後述 $(n,m)=d$，$\frac{m}{d}=1$ 的部分。

而後續 $\frac{m}{d}=2$ 部分在 $n=5$ 是不會發生的。

另外由 $n=8$，9 的計算過程我們也可以發現列式時 k 條式子之間相等時，解θ之解時，至少會產生 $k-1$ 個不同值

三、正 n 邊形內接正 6 邊形

(一) $n=8$



圖九：正 8 邊形內接正 6 邊形

$$\frac{\frac{\sin(\theta+30°)}{\sqrt{2}}+\sin(45°-\theta)}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sin(\theta+15°)+\frac{\sin(60°-\theta)}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sin(\theta)+\sin(30°-\theta)}{1}$$

先以前兩個等式進行運算：

$$\sin(45°-\theta)-\sin(\theta+15°)=\frac{\sin(60°-\theta)}{\sqrt{2}}-\frac{\sin(\theta+30°)}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 2\sin(15°)\cos(15°-\theta)=2\sin(45°)\cos(15°-\theta)$$

$$\Rightarrow \theta=15°$$

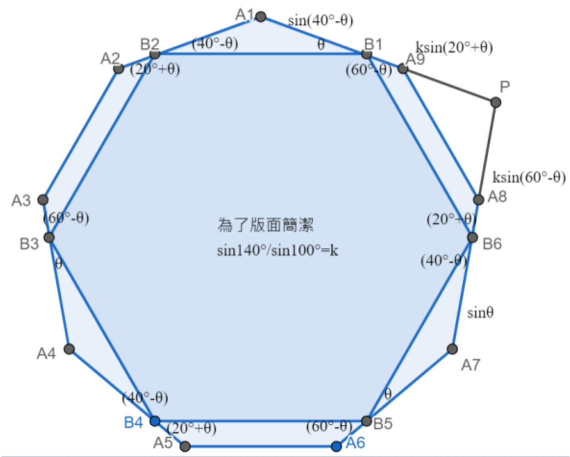
代回第三個等式

$$\frac{sin(30°)+\frac{sin(45°)}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\neq\frac{2\,sin(15°)}{1}$$ 矛盾

正 8 邊形內接正 6 邊形無解。

(二) $n = 9$

1. 計算



圖十：正 9 邊形內接正 6 邊形

$$\sin\theta + \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(60° - \theta) = \frac{\sin 100°}{\sin 40°}\sin(\theta + 20°) + \sin(40° - \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 140°}{\sin 100°}[\sin(60° - \theta) - \sin(\theta + 20°)] = \sin(40° - \theta) - \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 140°}{\sin 100°} \times 2\cos 40° \sin(20° - \theta) = 2\cos 20° \sin(20° - \theta)$$

$$\Rightarrow \theta = 20°$$

正 9 邊形內接正 6 邊形有解。

2. 構圖方式

可如同前述文獻探討，使用平行法:

先構造一點，構造過該點與正 9 邊形底邊行之平行線、交正 9 邊形於另一點，即正 6 邊形第二頂點。

以這兩點構成支線段構造 6 邊形，移動起始點使另外 4 個點也交於正 9 邊形上。

四、n,m 為任意正整數之標準型

對於正 n 邊形內接正 m 邊形有解時

必定遵守以下三個條件，因次我們在構圖時可以遵守以下方式確定 m 邊形之 m 個頂點位於哪 m 個 n 邊形的邊

(一) 標準型理論

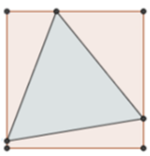
對於正 n 邊形內接正 m 邊形有解時

1. 則內接的 m 邊形的相鄰二個點之間必須有 $\lfloor\frac{(n-m)}{m}\rfloor \vee \lceil(\frac{(n-m)}{m}\rceil$ 個 n 邊形之完整邊。(也就是未被 m 邊形頂點切割的 n 邊形的邊)
2. 且可找到一個起始點，順時針將兩點之間完整邊數值寫成數列，且此數列有一最短循環節。

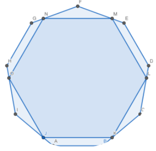
   而此最短循環節有何意義會在後續 $\frac{m}{d}$ 的代表意義的部份探討
3. 此循環節中 $\lfloor\frac{(n-m)}{m}\rfloor \vee \lceil(\frac{(n-m)}{m}\rceil$ 單一一項的連續出現長度必須為最短。

(二) 標準型的例子

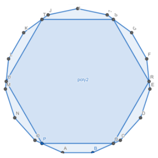
1. $\lfloor\frac{(n-m)}{m}\rfloor \vee \lceil(\frac{(n-m)}{m}\rceil$


圖十一：正 4 邊形內接正 3 角形

n=4, m=3, $\left\lfloor\frac{m-n}{n}\right\rfloor = 0,\ \left\lceil\frac{m-n}{n}\right\rceil = 1$


圖十二：正 9 邊形內接正 6 邊形

n=9, m=6, $\left\lfloor\frac{m-n}{n}\right\rfloor = 0,\ \left\lceil\frac{m-n}{n}\right\rceil = 1$



圖十三：正 15 邊形內接正 6 邊形

n=15, m=6, $\left\lfloor\frac{m-n}{n}\right\rfloor = 1$, $\left\lceil\frac{m-n}{n}\right\rceil = 2$

2. 最短循環節

n=9, m=6　數列: 1,0,1,0,1,0/1,1,1,0,0,0

兩數列中 1,1,1,0,0,0　循環長度為 6

大於1,0,1,0,1,0　循環長度為 2 因此正 9 邊形內接正 6 邊形，在考慮是否有解時，必須以 1,0,1,0,1,0 為主要考量。

五、$\frac{m}{d}$ 的代表意義

在前面作圖驗證正 n 邊形內接正 6 邊形時，會發現標示 θ 會在經過一定的邊數後循環，而 $\frac{m}{d}$ 代表經過幾個正 m 邊形的邊。

在標準型中有提到將正 m 邊形相鄰二點間正 n 邊形的完整邊寫成一個數列，此數列所有項的和為 $n-m$ ，並且這個數列展現後可以找到長度最短的循環節，而 $\frac{m}{d}$ 為這個最短循環節最短長度。

六、 n 邊形邊以及 m 邊形頂點 $(n > m \geq 5)$ 的有(無)解關係

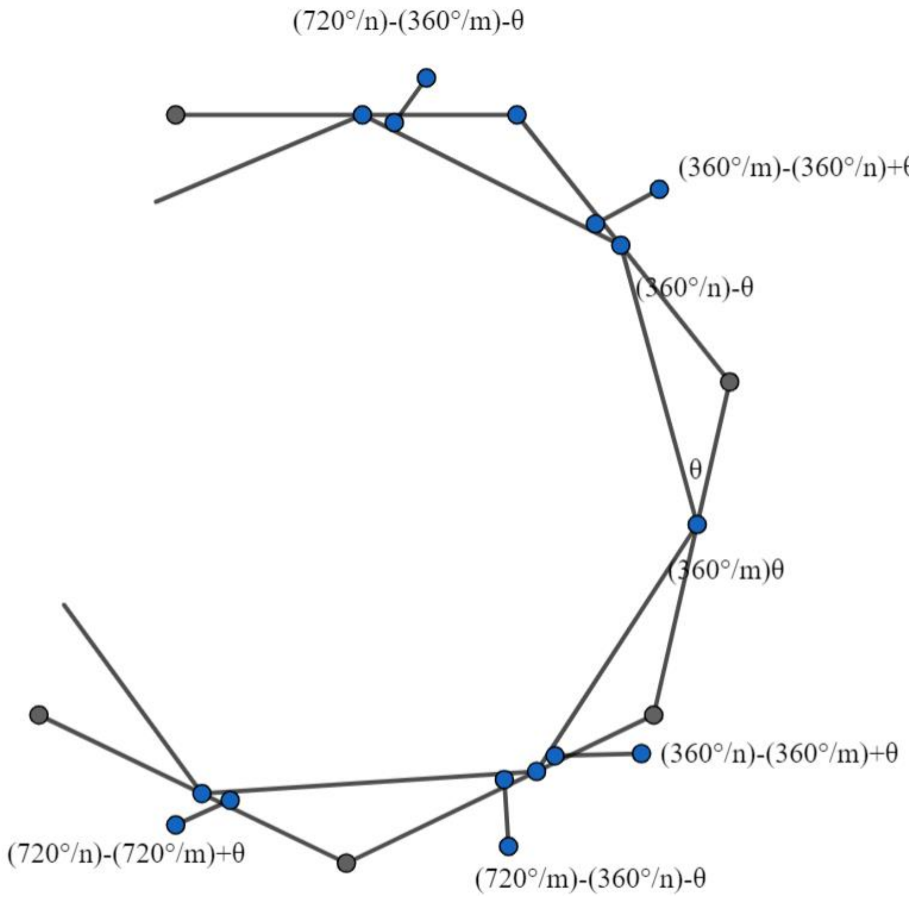
前述我們可以發現列出三條不等價的式子可使條件無解。

對於連續 n 邊形邊上皆有一個 m 邊形頂點，

至少需要連續五個邊可構造出三條不等價的式子，

因此我們先嘗試驗證連續五個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點。

(一) 連續五個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點



圖十四：連續五個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點

$$\sin\theta + \sin\left(\frac{720°}{n} - \frac{360°}{m} - \theta\right)$$

$$= \sin\left(\frac{360°}{n} - \theta\right) + \sin\left(\frac{360°}{n} - \frac{360°}{m} + \theta\right)$$

$$= \sin\left(\frac{360°}{m} - \theta\right) + \sin\left(\frac{720°}{n} - \frac{720°}{m} + \theta\right)$$

$$2\sin\left(\frac{360°}{n} - \frac{180°}{m}\right)\cos\left(\frac{360°}{n} - \frac{180°}{m} - \theta\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{360°}{n} - \frac{180°}{m}\right)\cos\left(-\frac{180°}{m} - \theta\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{360°}{n} - \frac{180°}{m}\right)\cos\left(-\frac{360°}{n} - \frac{180°}{m} - \theta\right)$$

$$\cos\left(\frac{360°}{n}-\frac{180°}{m}-\theta\right)=\cos\left(-\frac{180°}{m}-\theta\right)=\cos\left(-\frac{360°}{n}-\frac{180°}{m}-\theta\right)$$

⇒方程式無解。

連續五個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點必定無解。

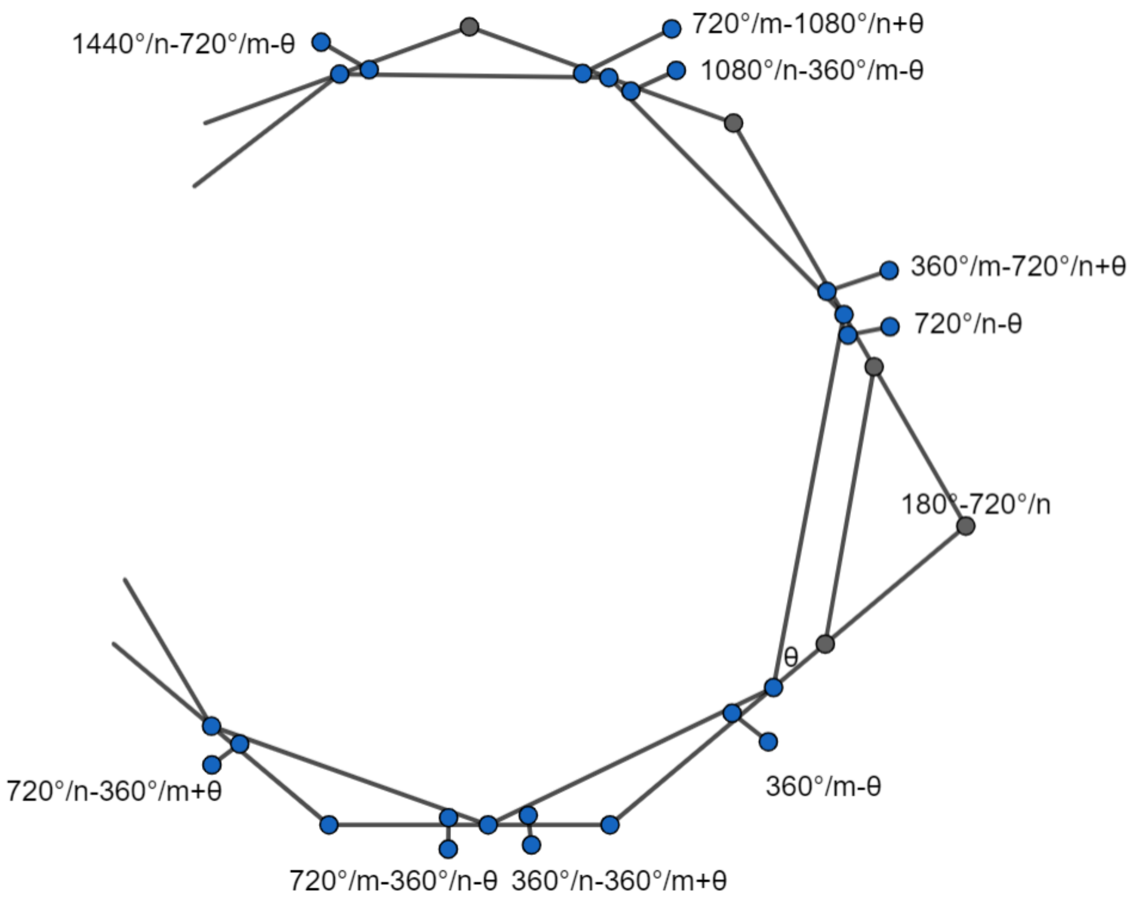
因此接下來我們可以探討一完整邊，

左右分別有連續(4,4)，(4,3)，(3,3)，(3,2)，(2,2)，(2,1)個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點

到何種情況下才可能有解

而我們先以中間項 (3,3) 驗證

(二) 一完整邊，左右各有連續 3 個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點



圖十五：左右各有連續 3 個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點

令邊長$=\sin\frac{360°}{n}$

$$\frac{\sin(\frac{720°}{n}-\frac{360°}{m}+\theta)+\sin(\frac{360°}{m}-\theta)}{1}=\frac{\sin(\frac{1440°}{n}-\frac{720°}{m}-\theta)+\sin(\frac{360°}{m}-\frac{720°}{n}+\theta)}{1}=$$

$$\frac{\sin(\frac{360°}{n}-\frac{360°}{m}+\theta)+\frac{\sin(\frac{360°}{n})}{\sin(\frac{720°}{n})}\sin(\frac{720°}{n}-\theta)}{1+\frac{\sin(\frac{360°}{n})}{\sin(\frac{720°}{n})}}=\frac{\sin(\frac{1080°}{n}-\frac{360°}{m}+\theta)+\frac{\sin(\frac{360°}{n})}{\sin(\frac{720°}{n})}\sin(\theta)}{1+\frac{\sin(\frac{360°}{n})}{\sin(\frac{720°}{n})}}$$

1,2 式、3,4 式運算均可得

$\theta=\frac{360°}{n}$

但帶回 23 式左右等號值不同。

而我們可以發現無須等式 2 也可證明無解，

因此圖十五中若左上角之點不存在亦可證明無解。

因此一完整邊，左右分別有連續 3 個，2 個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點亦無解，而 (4,3)(4,4) 中包含 (3,3) 的圖形必定無解。

因此接下來可探討，

一完整邊，左右各有連續 2 個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點。

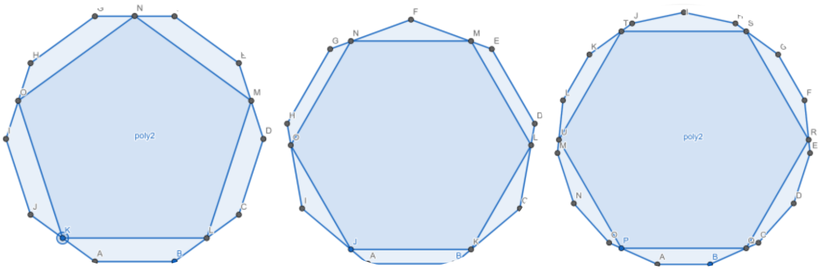
七、規律推論與驗證

(一) 規律推論

1. 令 $(n, m) = d$, 當 $\frac{m}{d} = 1 \vee 2$ 時有解

2. 令 $(n, m) = d$, 當 $\frac{m}{d} \geq 3$ 時無解

GGB$\frac{m}{d} = 2$實驗作圖結果如下圖



圖十六：正9、15、21 邊形內接正6 邊形

表三：改變 mn 時，是否有解

$\boldsymbol{m}$ =?	$\boldsymbol{n}$ =?	是否可以構造出圖形	$\boldsymbol{\frac{m}{d}}$ =?
5	6	否	5
	8	否	5
	9	否	5
	10	是	1
6	8	否	3
	9	是	2
	10	否	3
	15	是	2
	21	是	2
8	10	否	4
	12	是	2

(二) 規律證明

1. $\frac{m}{\boldsymbol{d}}=1$

$\frac{m}{\boldsymbol{d}}=1$ 的圖形在列式後會形成恆等式因此我們用θ列出方程式關係後

會發現 θ 可為任意值

⇒有無限多組解

2. $\frac{m}{\boldsymbol{d}}=2$

根據<標準型>的循環性質，以及 <$\frac{m}{\boldsymbol{d}}$ 的代表意義>

我們可以得到，將n邊形兩點間完整邊數寫出來後數列會呈現

$\lfloor\frac{(n-m)}{m}\rfloor, \lceil(\frac{(n-m)}{m}\rceil, \lfloor\frac{(n-m)}{m}\rfloor, \lceil(\frac{(n-m)}{m}\rceil \cdots\cdots$ 的形式。

例如：正 9 邊形內接正 6 邊形，

在以和差化積畫簡後，寫出有解形式時，

可以發現最後為

$k\sin\alpha\, cos(y-x)=\sin\beta\, cos(y-x)$ 的形式

$0°<y=\frac{180-n\text{邊形內角}}{2}\leq 60°\ \ (n\geq 6)$

此形式必有解。(因為只會有一組等式)

3. $\frac{m}{\boldsymbol{d}}\geq 3$

$\frac{m}{\boldsymbol{d}}\geq 3$ 的時候，因為 $\frac{m}{\boldsymbol{d}}$ 是最短循環節的長度，也因此我們在作如上正 m 邊形內接正 5、6 邊形的相同手法在兩個標示角度時，會發現第一次標 θ 角的頂點上該點以及第二次標θ角的頂點上改點中間恰有 $\frac{m}{\boldsymbol{d}}-1$ 個點，因此標角度時，也是以 $\frac{m}{\boldsymbol{d}}$ 個邊在作循環。

而我們發現，在依所標的角度列之間的三角函數關係時，恰也是 $\frac{m}{\boldsymbol{d}}$ 條式子之間相等，

又因為兩個式子間可以解出一個角度值，這些角度值兩兩相異，也因此 $\frac{m}{\boldsymbol{d}} \geq 3$ 時至少解出兩個不同的值

⇒必定無解

(三) 總結

$n > m \geq 5$, $(n, m) = d$

正 n 邊形內接正 m 邊形

1. $\frac{m}{\boldsymbol{d}} = 1$ 無限多解

2. $\frac{m}{\boldsymbol{d}} = 2$ 恰一解

3. $\frac{m}{\boldsymbol{d}} \geq 3$ 無解

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一) 正n邊形內接正 5 邊形, $n=6$，8，9 時無解，$n=10$ 有解。

(二) 正n邊形內接正6邊形, $n=8$ 時無解， $n=9$有解。

(三) 對任意 $m\geq 5$

連續五個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點、一完整邊，左右各有連續 3 個 n 邊形的邊有 m 邊形頂點，必定無解

(四) 找到 $(n,m)=d,\ \frac{m}{d}$ 於

1. $\frac{m}{d}=1\vee 2$ 有解

2. $\frac{m}{d}\geq 3$ 時無解

二、討論

正n邊形內接正m邊形有解如何構造圖形:

(一) $\frac{m}{d}=1$

由正 $4k$ 邊形內接正 4 邊形與正 nk 邊形內接正 n 邊形都可以發現圖形之間是相似的，

我們可以先算出對應的邊會有 m 邊形頂點

並且可以找定值使得每個 m 邊形頂點到 n 邊形頂點距離能被確定

(二) $\frac{m}{d}=2$

而另一組則是n邊形固定的情況下m邊形恰一組解，

任意一條m邊形必須與其中一或多條n邊形的邊平行。

這個正n邊形內接正m邊形必須是對稱圖形，

否則以n邊形其中一條對稱軸作對稱m邊形可得到第二個m邊形。

因此在確定兩個多邊形會有邊平行的情況下我們可以使用平行法構圖。

(三) 驗證構圖

為了要保證構圖準確而沒有視覺上的誤差。

首先構造正m邊形，

構造 n 邊形並使其三個頂點在 m 邊形上。

以坐標系與直線方程式，

驗證其餘點在 m 邊形其中一條邊上。

肆、研究結論與應用

一、有解規律:

(一) 正n邊形內接正m邊形於$(n,m)=d$，$\frac{m}{d}=1\vee 2$時有解。

(二) 正n邊形內接正m邊形於$(n,m)=d$，$\frac{m}{d}\geq 3$時無解。

二、構圖方式:

(一) $\frac{m}{d}=1$ 對應到文獻 [正 n 邊形內接正 4 邊形]

$m=4\ n=4k$ 。

(二) $\frac{m}{d}=2$ 對應到文獻 [正 n 邊形內接正 4 邊形]

$m=4\ n=4k+1\ \vee\ 4k+3$。的平行法

伍、參考資料

一、　黃文祈，游唯筠，羅宇呈(2015 年)。探討正n邊形的內接正三角形。科教館科展群傑廳。

https://www.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?a=6822&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=12396

二、　傅予潔(2019 年)。正n邊形內接正四邊形。科教館科展群傑廳。

https://www.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=15875

【評語】010018

這是先前作品的延伸。關於正 n 邊形內接正 m 邊形的可能性，之前的作品已證明：當 m 3 或 4 時， n 為任意數皆有解。本作品證明有解的充要條件，從而斷定 m 大於 5 時必有解，並且明白陳述解的建構方式。作者觀察獨到，題目也有意思，但似乎很難再發展，也許可以朝定量的方向進行。整體來說是一個有意思的作品。