2024年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　010013

參展科別　數學

作品名稱　無限棋盤上的各種騎士

得獎獎項　三等獎

就讀學校　國立臺灣師範大學附屬高級中學
指導教師　張飛黃、洪允東
作者姓名　任億恩

關鍵詞　騎士巡遊、無限棋盤、哈密頓路徑

作者簡介

我的名字是任億恩，現在就讀於台灣師大附中三年級科學班，從小就特別喜歡數學，也熱愛玩一些棋牌類的遊戲，例如撲克牌、西洋棋、將棋、拉密等等，休閒時也會看看動漫、追追劇。除此之外，我也喜歡各種不同的運動，諸如足球、桌球、羽球，其中我最喜歡的是足球，平常放學後也會和班上的同學一起踢。

摘要

騎士巡遊是一個著名的圖論問題，指的是給定一特定大小的棋盤，讓騎士透過日字型移動看是否能不重複的通過每一個點，若最後回到原點，則稱為哈密頓迴圈(閉循環)，若否，則為哈密頓路徑(開循環)。而這兩種問題前人都已經研究出了成立條件，因此我決定研究當騎士不再透過日字型的移動會發生什麼事，並探討能否透過特定移動方式，讓騎士能夠在無限大的棋盤上，不重複的通過每個格子點形成開循環。

而我的想法是先透過尋找騎士能走出來的單位圖形(矩形等能夠拼接成無限大平面的圖案)，如此，我的目標是著重在找出他們的單位圖形並想辦法拼接。

Abstract

Knight’s tour, a well-known problem of graph theory, refers to see if the knight can pass through each point on an given chessboard without repeating. If it will return to the origin in the end, the path is called a Hamiltonian cycle (closed cycle). If it won’t, then the path is called a Hamiltonian path (open cycle), which my research focuses on. After searching the information on the Internet, I noticed that these two questions had been solved, so I decided to research what happened when knight changes its moving ways and whether it can form a Hamiltonian path on an infinite board.

My idea is to let the path of the knight form a “unit graph” which can expand to infinite flat. Therefore, my goals is to find their unit graphs and try to expand them to an infinite board.

壹、前言

一、研究動機

在我小時候寫生字本的時候，就常常用馬步的形式跳著寫以增添樂趣，後來也嘗試用不同的走法來寫，常常想著要怎麼樣才能完美的填滿。而長大後也看到了關於騎士巡遊的科普知識,因而想要研究若是套用不同走法會有什麼效果，但由於普通的馬步問題常需要電腦程式的幫助，換了走法應該也是如此，但我程式能力並沒有很強，因此轉而研究無限大的棋盤，這也算是滿足我時候的好奇心。

二、研究目的

（一）從移動距離少開始，研究騎士的行走方式。

（二）分析在何種狀況下，騎士能夠走到每個格子。

（三）尋找騎士在特定方法下所能走出的單位圖形。

（四）找出能將單位圖形擴展到整個Z^2平面的方法。

（五）探索移動方式和可擴展單位圖形的規律。

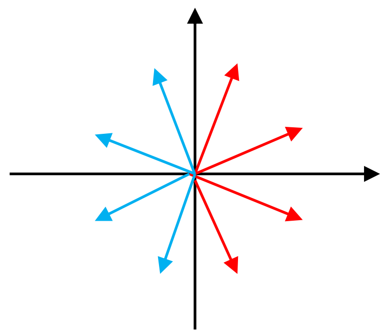
三、文獻回顧

我找到的資料僅與我研究中的存在性有關，即騎士能走到所有格子的條件，這個條件必須滿足才能嘗試鋪滿整個平面。若假設騎士的移動方式為$(m,n),(n \geq m \geq 0$ 且$m,n \in N)$，即將棋盤令為 x-y 座標平面，騎士從$(0,0)$移動到(m,n)就是他的移動方式，而結論有兩個：m、n 須互質且 m+n 須為奇數，其證明則會在後面提到。

貳、研究方法或過程

一、 走法討論

首先，我用向量$\vec{P}$表示騎士的移動方式，$\vec{P}=(m,n),\left(n\geq m\geq 0\text{且}m,n\in N\right)$，顯而易見，$(m,n)$、$(m,-n)$、$(-m,n)$、$(-m,-n)$、$(n,m)$、$(n,-m)$、$(-n,m)$和$(n,m)$皆是等價的。例如傳統的騎士巡遊，騎士的移動方式就是$(1,2)$，當然，其他七個方向與他也都是等價的。而在之後的研究中，我假設$\overrightarrow{P_1}=(m,n)$、$\overrightarrow{P_2}=(n,m)$、$\overrightarrow{P_3}=(n,-m)$、$\overrightarrow{P_4}=(m,-n)$以方便之後的計算，而剩下的四個向量就是他們各自的負向量，如圖一所示(圖中紅線表示$\overrightarrow{P_1}$~$\overrightarrow{P_4}$，藍線則是負向量)。



圖一

(一) m=n

這種情況下，騎士都是走斜線，假設起點在$(0,0)$，那怎麼走都不會到$(0,1)$，所以此種情況是無解的。

(二) m=0

1. n=1

騎士可移動到任意一個格子，而且很明顯的，單位圖形就是一個點，拼接方式很多種，必可以形成一個無限大的平面。(之後不會再另作討論)

2. n≥2

若初始位置在$(0,0)$，則不論怎麼走都不會走到$(0,1)$，所以在這種情況下無解。

(三)存在性證明

首先，若要鋪滿整個平面，則必須具備走到任何一點的能力，所以我先假設騎士能夠從$(0,0)$走到$(0,1)$，即 x 座標不變，y 座標改變1，由此可列出下列方程式。

$$a\overrightarrow{P_1}+b\overrightarrow{P_2}+c\overrightarrow{P_3}+d\overrightarrow{P_4}=(0,1)\ \ (a\sim d\in\mathrm{Z})$$

將向量展開後可得

$$am+bn+cn+dm=0 \qquad (1)$$

$$an+bm-cm-dn=1 \qquad (2)$$

將(1)式乘 n 加上(2)式乘 m 可得

$$2mna+(n^2+m^2)b+(n^2-m^2)c=m$$

並且我將其命名為最終式子。其中 $a\sim d$ 代表騎士要經過幾次$\overrightarrow{P_1}\sim\overrightarrow{P_4}$的移動，若其值為負就代表往其負向量移動，而如果騎士能夠走到任一點，則代入任意的m、n值都後可找到對應的 $a\sim d$ 之整數值，證明的方法就是利用最終式子中 a、b、c 的係數： $2mn$、n^2+m^2 、n^2-m^2。

1. $(m,n)=1$

要證明兩者必須互質，我先令 t 為 m、n 的公因數但t^2不是 m 的因數($t\in\mathrm{N}$)，則 a、b、c 的係數： $2mn$、n^2+m^2 、n^2-m^2三者皆為t^2的倍數，代表在最終式子中，左式為t^2的倍數右式則否，因此 t 必為1，即兩者必互質。

2. $m+n$ 須為奇數

已知兩者互質，所以假設 m、n 皆為奇數，則$2mn$ 、n^2+m^2 、n^2-m^2 三者皆為偶數且 m 為奇數，造成左式為偶數右式則否，等式不會成立，因此兩者相加必為奇數。

另外，我還嘗試找了是否有其他存在性條件，我假設 $m=k$、$n=k+p$，並代入到最終式子中，可得

$$2k(k+p)a+[(k+p)^2+k^2]b\ +p(2k+p)c=k$$

若要使等式不成立，代表 a、b、c 的係數有一共同因數 t，使得 t 不整除於 k，而觀察 a、c 的係數後可得以下結果:

$$(t|2 \text{ 或 } t|k \text{ 或 } t|k+p) \quad \text{且} \quad (t|p \text{ 或 } t|2k+p)$$

根據前述條件及 m 、n 互質篩選後，最後可得2為 t 的唯一解，即兩者相差為偶數時不會有解，雖然沒有找到新的存在性條件，但也找到另一種方式證明兩者相加須為奇數。

二、 構造單位圖形一： 最終式子

我第一種構造單位圖形的方法就是利用前述所提的最終式子，找到騎士移一格的方法並選取適當的路徑作為標準去推測他的單位圖形，這個方法的的好處是他有一套標準流程，但在選取適當路徑和推測單位圖形上非常困難，所以我只找到了兩種模式存在規律，$(m, n)=(1, 2k)$及$(m, n)=(k, k+1)$，其中 k 為正整數，以下為我的研究順序。

(一) (m, n)=(1, 2)

這就是傳統上騎士巡遊中騎士的走法，將 m、n 代入最終式子後可得$4a+5b+3c=1$，而為了將棋子的移動過程最小化，上式的未知數越多0越好，因此使用越接近0的解代入使等式成立，這裡代$a=-1$、$b=1$、$c=0$，將這個解代入最初兩條式子可得$d=-1$。

由上述結果可推得，若騎士要從$(0,0)$走到$(0,1)$，需經過$-\overrightarrow{P_1}$、$\overrightarrow{P_2}$、$-\overrightarrow{P_4}$的運算，如圖二所示。

	2	
		4
3		1

圖二

1是騎士的初始位置，移動三步後就到了初始位置的上面一格。透過這種方式的運算，就能算出騎士位移1格的方法。

接著，透過這種位移1格的方式，我做出了他的單位圖形，如圖三所示。

12	5	10
9	2	7
6	11	4
3	8	1

圖三

此圖就是在(m,n)=$(1,2)$的情況下能形成的單位圖形。

(二) (m, n)=(1, 4)

而之後我將 n 值提高，因為(m, n)=(1, 3)不滿足相加為偶數，所以下一個為(m, n)=(1, 4)，代入最終式子後可得$8a+17b+15c=1$。

與上述條件一樣，代$a=-2$、$b=1$、$c=0$，再代入原先兩式可得，$d=-2$，即騎士須經過2次$-\overrightarrow{P_1}$、1次$\overrightarrow{P_2}$、2次$-\overrightarrow{P_4}$的運算，如圖四。

	4		2	
				6
5		3		1

圖四

我也透過這種移動方式得到了他的單位圖形，如圖五所示。

40	19	38	17	36
35	14	33	12	31
30	9	28	7	26
25	4	23	2	21
20	39	18	37	16
15	34	13	32	11
10	29	8	27	6
5	24	3	22	1

圖五

(三) (m, n)=(1, 2k)

做了兩次後我發現他們之間存在某種規律，我也做了(m, n)=(1, 6)來驗證，最終我將他整理成下頁的流程。

1.$-\overrightarrow{P_4}$、$-\overrightarrow{P_1}$依序交替運算。

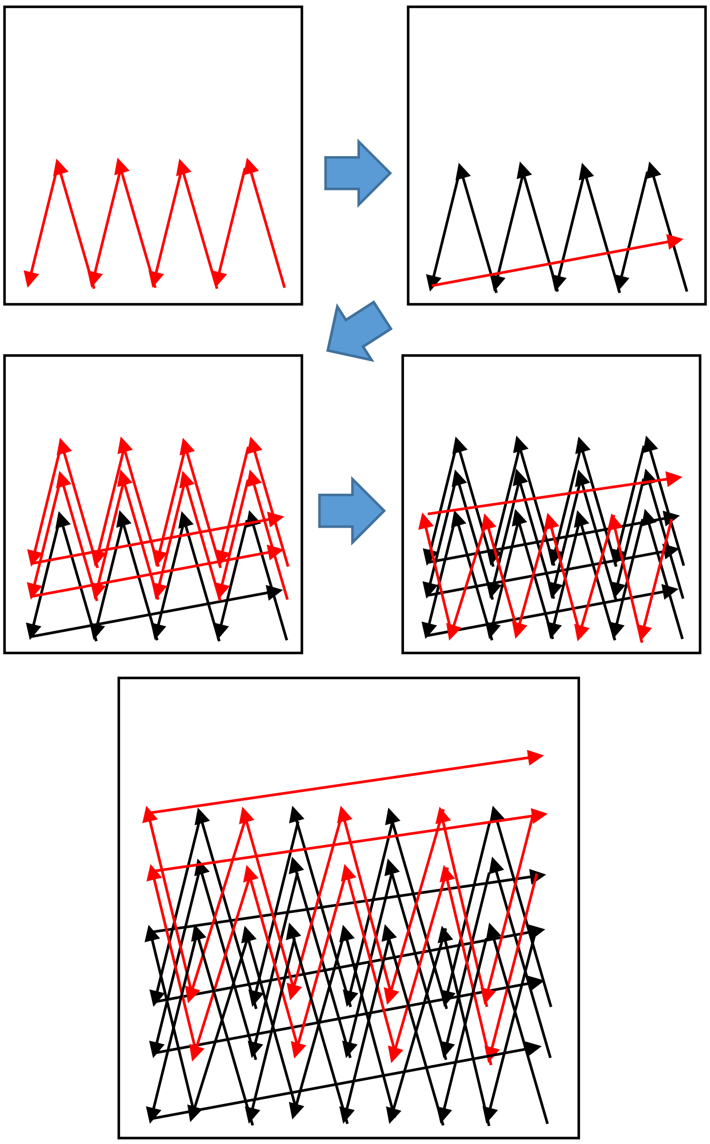
2.當騎士的 x 座標與初始位置距離為 n 時，執行$\overrightarrow{P_2}$。

3.重複(1)、(2)直到騎士左邊一格的位置已經被走過。

4.$-\overrightarrow{P_1}$、$-\overrightarrow{P_4}$依序交替運算，且當騎士的 x 座標與在(3)停留的點距離為 n 時，執行$\overrightarrow{P_2}$。

5.重複(4)直到騎士左邊一格的位置沒有被走過。

圖六為範例圖形(未依比例繪製)



圖六

去除掉最後一條線，就是他的單位圖形。其中寬為$2k+1$，高為$4k$。

而要達到這種狀況只有一個條件，即騎士能夠移動到一個與初始位置 x 座標相差 n 的地方，由於每進行一次$-\overrightarrow{P_4}$、$-\overrightarrow{P_1}$騎士的 y 座標不變，而 x 座標改變2(或-2)，又 n 為偶數，所以騎士透過不斷的進行$-\overrightarrow{P_4}$、$-\overrightarrow{P_1}$一定可以移動到一個點和初始位置的 x 座標相差 n，因此這種方法是適用於$(m, n)=(1, 2k)$。

(四) $(m, n)=(2, 3)$

接下來，我就調整 m 值，所以我試了$(m, n)=(2, 3)$。同理，代入最終式子後可得$12a+13b+5c=2$，我取$a=1$、$b=0$、$c=-2$，並代入原式，可得 $d=2$。讓騎士按$-\overrightarrow{P_3}$、$\overrightarrow{P_4}$、$-\overrightarrow{P_3}$、$\overrightarrow{P_4}$、$\overrightarrow{P_1}$的順序依序移動，則會得到圖七。

	2			
4				6
				1
			3	
		5		

圖七

而按照上面的移動過程，我製作出了其單位圖形，如圖八。

		7	12				
	9	2	17	24			
11	4	15	22	29	6		
	13	20	27	8	1	18	
		25	10	3	16	23	30
			5	14	21	28	
				19	26		

圖八

由於這個圖案的起始位置是被包裹住的，且因為終點是下個單位圖形的起始位置，所以這個圖形是無法擴展到無限大平面的。所以我微調了一下，做出了圖九作為之後研究用的單位圖形。

		26	19				
	28	21	14	7			
30	23	16	9	2	25		
	18	11	4	27	20	13	
		6	29	22	15	8	1
			24	17	10	3	
				12	5		

圖九

(四)(m, n)=(2, 5)

一樣，我先提高了 n 值，代入後得到了$20a+29b+21c=2$，而我取$a=-2$、$b=0$、$c=-2$，並代入原式，可得$d=-3$，並讓騎士按順序移動，可得出圖十。

			2			
7				5		
					8	
	3				1	
		6				4

圖十

雖然做出了移動一格的方式和步驟，但我一直沒辦法讓它形成一個漂亮的完整圖形，可能須採其他的方式進行研究。

(六) (m, n)=(3, 4)

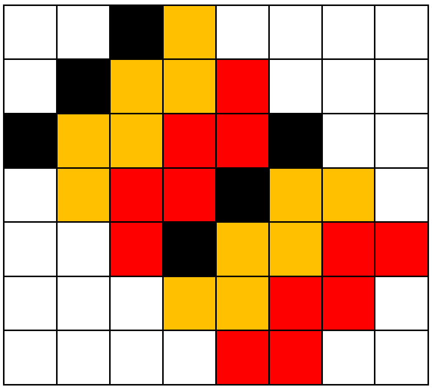
於是我又一次改了 m 並嘗試(m, n)=(3, 4)。代入後得到了$24a+25b+7c=3$，我取$a=1$、$b=0$、$c=-3$，並代入原式，可得$d=3$，並讓騎士按順序移動，並以此做出了單位圖形，可得出圖十一。

			50	41						
		52	43	34	25					
	54	45	36	27	18	9				
56	47	38	29	20	11	2	49			
	40	31	22	13	4	51	42	33		
		24	15	6	53	44	35	26	17	
			8	55	46	37	28	19	10	1
				48	39	30	21	12	3	
					32	23	14	5		
						16	7			

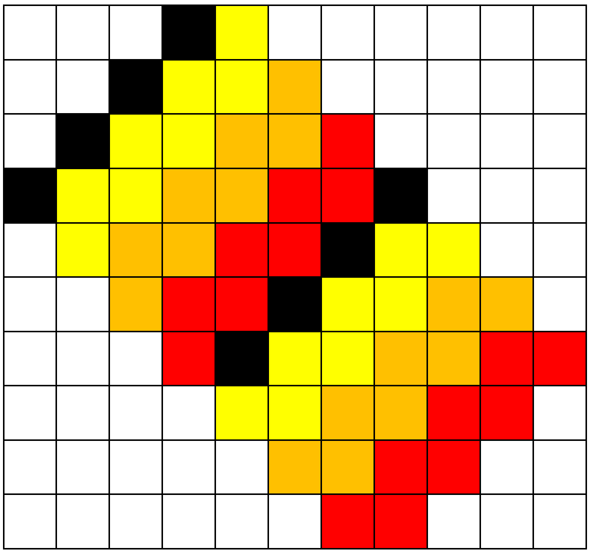
圖十一

(七)$(m, n)=(k, k+1)$ $(k\in \mathrm{N})$

由$(m, n)=(2, 3)$及$(m, n)=(3, 4)$的單位圖形我發現了一個規律，如以下兩圖所示。 (圖十二為(2, 3)、圖十三為(3, 4))



圖十二



圖十三

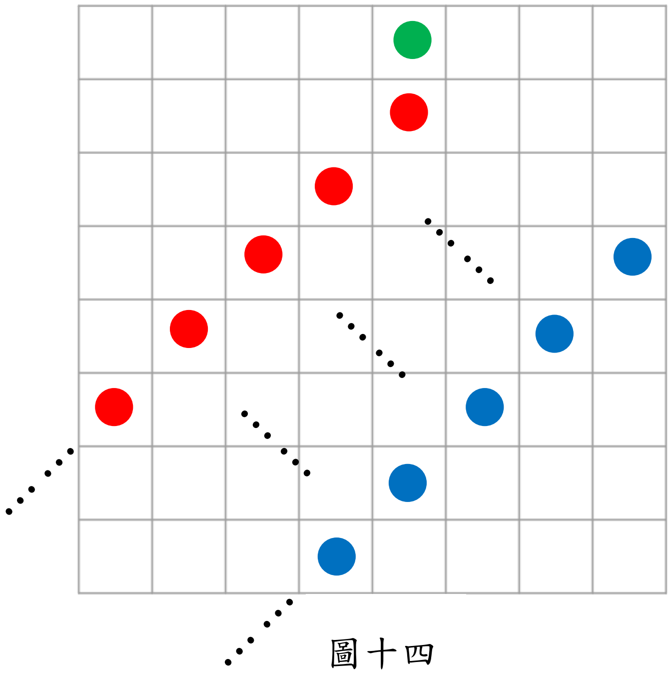
我觀察這兩種情形中騎士的走法，並發現了一種循環，即騎士可以透過不斷重複一種同樣的移動模式來完成單位圖形。第一次循環我以紅色表示、第二次為橙色、第三次為黃色，而黑色就是最後不完整的半循環。

從兩圖中可發現，圖十二是每12個一循環、圖十三是每16個一循環，我就在想是否每一個$(m, n)=(k, k+1)$都有這個規律，而若這個移動方式可行需驗證兩點，循環之存在及循環之延展。

1.循環之存在

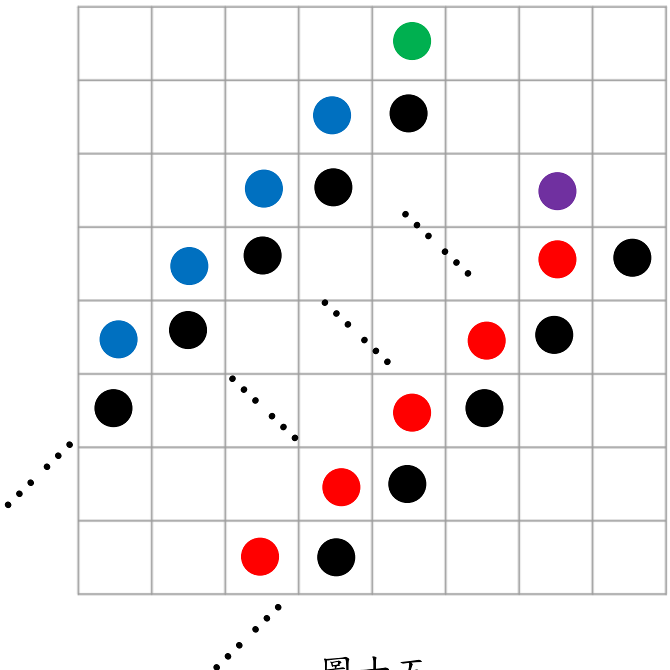
由於騎士的移動方式為$(k, k+1)$，所以完成斜角的移動只需兩步，很

明顯的，騎士能透過這種方法不斷把斜線延伸，如圖十四所示。



圖十四

其中藍點為奇數點、紅點為偶數點，而藍點和紅點可以不斷延伸下去，我們第一步要證明的就是騎士能夠移動到綠點。對於每個紅色點來說，他與綠色點的座標差為$(p\text{-}1, p)$，其中 p 屬於正整數。而當 $p=k+1$時，騎士就能以$(m, n)=(k, k+1)$的方式移動到綠色點。



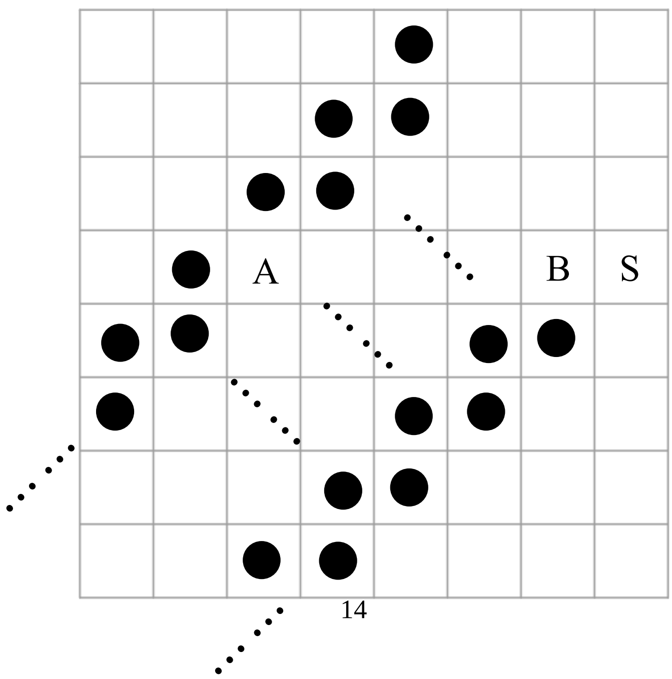
圖十五

而第二步，就是要證明綠點能夠移動到紫色點，如圖十五，黑點為已經走過的點，藍點一樣為奇數點、紅點為偶數點，且都可以一直延伸下去。跟第一步很像，我們可以觀察每一個紅點，他們都會被騎士經過，且與紫色點的座標差皆為$(q\text{-}1, q)$，同理，當 $q=k+1$時，騎士就能移動到紫色的位置。

當騎士能經過綠點並停在紫點時，就是完成了一個循環

2.循環之延展

可以觀察到，除去紫色的點，完成一次循環騎士只會走到4條斜率-1的直線上(以下簡稱-1直線)，所以若是將紫色點視為新循環的起點，那麼圖案就可不斷平移過去直至填滿為止，加上前面所說最後會有一個半循環，所以可以知道第一次循環後(不包括紫點)圖案中間會有奇數條-1直線。證明如下。



圖十六

若要證明中間有奇數條-1直線，只需證明圖十六中 A、B 兩格之間有奇數個格子即可。(S 為起點)

假設 S 的座標為(c, d)，經過 t 次移動後會到達 A 點，先看兩點的 y 座標可列出下列式子。

$$d + tk + (t-1)(k+1) = d$$

化簡後可得

$$t = k + 1$$

再看騎士經過這 k+1次移動，到達 B 點時 x 座標是多少。

$$c - (k+1)t + k(t-1) = c - t - k = c - 2k - 1$$

而 A 點的 x 座標很明顯，就是 c-1，將兩者相減，兩點的 x 座標差$2k$，所以兩點中間有2k-1個格子，為奇數個，符合條件。

由於這兩點都已經成功證明了，所以當(m, n)=$(k, k$+1)時，騎士可以按照這個模式進行移動。

一、 擴展方式一

接下來就是討論這些單位圖形能不能鋪滿整個平面，由於我目前只研究出了兩種確定能形成最小單位圖形的規律，所以我就只以這兩種來做討論。

40	19	38	17	36
35	14	33	12	31
30	9	28	7	26
25	4	23	2	21
20	39	18	37	16

15	34	13	32	11
10	29	8	27	6
5	24	3	22	1

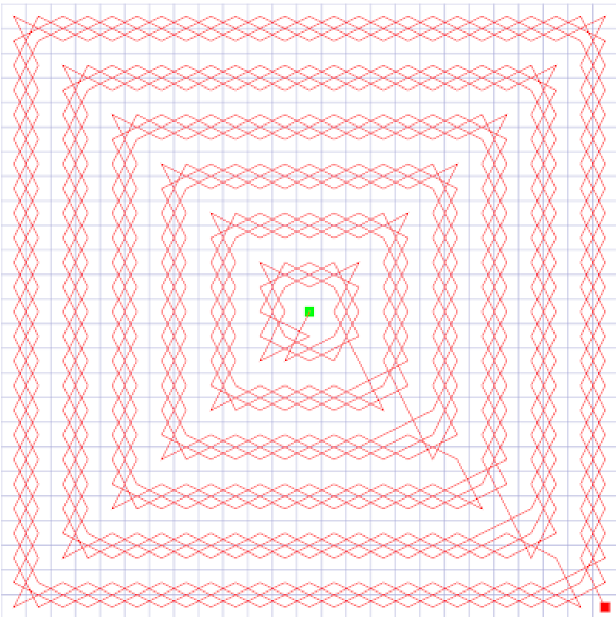
圖十七

		26	19				
	28	21	14	7			
30	23	16	9	2	25		
	18	11	4	27	20	13	
		6	29	22	15	8	1
			24	17	10	3	
				12	5		

圖十八

圖十七為$(m, n$ [illegible] 圖十八為(m, n)=(2,3)，其中圖中紅色的地方為起點、藍色為終點。而由於兩者的規律及證明皆已完備，所以若其中一個例子成立即代表可以推廣到其他情形，因此我就以這兩種為例子來研究。

此外，由於是要鋪滿無限大的平面，所以查詢網路上的資料後我發現螺旋型的擴展方式可以很完美的達成條件，如圖十九(圖來源於文獻三)。



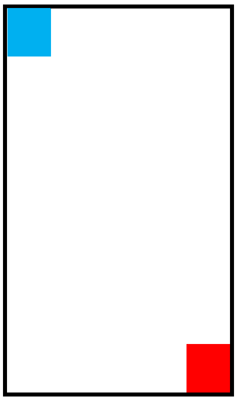
圖十九

此圖是(m, n)=(1, 2)，圖中綠色為起點，紅色為終點，他是用不斷纏繞的方式先作一個小矩形，再不斷擴展出去，是可以無限延伸的。理論有點類似單位圖

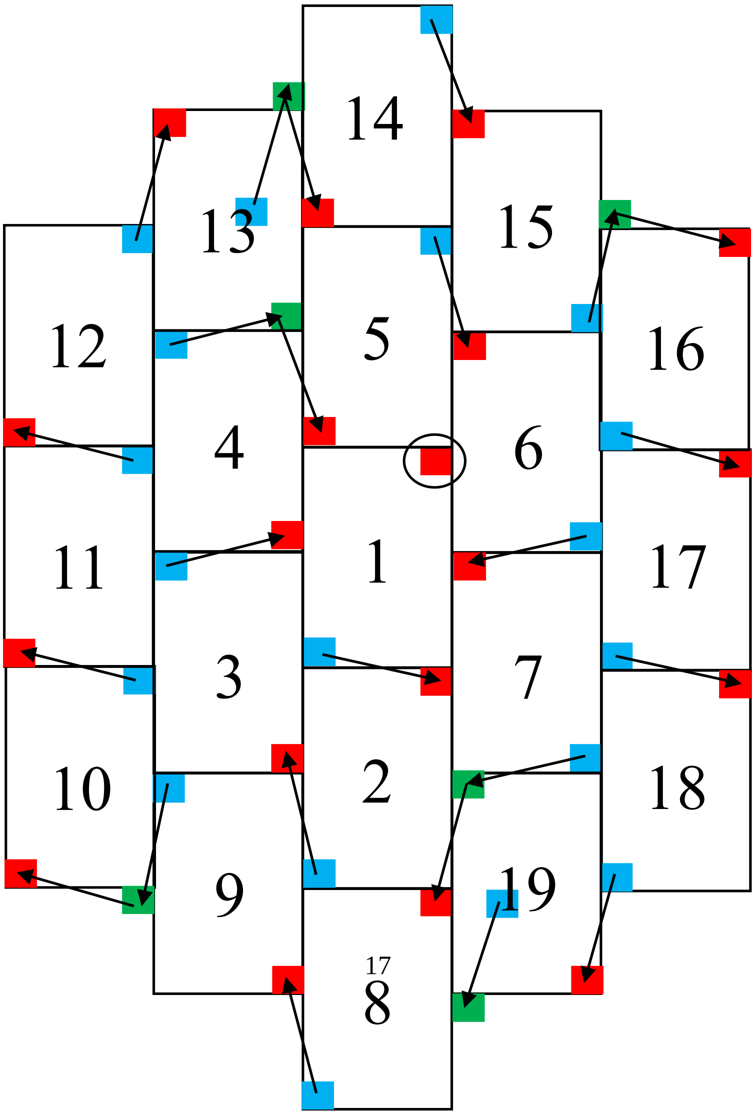
形，只是他對圖形放大再疊加上去，是一個可以研究的方向，但我目前想採用的方法是用單位圖形作螺旋式的堆疊。

(一) $(m, n)=(1, 4)$

我會以圖二十來作為延伸的基本單位圖形，同上，紅色的為起點、藍色的為終點。當然，若是圖案左右翻轉或上下翻轉也是行的通的。



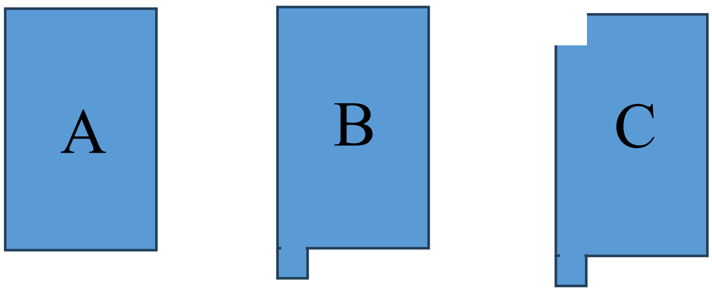
圖二十



圖二十一

圖二十一是我用圖二十來做擴展至無限大平面的圖形，其中被圓圈包住的紅點為騎士移動的起點、數字則代表騎士移動單位圖形的順序，且當騎士移動到一個單位圖形中的紅點時，他可直接移動到當格的藍點，而其他箭頭代表其他種的移動方式，是利用單位圖形多走一格、少走一格的方式組成，也就是綠點，另外，我還設定讓每一圈的起點會在當圈的最下方。

可以看出這個圖案是順時鐘螺旋式擴展的，而為了說明這個圖案可以延伸至無限大的平面，我將其分為三種不同的區塊組合而成，如下圖二十二所示。



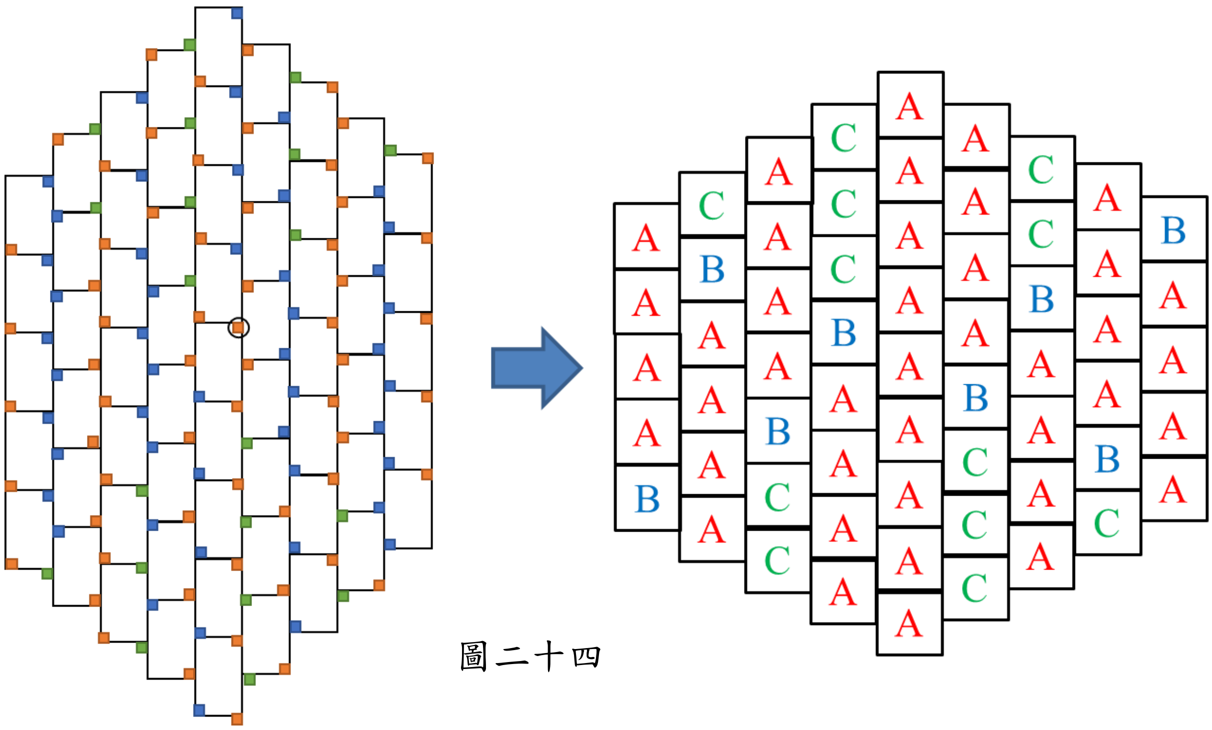
圖二十二

其中 A 區塊為普通的單位圖形，而 B 區塊代表的是騎士從終點離開到了一個新的起點，C 區塊則是因為 B 區塊多一格所以需要空一格且需要從終點的前一格離開，因此會多一格，詳細構造如下圖二十三表示。

				S
40	19	38	17	36
35	14	33	12	31
30	9	28	7	26
25	4	23	2	21
20	39	18	37	16
15	34	13	32	11
10	29	8	27	6
5	24	3	22	1
S				

圖二十三

黑色 S 為普通起點，代表騎士從正常單位圖形終點離開，以$(m, n)=(1, 4)$舉例就是從第 40 格離開，而綠色 S 為特殊起點，代表騎士從單位圖形終點的前一格離開，也就是第 39 格。而我在將圖二十一繼續往外擴展並化成區塊表示後，會變成圖二十四。



圖二十四

在左圖中，圓圈處為騎士的起點，而橙色方塊和藍色方塊分別代表一個單位圖形的起點和終點，綠點即為特殊的起點。而化成右圖後可以找到幾個規律。

(一)A 區塊可以自由往上或往下。

(二)每一圈會有其中一條斜對角線的頂點上為一對 B，且每增加一圈就換一次對角線。

(三)由於 C 是因為 B 而出現的，所以若 B 出現在上半部，則 B 的上面全部都是 C，在下半部分同理。

由上述規律我可以預測接下來的區塊是什麼樣子且他可以不斷地往外擴張，也因此這個方法可以讓騎士走滿無限大的平面。

(二) (m, n)=(2, 3)

由圖十八(m, n)=(2, 3)的單位圖形中可發現他可以視為一個斜矩形，因此可以同樣套用在圖二十一中，也可以向圖二十二一樣分成三種區塊，由圖二十五的性質可知。

		S					
		26	19				
	28	21	14	7			
30	23	16	9	2	5		
	18	11	4	27	20	13	
		6	29	22	15	8	1
			24	17	10	3	
				12	5		
					S		

圖二十五

與圖二十三一樣，黑色為普通起點，綠色為特殊起點，因此也都會具備三種同樣性質的區塊，同樣可鋪滿至無限大的平面。

因為$(m, n)=(1, 2k)$及$(m, n)=(k, k+1)$我分別都是用同樣的方法構造單位圖形，也因此 k 的變化並不會影響他們的性質，所以雖然只說明$(m, n)=(1, 4)$、$(m, n)=(2, 3)$可以成功擴展，但其實$(m, n)=(1, 2k)$、$(m, n)=(k, k+1)$也同樣可以鋪滿無限大平面。

四、構造單位圖形二: 環狀堆疊

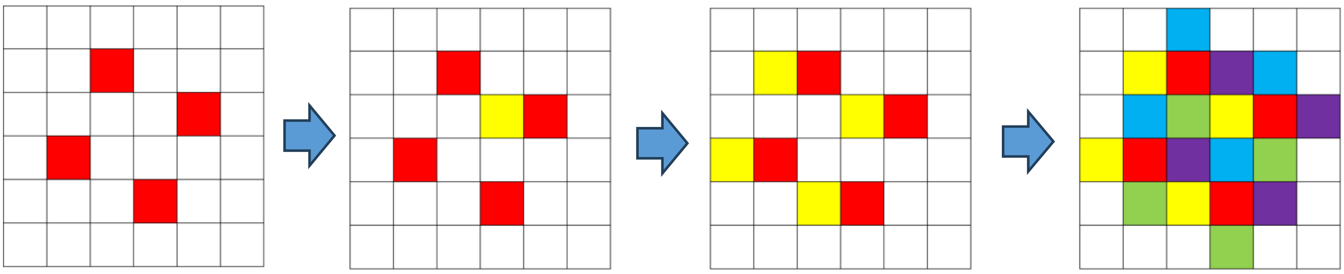
顧名思義，這個方法構造出的單位圖形由一個個的環所組成，好處是很容易能做出他的單位圖形且易於擴張，但壞處是其內部結構複雜，難以確定是否存在哈密頓路徑或哈密頓循環，其構造步驟如下。

(一)先走四步構造一個環，並標上紅色。

(二)取由這四格所包住的小正方形中的其中一格，標上其他顏色，並觀察離他最近的紅色方格並複製其相對位置到其他紅色方格。

(三)重複(二)直到小正方形中的格子全部都被填滿顏色。

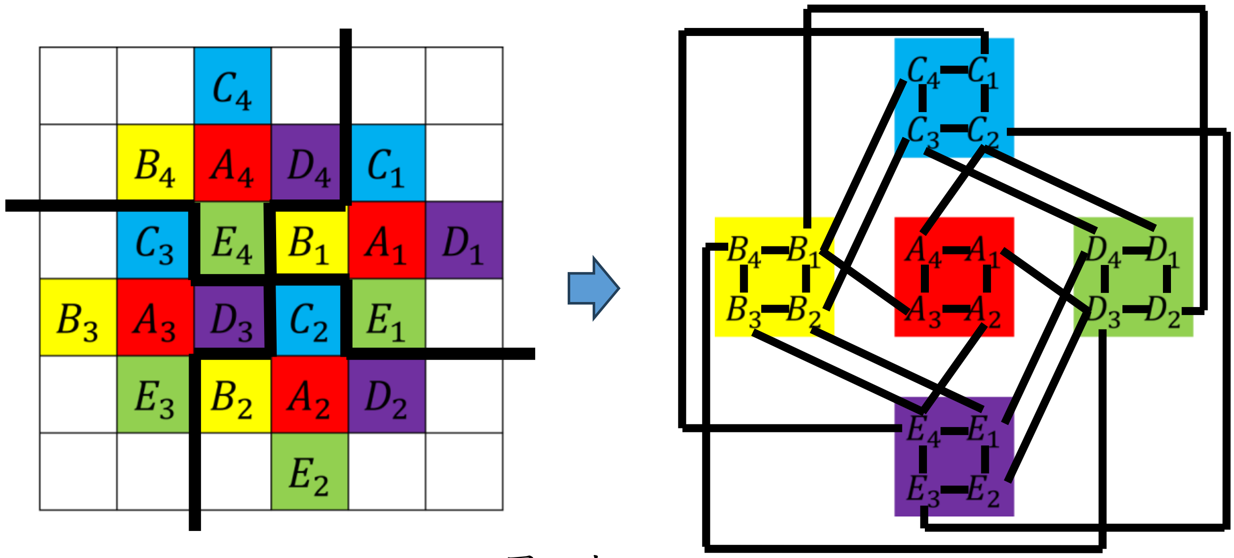
以$(m, n)=(1, 2)$為例，如圖二十六所示。



圖二十六

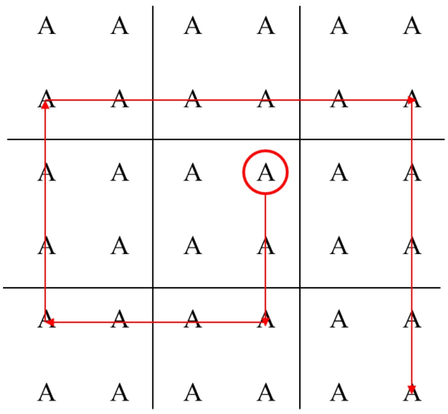
這種方法做出來的單位圖形由幾個性質。第一，因為 $m+n$ 為奇數，所以四個紅色方格所包住的小正方形邊長為偶數，代表其面積為 4 的倍數，因此其單位圖形可以分成四個相同的區塊且每個區塊必有一個中心我命名為A_1~A_4為，而我之後也發現其面積實際上為$4(n^2+m^2)$，但我還無法證明n^2+m^2的部分。第二，其每個點至少與另外三個點相連，因為同一個環就可以連出去兩個，而斜對面也可以連一個點。

之後我對每個點都進行命名也畫出其無向圖，以$(m, n)=(1, 2)$為例，如圖二十七所示。



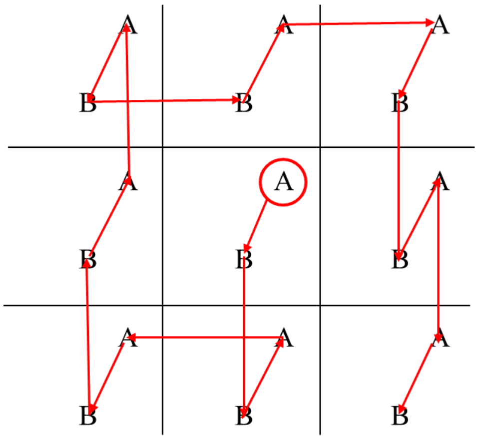
圖二十七

其中同個字母代表同個環，同個數字代表同個區塊，我也發現在$(m, n)=(1, 2)$時，若將棋盤黑白相間塗色，任一組黑白格可形成一組起終點，即滿足上限，因為 $m+n$ 為奇數，所以騎士每移動一次，其 x 座標加 y 座標和的奇偶性就會改變，加上其面積是偶數，因此棋盤黑白相間塗色的情況下，一組黑或一組白不能當起終點。但我無法確定當 m、n 值變大，這個條件是否還會滿足，因此我決定削弱他的強度，我從擴展方面著手，如圖二十八。



圖二十八

若能找到一組起終點為 A 的哈密頓路徑，則騎士就可以順利擴展，而後來我也發現只要起終點是同個字母就行，甚至只要起終點在相鄰區塊即可，如圖二十九所示。



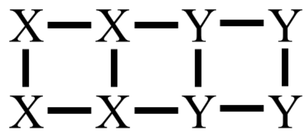
圖二十九

而有了這個條件，就代表若單位圖形中存在哈密度循環，則騎士必可以擴展至無限大平面，因為此循環中一定能找到一處地方切斷使得相鄰區塊的一組點成為一組起終點，因此可以尋找特定的哈密頓路徑或哈密頓循環來解決這個問題。

由於無向圖的結構非常複雜，所以目前我還想不到能夠證明每個符合的 m、n 值都能夠成功的方法，但我找到了兩種能化簡圖案並繼續研究的方向。

(一)尋找特殊結構

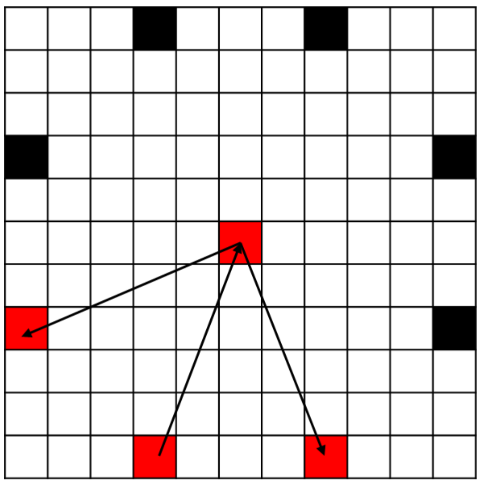
為了使其較容易發現哈密度路徑或循環，我主要是找圖三十這個結構。



圖三十

圖中的結構 X、Y 分別為相異的字母，我要找的就是兩個環有兩個連接的結構，而經過嘗試之後有了一個簡便的作法，以下以$(m, n)=(2, 5)$作為例子。

首先，除了(2, 5)外還需兩個向量，移動兩步後離原始位置最近的兩個非 0 向量，如下圖三十一所示



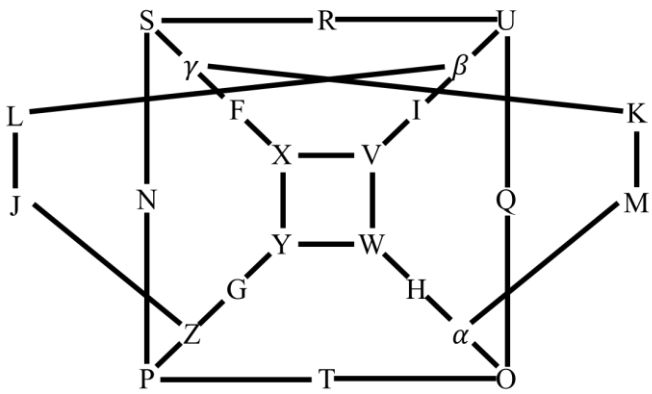
圖三十一

即(0, 4)和(-3, 3)，之後都將他們改成騎士移動向量的形式，所以此兩個向量為(0, 4)和(3, 3)。接下來，畫出$(m, n)=(2, 5)$單位圖形的其中一個區塊，並且找尋能透過(2, 5)、(0, 4)和(3, 3)連接而成的一對點，以 Z 點為例。

		Z				
	X	U	K	T	Y	
	N	H	C	I	S	α
	L	D	A	B	J	
γ	O	G	E	F	Q	
	V	R	M	P	W	
				β		

圖三十二

圖中可看出他與 J、P、G 都可連接，代表 Z 和他們都可以構成上述的特殊構造，而最終連線的結果如下圖。

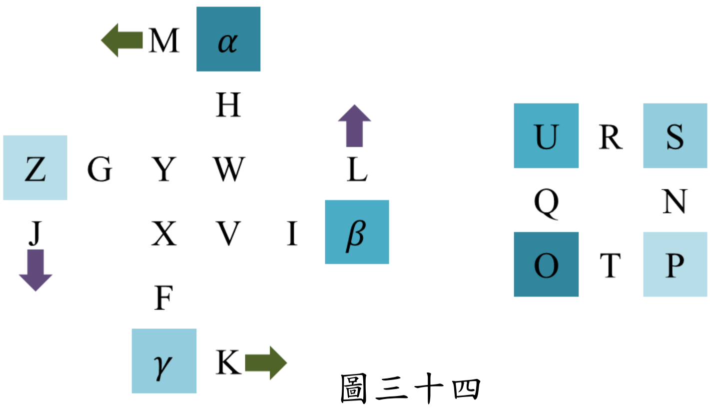


圖三十三

其中 A、B、C、D、E 皆未與任何點連線，代表他們必須單獨處理，也是這個作法的缺點。另外，我也發現由(2, 5)所連接的點不是我想要的那種特殊結構，而是立方體。因為我都是在同一個區塊內做移動，所以若一步就可以到，則可以複製到其他三區，而若要移動特定的兩步，我發現走過的三個點只會有兩種字母，而且只會發生在兩個相鄰的區塊，因此可以複製過去使其成為特殊結構，但我尚無法說明為什麼不會牽連到對角線的區塊。

之後還要將每個字母擴展成一個環，並調整他們的相對關係，最後結果如下圖，遵循下面這個規則，其各自的對位置不會改變。

$$A = \begin{matrix} A_4 - A_1 \\ | \qquad | \\ A_3 - A_2 \end{matrix}$$



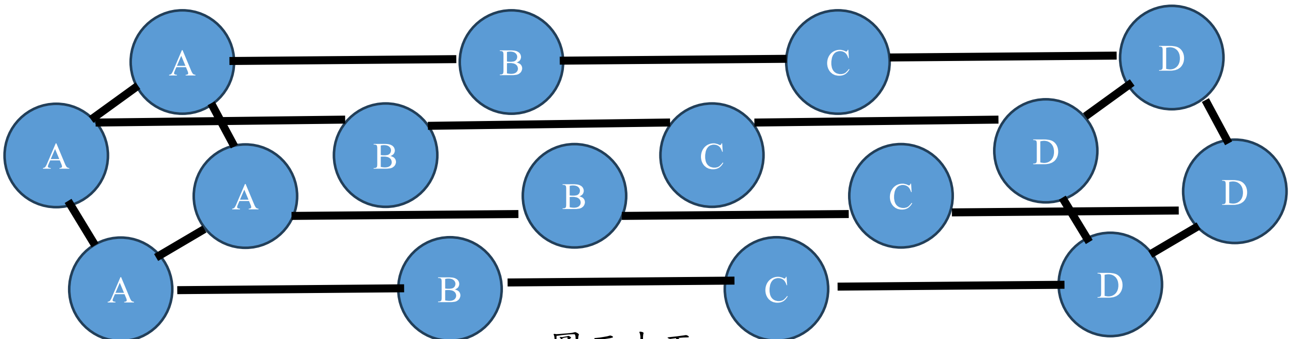
圖三十四

圖中的相對位置是確定的，且兩圖中相同的藍色代表他們是立方體結構，另外左圖中的 M、K 和 J、L 是相連的，但相比於無向圖這個圖會少幾根線。

而用這個方法，我找到了(m, n)=(2, 5)單位圖形符合條件的哈密頓路徑，但由於其路徑較複雜就不詳細列出。不過這個方法只能一個一個情況去試，也很難找到一般化的走法，所以我想到了另一種方法。

(二)尋找長方體結構

這個長方體結構跟上述所提到的不一樣，他不是由幾個部分的點所組成而是在全部的點中找出來，我的設想如下圖表示。



圖三十五

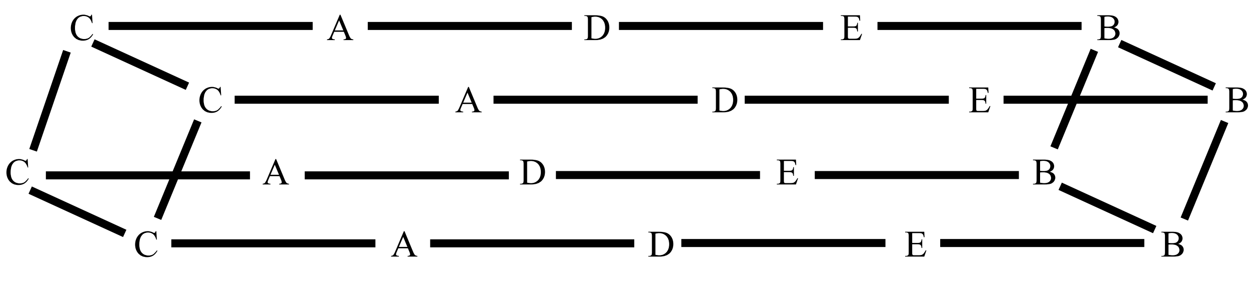
這個長方體是由兩個環作為底面，而四個支柱皆是相同的且長度為單位圖形中一個區塊所佔的格子數量，若找到了這個結構，則必有哈密頓循環。

顯而易見，之前的命名方法並不符合存在兩個環的條件，所以我用了另外一個方法給他們命名，以$(m, n)=(1, 2)$為例，如圖三十六。

		E			
	D	C	B	D	
	B	A	A	C	E
E	C	A	A	B	
	D	B	C	D	
			E		

圖三十六

可以看出他一樣可以分成四個區塊，只是其中的名字要透過旋轉 90 度來改變，而因為前面已提到中間的小正方形邊長必為偶數，所以必可找到對稱於中心點的兩個環，且這個方法的好處是只要每個字母都用一次，且起終點分別為那兩個環的字母，那就可以直接複製三次形成長方體，所以研究目標是解決重新命名後的哈密頓路徑問題，目前$(m, n)=(1, 2)$、$(1, 4)$、$(2, 3)$都可以成功找到解，但同樣也還無法一般化，而由於我是利用與中心點的距離來命名點，因此我想是否能利用這個距離來解決此問題，但目前還沒有實際的成果。以下為$(m, n)=(1, 2)$的範例。



圖三十七

參、研究結果與討論

研究結果：

一、 (m, n)為$(1, 2k)$、$(k, k+1)$可由一般化的結果作出其單位圖形並擴展至無限大棋盤上。

二、 $(m, n)=(2, 5)$能透過化簡其無向圖找到哈密頓循環及合適的哈密頓路徑使其能夠鋪滿整個平面。

討論：

由於不論我用上述中的什麼方式作圖，圖案往往都能呈現一定程度的對稱，加上已找到$(m, n)=(2, 5)$擴展的方式，所以我推測只要符合存在性條件，此騎士就可在無限大Z^2平面上形成哈密頓路徑。

肆、結論與應用

我用的方式是先找出最小圖形再做延伸，所以有些情況可能沒有考慮到，例如隨機移動，因此我僅能做出一定能鋪滿和一定不能鋪滿的情形，但我希望能透過這個題目來讓大家對於哈密頓循環與路徑有更深的理解，而最後我做出的結論如下所示。

一、 必能鋪滿整個平面: (m, n)為$(1, 2k)$、$(k, k+1)$、$(2, 5)$

二、 不能鋪滿整個平面: m、n 不互質或 m、n 同奇偶

在$(m, n)=(2, 5)$時，我僅能找到他的解存在，但還無法說明也無法一般化，未來希望能找到其他能夠一般化的系列，甚至採用類似環狀堆疊的方式將這種特殊的騎士巡遊擴展到更高維度。

伍、參考文獻

一、 朱安強、朱柏彥、吳泰輝、陳冠宇 (1998年)。馬步玄機。科教館科展群傑廳。
https://www.ntsec.edu.tw/ScienceContent.aspx?cat=86&a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=53&sid=4681

二、 Nick Lemoing(2019年12月18日)。Generalized Knights。Nick Lemoing。
https://lemoing.ca/blog/knight.html

三、 Hans Havermann(2019年5月11日)。Infinite knight tours。Blogger。
http://gladhoboexpress.blogspot.com/2019/05/infinite-knight-tours.html

【評語】010013

一個別出心裁的 Hamiltonian 問題，發現單位圖，探討遍歷棋盤的可能。作者有不少有趣的觀察，考慮周詳，建議進一步拓展研究深度。