

2024年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010007
參展科別 數學
作品名稱 格子點的可見性研究
得獎獎項 一等獎
美國國際科技展覽會 ISEF

就讀學校 國立屏東高級中學
指導教師 張宮明
作者姓名 林品樺、許日峻

關鍵詞 格子點、歐拉函數、黎曼 zeta 函數

作者簡介



我是許日峻，目前就讀屏東高級中學二年級。

從小，數學就是我最喜歡的科目，在解題的過程總能帶給我極大樂趣及成就感。升上高中進入了數理資優班後，也選擇了數學作為科展的科目。於研究過程中，培養了自身思考、討論、及合作等能力，我也十分享受與夥伴一同解決難題的過程，高中的科展時光是我求學旅途中難忘且珍貴的回憶。

我是林品樺，目前就讀屏東高級中學二年級。

數學一直以來都是我最感興趣的學科，平時除了學習上課的內容外，也喜歡在課餘時間與同學和老師研究不同的數學問題。高中進入了數理資優班後，因緣際會下開始研究數學科展，途中我們雖然遇到不少難題，不過在將它們解決之後所得到的成就感便會讓我覺得一切的努力都是值得且寶貴的。

摘要

本文的主要結果有兩部分，第一部分，對於固定的 $b \in N$ ，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，觀測目標為格子點陣列 $V(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ ，研究其中可見點的數量與機率。我們發現可見點的數量與歐拉函數及默比烏斯函數有關，可見點的機率也與黎曼zeta函數具有關聯性。第二部分，對於固定的 $b \in N$ ，我們在 x 軸與 y 軸上布置觀測點，以布置的觀測點為新原點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，研究將目標點集 $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$ 完整觀測的布點方法與數量。得到重要成果如下，設正整數 $m \geq 6$ 且 $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ -覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m \times n)$ ，建構觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) | t \in T\}$ ，則 $V(m \times n)$ 為 S_2 -可見。並進一步研究將目標點集改為 $V(n \times m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ ，發現其所需要的觀測點數可顯著減少。

Abstract

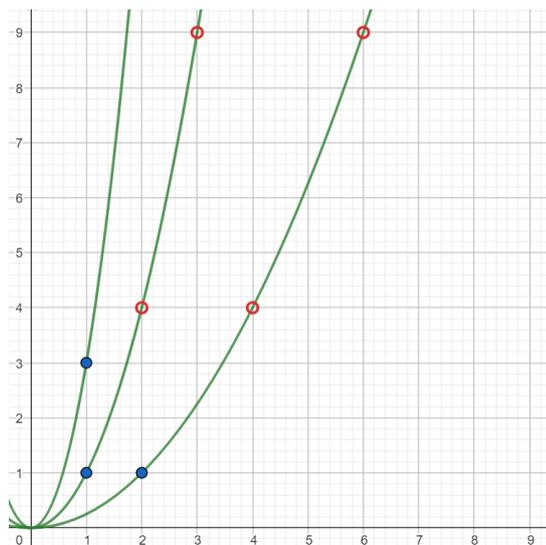
The main results of this article consist of two parts. In the first part, for a fixed value $b \in N$, we consider the origin O as the observation point, with the observational line given by $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$. The observed target is a lattice point array $V(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$. We study the quantity and probability of visible points. We find that the number of visible points, denoted as $h_b(m)$, which is related to the Euler function and the Möbius function, and the probability of visible points is also related to the Riemann zeta function. In the second part, for a fixed value $b \in N$, we arrange observation points on the x -axis and y -axis. We use $f(x) = ax^b, a \in Q$ as the observational lines in the coordinate system with observation points as the new origin. We study the methods and quantity of complete observation point placements for the target point set $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$. We obtain important results as follows: assume $m \geq 6$ and $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ is a $F(m)$ -cover, r be the smallest prime number greater than m . For the target point set $V(m \times n)$, we construct the observation point set $S_2 = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) | t \in T\}$. Then, $V(m \times n)$ is

$S_2 - visible$. Furthermore, we investigate the placement methods and quantity of observation points for the target point set $V(n \times m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ and find that the number of observation points can be significantly reduced.

壹、前言

一、研究動機

在閱讀了《Seeing Dots》〔參考文獻 2〕的文章之後，我們對其中的主題產生了興趣，也認為此項研究是具有發展性的。接著，指導老師提供了《Lattice Point Visibility on Generalized Lines of Sight》〔參考文獻 1〕這篇文章，其內容主要探討對於固定的正整數 b ，以 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，從原點 O 觀測第一象限的所有格子點之可見的機率。例如在圖一中，以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，從原點 O 觀測第一象限的所有格子點，觀測視線上的第一個格子點為可見點(藍色實心點)，觀測視線上不是第一個出現的格子點皆為不可見點(紅色空心點)。而在文獻[2]中，則是以 $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，在 x 軸與 y 軸上布置觀測點，找尋以最少的觀測點方式將格子點陣列完整觀測完畢的方法。雖然主軸大致相同，但研究的方向及焦點卻放在不同的面向上。因此，我們加以研究、分析、統整兩篇文獻，並將已有的結果深入研究發展，期望能從中找到更多的研究成果。



圖一：觀測視線與可見點及不可見點

二、研究目的

(一) 以原點 O 為觀測點，並以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，探討觀測目標點集為

$V(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ 時，可見點的數量與機率。

(二) 對於固定的 $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，以原點 O 為觀測點，並以 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，

探討觀測目標點集為 $V(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m\}$ 時，可見點的數量與機率。

(三) 研究如何布置最少的觀測點，以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，將目標點集

$V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$ 中的格子點觀測完畢。

(四) 對於固定的 $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ ，研究如何布置最少的觀測點，以 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測

視線，將目標點集 $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$ 中的格子點觀測完畢。

三、文獻回顧

文獻[1] 《*Lattice Point Visibility on Generalized Lines of Sight*》

首先，我們引用文獻[1]中的定義及推論如下：

定義 1： 設 b 為固定的正整數，點 $(r, s) \in N \times N$ ，若以下兩種情況同時發生即稱 (r, s) 為 b -不可見。

情況 1：點 (r, s) 位於函數圖形 $f(x) = ax^b$ 上， $a \in Q$ ，即 $s = ar^b$ 。

情況 2：存在整數 $k > 1$ ，使得 k 整除 r 且 k^b 整除 s 。

當點 (r, s) 只符合情況 1 但不符合情況 2 時則稱 (r, s) 為 b -可見。

在發展 b -可見的新領域中，文獻[1]的作者將最大公因數的定義做一般化的推廣。

定義 2： 對於固定的正整數 b ， gcd_b 的定義如下。

$$gcd_b(r, s) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k|r \text{ 且 } k^b|s\}$$

事實上，當 $b = 1$ 時， gcd_b 即為最大公因數 gcd 之定義。

由定義一與定義二可推得，當 $b \in N$ ， (r, s) 為 b -可見時， (r, s) 為目標點集 $V(m)$ 中，觀測視

線 $f(x) = ax^b$, $a \in \mathbb{Q}$ 上的第一個格子點。並得出下列重要引理。

引理 1：點 $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是 b -可見若且唯若 $\gcd_b(r, s) = 1$

證明：首先，請注意對任意一點 (r, s) 皆存在一個特定的 $a = s/r^b$ 滿足 $s = ar^b$ ，即滿足定義 1 的情況 1。根據定義 1，若點 $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是 b -可見，則 $s = ar^b$, $a \in \mathbb{Q}$ ，且不存在一個整數 $k > 1$ ，使得 k 整除 r 且 k^b 整除 s ，得 $\gcd_b(r, s) = 1$ 。

反之，若 $\gcd_b(r, s) = 1$ ，則當 k 整除 r 且 k^b 整除 s 時，最大的整數 $k = 1$ ，因此，點 (r, s) 不滿足定義 1 的情況 2。因此 (r, s) 是 b -可見。

□

在文獻[1]中，Edary H. Goins 等人運用機率乘法原理及黎曼 zeta 函數 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 證明了一個非常漂亮的結果，敘述如下。

對於固定的 $b \in \mathbb{N}$ ，以原點 O 為觀測點，並以 $f(x) = ax^b, a \in \mathbb{Q}$ 為觀測視線，點 $(r, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的 b -可見機率為 $\frac{1}{\zeta(b+1)}$ 。

其證明請參閱文獻[1]，下表為 $b = 1, 2, 3, 4$ 時 b -可見的機率。

b	$\zeta(b+1)$	$\frac{1}{\zeta(b+1)}$	$1 - \frac{1}{\zeta(b+1)}$	50×50 陣列中 b -不可見機率
1	1.644	0.608	0.392	$953/2500 \approx 0.381$
2	1.202	0.832	0.168	$339/2500 \approx 0.160$
3	1.082	0.924	0.076	$166/2500 \approx 0.066$
4	1.036	0.964	0.035	$75/2500 \approx 0.030$

表一

但文獻中沒有提及目標點集 $V(m)$ 的可見點數量的計算公式，因此我們想進一步研究目標點集 $V(m)$ 的可見點數量計算公式。

文獻[2] 《Seeing Dots》

文獻[2]中，作者楊宗諺、陳玟旭證明 $b = 1$ 的情況如下

以原點為觀測點，目標點集為 $V(m) = \{(i, j) | i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i, j \leq m\}$ ，以 a_m 表示 $V(m)$ 中原點所

看不到的目標點個數，下表列出 a_m 的初始值($1 \leq m \leq 10$)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_m	0	1	2	5	6	13	14	21	26	37

表二

以下等式成立，其中符號 $\phi(x)$ 表示尤拉函數，

$$a_m = m^2 - 1 - 2 \sum_{k=1}^m \phi(k)$$

上述結果與文獻[1]中 $b = 1$ 的情況相關，而且文獻[2]的作者楊宗諺、陳玟旭探討了在原點 O 與兩軸正向上布置最少觀測點將原點 O 不可見的格子點觀測完畢的方法，成果豐富。

但是 $b \geq 2$ 的情況在文獻中尚無結果，因此，我們想進一步研究 $b \geq 2$ 的情況。此即為我們的研究目的 1 與研究目的 2。

文獻[3] 《第五講—歐拉函數》

在文獻[3]中提及歐拉函數的一個性質，此性質如下所述，其證明方法在我們發展新結果時會引用並加以推廣。

若 $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ 是 a 的標準分解式，則

$$\phi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)。$$

證明：

因為不超過 a 而為 p_1 的倍數的正整數，共有 $\left[\frac{a}{p_1}\right] = \frac{a}{p_1}$ 個，它們分別是

$$p_1, 2p_1, 3p_1, \dots, \left[\frac{a}{p_1}\right] p_1。$$

所以不超過 a ，而與 p_1 互質的正整數的個數為 $a - \frac{a}{p_1} = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$ ；

因為不超過 a ，而為 p_2 的倍數的正整數，共有個 $\left[\frac{a}{p_2}\right] = \frac{a}{p_2}$ 個：

$$p_2, 2p_2, 3p_2, \dots, \left[\frac{a}{p_2}\right] p_2。$$

但這 $\frac{a}{p_2}$ 個 p_2 的倍數中，有些已是 p_1 的倍數，在計算 p_1 的倍數，在計算 p_1 時已計算過，這些數

是在 $1, 2, 3, \dots, \frac{a}{p_2}$ 中，與 p_1 互質的正整數的個數，它共有 $\frac{a}{p_2} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)$ 個。

於是，不超過 a ，而與 p_1, p_2 都互質的正整數的個數為

$$a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) - \frac{a}{p_2} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)。$$

但這 $\frac{a}{p_3}$ 個 p_3 的倍數中，有些也是 p_1, p_2 的倍數，所以要除去它們。

在此，只須考慮在 $1, 2, 3, \dots, \frac{a}{p_3}$ 中與 p_1, p_2 都互質的個數即可。

由上述計算方法可知，不超過 $\frac{a}{p_3}$ 且與 p_1, p_2 都互質的正整數的個數為：

$$\frac{a}{p_3} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right)。$$

於是可知，不超過 a ，而與 p_1, p_2, p_3 都互質的正整數的個數為

$$a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) - \frac{a}{p_3} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)。$$

按這樣的程序進行下去，因為 n 是有限數，故得不大於 a 而與 p_1, p_2, \dots, p_n 都互質的正整數的

個數共有 $a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ 個，

即 $\phi(a) = a \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ 成立。

□

貳、研究方法或過程

一、研究目的 1 與目的 2 的探討

我們發現文獻[2]的定理 9 與文獻[1]的定理 1 兩者的結果間具有關聯性。

在文獻[2]的定理 9 中提到，以原點 O 作為觀測點， $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集為 $V(m)$ 時，其不可見點的數量 a_m 有以下結果，其中符號 $\phi(x)$ 表示歐拉函數：

$$a_m = m^2 - 1 - 2 \sum_{k=1}^m \phi(k)$$

但我們在計算時發現，其中有所筆誤，應修正為：

$$a_m = m^2 + 1 - 2 \sum_{k=1}^m \phi(k)$$

重新論證後我們得出下列定理。

定理 1：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 的可見點數量為

$$2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1$$

證明：

引用文獻[2]中的定理 9 的證明，目標點集 $V(m)$ 中不可見點的數量為 a_m 滿足下列遞迴關係式：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_m = a_{m-1} + 2m - 1 - 2\phi(k) \end{cases}$$

由上述遞迴式及 $\phi(1) = 1$ 可得

$$\begin{aligned} a_m &= 2(2 + 3 + 4 + \dots + m) - (m - 1) - 2 \sum_{k=2}^m \phi(k) \\ &= (m + 2)(m - 1) - (m - 1) - 2 \sum_{k=2}^m \phi(k) \\ &= m^2 - 1 - 2 \sum_{k=2}^m \phi(k) \\ &= m^2 + 1 - 2 \sum_{k=1}^m \phi(k) \end{aligned}$$

因此，以原點 O 為觀測點，目標點集 $V(m)$ 中可見點的數量為

$$m^2 - a_m = 2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1$$

□

而文獻[1]的定理 1 證明了，對於固定的 $b \in N$ ，同樣以原點 O 作為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ 為觀測視線，目標點集為第一象限的所有格子點時，其可觀測點的機率為

$$\frac{1}{\zeta(b+1)}$$

其中符號 $\zeta(s)$ 表示黎曼 zeta 函數 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 。

因此，我們有以下的定理。

定理 2：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集為第一象限的所有格子點時，其可觀測點的機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1}{m^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

證明：

證明：引用定理 1，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 的可見點數量為 $2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1$ ，而目標點集 $V(m)$ 的格子點數量為 m^2 ，因此目標點集為第一象限的所有格子點時，其可見點的機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1}{m^2}$$

而將文獻[1]的結果取 $b = 1$ 得第一象限的所有格子點的可見點機率為 $\frac{1}{\zeta(2)}$ ，故得證

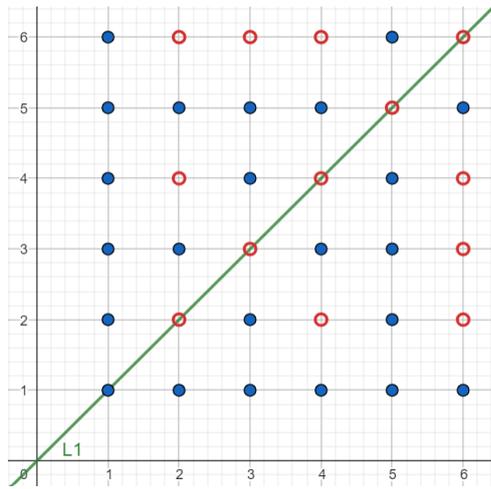
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1}{m^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

當我們以 $m = 100$ 的目標點集 $V(100)$ 為例時，得出可見點數量為 $2 \sum_{k=1}^{100} \phi(k) - 1 = 6087$ ，因此可見點的機率為 0.6087 。而 $b = 1$ 時， $\frac{1}{\zeta(b+1)} = \frac{1}{\zeta(2)} \approx 0.6079$ ，可知 $m = 100$ 時，其可見點機率與 m 趨近無窮大時的結果已相當接近。

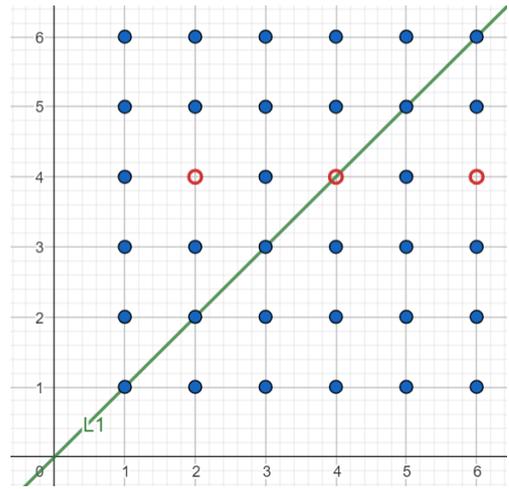
在文獻[1]內容中沒有提及可見點的確實數量，而文獻[2]有給 $b = 1$ 時，可見點的實際數量，但 $b \geq 2$ 時還是未知的領域，因此，接下來我們將探討 $b \geq 2$ 時，可見點數量的公式。

首先考慮當 $b = 2$ 時，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，探討 $V(m)$ 為目標點集時，其可見點數量和機率，也嘗試推演出固定的公式及更一般性的計算方法。

我們在經過比較後發現，當以 $b = 1$ 與 $b = 2$ 兩種不同觀測視線 $f(x) = ax$ 與 $f(x) = ax^2$ ，在觀測目標點時，可見點的分布有所不同。



圖二： $b = 1$ 時可見點數(紅色空心為不可見點)



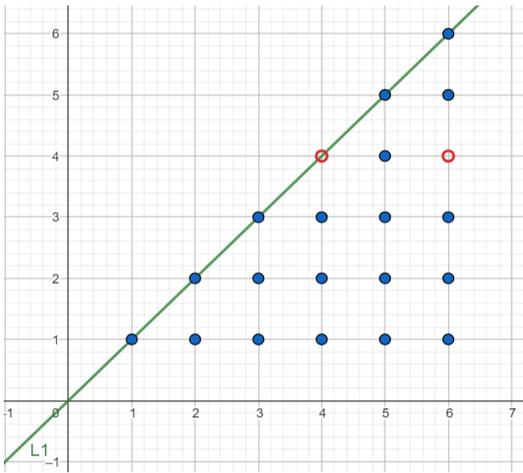
圖三： $b = 2$ 時可見點數(紅色空心為不可見點)

如圖二、圖三所示，我們以 $L_1: y = x$ 直線將目標點集分為兩個部分：

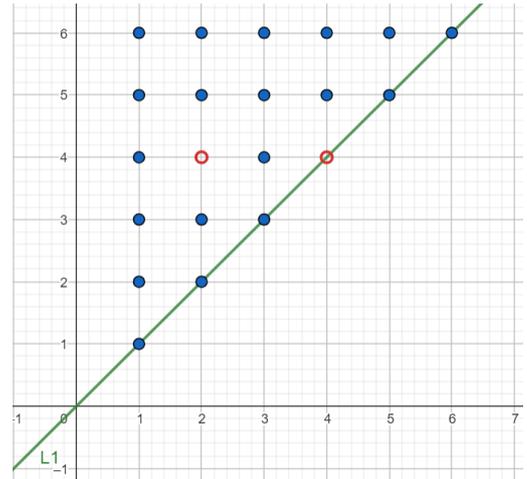
$V_1(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq j \leq i \leq m\}$ 與 $V_2(m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq j \leq m\}$ (兩部分皆包含 L_1)，其中 $V_1(m)$ 即為直線 L_1 及其右下等腰直角三角形陣列， $V_2(m)$ 即為直線 L_1 及其左上等腰直角三角形陣列。

當 $b = 1$ 時， $V_1(m)$ 與 $V_2(m)$ 的可見點具有對稱性，且是以 L_1 為對稱軸的圖形，所以在計算可見點數時可將 $V_1(m)$ 的可見點數 $\times 2$ 再減1。(因為 $V_1(m)$ 的可見點數與 $V_2(m)$ 的可見點數相同，且 $L_1: y = x$ 直線上的除了點(1,1)被重複計算了兩次之外，其餘都是不可見點，所以不會重複計算。)

而當 $b = 2$ 時，因其可見點不具有對稱性，無法以相同的步驟計算可見點，因此我們將 $V_1(m)$ 與 $V_2(m)$ 分開計算，如下圖所示：



圖四： $V_1(m)$ 的可見點數(紅色空心為不可見點)



圖五： $V_2(m)$ 的可見點數(紅色空心為不可見點)

而後我們也發現了 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 上的可見點與某些函數具有關聯性，並推導出一些公式。

為了方便推導，我們有下列定義。

定義 3：下列英文符號都是屬於正整數

(1) 2 次質因數：若 p 為質數，且滿足 $p^2 | n$ ，則稱 p 為 n 的 2 次質因數。

(2) b 次質因數：若 p 為質數，且滿足 $p^b | n$ ，則稱 p 為 n 的 b 次質因數。

(3) 集合 A_p^n 表所有小於或等於 n 的正整數中，含有質因數 p 之正整數的集合。

$$\text{即 } A_p^n = \{x | x \leq n \text{ 且 } p|x, p \text{ 為質數}\}。$$

(4) 集合 $A_{p^b}^n$ 表所有小於或等於 n 的正整數中，含有因數 p^b 之正整數的集合。

$$\text{即集合 } A_{p^b}^n = \{x | x \leq n \text{ 且 } p^b|x\}。$$

(5) 設 p 為質數， $\bigcup_{p|n} A_p^n$ 表所有滿足 p 為 n 的質因數的 A_p^n 的聯集。

(6) 設 p 為質數， $\bigcup_{p^b|n} A_p^n$ 表所有滿足 $p^b|n$ 的 A_p^n 的聯集。

$$(7) A_p^i = \{x | x \leq i, \text{ 且 } p|x\}$$

(8) $\psi_2(x)$ 為小於或等於 x 的正整數中不為 x 之質因數平方的倍數個數。

即 $\psi_2(x) = |\{j|j \leq x \text{ 且滿足 } gcd_2(x, j) = 1\}|$ 。

(9) $\psi_b(x)$ 為小於或等於 x 的正整數中不為 x 之質因數 b 次方的倍數個數。

即 $\psi_b(x) = |\{j|j \leq x \text{ 且滿足 } gcd_b(x, j) = 1\}|$ 。

(10) $|A|$ 表示集合 A 的元素個數。

首先我們希望找出 $V_1(m)$ 之2-可見點，如圖四所示。我們依序計算 $V_1(m)$ 分別在 $x = 1, x = 2, x = 3 \dots, x = m$ 上的2-可見點並求其總和。

位於 $V_1(m)$ 上的可見點，我們能透過以下方式計算出。

在直線 $x = 1$ 上的點有 $(1,1)$ ，其為2-可見點。

在直線 $x = 2$ 上的點有 $(2,1), (2,2)$ ，皆為2-可見點。

在直線 $x = 3$ 上的點有 $(3,1), (3,2), (3,3)$ ，皆為2-可見點。

以此類推，在直線 $x = 18$ 上的點有 $(18,1), (18,2), (18,3), \dots, (18,17), (18,18)$ ，其中 $(18,4), (18,8), (18,9), (18,12), (18,16), (18,18)$ 為2-不可見點，其餘皆為2-可見點。

可看出滿足 $gcd_2(18, j) = 1$ 的點皆為2-可見點，滿足 $gcd_2(18, j) \neq 1$ 的點皆為2-不可見點。

事實上，由引理 1 可知，在直線 $x = i$ 上滿足 $gcd_2(i, j) = 1$ 的點皆為2-可見點，滿足 $gcd_2(i, j) \neq 1$ 的點皆為2-不可見點。因此，我們藉由定義 $\psi_2(x)$ 為小於或等於 x 的正整數中不為 x 之質因數平方的倍數個數，可得位於 $V_1(m)$ 上且在直線 $x = i$ 上的可見點個數為 $\psi_2(i)$ 。藉由文獻[3]的內容中所提到歐拉函數 $\phi(n)$ 的計算靈感，利用取捨原理，我們推得計算 $\psi_2(n)$ 的公式如下。

定理 3：設 n 為正整數， $[x]$ 表示高斯符號，則

$$\psi_2(n) = n - \left| \bigcup_{p|n} A_{p^2}^n \right|$$

證明：

若 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 是 n 的標準分解式，由 $\psi_2(n)$ 的定義及取捨原理可得知

當 n 只有一個質因數 p_1 時，

$$\psi_2(n) = n - |A_{p_1^2}^n| = n - \left\lfloor \frac{n}{p_1^2} \right\rfloor$$

當 n 有二個質因數 p_1 、 p_2 時，

$$\psi_2(n) = n - |A_{p_1^2}^n \cup A_{p_2^2}^n| = n - \left\lfloor \frac{n}{p_1^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p_2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_1^2 p_2^2} \right\rfloor$$

當 n 有三個質因數 p_1 、 p_2 、 p_3 時，

$$\begin{aligned} \psi_2(n) &= n - |A_{p_1^2}^n \cup A_{p_2^2}^n \cup A_{p_3^2}^n| \\ &= n - \left\lfloor \frac{n}{p_1^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p_2^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p_3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_1^2 p_2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_1^2 p_3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_2^2 p_3^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p_1^2 p_2^2 p_3^2} \right\rfloor \end{aligned}$$

以此類推，當 n 有 k 個質因數 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_k 時，我們可得 $\psi_2(n)$ 之公式如下

$$\psi_2(n) = n - \left| \bigcup_{p|n} A_{p^2}^n \right|$$

□

$\psi_2(n)$ 雖然與 $\phi(n)$ 很類似，但因為 n 不一定是 p^2 的倍數，所以不像 $\phi(n)$ 可以有如下的公式。

若 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ 是 n 的標準分解式，則 $\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ 。

利用定理 3，我們依序計算 $V_1(m)$ 分別在 $x = 1, x = 2, x = 3 \cdots, x = m$ 上的 2-可見點並

求其總和，即可證明 $V_1(m)$ 之 2-可見點數公式如下定理。

定理 4：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V_1(m)$ 之 2-可見點數為

$$\sum_{k=1}^m \psi_2(k) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right|$$

證明：

如圖四所示，依序計算 $V_1(m)$ 分別在直線 $x = 1, x = 2, x = 3 \cdots, x = m$ 上的 2-可

見點並求其總和。在直線 $x = k$ 上滿足 $gcd_2(k, j) = 1$ 的點皆為 2-可見點，滿足 $gcd_2(k, j) \neq 1$ 的點皆為 2-不可見點，因此，我們藉由定義 $\psi_2(x) = |\{j | j \leq x \text{ 且滿足 } gcd_2(x, j) = 1\}|$ 。即可得在直線 $x = k$ 上滿足 $gcd_2(k, j) = 1$ 的點的個數為 $\psi_2(k)$ ，故得 $V_1(m)$ 中 2-可見點個數總和為

$$\sum_{k=1}^m \psi_2(k) = \sum_{k=1}^m \left(k - \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right| \right) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right|$$

□

我們利用定理 3 中 $\psi_2(n)$ 的公式計算 n 從 1 到 100 的值如以下結果，其對應在 $V_1(m)$ 中的直線 $x = 1$ 至 $x = 100$ 上的可見點數量如下表三：

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	3	5	5	7	6	8	8
10	11	8	13	11	14	12	17	12	19	15
20	19	17	23	16	24	20	24	21	29	19
30	31	24	30	26	34	24	37	29	36	29
40	41	29	43	33	39	35	47	32	48	36
50	46	39	53	36	53	41	51	44	59	38
60	61	47	55	48	63	44	67	51	62	50
70	71	48	73	56	64	57	76	53	79	57
80	72	62	83	55	82	65	78	66	89	57
90	90	69	83	71	92	64	97	72	88	72

表三： $V_1(m)$ 中在直線 $x = 1$ 至 $x = 100$ 上的 2-可見點數量

因此利用表三可計算 $\sum_{k=1}^{100} \psi_2(k) = 4223$ ，此即為在 $V_1(100)$ 中的 2-可見點數量。

我們利用計算 $\psi_2(n)$ 的結果在 OEIS(數列搜尋器)上找到另一個相同的數列

$$a(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor$$

其中 $\mu(x)$ 為默比烏斯函數。其定義為

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^k & \text{若無平方數因數，且 } n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ 0 & \text{若 } n \text{ 有大於 } 1 \text{ 的平方數因數} \end{cases}$$

因此，我們得下列引理 2。

引理 2：

$$\psi_2(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor$$

證明：

若 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 是 n 的標準分解式，由定理 3 與取捨原理及默比烏斯函數定義可得知

$$\psi_2(n) = n - \left| A_{p_1^2}^n \cup A_{p_2^2}^n \cup \cdots \cup A_{p_k^2}^n \right| = \sum_{d|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor$$

□

利用引理 2，我們可較快速計算 $V_1(m)$ 之 2-可見點數。

在討論完 $V_1(m)$ 上可見點數目的計算方式之後，我們將目標轉為 $V_2(m)$ 上的可見點。首先，需要如下定義。

定義 4： $\phi_2(n) = |\{i | i \leq n \text{ 且滿足 } gcd_2(i, n) = 1\}|$ 。

而位於 $V_2(m)$ 上的可見點，則分別求出在直線 $y = 1, y = 2, \dots, y = m$ 上的 2-可見點並求其總和。而 $\phi_2(n)$ 可利用以下公式計算而得。

定理 5：設 n 為正整數， $\phi_2(n) = |\{i | i \leq n \text{ 且滿足 } gcd_2(i, n) = 1\}|$ ，則

$$\phi_2(n) = n - \left| \bigcup_{p^2|n} A_p^n \right|$$

證明：由 $\phi_2(n)$ 的定義及取捨原理可得知

當 n 只有一個 2 次質因數 p_1 時，

$$\phi_2(n) = n - |A_{p_1}^n| = n - \left\lfloor \frac{n}{p_1} \right\rfloor$$

當 n 有二個2次質因數 p_1 、 p_2 時，

$$\phi_2(n) = n - |A_{p_1}^n \cup A_{p_2}^n| = n - \left[\frac{n}{p_1} \right] - \left[\frac{n}{p_2} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2} \right]$$

當 n 有三個2次質因數 p_1 、 p_2 、 p_3 時，

$$\phi_2(n) = n - |A_{p_1}^n \cup A_{p_2}^n \cup A_{p_3}^n| = n - \left[\frac{n}{p_1} \right] - \left[\frac{n}{p_2} \right] - \left[\frac{n}{p_3} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_3} \right] + \left[\frac{n}{p_2 p_3} \right] - \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3} \right]$$

以此類推，當 n 有 k 個2次質因數 p_1 、 p_2 、 \dots 、 p_k 時，我們可得 $\phi_2(n)$ 之公式如下

$$\phi_2(n) = n - \left| \bigcup_{p^2|n} A_p^n \right|$$

□

將此公式結合文獻[3]中的公式進行推導，亦得以下結論，其中 p_1 、 $p_2 \cdots p_k$ 為 n 之所有的2次質因數：

$$\phi_2(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

請特別注意，此公式與歐拉函數 $\phi(n)$ 的不同之處在於公式中的 p_1 、 $p_2 \cdots p_k$ 必須為 n 之所有的2次質因數。

利用定理5即可證明 $V_2(m)$ 之2-可見點數公式如下定理。

定理6：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2$ ， $a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V_2(m)$ 之2-可見點數為

$$\sum_{k=1}^m \phi_2(k) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right|$$

證明：

如圖五所示，依序計算 $V_2(m)$ 分別在直線 $y = 1$ ， $y = 2$ ， \dots ， $y = m$ 上的2-可見點並求其總和。在直線 $y = k$ 上滿足 $\gcd_2(i, k) = 1$ 的點皆為2-可見點，滿足 $\gcd_2(i, k) \neq 1$ 的點皆為2-不可見點，因此我們定義 $\phi_2(n) = |\{i | i \leq n \text{ 且滿足 } \gcd_2(i, n) = 1\}|$ 。可得在直線 $y = k$ 上滿足 $\gcd_2(i, k) = 1$ 的點的個數為 $\phi_2(k)$ ，故得 $V_2(m)$ 中2-可見點個數總和為

$$\sum_{k=1}^m \phi_2(k) = \sum_{k=1}^m \left(k - \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right| \right) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right|$$

□

我們利用定理 5 中 $\phi_2(n)$ 的公式計算 n 從 1 到 100 的值如以下結果，其對應在 $V_2(m)$ 中的直線 $y = 1$ 至 $y = 100$ 上的可見點數量如下表四：

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	2	3	2	5	6	7	4	6	10
10	11	6	13	14	15	8	17	12	19	10
20	21	22	23	12	20	26	18	14	29	30
30	31	16	33	34	35	12	37	38	39	20
40	41	42	43	22	30	46	47	24	42	40
50	51	26	53	54	55	28	57	58	59	30
60	61	62	42	32	65	66	67	34	69	35
70	71	28	73	74	60	38	77	78	79	40
80	54	82	83	42	85	86	87	44	89	60
90	91	46	93	94	95	48	97	84	66	35

表四： $V_2(m)$ 中在直線 $y = 1$ 至 $y = 100$ 上的 2-可見點數量

因此利用表四可計算 $\sum_{k=1}^{100} \phi_2(k) = 4159$ 。此即為在 $V_2(100)$ 中的 2-可見點數量。

在理解 $\phi_2(n)$ 的公式原理之後，我們推論出 $\phi_2(n)$ 與默比烏斯函數 $\mu(x)$ 也具有關聯性，如下引理。

引理 3：

$$\phi_2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]$$

證明：

由定理 5 與取捨原理及默比烏斯函數定義可得知，若 n 有 k 個 2 次質因數 p_1, p_2, \dots, p_k 時，我們可得 $\phi_2(n)$ 之公式如下

$$\begin{aligned}
\phi_2(n) &= n - \left| \bigcup_{p^2|n} A_p^n \right| \\
&= n - |A_{p_1}^n \cup A_{p_2}^n \cup \dots \cup A_{p_k}^n| \\
&= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \\
&= \sum_{d^2|n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor
\end{aligned}$$

□

利用引理 3，我們可較快速計算 $V_2(m)$ 之 2-可見點數。

結合定理 4 與定理 6 即可得出 $m \times m$ 陣列 $V(m)$ 上可見點數之公式。

在觀察 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 上兩部分的 2-可見點時，皆包含 L_1 上的 2-可見點，而導致重複計算因此必須將其扣除，即 $(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (m,m)$ 中，滿足 $\gcd_2(i, i) = 1$ 的 2-可見點數，也就是 $m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right|$ 。因此，我們在整理之後導出下列公式。

定理 7：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 之 2-可見點數為

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m \psi_2(k) + \sum_{k=1}^m \phi_2(k) - \left(m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right| \right) \\
&= m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right| - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right| + \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right|
\end{aligned}$$

證明：

在計算 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 上兩部分的 2-可見點時，皆包含 L_1 上的 2-可見點，而導致重複計算因此必須將其扣除。即 $(1,1), (2,2), (3,3), \dots, (m,m)$ 中，滿足 $\gcd_2(i, i) = 1$ 的 2-可見點數，也就是 $m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right|$ 。此為必須扣除的點數，因此，我們在整理之後導出下列公式。

$V(m)$ 之 2-可見點數為 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 上兩部分的 2-可見點數和扣除 L_1 上的 2-可見點數即

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \psi_2(k) + \sum_{k=1}^m \phi_2(k) - \left(m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right| \right) \\
&= \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right| + \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right| - \left(m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right| \right) \\
&= m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right| - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right| + \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right|
\end{aligned}$$

故得證。

□

當我們以 $m = 100$ 的目標點集 $V(100)$ 為例時，得出可見點數量為 $\sum_{k=1}^{100} \psi_2(k) + \sum_{k=1}^{100} \phi_2(k) - \left(m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right| \right) = 8321$ 。因此可見點的機率為 0.8321 。而 $b = 2$ 時， $\frac{1}{\zeta(b+1)} = \frac{1}{\zeta(3)} \approx 0.8319$ ，可知 $m = 100$ 時，其可見點機率與 m 趨近無窮大時的結果已相當接近。

雖然上述方法在結果得出了很漂亮的公式，但在計算上卻沒有理想中的簡便。因此我們改變了計算的方法，將 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 合併計算，並分別引用類似於 ψ_2 和 ϕ_2 的概念，使其函數中的變數 k 改為定值 m ，進而得出想法更為直接的公式。

定理 8： 當以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，設目標點集 $V(m)$ 中所有的 2-可見點數為 $h_2(m)$ ，則

$$h_2(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right|$$

證明：

在計算目標點集 $V(m)$ 上的 2-可見點時，我們分別計算 $x = 1, x = 2, x = 3 \cdots x = m$ 上的 2-可見點並求其總和。在直線 $x = k$ 上的 2-可見點 (k, j) 需滿足 $\gcd_2(k, j) = 1$ ，因此 $x = k$ 上的 2-可見點個數為小於或等於 m 中不為 k 之質因數平方的倍數個數，即 $\{j | j \leq m \text{ 且滿足}$

$$gcd_2(k, j) = 1\} = m - \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right|。$$

換言之，在直線 $x = k$ 上滿足 $gcd_2(k, j) = 1$ 的點皆為 2-可見點，滿足 $gcd_2(k, j) \neq 1$ 的點皆為 2-不可見點，而在直線 $x = k$ 上滿足 $gcd_2(i, k) = 1$ 的點的個數為 $m - \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right|$ ，故得 $V(m)$ 中 2-可見點個數總和 $h(m)$ 之公式如下。

$$\begin{aligned} h_2(m) &= \sum_{k=1}^m \left(m - \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right| \right) \\ &= m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right| \end{aligned}$$

□

我們利用上述公式計算在 $V(m)$ 中的直線從 $x = 1$ 至 $x = 100$ 上的 2-可見點數量，如以下結果：

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	75	89	75	94	66	98	75	89	72
10	100	66	100	73	85	75	100	66	100	72
20	87	75	100	66	94	75	89	73	100	63
30	100	75	89	75	94	66	100	75	89	72
40	100	64	100	75	85	75	100	66	98	72
50	89	75	100	66	94	73	89	75	100	63
60	100	75	87	75	94	66	100	75	89	70
70	100	66	100	75	85	75	98	66	100	72
80	89	75	100	36	94	75	89	75	100	63
90	98	75	89	75	94	66	100	73	89	72

表五： $x = 1$ 至 $x = 100$ 上的 2-可見點

當以 $m = 100$ 為例時，目標點集 $V(100)$ 的可見點數 $h(100)$ 為上述表格的總和，即 $h_2(100) = 8321$ ，因此在目標點集 $V(100)$ 中的可見點機率为 0.8321 ，其結果與使用定理 7 計算之 $V(100)$ 的 2-可見點數和 2-可見點機率吻合。

我們也可以用另一個方式來計算目標點集 $V(m)$ 上的 2-可見點，如以下定理所示。

定理 9：當以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 中所有的 2-可見點數 $h_2(m)$ 亦可表示為

$$h_2(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^m \right|$$

證明：

在計算目標點集 $V(m)$ 上的 2-可見點時，我們分別計算 $y = 1, y = 2, y = 3 \dots, y = m$ 上的 2-可見點並求其總和。在直線 $y = k$ 上的 2-可見點 (i, k) 需滿足 $\gcd_2(i, k) = 1$ ，因此 $y = k$ 上的 2-可見點個數為小於或等於 m 的正整數中不為 k 之 2 次質因數的倍數個數，即

$|\{i | i \leq m \text{ 且滿足 } \gcd_2(i, k) = 1\}| = m - |\bigcup_{p^2|k} A_p^m|$ 。換言之，在直線 $y = k$ 上滿足 $\gcd_2(i, k) = 1$ 的點皆為 2-可見點，滿足 $\gcd_2(i, k) \neq 1$ 的點皆為 2-不可見點，而在直線 $y = k$ 上滿足 $\gcd_2(i, k) = 1$ 的點的個數為 $m - |\bigcup_{p^2|k} A_p^m|$ ，故得 $V(m)$ 中 2-可見點個數總和 $h_2(m)$ 之公式如下。

$$\begin{aligned} h_2(m) &= \sum_{k=1}^m \left(m - \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^m \right| \right) \\ &= m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^m \right| \end{aligned}$$

□

我們利用上述公式計算在 $V(m)$ 中的直線從 $y = 1$ 至 $y = 100$ 上的 2-不可見點數量，如以下結果：

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	100	100	50	100	100	100	50	67	100
10	100	50	100	100	100	50	100	67	100	50
20	100	100	100	50	80	100	67	50	100	100
30	100	50	100	100	100	33	100	100	100	50
40	100	100	100	50	67	100	100	50	86	80
50	100	50	100	67	100	50	100	100	100	50

60	100	100	67	50	100	100	100	50	100	100
70	100	33	100	100	80	50	100	100	100	50
80	67	100	100	50	100	100	100	50	100	67
90	100	50	100	100	100	50	100	86	67	40

表六： $y = 1$ 至 $y = 100$ 上的可見點

同樣以 $m = 100$ 為例，目標點集 $V(100)$ 的可見點數 $h(100)$ 為上述表格的總和，即 $h_2(100) = 8321$ ，因此在目標點集 $V(100)$ 中的可見點機率亦為 0.8321 ，其結果與使用定理 7 計算之 $V(100)$ 的 2-可見點數和 2-可見點機率也吻合。

接下來研究當 b 為固定的正整數時，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 中所有的 b -可見點數。

將定理 8 與定理 9 的結果推廣可得如下定理。

定理 10： 設 b 為固定的正整數，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，令目標點集 $V(m)$ 中所有的 b -可見點數為 $h_b(m)$ ，則

$$h_b(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

證明：

定理 8 與定理 9 是定理 10 在 $b = 2$ 時的情形，將定理 8 與定理 9 的證明過程中的觀測視線 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 換成 $f(x) = ax^b, a \in Q$ ，用相同的程序，即可推廣得證。

□

順帶一提，由定理 10 可推得下列漂亮恆等式。

定理 11： 設 m, b 為固定正整數， p 為質數，則

$$\sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

而文獻[1]的定理 1 證明了，同樣以原點作為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ 為觀測視線，目標點集為第一象限的所有格子點時，其 b -可見機率為

$$\frac{1}{\zeta(b+1)}$$

其中符號 $\zeta(x)$ 表示黎曼zeta函數。因此，我們有以下的定理。

定理 12：設 b 為固定正整數，以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，坐標平面上第一象限中的格子點之 b -可見機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_b(m)}{m^2} = \frac{1}{\zeta(b+1)}$$

證明：

引用定理 10，目標點集 $V(m)$ 的可見點數量為 $h_b(m)$ ，目標點集 $V(m)$ 的數量為 m^2 ，因此坐標平面上第一象限中的格子點之 b -可見機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_b(m)}{m^2}$$

引用文獻[1]的結果可得第一象限中的格子點之 b -可見機率為 $\frac{1}{\zeta(b+1)}$ ，故得證

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_b(m)}{m^2} = \frac{1}{\zeta(b+1)}$$

□

二、研究目的 3 與目的 4 的探討

接下來我們要討論研究目的 3 與目的 4，設 b 為固定正整數，首先討論在將目標點集 $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$ 中的所有格子點觀測完畢的前提下，將觀測點布置在原點 O 及 x 軸、 y 軸正向上的格子點，以 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，找尋最少觀測點，請注意其中 n 為任意正整數，且 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ 是以觀測點為新原點的坐標系中的觀測視線。

接下來，我們將觀測點限制在原點及 x 軸、 y 軸上的正向上的格子點。

定義 5：在以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ 為觀測視線，對於觀

測點 t 與目標點 p 而言，若曲線 $f(x) = ax^b$ 上在觀測點 t 與目標點 p 之間沒有其他目標點，則稱 p 點為 $t - b$ - 可見。同理，對於觀測點集 S_b 與目標點集 $A \subseteq V(m \times n)$ 而言，若對每一點 $p \in A$ 存在一點 $t \in S_b$ 使得 p 點為 $t - b$ - 可見，則我們稱集合 A 為 S_b - 可見。

首先討論 $b = 2$ 的情況，得到如下重要引理。

引理 4：以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線觀察目標點集 $V(m \times n)$ 中的目標點 $C(x, y)$ ，則 C 點為 $(0,0) - 2$ - 可見若且唯若 $\gcd_2(x, y) = 1$ 。

證明：由引理 1 取 $b = 2$ 可得證。

□

引理 5：設 k, m 為正整數，

(1) 以點 $(k, 0)$ 為觀測點，觀測直線 $x = m$ 上的目標點 $C(m, y)$ ，則 C 點是 $(k, 0) - 2$ - 可見點若且唯若 $\gcd_2(m - k, y) = 1$ 。

(2) 以點 $(0, k)$ 為觀測點，觀測直線 $y = m$ 上的目標點 $C(x, m)$ ，則 C 點是 $(0, k) - 2$ - 可見點若且唯若 $\gcd_2(x, m - k) = 1$ 。

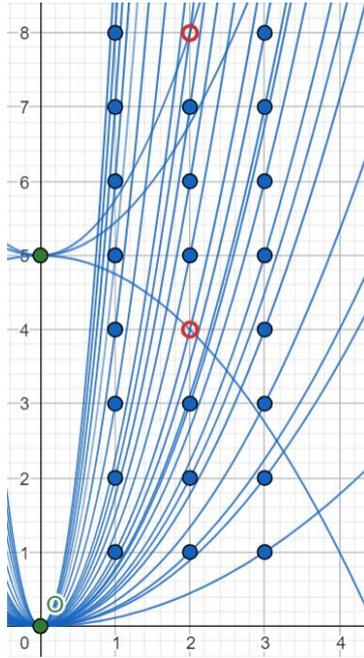
證明：

(1) 經過平移，以 $(k, 0)$ 為新原點，則 C 點的新坐標為 $(m - k, y)$ 。由引理 4 得知 C 點是 $(k, 0) - 2$ - 可見點若且唯若 $\gcd_2(m - k, y) = 1$ 。

(2) 同理可證。

□

圖六顯示，布置原點 O 與 $(0, 5)$ 為觀測點，即可將目標點集 $V(3 \times n)$ 中的格子點觀測完畢。



圖六：利用原點 O 與 $(0, 5)$ 觀測 $V(3 \times n)$

引理 6：設 $c, r \in N, gcd_2(c, r) = 1$ ， p_1, p_2, \dots, p_s 為 c 的質因數， $q = p_1^2 \times p_2^2 \times \dots \times p_s^2$ ，則對任意 $n \in N$ ， $gcd_2(c, qn - r) = 1$ 恆成立。

證明：

設 $c, r \in N, gcd_2(c, r) = 1$ ， p_1, p_2, \dots, p_s 為 c 的質因數，

$q = p_1^2 \times p_2^2 \times \dots \times p_s^2$ ，若存在 $n_0 \in N$ 使得 $gcd_2(c, qn_0 - r) > 1$ ，則存在

$p_i (i \in \{1, 2, 3 \dots n\})$ ，使得 $p_i | c$ 且 $p_i^2 | (qn - r)$ -----①

又 $p_i^2 | qn$ -----②

由②、①得 $p_i^2 | qn - (qn - r)$ 即 $p_i^2 | r$ ，得 $gcd_2(c, r) \geq p_i > 1$ ，此與 $gcd_2(c, r) = 1$ 矛盾，

故得證對任意 $n \in N$ ， $gcd_2(c, qn - r) = 1$ 恆成立。

□

首先，為了方便進行討論，我們有下列定義。

定義 6：當以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線時，以符號 $|S_b|$ 表示觀測點集合 S_b 的元素個數，以符號 $\sigma_b(m)$ 表示可完整觀看 $V(m \times n)$ 全體目標點所需的最小觀測點數，即 $\sigma_b(m) = \min\{|S_b| : V(m \times n) \text{ 為 } S_b - \text{可見}\}$

當以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，由引理 4 至引理 6 可知，對於 $m < 10$ 的情形可得出以下之結論。對於 $m \geq 10$ 的情形我們提出一個建構最小觀測點集的方法。

定理 13：設 m 為正整數，下列敘述成立。

- (1) 若 $m = 1$ ，則 $\sigma_2(m) = 1$ 。
- (2) 若 $2 \leq m \leq 5$ ，則 $\sigma_2(m) = 2$ 。
- (3) 若 $m > 5$ ，則 $\sigma_2(m) \geq 3$ 。

證明(1)：

對於 $n \in N$ ， $\gcd_2(1, n) = 1$ ，由引理 4 知目標點 $(1, n)$ 均為原點 $O-2$ -可見。所以當 $m = 1$ 時，對於 $V(1 \times n) = \{(1, n) | n \in N\}$ 而言，觀測點僅需原點即可全部觀測到。

以上證明了定理 13 之敘述(1)。

□

證明(2)：

當 $m > 1$ 時，原點 O 不足以將全部的目標點集 $V(m \times n)$ 的點看完，因此 $\sigma_2(m) \geq 2$ 。

當 $m = 2, 3, 4, 5$ 時，對於 $V(m \times n)$ 而言，觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (0, 7)\}$ 即能全部觀測完畢。證明如下：

由敘述(1)知直線 $x = 1$ 上的目標點均為原點 $O-2$ -可見。考慮直線 $x = 2, 3, 4, 5$ 上那些原點看不到的點 $(2, 4n), (3, 9n), (4, 4n), (5, 25n), n \in N$ ，這些點將可從 y 軸上的觀測點 $(0, 7)$ 看到。原因是，若以觀測點 $(0, 7)$ 為新原點，這些原點 $O-2$ -不可見點經過平移後的新坐標分別為 $(2, 4n - 7), (3, 9n - 7), (4, 4n - 7), (5, 25n - 7)$ ，由引理 4 知 $\gcd_2(2, 4n - 7) =$

$gcd_2(3, 9n - 7) = gcd_2(4, 4n - 7) = gcd_2(5, 25n - 7) = 1$ ，而由引理 5 之敘述(2)可得這些點均為 $(0, 7) - 2 -$ 可見。以上證明了定理 13 之敘述(2)。

□

證明(3)：

當 $m > 5$ 時，包含原點的觀測點數至少需為 3，即 $\sigma_2(m) \geq 3$ 。證明如下：

以 $V(6 \times n)$ 為例，考慮直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點 $(6, 4n), (6, 9n)$ ，對於任意整數 r 都存在 $n_1 \in N$ (或 $n_2 \in N$) 使得 9 整除 $4n_1 - r$ (或 4 整除 $9n_2 - r$)，因此對於 y 軸上任意觀測點 $(0, r)$ ，都存在直線 $x = 6$ 上非原點可見的目標點 $(6, 4n_1)$ 或 $(6, 9n_2)$ 為非 $(0, r) - 2 -$ 可見。

很明顯，對於 x 軸上的一觀測點 $(i, 0)$ ， $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，不足以看到全部 $V(6 \times n)$ 的非原點可見的目標點。因此 $\sigma_2(m) \geq 3$ 。以上證明了定理 13 之敘述(3)。

□

為了解決 $m > 5$ 時的目標點集 $V(m \times n)$ ，我們引用文獻[2]的方法提出一個建構觀測點集 S_2 的方式。

將目標點依其所在的直線 $x = c$ 加以分類，我們將集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 分割成三個子集

$$\{1, 2, \dots, m\} = \{1\} \cup U_m \cup W_m$$

其中 U_m 是那些質數幕所成的集合，而 W_m 是那些剩下的數所成的集合，即

$$U_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 只有 1 個質因數}\},$$

$$W_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 有 2 個或 2 個以上質因數}\}。$$

例如當 $m = 15$ 時， $U_{15} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}$ ， $W_{15} = \{6, 10, 12, 14, 15\}$ ，當 $m = 20$ 時

$$U_{20} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}, W_{20} = \{6, 10, 12, 14, 15\}。$$

此外若 $|W_m| = r$ ，令 $W_m = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ 。對於 $1 \leq i \leq r$ ，設 w_i 有 $s(i)$ 個質因數，並令這些質因數為 $p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{is(i)}$ ，考慮 w_i 所衍生型如 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的正整數類型，定義集合 $f(w_i)$ 如下， $f(w_i) = \{w_i \pm p_{ij}^k | 1 \leq j \leq s(i), k \text{ 為任意非負整數}\}$ ，並定義 $F(m)$ 為所有這些類型所成的集合，即

$$F(m) = f(w_1) \cup f(w_2) \cup \dots \cup f(w_r)。$$

若正整數 t 可以表示成 $w_i \pm p_{ij}^k$ 的形式，則稱 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型。考慮正整數集 $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ ，若對每一類型 $w_i \pm p_{ij}^k \in F(m)$ ，存在 $t \in T$ 使得 t 涵蓋 $w_i \pm p_{ij}^k$ 類型，則稱 T 為 $F(m)$ -覆蓋。我們的目的就是利用 $F(m)$ -覆蓋建構 x 軸上的觀測點集。再加上觀測點集 $\{(0, 0), (0, r)\}$ ， r 為大於 m 的最小質數，即可完整觀測 $V(m \times n)$ 。我們可得如下定理。

定理 14： 設正整數 $m \geq 6$ 且 $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ -覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq i \leq m\}$ ，建構觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) | t \in T\}$ ，則 $V(m \times n)$ 為 S_2 -可見。

證明：

為了證明 $V(m \times n)$ 為 S_2 -可見，我們將目標點依其所在的直線 $x = c$ 分類，因此將集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 分割成上述三個子集 $\{1\}, U_m, W_m$ ，分別討論如下：

- (1) 當 $c = 1$ 時，很明顯，直線 $x = 1$ 上所有目標點均為原點 O - 2 -可見。
- (2) 當 $c \in U_m$ 時， c 只有 1 個質因數 p ，考慮直線 $x = c$ 上那些非原點可見的目標點 $(c, p^2n), n \in N$ ，由引理 6 知對於任意 $n \in N, \gcd_2(c, pn - r) = \gcd_2(c, r) = 1$ ，因此由引理 5 之敘述(2)得知這些目標點 (c, p^2n) 都可被 y 軸上的觀測點 $(0, r)$ 所看見。
- (3) 當 $c \in W_m$ 時， c 有 2 個或 2 個以上質因數，令這些質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ 。因 T 是一個 $F(m)$ -覆蓋，故存在 $t_1, t_2, \dots, t_s \in T$ 使得 t_i 涵蓋 $c \pm p_i^k$ 類型 ($1 \leq i \leq s$)。

對於相異的 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ，存在 $a, b \in N$ 使得 $t_i = c \pm p_i^a, t_j = c \pm p_j^b$ 。由引理 6 知對

於任意 $n \in N$ ，當 n 不是 p_j 的倍數時， $\gcd_2(t_j - c, p_j n) = \gcd_2(\pm p_j^b, p_j n) = 1$ 。同樣的，當 n 不是 p_i 的倍數時， $\gcd_2(t_i - c, p_j n) = \gcd_2(\pm p_i^a, p_j n) = 1$ 。

考慮直線 $x = c$ 上那些非原點 $O-2$ -可見的目標點 $(c, p_1^2 n), (c, p_2^2 n), \dots, (c, p_s^2 n), n \in N$ ，

觀測點 $(t_j, 0) \in S$ 可看見目標點 $\{(c, p_i^2 n) \mid n \in N, n \text{ 不是 } p_j^2 \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點

$\{(c, p_i^2 n) \mid n \in N, n \text{ 是 } p_j^2 \text{ 的倍數}\}$ 。同樣的，觀測點 $(t_i, 0) \in S$ 可看見目標點

$\{(c, p_j^2 n) \mid n \in N, n \text{ 不是 } p_i^2 \text{ 的倍數}\}$ ，但看不見目標點 $\{(c, p_j^2 n) \mid n \in N, n \text{ 是 } p_i^2 \text{ 的倍數}\}$ 。

令 $q = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_s$ ，則直線 $x = c$ 上只剩下目標點 $(c, q^2 n), n \in N$ 不能被觀測點

$\{t_1, 0), (t_2, 0), \dots, (t_s, 0)\}$ 所看見，而這些目標點 $(c, q^2 n)$ 可被 y 軸上的觀測點 $(0, r)$ 所看見，理

由是 $\gcd_2(c, q^2 n - r) = \gcd_2(c, r) = 1$ ，因此我們證明了 $V(m \times n)$ 為 S_2 -可見。

□

舉例來說，當 $m = 6, 7, 8, 9$ 時，對於 $V(6 \times n)$ 而言，觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (5, 0), (0, 11)\}$ 即能將目標點集觀測完畢。說明如下：

若以點 $(5, 0)$ 為新原點，根據引理 5，其不可見目標點之坐標為 $(-3, 4n), (-2, 9n), (-1, 4n)$

, $(0, 25n)$ ，與原不可見之目標點 $(2, 4n), (-2, 9n), (-1, 4n), (0, 25n)$ 合併平移後的不可見目標

點得 $(2, 36n), (3, 36n), (4, 4n), (5, 25n)$ 。故非原點可見且非 $(5, 0) - 2$ -可見的目標點為

$(2, 36n), (3, 36n), (4, 4n), (5, 25n), n \in N$ 。而這些點將可從 y 軸上的觀測點 $(0, 11)$ 看到。理由

是，若以點 $(0, 11)$ 為新原點，這些點的新坐標分別為 $(2, 36n - 11), (3, 36n - 11), (4, 4n -$

$11), (5, 25n - 11)$ 。由引理 6 知 $\gcd_2(2, 36n - 11) = \gcd_2(3, 36n - 11) = \gcd_2(4, 4n -$

$11) = \gcd_2(5, 25n - 11) = 1$ ，由引理 5 之敘述(2) 得知這些點均為 $(0, 11) - 2$ -可見，故

$V(6 \times n)$ 為 S_2 -可見。

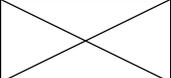
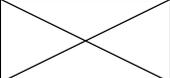
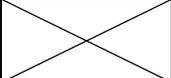
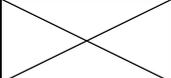
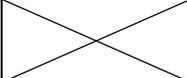
上述 $V(m \times n)$ 的最小觀測點集並不是唯一的，例如，對於 $V(m \times n)$ ， $m = 6, 7, 8, 9$ 的觀測點集 S_2 也可以取 $S_2 = \{(0, 0), (7, 0), (0, 11)\}$ 。

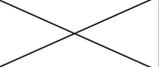
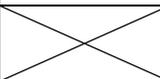
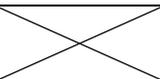
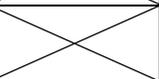
接著以 $m = 15$ 為例時， $U_{15} = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13\}$, $W_{15} = \{6, 10, 12, 14, 15\}$ ，當 $c \in U_{15}$ 時，非原點可見的目標點為 $(2, 4n), (3, 9n), (4, 4n), (5, 25n), (7, 49n), (8, 4n), (9, 9n), (11, 121n), (13, 169n)$ ， $n \in N$ ，這些點都是 $(0, 17) - 2 -$ 可見。

當 $c \in W_{15}$ 時，非原點可見的目標點有 $(6, 4n), (6, 9n), (10, 4n), (10, 25n), (12, 4n), (12, 9n), (14, 4n), (14, 49n), (15, 9n), (15, 25n)$ ， $n \in N$ 。

其中 6 的質因數為 $\{2, 3\}$ ，10 的質因數為 $\{2, 5\}$ ，12 的質因數為 $\{2, 3\}$ ，14 的質因數為 $\{2, 7\}$ ，15 的質因數為 $\{3, 5\}$ 則這些數分別衍生正整數類型 $f(6) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k\}$ ， $f(10) = \{10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k\}$ ， $f(12) = \{12 \pm 2^k, 12 \pm 3^k\}$ ， $f(14) = \{14 \pm 2^k, 14 \pm 7^k\}$ ， $f(15) = \{15 \pm 3^k, 15 \pm 5^k\}$ ，因此 $F(15) = \{6 \pm 2^k, 6 \pm 3^k, 10 \pm 2^k, 10 \pm 5^k, 12 \pm 2^k, 12 \pm 3^k, 14 \pm 2^k, 14 \pm 7^k, 15 \pm 3^k, 15 \pm 5^k\}$ 。

當 $k = 0$ 時， $6 \pm 2^k = \{7, 5\}$ ， $6 \pm 3^k = \{7, 5\}$ ， $10 \pm 2^k = \{11, 9\}$ ， $10 \pm 5^k = \{11, 9\}$ ， $12 \pm 2^k = \{13, 11\}$ ， $12 \pm 3^k = \{13, 11\}$ ， $14 \pm 2^k = \{15, 13\}$ ， $14 \pm 7^k = \{15, 13\}$ ， $15 \pm 3^k = \{16, 14\}$ ， $15 \pm 5^k = \{16, 14\}$ ；當 $k = 1$ 時， $6 \pm 2^k = \{8, 4\}$ ， $6 \pm 3^k = \{9, 3\}$ ， $10 \pm 2^k = \{12, 8\}$ ， $10 \pm 5^k = \{15, 5\} \dots 15 \pm 5^k = \{20, 10\}$ （因 $20 > m + 1 = 16$ ，可以捨去），知 9 涵蓋 6 ± 3^k 類型與 12 ± 2^k 類型，依此類推；當 $k = 2$ 時， $6 \pm 2^k = \{10, 2\}$ ， $6 \pm 3^k = \{7, 5\}$ ， $10 \pm 2^k = \{14, 6\} \dots 14 \pm 2^k = \{18, 10\}$ ；當 $k = 3$ 時， $6 \pm 2^k = \{14, -2\}$ （因 -2 並非位於第一象限，可以捨去）， $14 \pm 2^k = \{14, 10\}$ 。我們將結果整理成下表，以利說明：

	6 ± 2^k	6 ± 3^k	10 ± 2^k	10 ± 5^k	12 ± 2^k	12 ± 3^k
$k = 0$	7, 5	7, 5	11, 9	11, 9	13, 11	13, 11
$k = 1$	8, 4	9, 3	12, 8	15, 5	14, 16	15, 9
$k = 2$	10, 2	15	14, 6	超出範圍	8	3
$k = 3$	14					

	14 ± 2^k	14 ± 7^k	15 ± 3^k	15 ± 5^k
$k = 0$	13, 15	13, 15	14, 16	14, 16
$k = 1$	12, 16	7	6	超出範圍
$k = 2$	10	超出範圍	超出範圍	
$k = 3$	6			

表七： $m = 15$ 其 W_m 的衍生型

由表七得知，構成 $F(15)$ – 覆蓋的集合 T 有 $\{14, 15\}, \{7, 9, 16\}, \{9, 13, 14\}, \{5, 13, 14\}, \{9, 10, 15, 16\}, \{7, 11, 13, 16\} \dots$ 等，但 $\{11, 14\}$ 不是一個 $F(15)$ – 覆蓋，因為 $6 \pm 3^k, 14 \pm 2^k, 14 \pm 7^k$ 類型不能被 11 與 14 所涵蓋。

因此若取 $F(15)$ – 覆蓋 $T = \{7, 11, 13, 16\}$ 知觀測點 $(7, 0)$ 可看見直線 $x = 6$ 上的目標點，觀測點 $(11, 0)$ 可看見直線 $x = 10$ 上的目標點，觀測點 $(13, 0)$ 可看見直線 $x = 12, x = 14$ 上的目標點，觀測點 $(16, 0)$ 可看見直線 $x = 15$ 上的目標點，因此建構觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (7, 0), (11, 0), (13, 0), (15, 0), (0, 17)\}$ 可使 $V(15 \times n)$ 為 S_2 – 可見。

下表八顯示觀測點集 S_2 中的 $(7, 0), (11, 0), (13, 0), (15, 0)$ 四個觀測點所分別涵蓋的類型，完整覆蓋所有類型。

	6 ± 2^k	6 ± 3^k	10 ± 2^k	10 ± 5^k	12 ± 2^k	12 ± 3^k
$(7, 0)$	√	√				
$(11, 0)$			√	√		
$(13, 0)$					√	√
$(15, 0)$						

	14 ± 2^k	14 ± 7^k	15 ± 3^k	15 ± 5^k
$(7, 0)$				

(11, 0)				
(13, 0)	√	√		
(15, 0)		√	√	√

表八：觀測點集 S_2 中， x 軸上觀測點所滿足的覆蓋類型

此外，若取 $F(15 \times n)$ – 覆蓋 $T = \{14, 15\}$ ，則觀測點 $(14, 0), (15, 0)$ 分別可看見直線 $x = 15, x = 14$ 上的目標點，且觀測點 $(14, 0)$ 滿足 $6 \pm 2^k, 10 \pm 2^k, 12 \pm 2^k$ 類型；觀測點 $(15, 0)$ 滿足 $6 \pm 3^k, 10 \pm 5^k, 12 \pm 3^k$ 類型，而直線 $x = 6, 10, 12$ 上的部份目標點 $(6, 36n)(10, 100n)(12, 144n), n \in N$ ，根據引理 6 及定理 13 中的證明，雖然這些點不能直接被觀測點 $(14, 0)$ 及 $(15, 0)$ 看見，但均為 $(0, 17) - 2$ – 可見，因此建構觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (14, 0), (15, 0), (0, 17)\}$ 亦可使 $V(15 \times n)$ 為 S_2 – 可見。

	6 ± 2^k	6 ± 3^k	10 ± 2^k	10 ± 5^k	12 ± 2^k	12 ± 3^k
(14, 0)	√		√		√	
(15, 0)		√		√		√

	14 ± 2^k	14 ± 7^k	15 ± 3^k	15 ± 5^k
(14, 0)			√	√
(15, 0)	√	√		

表九：觀測點集 S_2 中， x 軸上觀測點所滿足的覆蓋類型

注意，對於 $m \geq 10$ ，任何一個 $F(m)$ – 覆蓋 T 至少包含 2 個元素。

我們透過上述布點方法得出下列結果

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\sigma_2(m)$	1	2		3			4					5									

m	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\sigma_2(m)$	6				7					8	10								

表十：在目標點集 $V(m \times n)$ 中 $m = 1$ 至 $m = 40$ 的最小觀測點數

接下來我們將上述結果的觀測視線由 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 推廣至 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ ，而引理 4 至引理 6 中的內容，當類推至 b 次函數時會有相同的結果。同理可推得如下定理。

定理 15：設正整數 $m \geq 6$ 且 $T \subset \{1, \dots, m+1\}$ 為一個 $F(m)$ - 覆蓋， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(m \times n) = \{(i, j) | i, j, n \in N, 1 \leq i \leq m\}$ ，建構觀測點集 $S_b = \{(0, 0), (0, r)\} \cup \{(t, 0) | t \in T\}$ ，則 $V(m \times n)$ 為 S_b - 可見。

證明：

定理 14 是定理 15 在 $b = 2$ 時的情況，將定理 14 的證明過程中的觀測視線 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 換成 $f(x) = ax^b, a \in Q$ ，用相同的程序，即可推廣得證。

□

定理 16：當以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ 為觀測視線，將所有目標點集 $V(m \times n)$ 中的點觀測完畢使用的最少觀測點數 $\sigma_b(m)$ 如下表所示。

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\sigma_b(m)$	1	2		3			4					5									

m	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
$\sigma_b(m)$	6				7							8	10								

表十一：在目標點集 $V(m \times n)$ 中 $m = 1$ 至 $m = 40$ 的最小觀測點數

證明：

當以 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ 為觀測視線，根據引理 1 若滿足 $\gcd_b(r, s) = 1$ ，則稱點 (r, s) 為 b - 可見，因此我們將目標點集 $V(m \times n)$ 中的不可見點推廣至一般性即表示為 x 坐標含一個質因數： $(2, 2^b n), (3, 3^b n), (4, 2^b n), (5, 5^b n) \dots$ ；兩個質因數： $(6, 2^b n), (6, 3^b n)$
 $(10, 2^b n), (10, 5^b n) \dots$ ，依此類推，其中 $n \in N$ 。

當 $m = 1$ 時，與定理 13 中的敘述(1)有相同結果，透過引理 1 即可得證。

當 $2 \leq m \leq 5$ 時，與定理 13 中的敘述(2)有相同結果，原因為當 m 為只有單一質因數的數時，根據引理 5， $x = m$ 上的不可見點皆為 $(0, r) - b -$ 可見。

當 $m > 5$ 時，亦可以透過覆蓋 T 建構觀測點集 S_b ，即定理 15，因此得證。

□

討論完目標點集 $V(m \times n)$ 後，因為無法找出能有效減少觀測點數的布點方法，因此我們將目標點集改為 $V(n \times m) = \{(i, j) | i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ ，且同樣以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，探討改變目標點集後對所需最小觀測點數 $\sigma_2(m)$ 的影響。

定理 17：設 m 為正整數，下列敘述成立。

(1) 若 $1 \leq m \leq 3$ ，則 $\sigma_2(m) = 1$ 。

(2) 若 $4 \leq m \leq 35$ ，則 $\sigma_2(m) = 2$ 。

(3) 若 $m > 35$ ，則 $\sigma_2(m) \geq 3$ 。

證明(1)：

當 $1 \leq m \leq 3$ 時，對於目標點集 $V(n \times m)$ 而言，觀測點僅需原點即可全部觀測到。

因 1, 2, 3 皆不具有 2 次質因數，由引理 4 可知對於 $n \in N$ ， $\gcd_2(n, 1) = \gcd_2(n, 2) = \gcd_2(n, 3) = 1$ ，因此 $y = 1, y = 2, y = 3$ 上的目標點均為原點 $O - 2 -$ 可見。以上證明了定理 17 之敘述(1)。

□

證明(2)：

當 $4 \leq m \leq 35$ 時，原點 O 不足以將全部的目标點集 $V(n \times m)$ 的點看完，因此 $\sigma_2(m) \geq 2$ 。

由敘述(1)知直線 $y = 1$ 上的目標點均為原點 $O - 2 -$ 可見。考慮直線 $y = 4, y = 5, y = 6 \dots, y = 35$ 上那些原點 O 看不到的點 $(2n, 4), (2n, 8), (3n, 9), \dots (2n, 32), n \in N$ ，這些點將可從 x 軸上的觀測點 $(37, 0)$ 看到。原因是，若以點 $(37, 0)$ 為新原點，這些原點 $O - 2 -$ 不可見點經過平移後的新坐標分別為 $(2n - 37, 4), (2n - 37, 8), (3n - 37, 9), \dots (2n - 37, 32)$ ，由引理 4 知

$$\gcd_2(2n - 37, 4) = \gcd_2(2n - 37, 8) = \gcd_2(3n - 37, 9) = \dots = \gcd_2(2n - 37, 32) = 1,$$

而由引理 5 之敘述(1)可得這些點均 $(37, 0) - 2 -$ 可見。以上證明了定理 17 之敘述(2)。

□

證明(3)：

當 $m > 35$ 時，包含原點 O 的觀測點數至少需為 3，即 $\sigma_2(m) \geq 3$ ，說明如下。

以 $V(n \times 36)$ 為例，考慮直線 $y = 6$ 上非原點可見的目標點 $(2n, 36), (3n, 36)$ ，對於任意整數 r 都存在 $n_1 \in N$ (或 $n_2 \in N$) 使得 3 整除 $2n_1 - r$ (或 2 整除 $3n_2 - r$)，因此對於 x 軸上任意觀測點 $(r, 0)$ ，都存在直線 $y = 6$ 上非原點可見的目標點 $(2n_1, 36)$ 或 $(3n_2, 36)$ 為非 $(r, 0) - 2 -$ 可見。

很明顯，對於 x 軸上的一觀測點 $(i, 0)$ ， $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ，不足以看到全部 $V(n \times 36)$ 的非原點 $O - 2 -$ 可見的目標點。以上證明了定理 17 之敘述(3)。

□

為了找出能將目標點集 $V(n \times m)$ 觀測完畢的觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (r, 0), (0, t)\}$ ，我們同樣將目標點所存在的直線 $y = c$ 分為類似的三個子集 $R_m \cup U'_m \cup W'_m$ 。

$$R_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 無 } 2 \text{ 次質因數}\}$$

$$U'_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 只有 } 1 \text{ 個 } 2 \text{ 次質因數}\},$$

$$W'_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 有 } 2 \text{ 個或 } 2 \text{ 個以上 } 2 \text{ 次質因數}\}$$

例如當 $m = 36$ 時， $R_m = \{1, 2, 3, 5, 6 \dots 34, 35\}$ ， $U'_m = \{4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32\}$ ，

$$W'_m = \{36\}$$

定理 18：當正整數 $m \geq 36$ ， r 為大於 m 的最小質數，對於目標點集 $V(n \times m) =$

$\{(i, j) \mid i, j \in N, 1 \leq j \leq m\}$ ，可建構觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (r, 0), (0, t)\}$ ，使得 $V(n \times m)$ 為

$S_2 -$ 可見若且唯若 $c - t \neq p_i^2 k, k \in N$ ，其中 p_i 為小於或等於 m 的正整數的任意質因數。

證明：

為了找出能將目標點集 $V(n \times m)$ 觀測完畢的觀測點集 $S_2 = \{(0, 0), (r, 0), (0, t)\}$ ，我們同樣將目標點所存在的直線 $y = c$ 分為類似的三個子集 $R_m \cup U'_m \cup W'_m$ 。

$$R_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 無 } 2 \text{ 次質因數}\}$$

$$U'_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 只有 } 1 \text{ 個 } 2 \text{ 次質因數}\},$$

$$W'_m = \{c \in N \mid c \leq m, c \text{ 有 } 2 \text{ 個或 } 2 \text{ 個以上 } 2 \text{ 次質因數}\}$$

(1)當 $c \in R_m$ 時， c 無2次質因數，所有目標點均為原點 $O-2$ -可見。

(2)當 $c \in U'_m$ 時， c 只有1個2次質因數 p ，直線 $y = c$ 上非原點可見的目標點 $(pn, c), n \in N$ ，由引理6可知對於任意 $n \in N, \gcd_2(pn - r, c) = \gcd_2(r, c) = 1$ ，因此由引理5之敘述

(1)得知這些目標點 (pn, c) 都可被 x 軸上的觀測點 $(r, 0)$ 所看見。

(3)當 $c \in W'_m$ 時， c 有2個或2個以上2次質因數，令這些2次質因數為 $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ ，

$p_j \in \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ 。考慮直線 $y = c$ 上那些非原點可見的目標點

$(p_1n, c), (p_2n, c), \dots, (p_sn, c), n \in N$ ，我們希望透過 y 軸上的觀測點 $(0, t)$ 來解決，而這些原點 $O-2$ -不可見點經過平移後變為 $(p_1n, c - t), (p_2n, c - t), \dots, (p_sn, c - t)$ ，假設 $c - t$ 為小於或

等於 m 的正整數的任意質因數 p_i 平方的倍數，即 $c - t$ 為 $p_i^2k, k \in N$ ，則若以 $(0, t)$ 為新原點，

直線 $y = c$ 上會產生不可見點 $(p_i p_j n, c - t)$ 。因此若要使得點 $(p_i p_j n, c - t)$ 為可見點若且唯

若滿足 $\gcd_2(p_1n, c - t) = \gcd_2(p_2n, c - t) = \dots = \gcd_2(p_sn, c - t) = 1$ ，即 $c - t \neq p_i^2k$

, $k \in N$ ，其中 p_i 為小於或等於 m 的正整數的任意質因數。

□

我們利用上述尋找觀測點的方式，計算出 $m \leq 100$ 中能將目標點集 $V(n \times m)$ 觀測完畢的所需

觀測點數 $\sigma_2(m)$ ，發現觀測點數 $\sigma_2(m)$ 可大量減少，如下表所示。

m	1	2	3	4, 5, 6, 7 ..., 34, 35	36, 37, 38, 39, 40, ..., 99, 100
$\sigma_2(m)$	1		2		3

表十二：在目標點集 $V(n \times m)$ 中 $m = 1$ 至 $m = 100$ 的最小觀測點數

參、研究結果與討論

一、研究結果

(一) 以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m)$ 的可見點數量為

$$2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1$$

而其目標點集 $V(m)$ 中的格子點之可見機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=1}^m \phi(k) - 1}{m^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

(二) 以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V_1(m)$ 之 2-可見點數為

$$\sum_{k=1}^m \psi_2(k) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right|$$

其中

$$\psi_2(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{n}{d^2} \right]$$

目標點集 $V_2(m)$ 之 2-可見點數為

$$\sum_{k=1}^m \phi_2(k) = \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right|$$

其中

$$\phi_2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]$$

目標點集 $V(m)$ 之 2-可見點數為

$$\sum_{k=1}^m \psi_2(k) + \sum_{k=1}^m \phi_2(k) - \left(m - \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right| \right)$$

$$= m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^k \right| - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^k \right| + \left| \bigcup_{p^2 \leq m} A_{p^2}^m \right|$$

以不同的觀測方法亦得目標點集 $V(m)$ 之2-可見點數 $h_2(m)$ 為

$$h_2(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^2}^m \right| = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^2|k} A_p^m \right|$$

(三) 當以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，設目標點集 $V(m)$ 中所有的 b -可見點數 $h_b(m)$ 為

$$h_b(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

根據上述公式得

$$\sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

其目標點集 $V(m)$ 中的格子點之 b -可見機率為

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h_b(m)}{m^2} = \frac{1}{\zeta(b+1)}$$

(四) 當以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集 $V(m \times n)$ 中最小觀測點數 $\sigma_2(m)$ 為

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\sigma_2(m)$	1	2		3			4					5									

m	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40		
$\sigma_2(m)$	6				7							8	10								

(五) 當以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，目標點集為
 $V(m \times n)$ ，可使用與 $b = 1$ 及 $b = 2$ 相同的布點方式，因此其最小觀測點數 $\sigma_b(m)$ 亦為

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\sigma_b(m)$	1	2		3			4					5									

m	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\sigma_b(m)$	6				7						8	10							

(六) 當以觀測點為新原點的坐標系中的 $f(x) = ax^b, a \in Q, b \in N$ 為觀測視線，目標點集
 $V(n \times m)$ 中最小觀測點數 $\sigma_2(m)$ 為

m	1	2	3	4, 5, 6, 7, ..., 34, 35	36, 37, 38, 39, 40, ..., 99, 100
$\sigma_2(m)$	1		2		3

二、討論

(一)

在此篇研究的第一部分，首先我們將觀測視線從一次函數提升為二次函數 $f(x) = ax^2, a \in Q$ ，在計算可見點數與機率時得出了豐富的成果，達成了研究目的 1。得出目標點集 $V_1(m)$ 之 2-可見點數為 $\sum_{k=1}^m \psi_2(k)$ ，其中 $\psi_2(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{n}{d^2} \right]$ ，與默比烏斯函數有關。目標點集 $V_2(m)$ 之 2-可見點數為 $\sum_{k=1}^m \phi_2(k)$ ，其中 $\phi_2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) \left[\frac{n}{d} \right]$ ，也與默比烏斯函數有關。而接著將觀測視線推廣到 b 次函數 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 時也有豐碩的成果，完成了研究目的 2。其中目標點集 $V(m)$ 中所有的 b -可見點數 $h_b(m)$ 為

$$h_b(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

我們相信 $h_b(m)$ 應該也與默比烏斯函數有關，這點有待我們繼續研究。

(二)

第二部分，對於將目標點集 $V(m \times n)$ 完整觀測的方法，我們也成功將觀測視線從一次函數 $f(x) = ax, a \in Q$ ，推廣至二次 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 得到完整觀測的布置觀測點方法與定理，完成了研究目的 3。接著，我們進一步將觀測視線推廣到 b 次函數 $f(x) = ax^b, a \in Q$ ，也成功推得完整觀測的布置觀測點方法與定理，完成了研究目的 4。

(三)

最後，我們將目標點集從 $V(m \times n)$ 改變成 $V(n \times m)$ ，兩者的差異在於， $V(m \times n)$ 的橫向寬度 m 為定值，縱向長度 n 是沿縱軸方向無限延伸的。而 $V(n \times m)$ 的橫向寬度 n 是沿橫軸方向無限延伸的，縱向長度 m 是定值。這樣的變化，使我們所需布置的觀測點數顯著減少，並推得新的布置觀測點集方法如定理 18。這部分是值得繼續探討深究的，我們期望能找出更簡便、直接的布點方式，推廣出更多的成果。

肆、結論與應用

一、結論

首先在第一部分，我們以原點 O 為觀測點，並以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，計算其在觀測 $m \times m$ 陣列之目標點集 $V(m)$ 的可見點數量與機率。在研究過程中我們發現了文獻[1]中對於可見點的機率描述與文獻[2]中計算可見點數量的公式具有關聯性，而後我們也透過代數方法證明了。接著在計算2-可見點的數目時，因可見點的分布相較於 $b = 1$ 時不具有對稱性，我們便將目標點集分為 $V_1(m)$ 和 $V_2(m)$ 兩個部分，分開計算其可見點的數量，之後我們找出可見點的數量與默比烏斯函數有關，使我們可較快速計算 $V_1(m)$ 及 $V_2(m)$ 上的可見點數，也透過取捨原理的概念證明了其中的關聯性，最後得出一計算目標點集 $V(m)$ 的公式。後來我們改良了計算方式，推廣 ψ_2 和 ϕ_2 的概念直接去計算 $x = 1$ 至 $x = m$ ； $y = 1$ 至 $y = m$ 直線上的可見點，最後也成功的簡化了原先較繁瑣的計算過程，且所得出的可見點數與機率

也與原先的計算方式及文獻[1]中的內容吻合。而接著將觀測視線推廣到 **b** 次函數 $f(x) = ax^b, a \in Q$ 時也有豐碩的成果，得出了漂亮的 **b** -可見點數公式

$$h_b(m) = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p|k} A_{p^b}^m \right| = m^2 - \sum_{k=1}^m \left| \bigcup_{p^b|k} A_p^m \right|$$

再者，於第二部分，我們同樣以 $f(x) = ax^2, a \in Q$ 為觀測視線，找尋以最少觀測點的方法將所有目標點集 $V(m \times n)$ 觀測完畢。在研究的過程，我們成功以類似文獻二的覆蓋的方式來建構觀測點集，我們也發現在布點時所需的最小觀測點數與使用 $f(x) = ax, a \in Q$ 為觀測視線時有相同的結果。最後，我們希望找出能更有效減少觀測點數目的方法，我們嘗試將目標點集由 $V(m \times n)$ 轉為 $V(n \times m)$ ，其結果也符合我們的期望，成功降低了所需的最小觀測點數，

如定理 18 與表十二所示，這是重要的成果，我們很期待在這基礎上繼續發展。

二、應用與展望

(一) 應用

在應用性的方面，雖然曲線為觀測視線在生活中並不常見，不過在天文學及太空領域應該與其有關聯性，例如當光線遇到重力場時會發生偏移。猜測研究中以曲線為觀測視線的方式能應用在無法以直線直接觀測的目標物上，以此我們推測其未來可運用在設計太空望遠鏡上，協助探索更多宇宙中仍未知的領域。

(二) 展望

首先，我們推測在以原點 O 為觀測點， $f(x) = ax^b, a \in Q$ 為觀測視線，並以 $V(m)$ 為目標點集，我們所得出的 **b** -可見點數量公式應該會有與默比烏斯函數相關的表達式。

而在建構觀測點集的限制上，除了原點及 x 軸、 y 軸上的正整數點，將觀測點設置在 $y = x^2$ 的曲線上也是不錯的嘗試，目標點集也可擴展至第二象限甚至是全部四個象限，或許也能在布點方面有所突破，再有進一步的發現。這些部份我們皆認為還有其他研究的空間，期望能做出相關的成果。

伍、參考文獻

- (一) Edray Herber Goins, Pamela E. Harris, Bethany Kubik, Aba Mbirika。 (2018)。 *Lattice Point Visibility on Generalized Lines of Sight*。 The American Mathematical Monthly。 Vol.125。 Page 593-601。
- (二) 楊宗諺、陳玟旭。(2012)。 Seeing Dots。 台灣國際科學展覽會。 2023年10月22日取自 <https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2012/pdf/010015.pdf>。
- (三) 香港教育學院，小學教育(榮譽)學士課程，數論(Number Theory)。 第五講—歐拉函數。 2023年10月22日取自 http://www.math.ied.edu.hk/tdg2004/Dr%20KK%20Poon/Unit_5_euler_number.pdf
- (四) Wesley Ivan Hurt。(2021)。 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)， A342693。 2023年10月24日取自 <https://oeis.org/A342693>
- (五) Álvar Ibeas。(2015)。 The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)， A254503。 2023年10月24日取自 <https://oeis.org/A254503>
- (六) 維基百科。(2021)。 默比烏斯函數。 2023年10月24日取自 <https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E9%BB%98%E6%AF%94%E4%B9%8C%E6%96%AF%E5%87%BD%E6%95%B0>

【評語】 010007

作者著手於古老的難題，不易做出新結果，但細看之後發現本作品將觀測線改成單項式，討論方向及手法不同於之前的文獻，深富創意。作者也獲致精確且新穎的結果，且深具發展潛力。但因問題本身的難度，接下來可能要漸進地成長發展。