

2021 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160018

參展科別 物理與天文學

作品名稱 阿緹米絲的舞步-討論月球複雜又多變的軌跡

就讀學校 國立羅東高級中學

指導教師 蘇敬怡、陳昱鳴

作者姓名 張楷弘、林宜蓁

關鍵詞 月球軌跡、日月食預測

作者簡介



我是來自羅東高中的學生張楷弘（右）。國中開始做科展，從剛開始對一切的茫然，到現在能共同發表研究成果，過程中跌跌撞撞，原本表達能力較差的我，在歷經科展比賽與其他學生交流後，表達能力逐漸有所長進，感謝大會給我這個機會參加這次科學盛宴，讓我有機會透過交流繼續努力，希望這次國際科展能開拓自己的視野，讓我的高中生活更為豐富。

我是林宜蓁（左），剛開始對科展充滿疑惑，從需要老師一一指導，到最後的發表成果，雖然一路上經歷了許多的阻礙，本來以為自己做不到，但我成功撐過去，而不是自己先認輸，也讓我多了一項人生成就，也讓我 know 只要肯嘗試，並且堅持到底，沒有做不到的事，在練習中，找出自己的不足，在比賽中，學習別人的長處，很開心能有機會參加此次比賽，讓我能增加自己的視野。

摘要

阿緹米絲(月神)所代表的月球自古就是人們關心的對象，本研究的主題就是探究月球在天空複雜又多變的軌跡。一開始我們研究月亮盤，在給定農曆日期及觀察時間後，月亮盤就能知道月球大概方位，可是沒有正確的方位角及仰角。接著我們利用氣象局網站月出、月中天、月沒資料進行研究，發現月球軌跡在天空中南北方向約有 27.3 天的變化週期(而太陽軌跡有 365.25 天的週期)，太陽、月球兩者的軌跡就像在天空南北方向作簡諧運動，只是振幅和週期不同。再來我們利用天文年鑑列出的月球的位置資料，歸納出月球黃經、黃緯的計算公式，可計算出月球在天空的位置，最後我們找出用太陽、月球的黃緯、黃經相交範圍及作圖法來預測日月食的發生。

Abstract

The moon representing Artemis (Luna) has been one of concern since ancient times.

However, the orbit of the moon is complicated and changeable. The target of this research is to reduce the complexity, and to simulate the possible location of moon by analyzing the limited data.

At the beginning, we focused on the lunar disc. Giving the observation date and time, we can know the approximate position of the moon, but there is no precise azimuth and elevation angle.

Therefore, we conducted research on the moonrise, mid-moon, and moonset data from the website of the Meteorological Bureau, finding that the moon's coordinate has a variation cycle of about 27.3 days in the north-south direction in the sky (while the solar coordinate has a cycle of 365.25 days), both the sun and the moon's track like Simple Harmonic Motion in the north-south direction of the sky, but the amplitude and period are different.

Next, we use the position data of the moon listed in the Astronomy Yearbook to sum up the calculation formulas of the moon's ecliptic latitude and longitude, which helps us calculate the position of the moon in the sky.

Eventually, we can even predict the occurrence of solar and lunar eclipses by looking up the sun, the moon's coordinate and the visualized illustration.

壹、前言

一、研究動機

我們曾在地球科學課堂上聽到老師說，日食是因為太陽、月球與地球三者成一直線所呈現難得一見的天文奇觀，而且在電影“天地明察”中看到有關日食的情節，劇中主角為日本江戶時代天文學者涉川春海，他立誓找出「天理」和「地測」的正確解答，最後為求得真理的闡揚，不惜以性命做賭注，來預測日食的發生，更是令我們打從心裡感動和佩服。因此使我們產生尋找預測日月食的方法，希望也能像古人一樣來預測日食月食的發生。

二、研究目的

- (一)從市售月亮盤及氣象局網站月出、月中天(月球在天空最高位置)、月沒資料，研究月球的運行規律
- (二)從天文年鑑列出的月球位置表，研究月亮軌跡的規律(發現月球位置的黃經、黃緯公式)
- (三)探討網路上關於日、月食發生的條件
- (四)探討如何以月球的模擬數據(黃經、黃緯)和太陽的年鑑數據(黃經)來計算日月食發生
- (五)探討一個沙羅週期適用的月球黃緯、黃經參考基準日(包含月球黃經值)，並驗證我們所提方法是否能準確預測日月食的發生

貳、研究過程或方法

一、研究設備及器材

Stellarium 星空軟體、月亮盤、天球儀、2000~2021 年天文年鑑、氣象局網站宜蘭地區月出、月中天、月沒資料。

二、研究過程或方法

- (一)研究系統架構

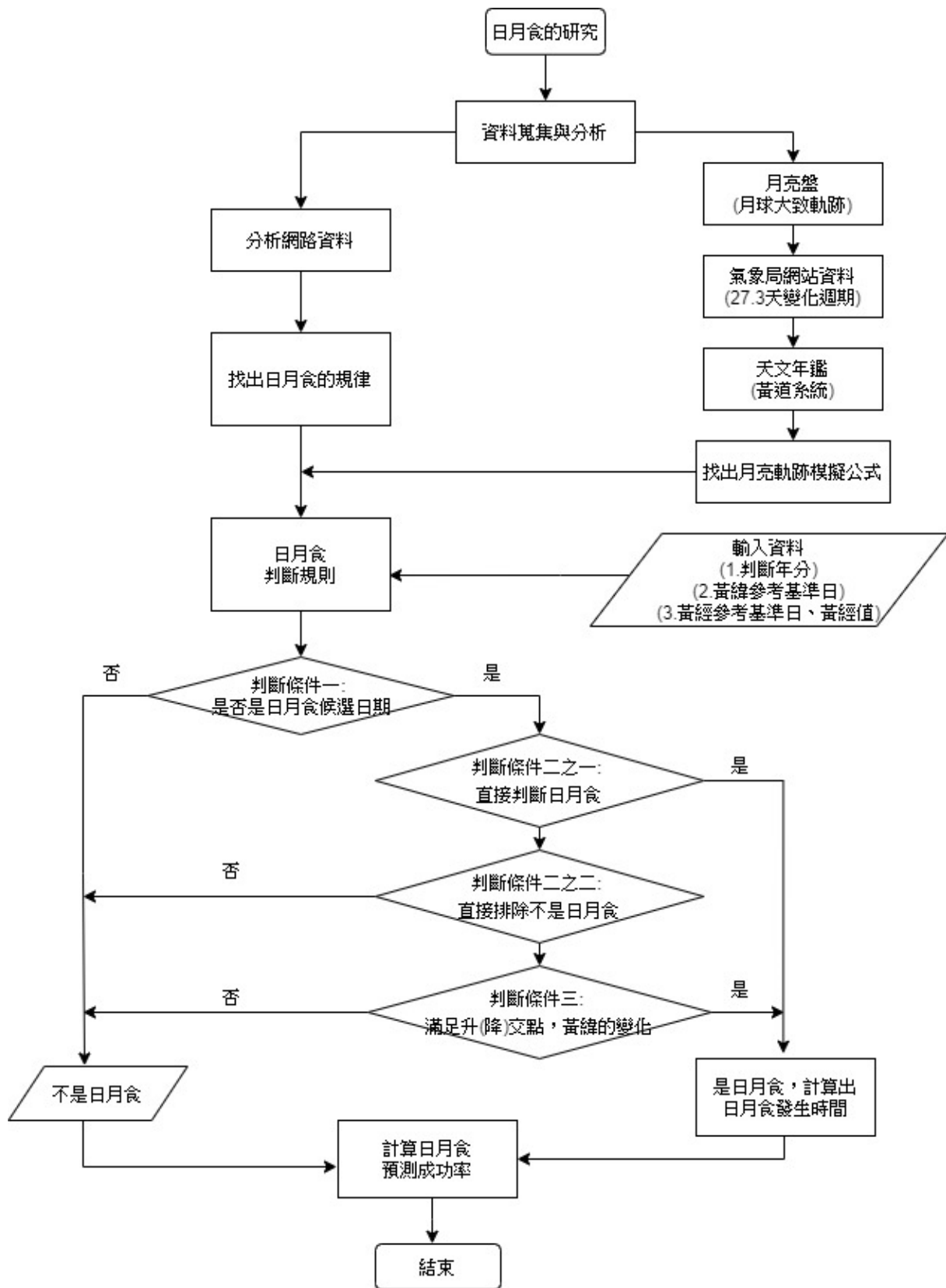


圖 1: 研究系統架構圖

(二)從市售月亮盤及氣象局網站月出、月中天、月沒資料，研究月球的運行規律

1.月亮盤僅能提供月球運行軌跡的基本資訊：

月亮盤的優點	只要轉動時間就知道農曆日期，月亮在天空的大致位置(月球每天和太陽的相對位置)，而且有月相圖，能知道農曆日期的月相。
月亮盤的缺點	只能知道月球大致方位(東方、東南東、東南、南南東、南、南南西、西南、西南西、西)，無法得知在準確的位置(方位、高度角或赤經、赤緯)。

2.從氣象局網站的月出、月中天、月沒資料，來研究月球在天空運行的規律

我們查詢氣象局網站 2018 年宜蘭地區月出月沒資料(參考資料一)，如圖 2。發現每天月出(沒)方位、月中天仰角不是像月亮盤都是固定的，而是在一範圍變動。我們將 2018 年一整年的月出、月沒方位角、月中天仰角，轉成圖來進一步分析。

首頁 > 天文 > 月出月沒

區域： 東北部 地點： 宜蘭 年度： 2018 月份： 1 確定

[全年資料下載](#)

「—」代表該日並無此現象

日期	星期	月出時刻 hh:mm	方位角	過中天 hh:mm	仰角	月沒時刻 hh:mm	方位角
2018/01/01 (農曆11月15日)	星期一	16:33	68	23:28	85S	05:18	291
2018/01/02 (農曆11月16日)	星期二	17:36	68	—	—	06:23	292
2018/01/03 (農曆11月17日)	星期三	18:42	70	00:32	85S	07:26	291

圖 2 2018 年宜蘭地區月出月沒資料(取自氣象局網站)

(1)月出方位角的變化：

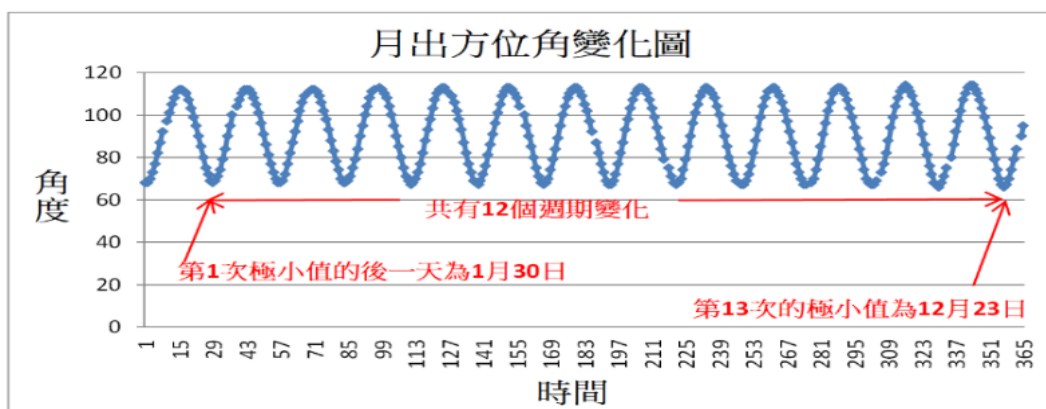


圖 3 月出方位角的變化

觀察圖 3，月出方位角變化範圍 $66^{\circ} \sim 113^{\circ}$ 度，第 1 次極小值的後一天為 1/30 到第 13 次極小值為 12/23 共 328 天，共有 12 個週期，因此變化週期為 $328 \text{ 天} / 12 = 27.33 \text{ 天}$ 。

使用相同的方法我們發現

(2)月中天仰角的變化：月中天仰角變化範圍 $43^{\circ} \sim 87^{\circ}$ 度，週期為 27.5 天。

(3)月沒方位角的變化：月沒方位角變化範圍 $246^{\circ} \sim 294^{\circ}$ 度，週期為 27.33 天。

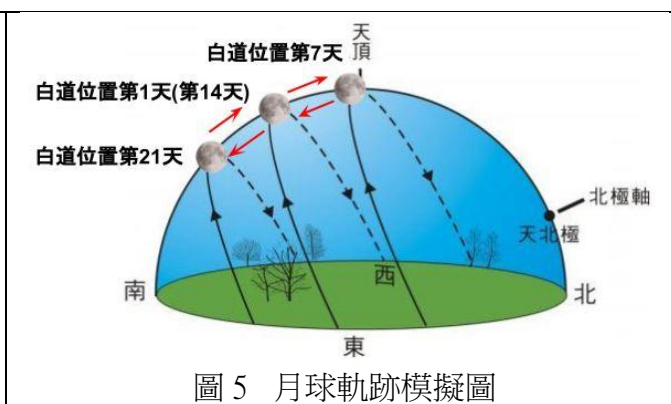
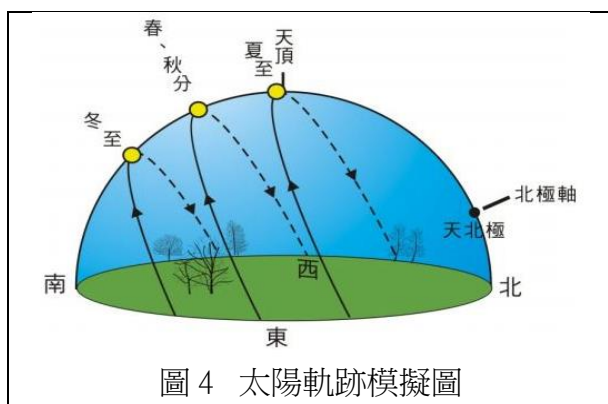
綜合以上的觀察結果，我們發現月出、月沒方位角或月中天仰角變化，雖然角度範圍不一樣，但是週期大約都是 27.3 天，也就是恆星月。

3. 月球在天空運行的大致規律

根據上述分析我們可以大致描述白道帶(月球在天球上運行的軌道又稱為白道)的範圍。我們選定四天特殊位置來歸納出月球在週期 27.3 天軌跡的變動範圍，我們以月球軌跡最中間的位置作為白道位置第 1 天(及第 14 天)、最偏北作為白道位置第 7 天、最偏南作為白道位置第 21 天，月球軌跡模擬如表 1，太陽和月球軌跡模擬如圖 4、圖 5。(參考資料二)

表 1 月球軌跡(白道帶)模擬表 (以氣象局網站宜蘭地區 2018/1/23~2018/2/19 資料為例)

白道的位置	日期	月出方位	月中天仰角	月沒方位
第 1 天	2018/1/23	90°(正東方)	66°(南)	273°(接近正西方)
第 7 天	2018/1/29	68°(東偏北)	85°(南)	292°(西偏北)
第 14 天	2018/2/5	95°(接近正東方)	64°(南)	268°(接近正西方)
第 21 天	2018/2/12	112°(東偏南)	45°(南)	248°(西偏南)
2018/1/23~2018/2/19	月出方位範圍	月中天仰角範圍	月沒方位範圍	
白道帶變化範圍	68°~112°	45°~85°	248°~292°	



月球在天空的運行軌跡，會在南北方向(不同赤緯)來回移動，就像物理上的簡諧運動。2018 年月球軌跡在南北方向的變化，振幅約 22°，週期是 27.322 天(即一恆星月)；太陽軌跡在南北方向的變化則是振幅約 23.5°，週期是 365.25 天(回歸年)。

(三) 探討黃道、白道和天球赤道的關係

1. 從宇宙中的觀點看黃道、白道和天球赤道的關係

地球赤道在天球上的投影叫天球赤道，太陽在天球上運行的軌道叫黃道，月球在天球運行的軌道叫白道，白道與黃道的交角(黃白交角)在 4°57'至 5°19'之間變化，平均值約為 5°9'，變化周期約為 173 天。天球赤道、黃道、白道三者的關係，如圖 6、圖 7。

(參考資料三~五)

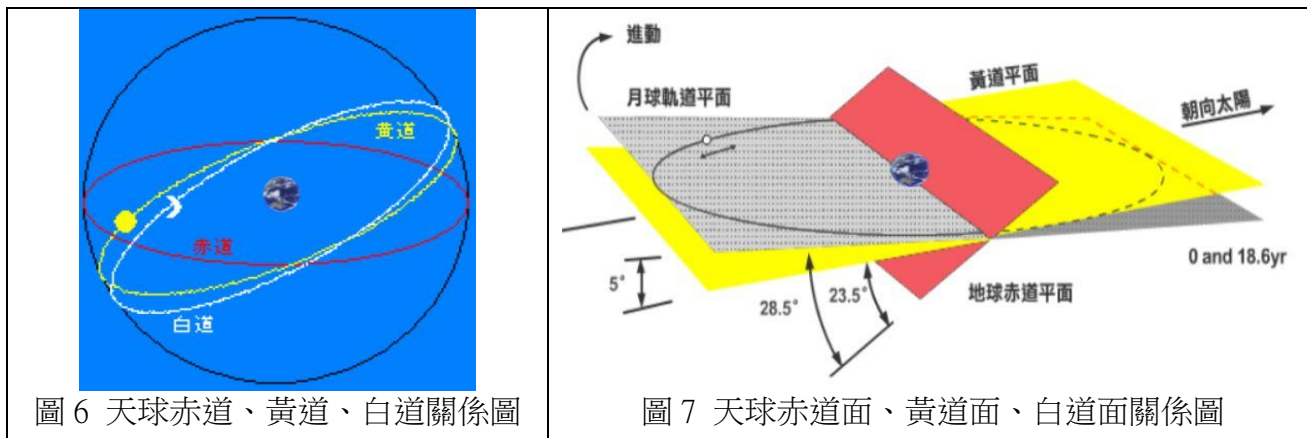


圖 6 天球赤道、黃道、白道關係圖

圖 7 天球赤道面、黃道面、白道面關係圖

月球的位置如果以黃道座標觀察，月球移動軌跡的緯度變化約在黃緯 $\pm 5^\circ$ 之內，如果以天球赤道座標觀察，月球移動軌跡的緯度變化約在赤緯 $\pm 28.5^\circ$ 之內。

2. 從地面的觀點看黃道、白道和天球赤道的關係

月球是地球的衛星，但它的運動受到太陽極大的影響，從地面往天空看，月球始終在黃道上南北約 5° 的範圍內移動，如圖 8 所示。(參考資料六、參考資料七)

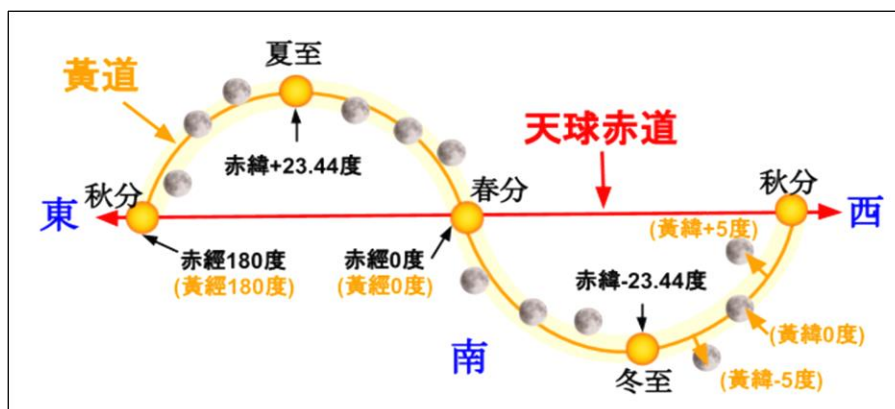


圖 8 地面觀察者看到的天球赤道、黃道、白道三者之間關係圖

(四) 從天文年鑑列出的月球位置表，進一步研究月球軌跡的規律(發現月球黃經、黃緯公式)

雖然我們已經大概知道月球的運行規律，但要預測日食或月食，所需的資料量及精確度仍然是不夠，於是我們再從天文年鑑去找資料(精確度到角分)。由於月球位置用地平座標系統(方位角、仰角)來看，變化的複雜性太高，所以我們轉而從天球座標系統中去找到到底是赤道座標(赤緯、赤經)或黃道座標(黃緯、黃經)，何者更適合歸納公式來定位月球位置？天球座標系統中的赤道座標(赤緯、赤經)和黃道座標(黃緯、黃經)的觀念，如圖 9、圖 10。(參考資料八)

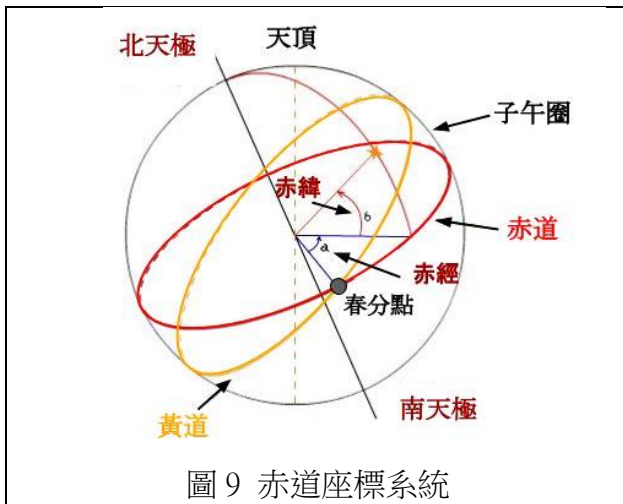


圖 9 赤道座標系統

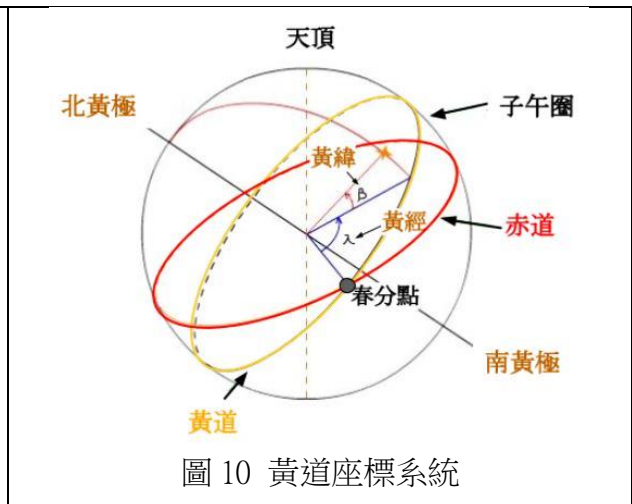


圖 10 黃道座標系統

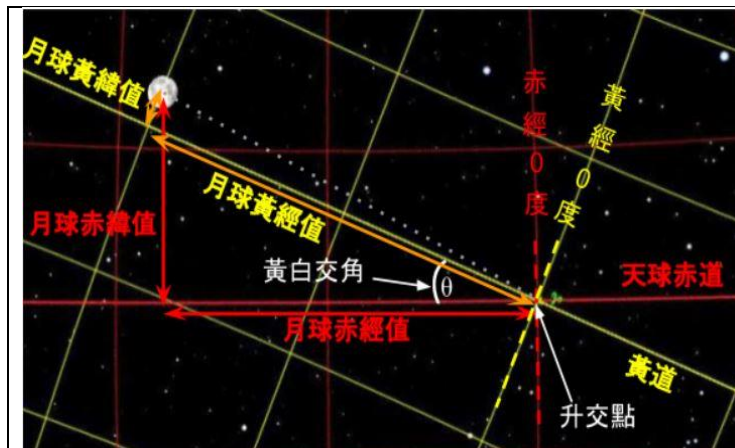


圖 11 從黃道和赤道座標系統看月球位置

赤道座標系統和黃道座標系統相夾稱為黃白交角，兩座標值須經過投影才能相互換算，如圖 11，Stellarium 模擬 2006/10/8 13:00 月球位置圖。

月球位置在赤道座標：
(赤經 1h47m，赤緯 13.65°)
月球位置在黃道座標
(黃經 29.75°，黃緯 2.37°)

1.推導預測月球緯度的公式

(1)分析天文年鑑 2008 年及 2018 年月球赤緯 1~3 月的規律 (參考資料 九)

我們隨意取 10 年的時間差距來觀察比較，看赤緯是否能保持規律變化，我們利用和上述分析氣象局網站資料一樣的方法，先畫出 2008 年及 2018 年天文年鑑 1~3 月月球赤緯資料來比較分析，我們發現這兩年的赤緯值一樣有 27.322 天的週期，資料的變化又類似 sin 函數，但是這兩年的振幅明顯不一樣(2008 年振幅約 30°、2018 年振幅約 20°)，因此我們推論月球赤緯不適合用來做歸納出月球緯度公式的參數。

(2)分析比較天文年鑑 2008 年及 2018 年月球黃緯 1~3 月的變化

我們同樣畫出 2008 年、2018 年天文年鑑 1~3 月月球黃緯資料來比較，我們發現兩者不僅一樣有 27.322 天的週期，資料的變化又類似 sin 函數，而且這兩年的振幅幾乎一樣都是 5.15°，只是兩者的黃緯初始值(相位角)不一樣，如圖 12、圖 13。因此我們推論月球黃緯適合歸納出月球緯度變化的公式，但要以不同天當參考基準日。

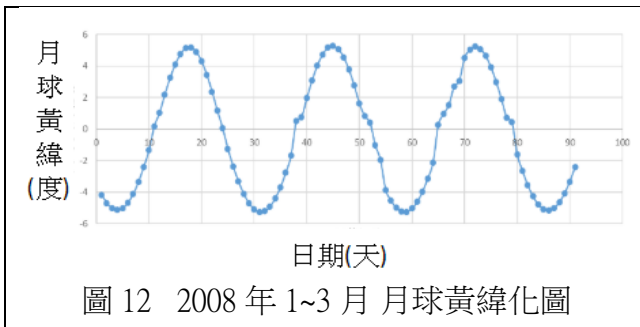


圖 12 2008 年 1~3 月 月球黃緯化圖

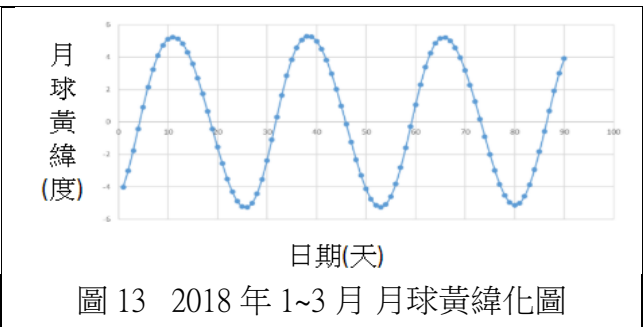


圖 13 2018 年 1~3 月 月球黃緯化圖

(3) 推導模擬 2018 年的月球黃緯公式

為求模擬黃緯公式的正確性，我們分析天文年鑑 2018 年一整年的月球黃緯值，如下圖，發現月球黃緯資料的變動就像週期 27.322 天，振幅 5.15° 的簡諧運動。因此我們就用簡諧運動的公式來模擬月球黃緯值： $f(t) = R\cos(\omega t + \phi)$ ， t =時間， R =半徑， ω =角速度， ωt =角位移， ϕ =初始角度。而且當 $\phi - \phi = \pi/2$ 時， $A*\sin(\omega t + \phi) = A*\cos(\omega t + \phi)$ ， \sin 和 \cos 就是同一個函數。(參考資料十)

我們套用簡諧運動的公式， $R=5.15^\circ$ ， $\omega = 2\pi/\text{週期} = 2\pi/27.322$ ，當我們模擬的參考基準日選在黃緯值 0° 附近(點較疏)時，比選在極值附近(點太密集)容易確認，而且初始角 $\phi = 0$ ，模擬公式更簡化。

模擬月球黃緯的公式實際計算應用如下式:

$f(t) = 5.15 * \sin(\omega * t)$ ，這裡 t =預測日期-黃緯參考基準日， $\omega = 2\pi/\text{週期} = 2\pi/27.322$ 。

我們可以選擇 2018/1/4 為黃緯參考基準日，因為這天月球黃緯接近 0° 而且黃緯漸增。

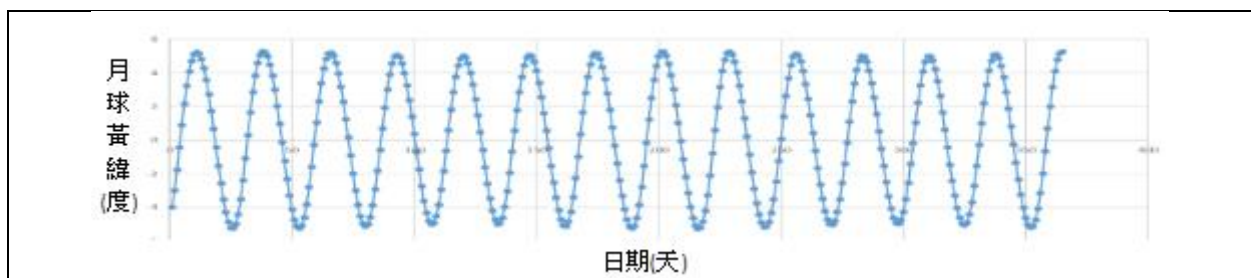


圖 14 2018 天文年鑑月球黃緯變化圖

我們將天文年鑑月球黃緯和模擬黃緯疊加在一起比較，發現兩者幾乎重合，如下圖

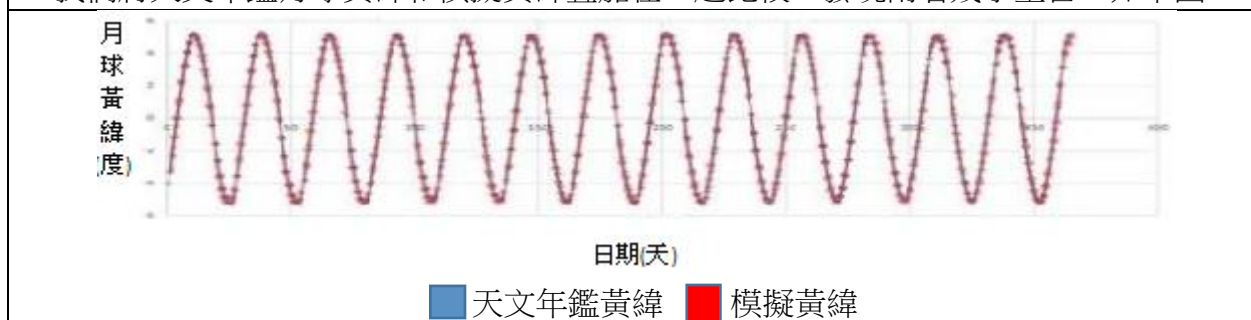


圖 15 2018 年 月球的年鑑黃緯和模擬黃緯疊加圖

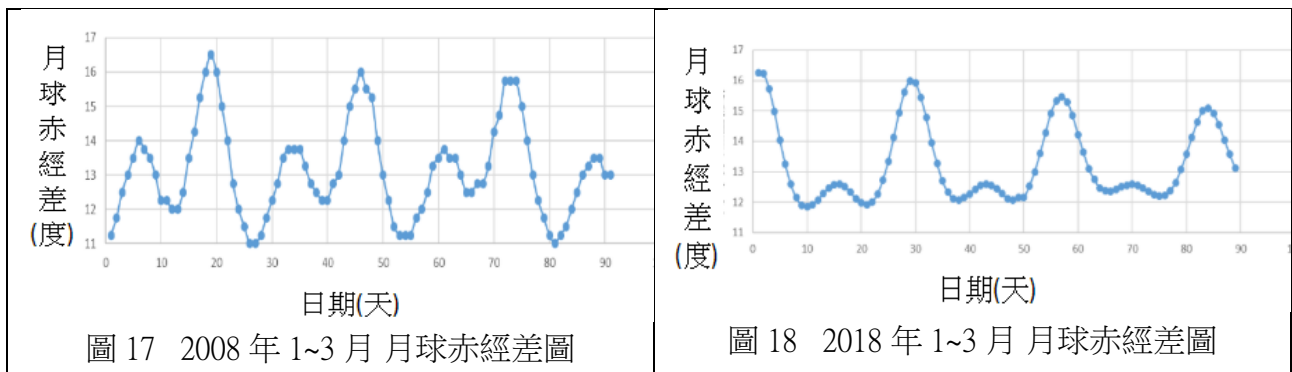
以 2018/5/1 為例 $t=2018/5/1-2018/1/4=117$ ，經上面公式計算得到模擬的月球黃緯 $f(117)=5.04^\circ$ ，比對圖 16，2018 年年鑑月球資料，黃緯 $4^\circ 54.2$ 角分 $=4.90^\circ$ ，誤差 0.14° ，我們提出的月球黃緯的模擬公式計算值和 2018 天文年鑑的資料吻合。2018 年完整的黃緯模擬公式誤差分析，我們整理在研究結果一。

五 月																
東經：121°31'05"，北緯：25°05'44"																
世界時 0 時																
日期	地心黃道座標				地心赤道座標				地心地表		地平座標					
	黃經		黃緯		赤經		赤緯		視差		方位 仰角					
	°	'	°	'	h	m	°	'	h	m	'	°	'			
1	231	56.7	+4	54.2	15	23.3	-13	30.6	15	20.1	-13	49.29	50	55.7	265.4	-24.1
2	244	30.9	+4	33.9	16	13.7	-16	33.0	16	10.2	-16	53.19	53	26.1	258.0	-14.8

圖 16 2018 年天文年鑑 五月月球位置表

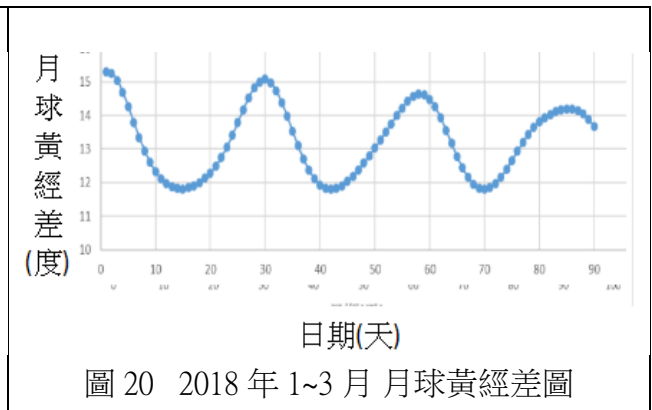
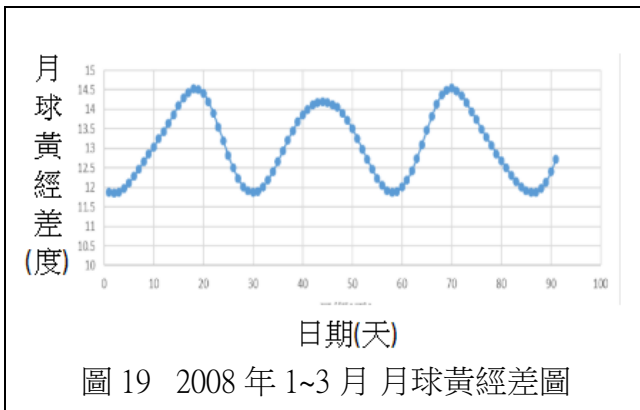
2.推導預測月球經度的公式

(1)依上述赤緯、黃緯相同的分析模式，我們挑選 2008 年及 2018 年的天文年鑑 1~3 月月球赤經資料來分析比較，看赤經是否能保持規律變化，我們發現好像這兩年的赤經值似乎都成直線增加，我們再進一步分析，我們將數列前後兩天的值相減，看赤經差的變化為何，結果如圖 17、圖 18。



比較上面兩圖，2008 年月球位置赤經差約在 $11^\circ \sim 16.5^\circ$ 中變化，而 2018 年約在 $12^\circ \sim 16.5^\circ$ 中變化，兩者的週期變化大約一致，都是 27 或 28 天，可是終究赤經差的變化差異太大、太複雜，很難找出模擬公式。

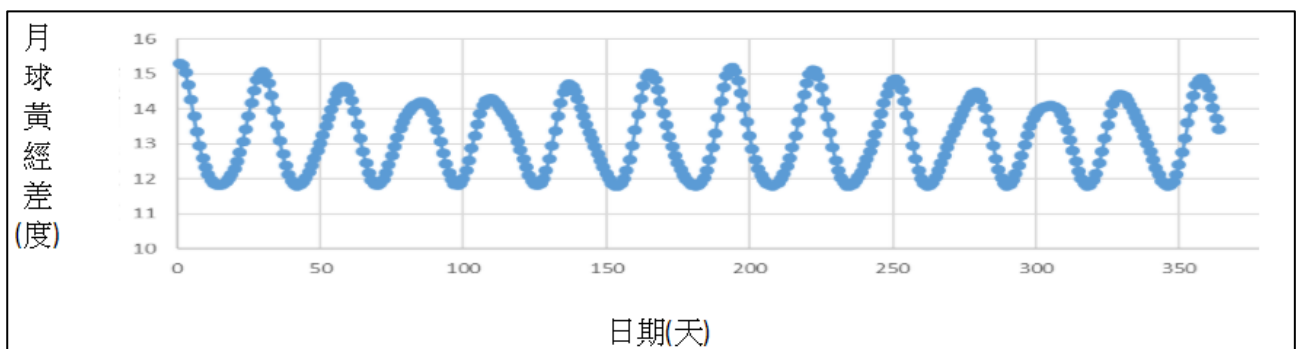
(2)接著我們比較天文年鑑 2008 年及 2018 年月球黃經 1~3 月的變化，發現相鄰月球黃經值也和月球赤經值一樣似乎成直線增加，因此我們再進一步分析，我們分析比較這兩年 1~3 月的月球黃經差資料，如圖 19、圖 20。



比較上面兩圖，發現雖然這兩年的黃經差(相鄰兩天)在起始值是不一樣，但是黃經差 2008 年約在 11.5°~15°中變化，2018 年約在 12°~15.5°中變化，兩者的週期變化大約一致，都是 27 或 28 天，雖然振幅大小不完全一樣(有些許差異)，但是和赤經差比較起來，顯得比較有規律。因此我們推論可用月球黃經來推導月球的經度。

(3)推導 2018 年月球相鄰兩天的黃經差模擬公式

首先我們將天文年鑑 2018 年一整年相鄰兩天的黃經差整理成圖 21。



我們發現圖 21 好像是由 sin 函數組成(振幅大小略有改變)，黃經差約在 11.5° ~15.5° 度中成週期變化。另外我們查詢網路得知月球的分至月(在黃道座標上再回到相同黃經位置)是 27.322 天，因此推論月球平均每天移動黃經 $360/27.322=13.176^\circ$ 。(參考資料十一)

為求簡化我們仿照月球黃緯模擬公式，設計 2018 年月球黃經差(相鄰兩天)的模擬公式為 $f(t)=13.176+R*\sin(\omega*t)$ ，這裡 $t=$ 觀測日期-2018/1/23， $\omega=2\pi/27.322$ ，R 為振幅大小(在 1.39~2.12 之間變動)，為求簡單計算，我們暫時令 $R=(1.39+2.12)/2=1.755$ ，並以月球黃經差最接近 13.172° 且黃經差遞增的 2018/1/23 作為參考基準日，來計算出模擬數據。並將年鑑黃經差資料與之疊加在一起比較，如圖 22，我們發現兩者很接近。兩者一整年的誤差約在 -0.6°~+1.2°之間，如圖 23，雖有一些誤差，但是大部分吻合。

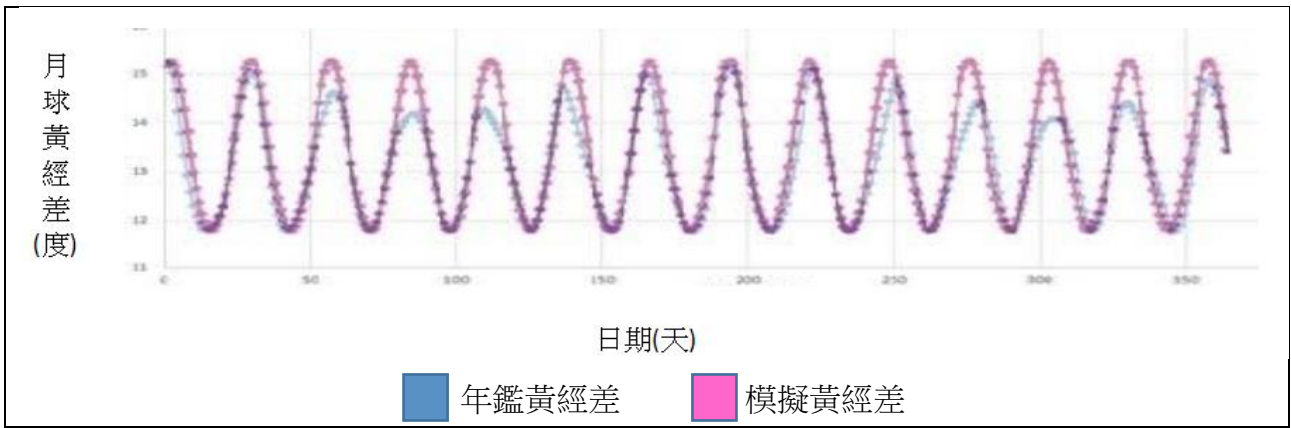


圖 22 2018 年 月球的年鑑黃經差和模擬黃經差疊加圖

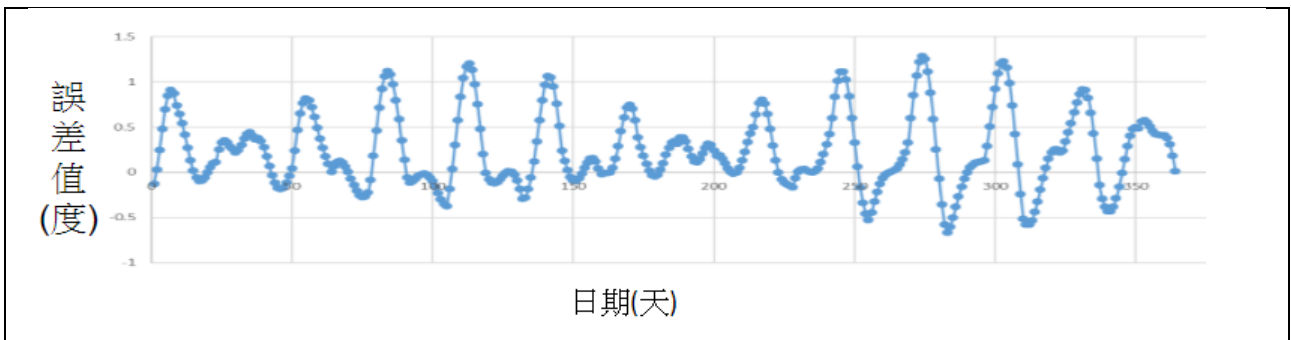


圖 23 2018 年年鑑和模擬月球黃經差的誤差圖

(4)推導 2018 月球的黃經模擬公式

月球黃經(當天)=月球黃經(前一天)+黃經差(相鄰兩天)，代入上述討論的黃經差模擬公式，則月球黃經的模擬公式變成以下的式子：

$$f(t) = \text{月球黃經(參考基準日)} + 13.176 + R \cdot \sin(\omega * 1) + 13.176 + R \cdot \sin(\omega * 2) + 13.176 + R \cdot \sin(\omega * 3) + \dots + 13.176 + R \cdot \sin(\omega * t)$$

$$= \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + R * \sum_{n=0}^{n=t} \sin(\omega * n) (\text{度}), \omega = 2\pi / 27.322,$$

這裡 $t = \text{觀測日期} - \text{黃經參考基準日}$ 。

另外我們想到，因為月球繞地球是以橢圓的方式進行，如果我們要以圓形軌道來模擬代替，根據克卜勒行星運動第二定律，在相等時間內，太陽和運動的行星的連線所掃過的面積都是相等的，我們可以將 R 改為 1.72，說明如下：

橢圓面積 = $\pi * a * b$ ， 圓面積 = $\pi * R * R$ (A=面積、a=半長軸、b=半短軸、R=圓半徑)，
經過一週期，橢圓面積=圓面積，因此 $\pi * a * b = \pi * R * R \Rightarrow R = \sqrt{a * b}$

現在 $a=2.12$ 、 $b=1.39$ 所以 $R = \sqrt{(2.12 * 1.39)} = 1.716 \rightarrow 1.72$ ，因此公式修改如下：

$$f(t) = \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * \sum_{n=0}^{n=t} \sin(\omega * n) (\text{度}), \omega = 2\pi / 27.322$$

在實際計算上，我們進一步將月球黃經模擬公式修改如下：

$$f(t) = \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * \int_0^t \text{SIN}(\omega * \theta) d\theta, \omega = 2\pi / 27.322$$

因為 $\int \sin cx \, dx = -\frac{1}{c} \cos cx$ ，所以 $\int_0^t \sin(\omega * \theta) d\theta = -(1/\omega) \cos(\omega * \theta) \Big|_0^t$ (參考資料十二)

$$f(t) = \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * (-1/\omega) * ((\cos(\omega * t) - \cos(\omega * 0)))$$

$$= \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * (1/\omega) * (1 - \cos(\omega * t))$$

模擬月球黃經的公式實際計算應用如下式:

$$f(t) = \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * (1/\omega) * [1 - \cos(\omega * t)] \text{ 除以360取餘數}$$

(這裡 $\omega = 2\pi/27.322$ ， $t = \text{預測日期} - \text{黃經參考基準日}$)

以計算 2018/5/1 的月球黃經為例，我們以月球黃經差最接近 13.172° 且遞增的 2018/1/23 作為參考基準日，月球黃經(2018/1/23) = 9.36°， $t = 2018/5/1 - 2018/1/23 = 117$ ，經上面公式計算，月球黃經 $f(117) = 231.81^\circ$ ，比對圖 16 天文年鑑月球資料，月球黃經 $231^\circ 56.7$ 角分 = 231.95° ，誤差 0.14°，誤差很小。2018 年完整的黃經模擬公式誤差分析，我們整理在研究結果二。

(五) 探討網路上關於日、月食發生的條件

我們知道當太陽與月球同時在黃白交點附近才能發生日食或月食。黃白交點指的是白道與黃道相交的兩點(升交點、降交點)如圖 26。由於太陽對月球的引力，兩個交點的連線沿黃道與月球運行的相反方向向西移動，稱為交點退行，每天向西退行大約 0.054° ，每年向西退行 $19^\circ 21'$ ，大約 18.6 年完成一周。這現象對地球的章動和潮汐起重要影響(參考資料六、十三~十八)

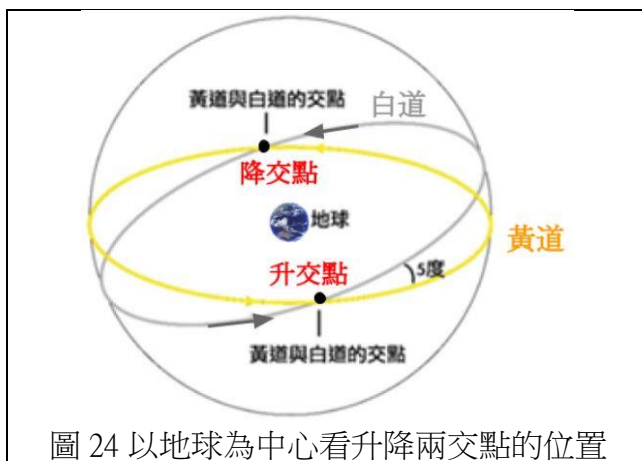


圖 24 以地球為中心看升降兩交點的位置

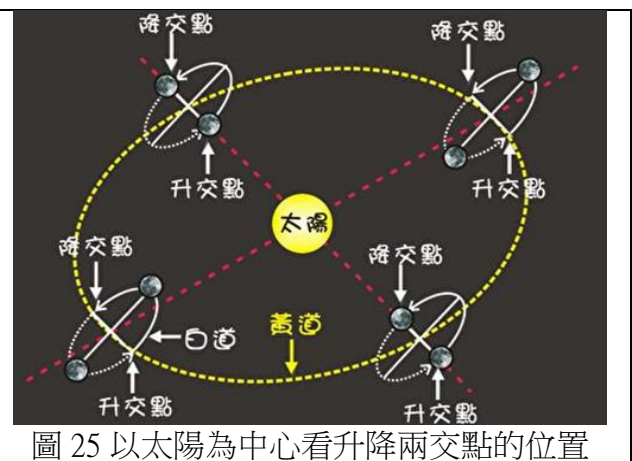


圖 25 以太陽為中心看升降兩交點的位置

網路資料中關於日月食的發生，提到一年中最少只有 2 日食，最多有 7 次交食(5 次日食和 2 次月食；或 4 次日食和 3 次月食)，最常見是 2 次日食和 2 次月食。每經過一個沙羅週期，太陽、月球、黃白交點差不多又回到原來的相對位置，一個沙羅週期有 70 個交食，其中 41 次日食，29 次月食。

沙羅週期的算法是以交點月(27.212天)和朔望月(29.53天)求公倍數=約6585.3211天(18年10天或11天)稱為一沙羅週期。日月食的發生週期除了和沙羅週期有關外，詳細交食情況還需考慮，食年(太陽過黃白交點的週期)346.62天及近點月(月球連續兩次過近地點的週期)27.56天(參考資料十三、十九)。我們將日月食發生條件資料整理成表2。

表2 日月食發生條件表

	日月食發生條件一：	日月食發生條件二：
	發生在朔月或望月(太陽，地球和月球必須對齊或非常接近對齊)	日、月兩者同時在黃白交點附近(升交點、降交點)
日食	發生在朔月(新月)，即農曆的初1	黃白交點前後 18°內，可能發生日食。
月食	發生在望月(滿月)，即農曆的15(16)	黃白交點前後 12°內，可能會發生月食。

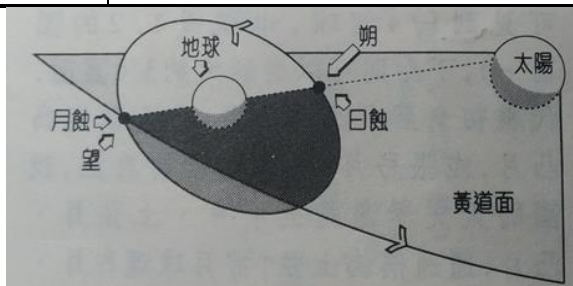


圖26 升、降兩交點位於朔發生日食，位於望發生月食(日、月、地成一直線)

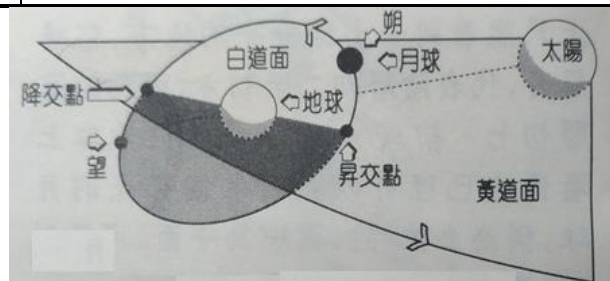


圖27 升、降兩交點不在朔、望則沒有日食、月食發生(日、月、地不成一直線)

基於前面的研究基礎，我們將日月食要發生的兩個條件，變成滿足以下的兩個式子，並以月球太陽黃經差及太陽黃經的變化圖來預測日月食的發生。

1. 月球黃經 - 太陽黃經 = $0 \pm 16^\circ$ (日食) 或 正負 $180 \pm 10^\circ$ (月食)
2. 月球黃緯 = 在 0° 附近 (太陽的黃緯本來就是 0°)

我們以2018年天文年鑑的月球黃經、月球黃緯，及太陽黃經早上8點的資料，來驗證世界各地日月食發生時確實會滿足上述(一)(二)條件，如表3。

表3 2018年日月食發生日天文年鑑月球黃經與太陽黃經差值比較表(UTC+8)

2018年世界各地發生日月食的狀況	月全食 2018/01/31 21:30	日偏食 2018/02/16 4:52	日偏食 2018/07/13 11:02	月全食 2018/07/28 4:22	日偏食 2018/08/11 17:47
天文年鑑月球黃經與太陽黃經差值	-187.79°	+1.32°	-1.54°	+181.65°	-5.88°
天文年鑑月球黃緯值	-1.08°	-1.25°	-1.68°	-0.06°	+0.60°
是否符合(一)(二)條件	V	V	V	V	V

為更直觀的了解日月食，我們發展出日月食發生的判斷圖來幫助預測日月食，如圖 28。

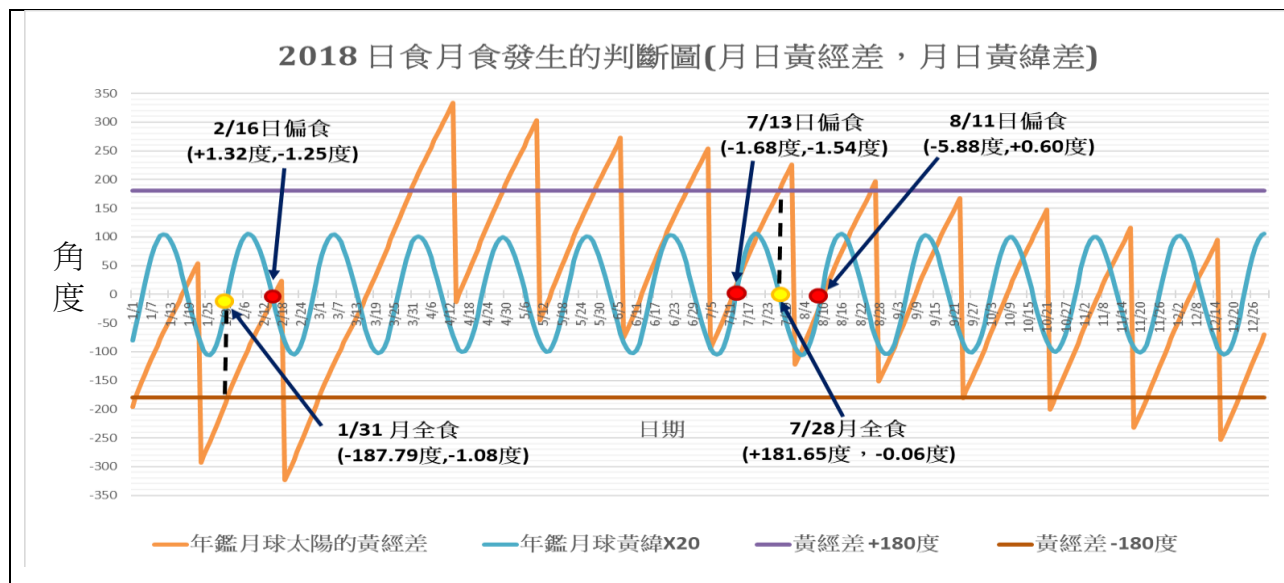


圖 28 2018 年日月食發生判斷圖

在圖 30 中為求方便觀察，我們將月球黃緯的資料放大 20 倍，可觀察到月球、太陽黃經差、月球黃緯兩圖形，相交發生在角度 0°附近的日期就是日食日期；而當月球、太陽黃經差為正負 180°且月球黃緯在 0°附近的日期就是月食日期。我們比對表 3 發現兩者是一致的。因此證明我們提出的日月食作圖法是可以直觀的了解日月食的發生。

(六)探討如何以月球的模擬數據(黃經、黃緯)和太陽的年鑑數據(黃經)來計算日月食發生

接著我們以模擬月球黃經、黃緯的數據代替天文年鑑的資料，來計算日月食發生日期。

1.修改計算日月食的基準時間為中午 12:00

在研究過程五中，我們的時間計算基準是 8:00，雖然算出的結果均符合日月食發生的兩個條件，但我們發現天文年鑑裡 2018/1/31 是月全食，可是這天的月日黃經差-187.79°卻比 2018/2/1 的月日黃經差-173.92°的誤差更大，似乎 2018/2/1 才是月食。探究原因我們發現這次月食食甚時間是 21:27，所以 2018/2/1 AM 8:00 反而比 2018/1/31 AM 8:00，更接近月食食甚時間，因此要判斷日月食發生歸哪天，不能以 8:00 而是要以中午 12:00 為基準才對。

我們要將天文年鑑太陽黃經值加上 0.16°，因為太陽在黃經一天往東平均移動的角度 $(360 \times 4 / (365 \times 3 + 366)) = 0.986$ 度，8 點到 12 點太陽的黃經位移 $= 0.986 \times (12 - 8) / 24 = 0.16$ 度，另外在確認月球黃緯、黃經參考基準日時，使用 Stellarium 軟體也是要以 12:00 的資料為基準。

2.在太陽的黃經取用方面，因為太陽每四年一閏會回到相同的黃經，如表 4，太陽位置的黃經值每年四年都差不多，因此我們以 2017~2020 的年鑑太陽黃經資料當作基礎運算值。

表 4 2015~2020 天文年鑑太陽視黃經的比較表

日期	2015/1/1	2016/1/1	2017/1/1	2018/1/1	2019/1/1	2020/1/1
太陽位置的視黃經值	280.23°	279.98°	280.76°	280.5°	280.3°	280.0°
黃經差(和 2020 年比較)	+0.23°	-0.02°	+0.76°	+0.5°	+0.3°	0°

3.制定日月食判斷條件(我們透過以下三個篩選條件來進行日月食的預測)

圖 29、30 為示意圖，表 5、表 6 則列出我們反覆計算後得出的計算參數。

日月食判斷條件一：(挑選出地球、太陽、月球位置接近一直線的日期，當作候選日期)

(1)月日黃經差= 在 $\pm 6.5^\circ$ 之內(日食) 或 正負 $180\pm 6.5^\circ$ 之內(月食)

(2)月球黃緯= 在 $\pm 3^\circ$ 之內

日月食判斷條件二：(直接判斷或排除是否是日月食，圖 29、圖 30 是日月食發生示意圖)

(1)直接判斷日月食：太陽、月球位置特別接近一直線(黃經差或黃緯接近 0°)

a. 落於 A 區，月黃緯接近 0° 且 月日黃經差接近 0° ，直接判斷是日食。

b. 落於 A 區，月黃緯接近 0° 且 月日黃經差接近正負 180° ，直接判斷是月食。

(2)直接排除不是日月食：(日食黃經差以 0° 為基準，月食黃經差以正負 180° 為基準)

a. 落於 B 區，月日黃經差的誤差很小 且 月日黃緯差很大，直接判斷不是日月食。

b. 落於 C 區，月日黃緯差的誤差很小 且 月日黃經差很大，直接判斷不是日月食。

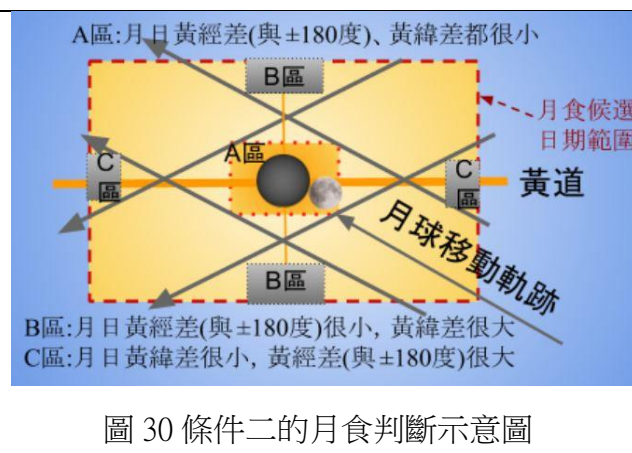
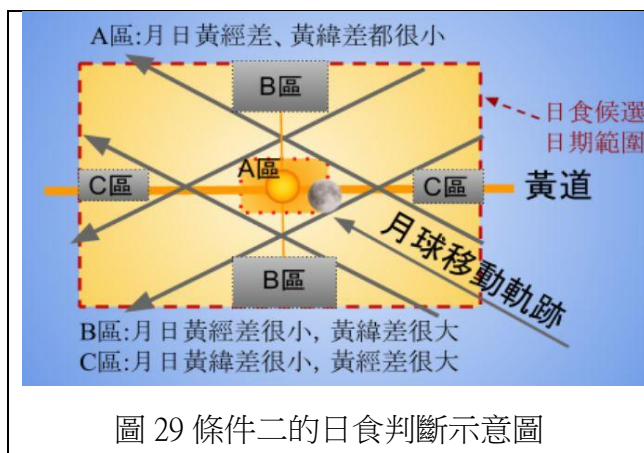


表5 日食判斷條件二

序號	區域	判斷日食條件	判斷結果
1	A	$ 月黃緯 < 1.7^\circ$ 且 $ 月日黃經差 < 3.4^\circ$	直接判斷是日食
2	B	$ 月黃緯 > 1.9^\circ$ 且 $ 月日黃經差 < 3.2^\circ$	直接判斷不是日食
3	C	$ 月黃緯 < 1.5^\circ$ 且 $ 月日黃經差 > 4.6^\circ$	直接判斷不是日食

表6 月食判斷條件二

序號	區域	判斷月食條件	判斷結果
1	A	$ 月黃緯 < 2.4^\circ$ 且 $(月日黃經差 - 180^\circ < 5.5^\circ$ 或 $ 月日黃經差 + 180^\circ < 5.5^\circ)$	直接判斷 是月食
2	B	$ 月黃緯 > 2.6^\circ$ 且 $(月日黃經差 - 180^\circ < 5.3^\circ$ 或 $ 月日黃經差 + 180^\circ < 5.3^\circ)$	直接判斷 不是月食
3	C	$ 月黃緯 < 2.2^\circ$ 且 $(月日黃經差 - 180^\circ > 6^\circ$ 或 $ 月日黃經差 + 180^\circ > 6^\circ)$	直接判斷 不是月食

如果日月食候選日期，經判斷條件二仍無法判斷，則需要再經以下的條件三的確認。

日月食判斷條件三：(日月食發生時，是否符合通過升降交點時月球黃緯值的增減變化)

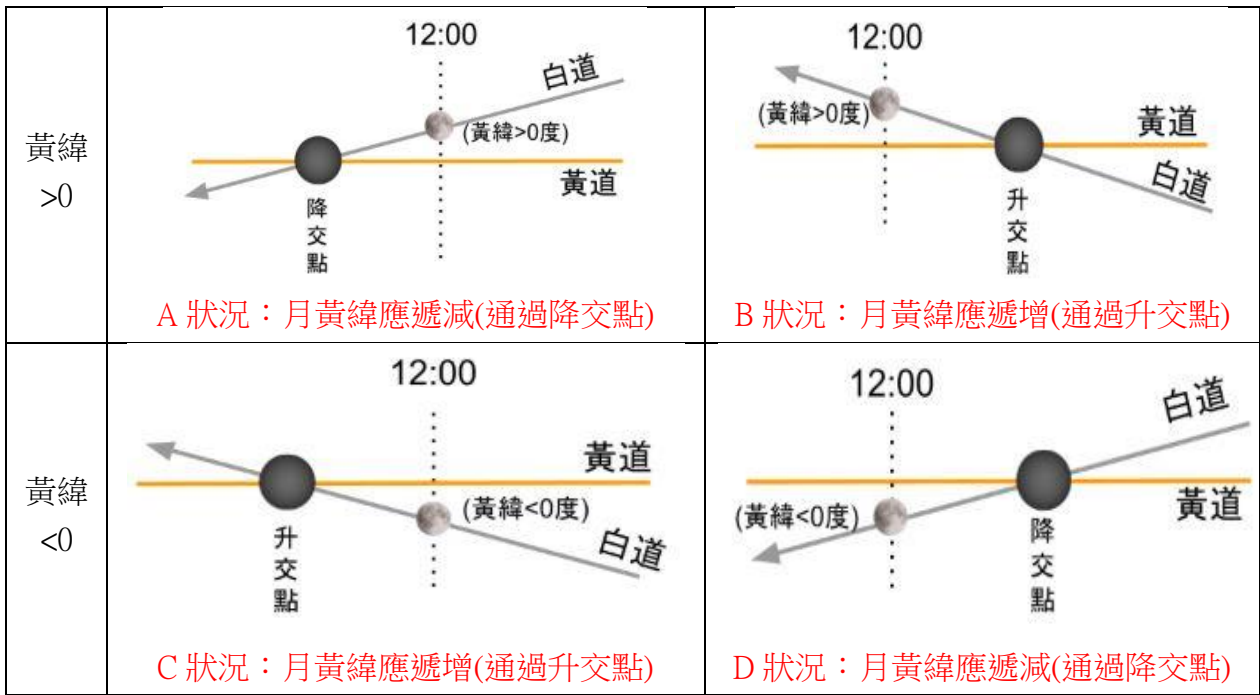
我們將日月食發生在中午 12:00 前後及月黃緯、月日黃經差應該有的角度變化，分別列出日食表 7，月食表 8 各四種狀況當作我們進一步篩選的條件。

表7 日食發生時通過升降交點時月球黃緯值的增減變化表

日食	日食發生在中午 12:00 後 $-6.5 < 月日黃經差 < 0$	日食發生在中午 12:00 前 $0 < 月日黃經差 < 6.5$
黃緯 > 0	<p>A 狀況：月黃緯應遞減(通過降交點)</p>	<p>B 狀況：月黃緯應遞增(通過升交點)</p>
黃緯 < 0	<p>C 狀況：月黃緯應遞增(通過升交點)</p>	<p>D 狀況：月黃緯應遞減(通過降交點)</p>

表8 月食發生時通過升降交點時月球黃緯值的增減變化表

月食	月食發生在中午 12:00 後 $173.6 < 月日黃經差 < 180$ 或 $-186.5 < 月日黃經差 < -180$	月食發生在中午 12:00 前 $180 < 月日黃經差 < 186.5$ 或 $-180 < 月日黃經差 < -173.5$



接著我們以模擬的資料(月黃經、月黃緯公式計算的基本值:黃緯參考基準日2001/5/26，黃經參考基準日2001/5/20,參考基準日黃經值22.13度)，配合上述的判斷條件來計算2001年的日月食，計算結果整理成表9。

表9 2001年日月食判斷結果分析

序號	日月食判斷結果	天數
1	2001 年的日月食候選日期	1/9、1/24、1/25、2/8、6/6、6/21、7/5、7/20、8/4、12/1、12/14、12/30 共 12 天
2	初步排除不是日月食	1/24、6/6、17/20 共 3 天
3	最後日月食判斷成功	1/9、6/21、7/5、12/14、12/30 共 5 天
4	最後日月食判斷錯誤	1/25、2/8、8/4、12/1 共 4 天

對世界各地日月食的判斷成功率=5/9=56%

而對台灣地區2001年三次的月食，2001/1/10月食，2001/7/5月食，2001/12/30月食 的判斷成功率卻是100%

4.探討如何進一步使用月球太陽的黃經差，計算出日月食發生的時間

我們進一步預測日月食發生的時間。因為在日月食發生時，月球的黃經一定是逐漸增加的，而且一天的變化約在 11°~15°上下，變化比黃緯大，所以我們選擇用月日黃經差來判斷日月食的發生時間，判斷步驟舉例說明如下：

我們以 2000/7/2 的日偏食為例(月黃經、月黃緯公式計算的基本值:黃緯參考基準日 2000/5/9，黃經參考基準日 2000/5/30,參考基準日黃經值 22.83 度):

(1) 計算月日黃經差和和 0°的角度差(月食則計算和+180°、-180°的角度差)

2000/7/2 的月日黃經差為+1.9°，和 0°相差 1.9°。

(2)從角度差換算成時間差(月日黃經差/12.19*24)

因為太陽移動平均黃經為往東 0.9856°/天，月球移動平均黃經為往東 13.176°/天，兩者相對移動 $13.176^\circ - 0.986^\circ = 12.19^\circ/\text{天}$ ，算成時間= $1.9/12.19*24=3.74$ 小時=3:44。

(3)從月日黃經差的正負值判斷日月食發生時間在中午 12:00 之前或之後

因為 2000/7/2 的月日黃經差+1.9°(月球在太陽的東方經度 1.9°)，表示在 12:00 時已經發生過日食，而日食發生的時間，就是 $12:00 - 3:44 = 8:16$ ，我們以如圖 31 來模擬這狀況。



圖 31 2000/7/2 太陽月球相對位置模擬圖

依照上述做法，我們計算 2000 年世界各地發生的日月食時間，並和網路資料進行比對，如表 10。觀察表 10，我們預測 2000 年的日月食時間最大誤差為 2000/12/26 日的-8:03。

表 10 2000 年 網路上世界各地日月食與預測的日月食時間比較表

網路 2000 年 日月食狀況	月全食 2000/1/21 12:44	日偏食 2000/2/5 20:50	日偏食 2000/7/2 3:33	月全食 2000/7/16 21:56	日偏食 2000/7/31 10:14	日偏食 2000/12/26 1:35
預測日月食 日期時間	2000/1/21 14:21	2000/2/5 20:40	2000/7/2 8:16	2000/7/16 16:20	2000/7/31 14:38	2000/12/25 17:32
時間誤差	+1:37	-0:10	+4:43	-5:36	+4:24	-8:03

(七)探討一個沙羅週期適用的月球黃緯、黃經參考基準日(包含月球黃經值)

經由以下的討論(三)我們知道，不論是模擬黃緯或模擬黃經，最好每一年都分別選定的不同的參考起始日，才能將預測誤差控制在一定範圍。而且我們知道經過一沙羅週期(18 年 10 或 11 天)，太陽、月球、黃白交點差不多回到原來的相對位置，因此我們只要列出 18 年的月球黃緯、黃經參考基準日的資料表格，其他日期如果在範圍外，就往前往後各加(減)沙羅週期的倍數，就可得到要預測年份的月球黃緯、黃經參考基準日。

我們搭配 Stellarium 軟體確認以下的選擇條件，來列出 2000 年~2021 年可用的黃緯、黃經參考基準日，如表 11。

*模擬黃緯參考基準日選擇條件：黃緯接近 0° ，且遞增。

*模擬黃經參考基準日選擇條件：相鄰兩天黃經差接近 13.176° ，且遞增。

表11 2000年~2021年的黃緯、黃經參考基準日

黃緯				黃經			
年份	參考基準日	參考基準日	黃經值(度)	年份	參考基準日	參考基準日	黃經值(度)
2000	5/9	5/30	22.83	2011	5/19	6/03	87.58
2001	5/26	5/20	22.13	2012	6/5	5/28	149.60
2002	6/9	5/16	99.57	2013	5/23	5/20	173.43
2003	5/30	6/07	158.25	2014	6/9	5/13	211.78
2004	6/13	5/28	168.00	2015	6/24	6/23	258
2005	6/3	5/21	206.22	2016	6/12	5/27	306.28
2006	5/22	5/13	230.82	2017	5/31	5/21	355.58
2007	6/9	6/06	314.87	2018	5/21	5/11	354.30
2008	5/27	5/28	336.68	2019	6/6	6/01	42.02
2009	6/11	5/20	1.5	2020	6/21	5/25	93.02
2010	5/31	5/13	41.25	2021	6/10	6/17	164.35

叁、研究結果與討論

一、研究結果

(一)我們推導出模擬月球黃緯的公式

月球黃緯值的變化約在 $-5^\circ \sim +5^\circ$ 來回變化，近似 \sin 函數，經過嘗試和調整我們發現黃緯的週期不是 27.322，應是 27.22。圖 32 為我們利用黃緯參考基準日 2019/6/6 預測 2003 年一整年的黃緯誤差值，往前推 16 年，模擬的黃緯誤差仍然維持約在 $-1 \sim +1$ 度，證明模擬月球黃緯的公式成功。

月球黃緯值模擬公式：

$f(t) = 5.15 * \sin(\omega * t)$ ，這裡 $t = \text{預測日期} - \text{黃緯參考基準日}$ ， $\omega = 2\pi / 27.22$ 。

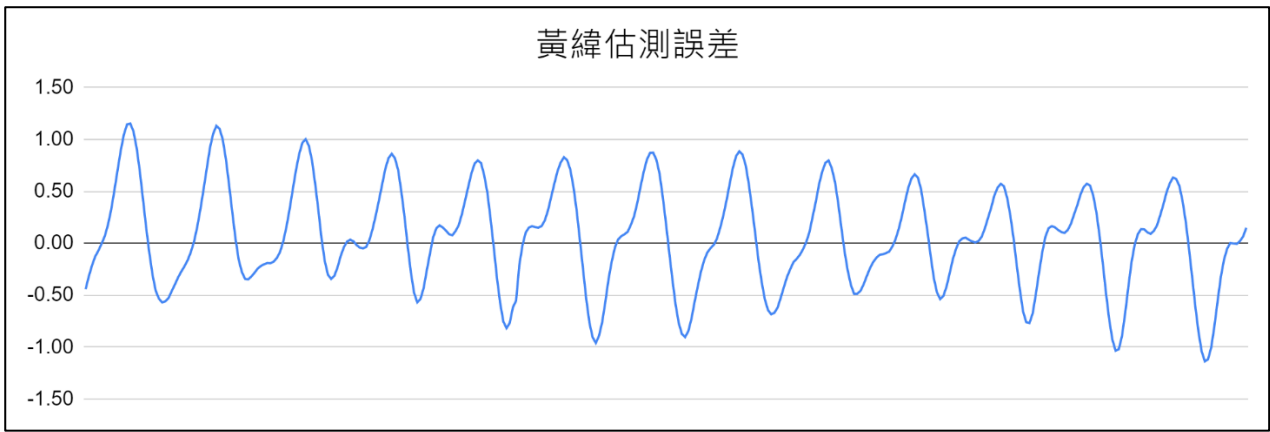


圖 32 2003 年黃緯估測誤差圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

(二)我們推導出模擬月球黃經的公式

月球黃經值的變化約等比例成長，每天的黃經差在 $11.5^{\circ} \sim 15.5^{\circ}$ 中變化，平均值為 13.176° ，黃經差像是 sin 函數，經過嘗試和調整我們發現黃經差的週期不是 27.322，應是 27.6。圖 33 為我們利用黃經參考基準日 2008/2/6，黃經值 309.1 度，預測 2003 年一整年的黃經的誤差值，往前推 5 年，模擬的黃經誤差仍然維持約在 $-3 \sim +11$ 度，證明模擬月球黃經的公式成功。

月球黃經值模擬公式：

$$f(t) = \text{月球黃經(黃經參考基準日)} + 13.176 * t + 1.72 * (1/\omega) * [1 - \cos(\omega * t)] \text{ 除以 } 360 \text{ 取餘數}$$

(這裡 $\omega = 2\pi/27.6$ ， $t = \text{預測日期} - \text{黃經參考基準日}$)

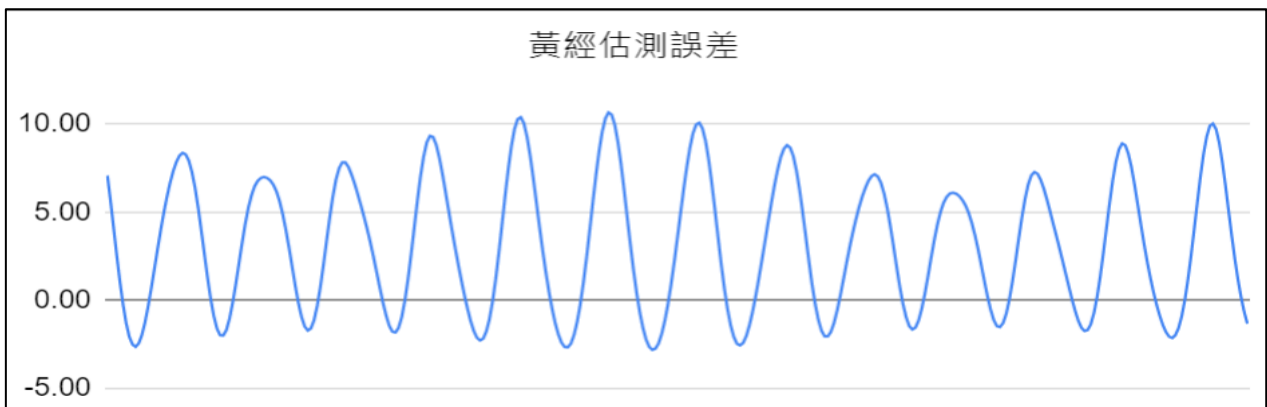


圖 33 2003 年黃經估測誤差圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

(三)我們成功利用月模擬球黃經、黃緯和天文年鑑太陽黃經相交的計算預測日月食，同時我們也可以比較日食月時發生的判斷圖，來證明日月食的發生具有沙羅週期的特性，以下我們以 2002 年、2020 年為例，來進行計算和驗證。

1. 驗證 2002 年日月食

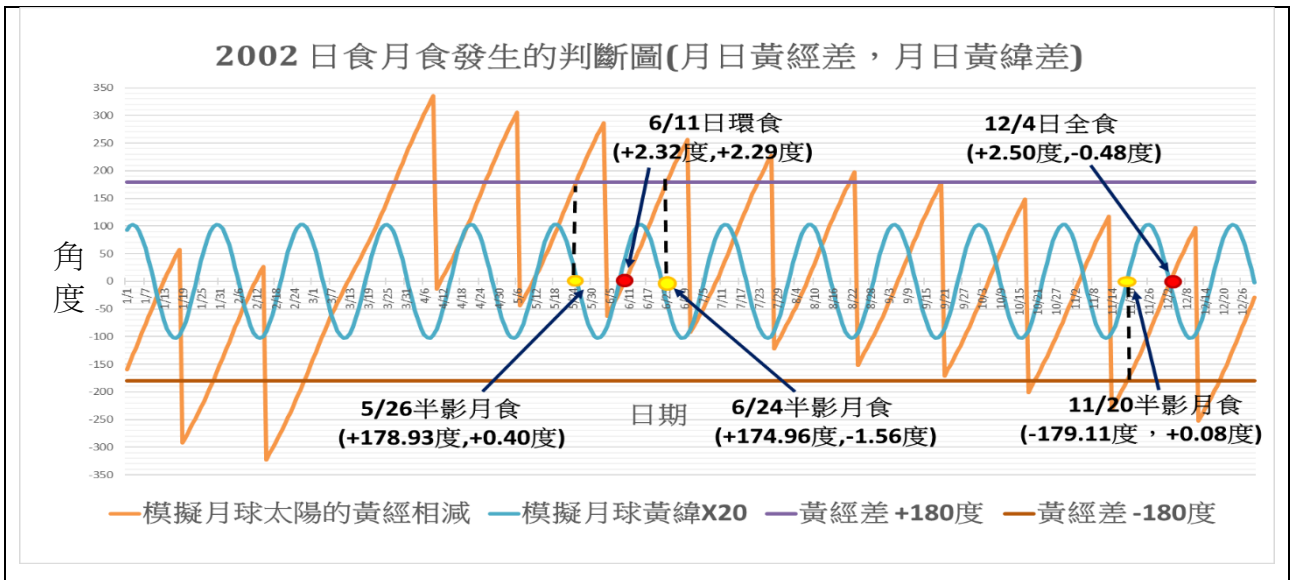


圖 34 2002 年日月食發生判斷圖(黃緯基準日：6/9，黃經基準日：5/16，黃經值 99.57°)

表 12 2002 年日月食網路資料與計算資料的時間比較表(*記號表示台灣地區可見到)

網路 2002 年 日月食狀況	*半影月食 2002/5/26 19:51	*日環食 2002/6/11 7:47	*半影月食 2002/6/25 5:42	半影月食 2002/11/20 9:47	日全食 2002/12/4 15:32
預測日月食 日期時間	2002/5/26 14:06	2002/6/11 7:26	2002/6/24 21:55	2002/11/20 10:45	2002/12/4 7:05
時間誤差	-5:45	-0:21	-7:47	+0:58	-8:27

表 12 中 網路資料 2002/6/25 5:42 半影月食雖和我們預測的 2002/6/24 21:55 日期差一天，但從時間上來看，我們預測的時間僅僅差 7:47，是屬於同一次月食。台灣 2002 年發生的 3 次日月食我們都有預測到，時間誤差最多為 -7:47。

2. 驗證 2020 年日月食

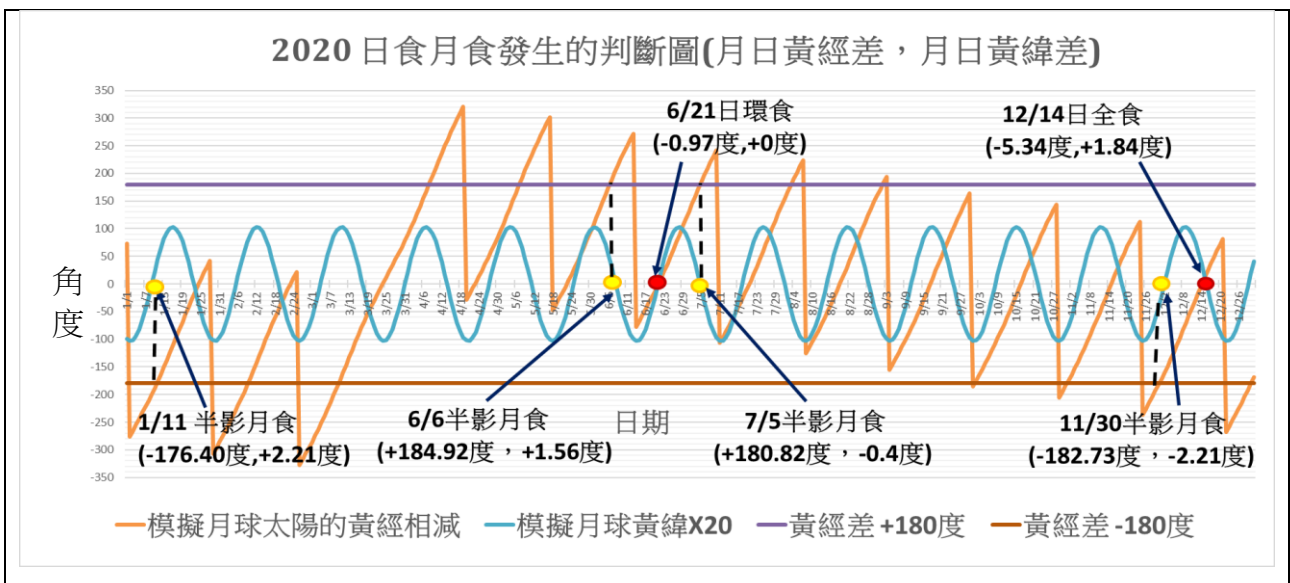


圖 35 2020 年日月食發生判斷圖(黃緯基準日：6/21，黃經基準日：5/25，黃經值 93.02°)

表 13 2020 年日月食網路資料與計算資料的時間比較表(*記號表示台灣地區可見到)

網路 2020 年 日月食狀況	*半影月食 2020/1/11 3:10	*半影月食 2020/6/6 3:25	*日環食 2020/6/21 14:41	半影月食 2020/7/5 12:30	*半影月食 2020/11/30 17:43	日全食 2020/12/15 0:14
預測日月食 日期時間	2020/1/11 5:02	2020/6/6 0:42	2020/6/21 15:23	2020/7/5 9:40	2020/11/30 19:38	2020/12/14 20:46
時間誤差	+1:52	-2:43	+0:42	-2:50	+1:55	-3:28

台灣 2020 年發生的 4 次日月食我們都有預測到，時間誤差最多為 -2:43。我們比對 2002 年、2020 年的日月食判斷圖，發現經過一沙羅週期(18 年 10 或 11 天)，日月食的發生狀況確實重複出現，但是在日月食發生的時間、及發生位置的黃經值不一樣。

(四)進行世界各地日月食預測驗證

因為我們提出的日月食預測法所根據的基本資料，是天文年鑑台灣地區的太陽黃經資料(中午 12:00 的值)，加上 Stellarium 軟體模擬台灣地區中午 12:00 的月球黃緯、黃經參考基準日及黃經值資料所測得的，和網路上全球各地發生的日月食資料，當然存在些許誤差。為印證我們所提出的公式及方法真的可用，我們實際進行 2000 年~2021 年的日月食預測。對台灣地區而言，總共出現 49 次日月食，41 次預測成功，預測成功率為 83.7%，而對世界各地區平均也有 58.7%的成功率，見表 14。

表 14 世界各地區日月食預測誤差紀錄

年分	預測日月食次數	正確預測次數	預測成功率	年分	預測日月食次數	正確預測次數	預測成功率
2000 年	10	6	60%	2011 年	7	5	71%
2001 年	9	5	56%	2012 年	9	5	56%
2002 年	7	4	57%	2013 年	8	5	63%
2003 年	5	4	80%	2014 年	6	4	67%
2004 年	6	4	67%	2015 年	6	2	50%
2005 年	9	4	44%	2016 年	8	4	50%
2006 年	6	4	67%	2017 年	8	4	50%
2007 年	6	3	50%	2018 年	8	5	63%
2008 年	5	4	80%	2019 年	9	4	44%
2009 年	5	4	80%	2020 年	5	4	80%
2010 年	8	4	50%	2021 年	5	3	60%

二、討論

(一)討論我們提出的月球黃緯模擬公式和年鑑原始資料的誤差有何關連性?

2018 年模擬黃緯公式和天文年鑑月球黃緯資料的誤差約在 -1° ~ $+1^{\circ}$ 之間，兩者很接近。我們將天文年鑑原始月球黃緯資料和模擬的誤差值 X5 倍(為了比較能看出關聯性)後，將兩者疊加重合在一起比較，見圖 36。我們發現**模擬黃緯的誤差週期為原來黃緯週**

期的一半。

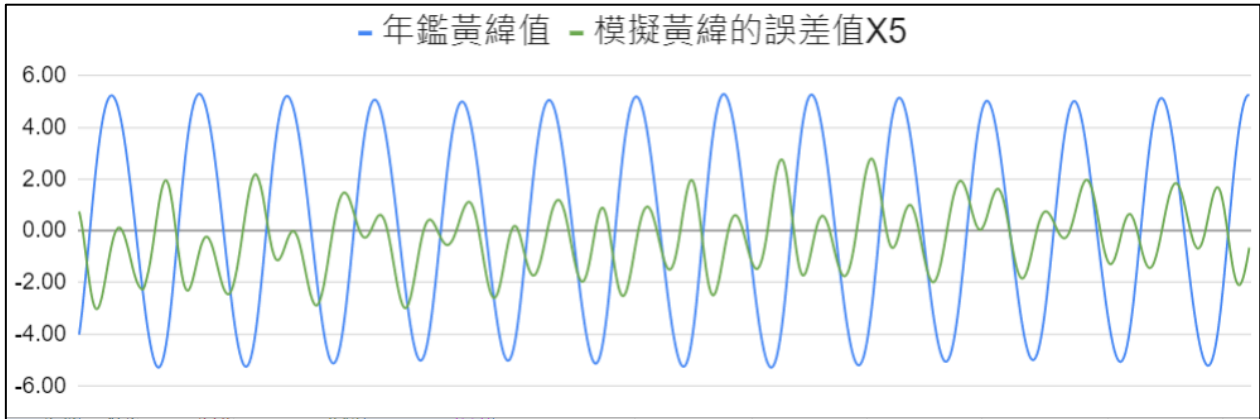


圖 36 2018 年天文年鑑月球黃緯與模擬的誤差比較圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

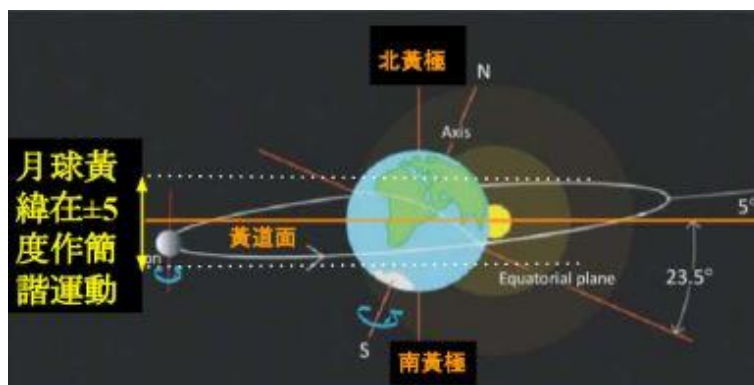


圖 37 月球在黃緯上下 5°範圍間作簡諧運動

如果我們從宇宙中來觀察如圖 37，我們就可發現月球黃緯模擬公式模擬的誤差，在中心位置最大，在兩端位置最小。就像彈簧的簡諧運動一樣，在中心黃緯 0°的位置，彈簧速度最快，點和點之間的位置差異大，在兩端點(黃緯約在-5°或+5°)的位置，彈簧速度最慢，點和點之間的位置差異小，因此誤差就比較小。

(二)討論我們提出的月球黃經差緯模擬公式和年鑑原始資料的誤差有何關連性?

我們認為月球移動速度的快慢和克卜勒的行星運動定律有關(參考資料二十二)，為證明這一點我們將天文年鑑 2018 年月球距離地球的近地點、遠地點資料整理如圖 38，然後我們將圖形上下顛倒，發現圖形變化趨勢居然和我們計算的月球黃經差圖形變化一模一樣，如圖 39、圖 40。因此我們得到證明，月球位置的黃經差和距離地球的遠近有關，**月球離地球越近，黃經差越大，月球離地球越遠，黃經差越小**。而黃經差越大代表月球移動速度越快，正好完全符合克卜勒的行星運動定律。

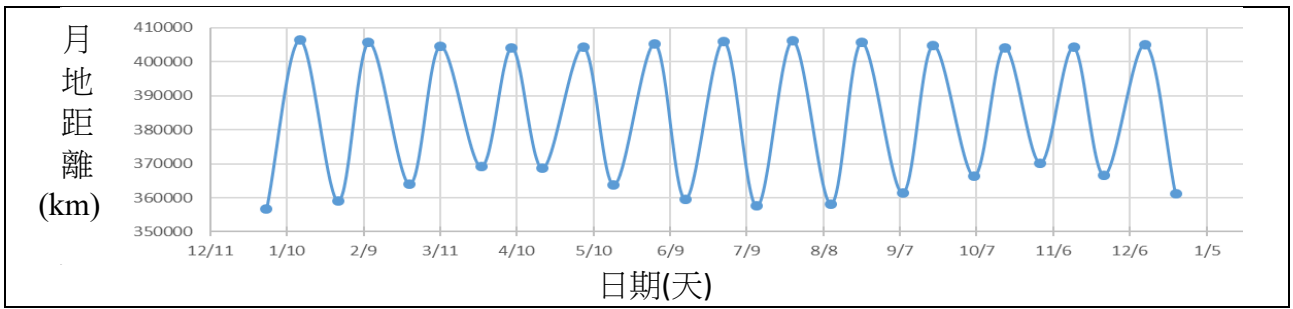


圖 38 2018 年天文年鑑中月球與地球的距離圖

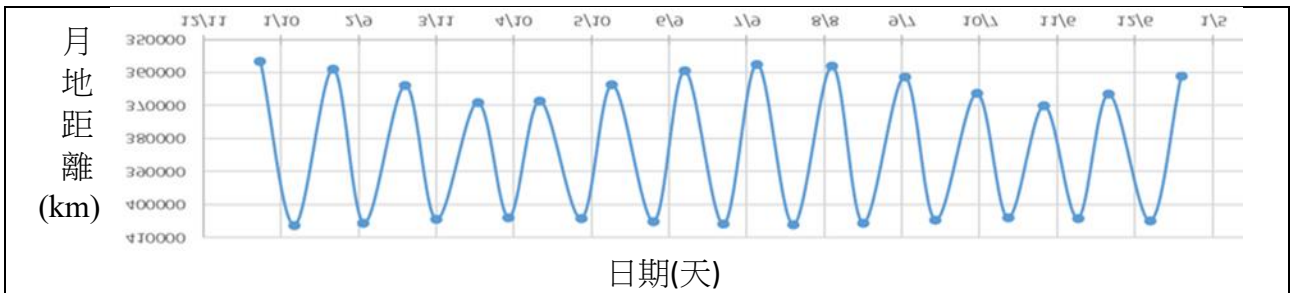


圖 39 2018 年天文年鑑中月球與地球的距離上下顛倒圖

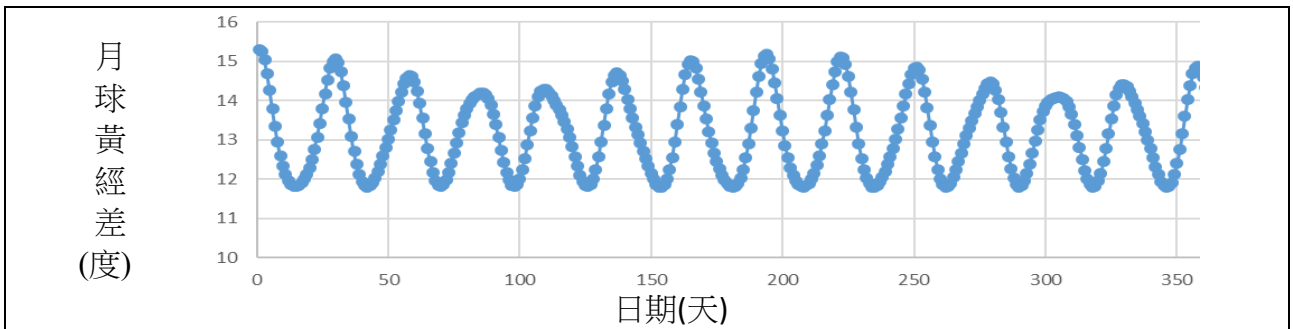


圖 40 2018 年天文年鑑中月球黃經差圖

接下來我們討論模擬月球黃經差公式的誤差。2018 年模擬黃經差公式和天文年鑑月球黃經差資料的誤差約在 $-0.6^{\circ} \sim +1.2^{\circ}$ 之間，兩者很接近。我們將天文年鑑原始月球黃緯資料和模擬的誤差值 $+13.176$ 後(為了比較能看出關聯性)，將兩者疊加重合在一起比較，見圖 41。我們發現**模擬黃經差誤差的週期為原來黃經差週期的一半**。

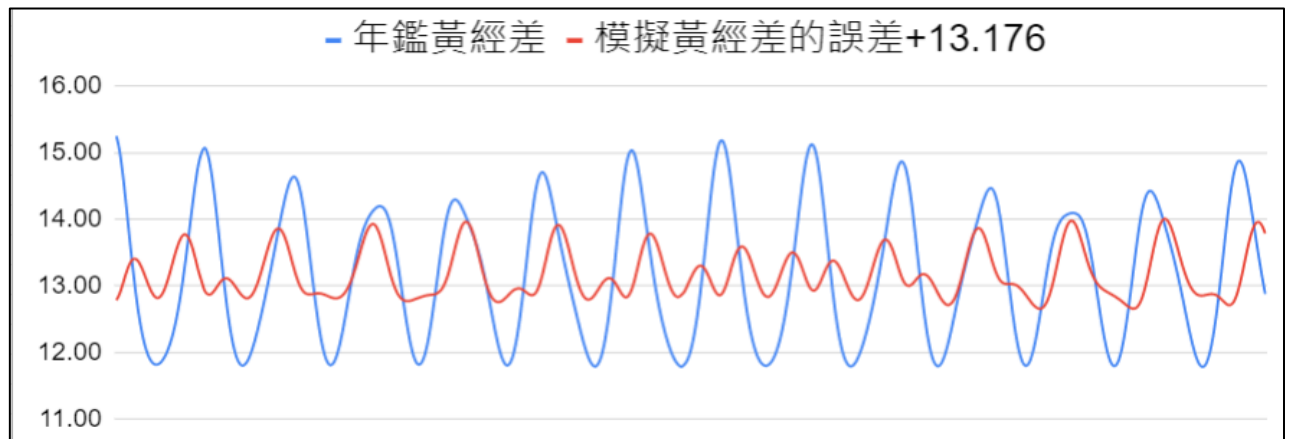


圖 41 2018 年天文年鑑月球黃經差與模擬黃經差的誤差比較圖 (垂直單位:度，水平單位:天)

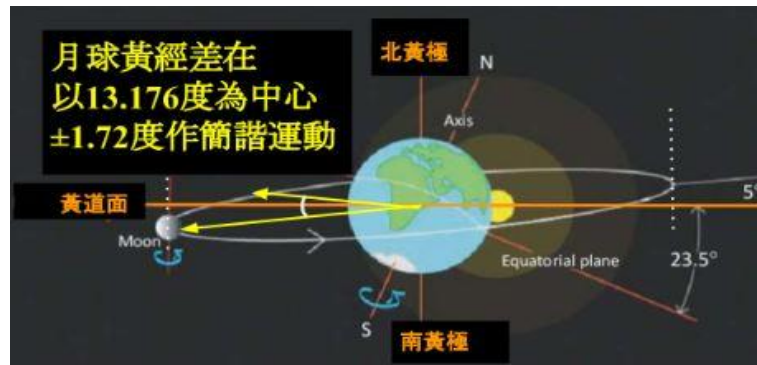


圖 42 月球在黃經差在以 13.176°為中心，上下 1.72°作簡諧運動

由圖41、圖 42 我們發現，月球模擬黃經差公式模擬的誤差，月球在近地點時運行速度比我們模擬的快，所以實際黃經差會比模擬黃經差大，黃經差誤差為負值；在遠地點時運行速度比我們模擬的慢，所以實際黃經差比模擬黃經差小，黃經差誤差為正值。這應該是我們以等面積的圓形軌道，去模擬月球繞地球的橢圓軌道所造成的。

(三)討論日期從一年擴大到三年，模擬月球黃緯或黃經(黃經差)公式的誤差將如何變化。

比較 2018~2020 年天文年鑑與模擬資料(月黃經、月黃緯公式計算的基本值:黃緯參考基準日 2019/6/6，黃經參考基準日 2019/5/5,參考基準日黃經值 44.85 度)，我們發現雖然觀察日期拉大到三年，不論是模擬黃緯或模擬黃經，他們的誤差仍控制的不錯，但是離黃緯參考基準日越遠，誤差略有放大的情形。見圖 43 與 圖 44；黃經部分也是，見圖 45~圖 47。

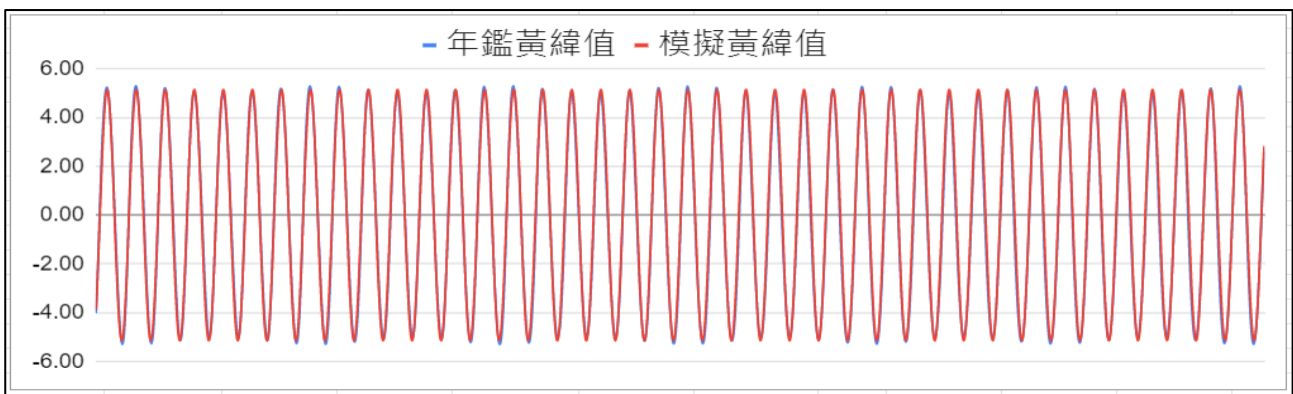


圖 43 2018~2020 年 天文年鑑黃緯 與 模擬黃緯 的比較圖 (垂直單位:度，水平單位:天)

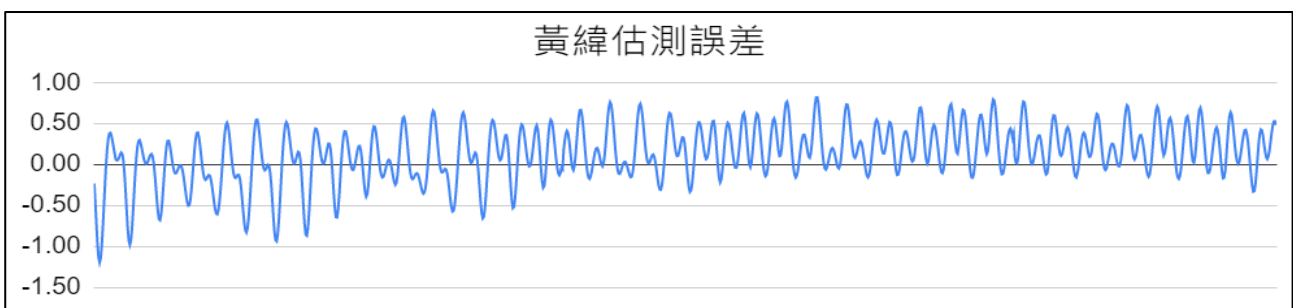


圖 44 2018~2020 年 天文年鑑黃緯 與 模擬黃緯 的誤差圖 (垂直單位:度，水平單位:天)

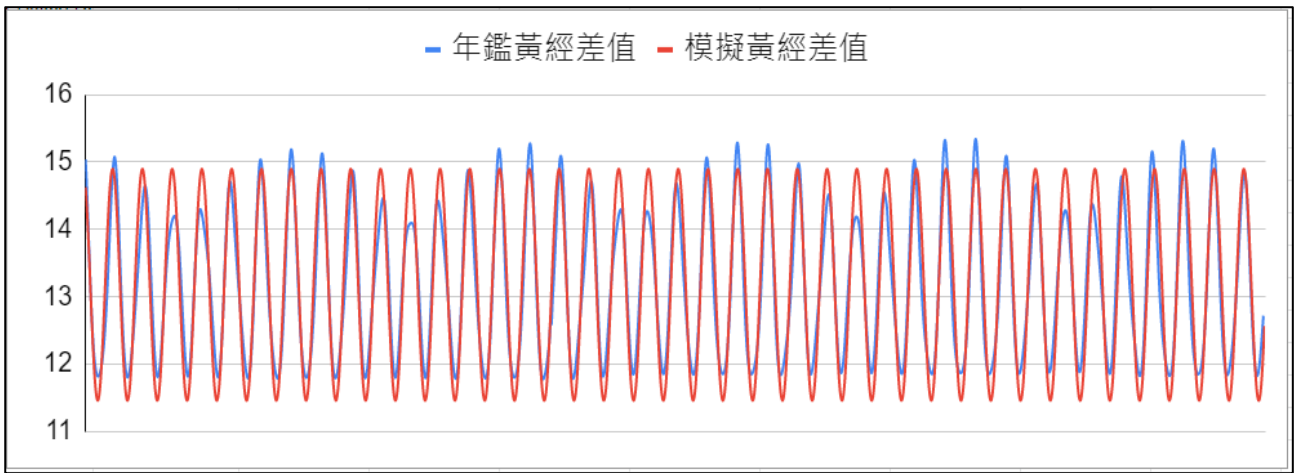


圖 45 2018~2020 年 天文年鑑黃經差 與 模擬黃經差 的比較圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

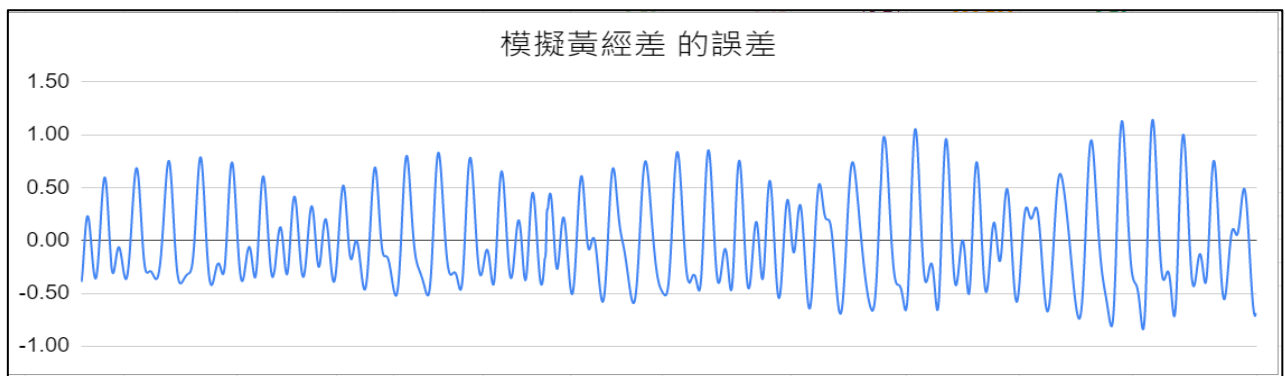


圖46 2018~2020年 天文年鑑黃經差 與 模擬黃經差 的誤差圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

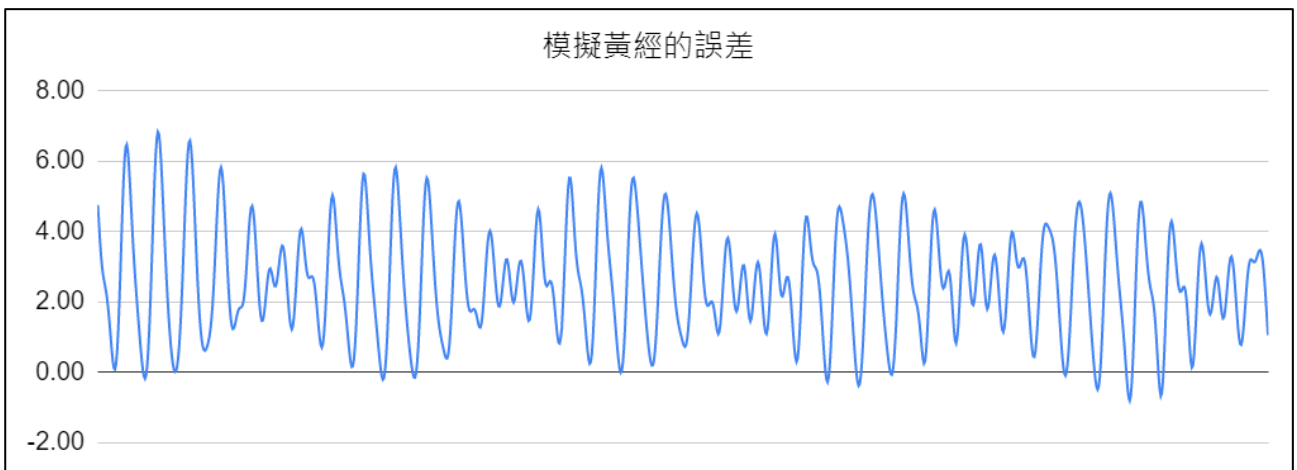


圖 47 2018~2020 年 天文年鑑黃經 與 模擬黃經 的誤差圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

觀察圖 47 我們發現模擬出來的黃經值誤差會增加約 2.5 度，這可能是因為我們用圓形軌道的算法去推算月球的橢圓軌道，所產生的誤差，所以只要將我們所計算出的模擬黃經值都往下平移修正 2.5 度，就可以得到比較正確的模擬黃經值，及較小的誤差值，見圖 48 中。

我們發現 2018~2020 年這三年中，模擬黃緯誤差維持在約 -1.2~0.82 度，模擬黃經誤差維持在約 -3.3~4.3 度，誤差很小，證明我們的模擬公式是正確的。

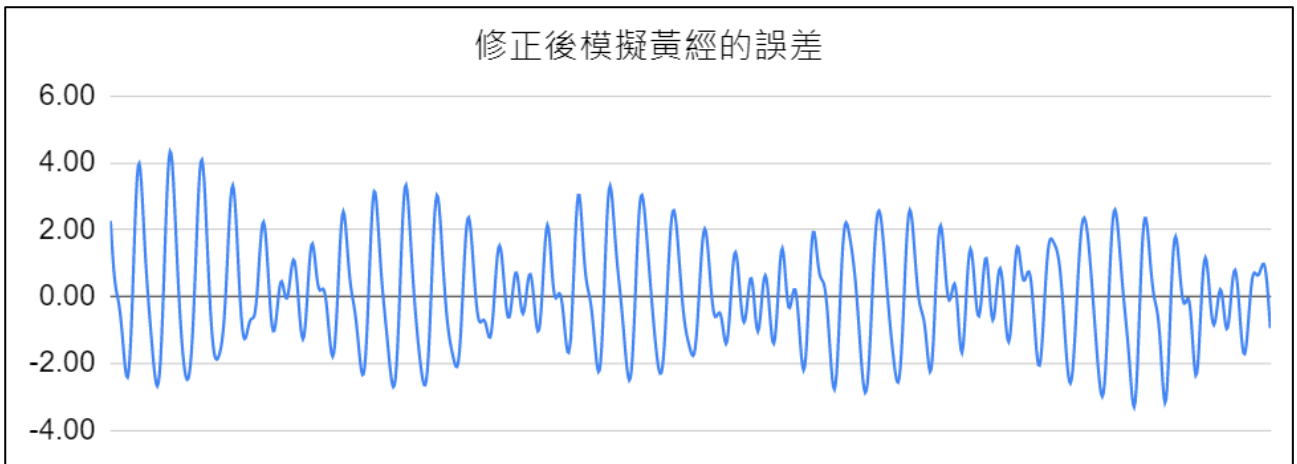


圖 48 2018~2020 年天文年鑑黃經 與 修正後的模擬黃經 的誤差圖 (垂直單位:度, 水平單位:天)

(四)討論為何由我們日月食計算法預測有日月食發生，但是在台灣卻不一定真的會發生。

以網路資料 2000/2/5 20:50 南極地區發生的日食來比對，台灣地區卻沒有發生日食。

我們用 Stellarium 來模擬 2000/2/5 20:50 當時的狀況，有重大發現，我們發現到同一時間不同地區，太陽的黃經、黃緯、赤經、赤緯值都差不多，而月球的黃經、黃緯、赤經、赤緯值卻居然不一樣，以當時台灣和南極地區來看天空的太陽、月球相對位置，如圖 49、圖 50。

	<p>太陽位置(黃經, 黃緯) $= (316^{\circ}01', 0^{\circ}00')$ 月球位置(黃經, 黃緯) $= (315^{\circ}16', -1^{\circ}08')$</p> <p>台灣地區 $(E121^{\circ}32', N25^{\circ}3')$</p>	
	<p>太陽位置(黃經, 黃緯) $= (316^{\circ}01', 0^{\circ}00')$ 月球位置(黃經, 黃緯) $= (316^{\circ}04', 0^{\circ}15')$</p> <p>南極地區 $(E121^{\circ}32', S85^{\circ}3')$</p>	

圖 51 2000/2/5 日偏食軌跡圖 (參考資料二十三)

月球在台灣和南極地區的黃經居然差 48 角分，黃緯差 53 角分，兩地同時看同一顆月球卻發現月球的天球位置不同，位置差甚至大過月球或太陽的角(視)直徑，太陽的角直徑為 31.6 角分~ 32.7 角分，月球的角直徑為 29.3 角分 ~ 34.1 角分(參考資料二十四)。所以 2000/2/5 20:50 在南極地區可以看到日偏食，而台灣地區則不能看到。

我們推論不同地區看到的月球在天空的位置略有差異，其原因應該是月球離地球太近，因此我們看到月球的反射光不是平行光，在地表不同地區的觀察者看到的角度會不同，因此不同地區的觀察者觀察到月球在天空的位置會稍微不同。

肆、結論與應用

- 一、由市售月球盤可以知道月球每天和太陽的相對位置，也能知道農曆初幾的月相。另外也可以知道月初、月中天、月沒的大概時間，但無法得知月球準確位置(方位角及仰角)。
- 二、由氣象局網站的月出月沒資料，能知道月亮的運行軌跡，在天空南北方向之間就像簡諧運動來回運行，週期是 27.322 天。
- 三、由天文年鑑中的月球資料，我們發現黃道座標系統比赤道座標系統，更適合用公式來模擬，我們推導出計算月球黃道座標(黃緯、黃經)的公式。
- 四、月球黃緯的變化就像簡諧運動，我們模擬黃緯公式的誤差在中心位置(黃緯 0°)最大，在兩端位置(黃緯約在 -5° 或 $+5^\circ$)誤差最小，誤差週期為原來黃緯週期的一半。
- 五、月球黃經差的變化和克卜勒的行星運動定律有關，我們以等面積的圓形軌道去模擬月球繞地球的橢圓軌道，在近地點時實際黃經差會比模擬黃經差大，黃經差誤差為負值，在遠地點時實際黃經差會比模擬黃經差小，黃經差誤差為正值，誤差週期為原來黃經差週期的一半。
- 六、我們模擬黃緯、黃經的公式時，需要用到不同的黃緯(黃經)參考基準日，及黃經參考基準日當天12:00的黃經值。我們列出超過一個沙羅週期(2000年~2021年)的資料供計算。
- 七、我們利用模擬的月球黃經、黃緯資料和天文年鑑太陽黃經的相交，來預測進行2000年~2021年的日月食預測，對台灣地區預測的成功率83.7%，而對世界其他地區有58.7%的成功率。而我們提出的日月食發生判斷圖也能較直覺的認識日月食，同時比較差18年的日食月食發生判斷圖，也可證明日月食的發生具有沙羅週期的特性。
- 八、未來展望：
 - (一)未來希望能發展出橢圓軌道的模擬公式，來模擬月球黃經的變化，提高黃經模擬公式的準確度(現在是以圓形軌道來模擬)。
 - (二)黃經或黃緯的參考基準日可選用較短週期來制定(例如半年)，來提高動態修正的黃經、黃緯模擬公式的準確度。
 - (三)透過座標轉換將月球位置黃道座標轉成地平座標，發展出能提供方位角、仰角的數位月亮盤。

伍、參考文獻

- 一.中央氣象局網站-月出月沒資料 <https://bit.ly/3210xJ1> (2019/1/20)
- 二.中央氣象局網站-臺灣四季仰角與方位角 <https://bit.ly/37Zyopj> (2019/2/5)
- 三.維基百科-白道 <https://bit.ly/3jlsBql> (2019/3/7)
- 四.宇宙人間 <https://bit.ly/3j6bFH> (2019/3/7)
- 伍.中央氣象局科普網 <https://bit.ly/2HXaa4m> (2019/5/15)
- 六.阮國全著,1999年,星星的運動與四季星座,台北市立天文科學教育館員工消費合作社,p16。
- 七.華人百科-黃經 <https://bit.ly/37YFiLt> (2019/6/15)
- 八.中文百科-天球座標系 <https://bit.ly/2HXatfw> (2019/7/10)
- 九.天文館 2000年~2020年 天文年鑑 (2020/1/20)
- 十.簡諧運動—中學解法公式推導 <https://bit.ly/3kInvMa> (2019/9/17)
- 十一. 維基百科-月球軌道 <https://bit.ly/35QGE8s> (2019/10/21)
- 十二. 維基百科-三角函數積分表 <https://bit.ly/3kO6tMN> (2019/11/3)
- 十三. 劉布林著,1999年,數學在天文學中之運用,凡異出版社,p165-p170。
- 十四. 維基百科:黃白交點 <https://bit.ly/2HXv8zJ> (2019/11/8)
- 十五. 國家地理雜誌中文網 <https://bit.ly/2TJIGBK> (2019/11/8)
- 十六.大紀元文化網 <https://bit.ly/3jNrAO3> (2019/11/8)
- 十七. AEEA 天文教育資訊網 <https://bit.ly/3mIcniS> (2019/11/8)
- 十八.百科知識 <https://bit.ly/35WwLGr> (2019/12/3)
- 十九.香港天氣觀測站 <https://bit.ly/3kOlcGa> (2019/12/5)4
- 二十. 維基百科-21世紀日食列表 <https://bit.ly/31ZLYW8> (2019/12/5)
- 二十一. 維基百科-21世紀月食列表 <https://bit.ly/384JGZt> (2019/12/5)
- 二十二. 維基百科-克卜勒定律 <https://bit.ly/2HOITkm> (2019/12/10)
- 二十三.維基百科- 2000年2月5日日食 <https://bit.ly/2TI89vh> (2019/12/16)
- 二十四. 維基百科-角直徑 <https://bit.ly/3mImkNy> (2020/1/10)

【評語】 160018

作者透過星空軟體、月亮盤、天球儀、天文年鑑、氣象局網站宜蘭地區月出、月中天、月沒資料，求得月球軌跡之週期性，並發展預測日月食的方法，是相當紮實的作品，但仍會依地點不同或資料不全而降低預測準確度，本作品有一定的參考價值，惟新穎性較為欠缺。