

# 2021 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010006  
參展科別 數學  
作品名稱 水流曲面與初始物理量值關係之研究  
得獎獎項 大會獎 四等獎

就讀學校 國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師 賴易辰

作者姓名 陳思伶

關鍵詞 平均曲率、曲線曲率、水流曲面

## 作者簡介



大家好，我是師大附中科學班的陳思伶。由於我個人既熱愛數學，又喜歡物理，所以熱衷於尋找以數學方式探討物理現象的方法。我這次的研究也是從這個角度出發，希望擰數學的角度描述並解釋水流的特性及變化！

## 摘要

在理想狀態下，由一個圓形且開口面平行於地面的水龍頭開口中流出的水柱會呈現一以  $z$  軸對稱、切面積往  $z$  軸負向遞減的圓形疊合曲面。此曲面形狀受到下列三種物理量值影響：

- 一、水流在水龍頭開口瞬間速度(在此稱之為初速度)  $v_0$
- 二、水龍頭圓形開口半徑(在此稱為初半徑)  $r_0$
- 三、重力加速度  $g$

為了更清楚瞭解此曲面性質及在不同狀況下(三種物理量值改變情況下對曲面的影響)，故提出下列問題在研究中探討：

- 一、這三種物理量值，對曲面形狀的影響為何？
- 二、這三種物理量值，對曲面曲率影響為何？

## Abstract

In an ideal circumstance, the water column flowing out of a faucet with a circular opening surface parallel to the ground will present a circular superimposed curved surface with  $z$ -axis symmetry and a sectional area decreasing in the negative direction of the  $z$ -axis. The shape of this surface is influenced by the following three physical values:

1. The velocity of the water flow at the opening of the tap (the initial velocity)  $v_0$
2. The radius of the faucet's circular opening (the initial radius)  $r_0$
3. The acceleration of gravity  $g$

To gain further understanding of the nature of this curved surface and how the curved surface is influenced under different conditions (the changes of three physical values), the following questions are raised in the study:

1. What are the effects of these three physical quantities on the shape of the curved surface?
2. What are the effects of these three physical quantities on the curvature of the surface?

## 壹、 研究動機

一日在倒水時，發現若是從水龍頭落下的水柱在水流快慢不同，就會呈現不同的曲面，同時觀察到水在流下一定距離後會不再連貫，變成一顆顆的水珠，於是我開始思考：水柱的曲面型態會受甚麼因素影響呢？水珠生成的位置又會受甚麼因素影響呢？為了解答心中的疑惑，便以理想狀態下，以數學形式模擬水柱的表面(曲面)，並計算其曲率以更精準觀察曲面在不同高度的變化；並分析各變數(初始速度、初始半徑、重力)對此曲面的影響。

## 貳、 研究目的

- 一、利用初速度  $v_0$ 、初半徑  $r_0$ 、重力加速度  $g$ ，求曲面函數。
- 二、計算其函數曲率，並比照各物理量變化對其影響。
- 三、利用曲面對稱於  $z$  軸的特性，將此曲面轉換為一  $x - z$  平面上曲線(此曲線以  $z$  軸作旋轉即可得到原曲面)並探討此曲線的曲率變化

## 參、 研究設備與器材

- 一、紙
- 二、筆
- 三、電腦繪圖程式 geogebra

## 肆、 研究過程與方法

計算(一)：曲面函數架構

Definition 1.

水龍頭圓形開口面積  $A_0$

初半徑  $r_0$

初速度  $v_0$

重力加速度  $g$

經過一定時間後，

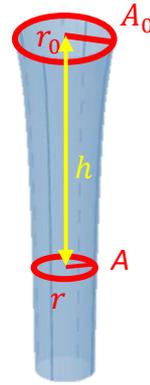
當下水流曲面切面積  $A$

當下水流曲面切圓形半徑  $r$

當下水流速度  $v$

水流行進距離  $h$

令水柱流向為  $-z$  方向，初始圓形面在  $x-y$  平面上且圓心位於  $(0, 0, 0)$



由於水流量在每一瞬間必須一致，故可以得到以下關係式：

$$A_0 v_0 = A v$$

$$\Rightarrow r_0^2 \pi v_0 = r^2 \pi v \dots (1-1)$$

又根據能量守恆定律可以得到

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g(0) = \frac{1}{2} m v^2 - m g h$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 + g h = \frac{1}{2} v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h} \dots (1-2)$$

由(1-1)式和(1-2)式可得：

$$r^2 \pi \sqrt{v_0^2 + 2gh} = r_0^2 \pi v_0$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} \dots (2)$$

又因為  $x^2 + y^2 = r^2$ ，且該水流位置  $z = -h$ ，故此方程式改寫為：

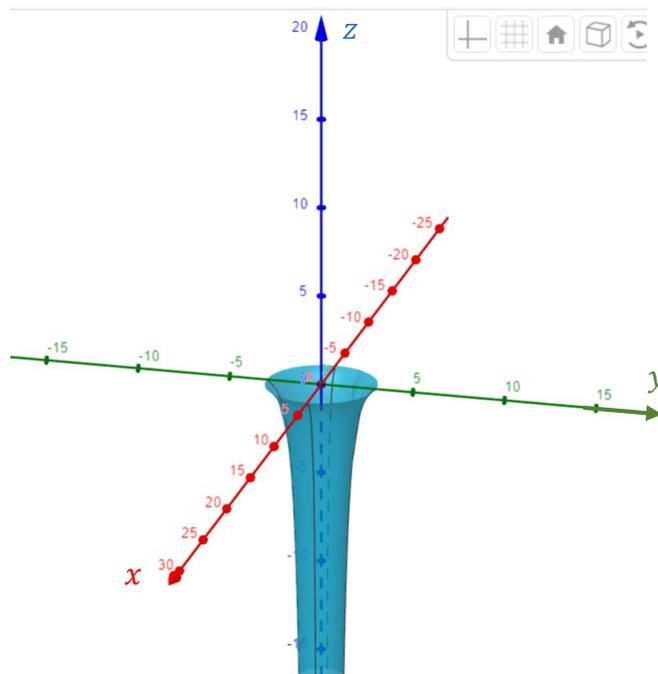
$$x^2 + y^2 = \frac{r_0^2 v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gz}}$$

將  $z$  改寫成  $(x, y)$  的函數：

$$z = f(x, y) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2 r_0^4}{2g(x^2 + y^2)^2} \dots (3-1)$$

此函數的定義域為： $\{(x, y) | x, y \in R, (x^2 + y^2) \leq r_0^2\}$

此函數的圖形如下：



圖一： $f(x, y) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2 r_0^4}{2g(x^2 + y^2)^2}$ ， $v_0 = 3$ ， $r_0 = 3$ ， $g = 9.8$

計算(二)：曲面函數平均曲率

Definition 2.

平均曲率計算方式[1]

函數  $z = f(x, y)$  的平均曲率計算公式如下：

$$\begin{aligned} \text{mean curvature } H &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \dots (d2 - 1) \end{aligned}$$

並且假設

$$\frac{v_0^2}{2g} = a \dots (d2 - 2)$$

$$\frac{v_0^2 r_0^4}{2g} = b \dots (d2 - 3)$$

根據(d2 - 2)和(d2 - 3)，(3 - 1)式可以改寫成：

$$z = f(x, y) = a - \frac{b}{(x^2 + y^2)^2} \dots (3 - 2)$$

則

$$f_x = 2b(x^2 + y^2)^{-3}(2x) = 4bx(x^2 + y^2)^{-3} \dots (4 - 1)$$

$$f_y = 2b(x^2 + y^2)^{-3}(2y) = 4by(x^2 + y^2)^{-3} \dots (4 - 2)$$

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\frac{16b^2 + (x^2 + y^2)^5}{(x^2 + y^2)^5}} \dots (4 - 3)$$

由(4-1)式和(4-2)式可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{4bx}{\sqrt{16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6}} \\ &= \frac{4b(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8bx^2(8b^2+3(x^2+y^2)^5)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4b(16b^2y^2+(y^2-5x^2)(x^2+y^2)^5)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} \dots (5-1) \end{aligned}$$

由(4-2)式和(4-3)式可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{4by}{\sqrt{16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6}} \\ &= \frac{4b(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8by^2(8b^2+3(x^2+y^2)^5)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4b(16b^2x^2+(x^2-5y^2)(x^2+y^2)^5)}{(16b^2(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} \dots (5-2) \end{aligned}$$

由(5-1)式和(5-2)式可得：

$$\text{mean curvature } H = H(x, y)$$

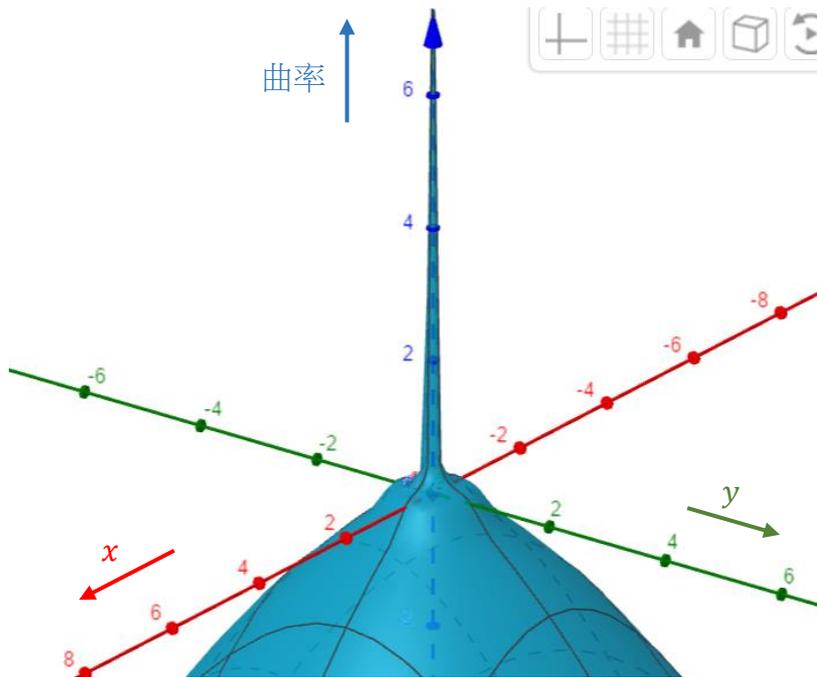
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) \\ &= \frac{8b(4b^2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^6)}{(16b^2(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^6)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{8b(4b^2 - (x^2+y^2)^5)}{\sqrt{(x^2+y^2)}(16b^2 + (x^2+y^2)^5)^{\frac{3}{2}}} \dots (6-1) \end{aligned}$$

以  $b = \frac{v_0^2 r_0^4}{2g}$  帶入(6-1)式，可得平均曲率對  $(x, y)$  函數：

$$H(x, y) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - (x^2+y^2)^5\right)}{\sqrt{(x^2+y^2)} \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + (x^2+y^2)^5\right)^{\frac{3}{2}}} \dots (6-2)$$

此函數的定義域為： $\{(x, y) | x, y \in R, (x^2 + y^2) \leq r_0^2\}$

此函數的圖形如下：



圖二： 
$$H(x, y) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - (x^2 + y^2)^5\right)}{\sqrt{(x^2 + y^2) \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + (x^2 + y^2)^5\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad v_0 = 3, \quad r_0 = 3, \quad g = 9.8$$

由(3 - 2)式和(6 - 1)式可知  $z$  值和平均曲率 *mean curvature*  $H$  的關係為：

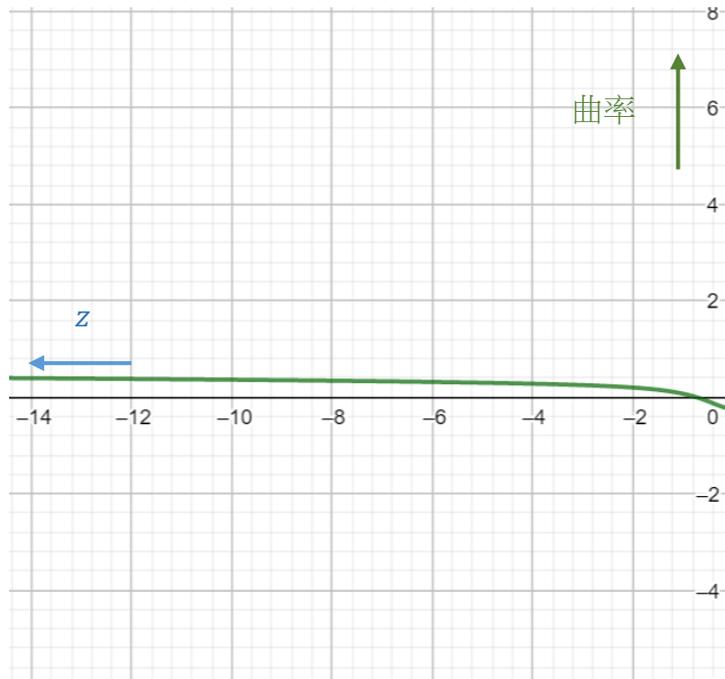
$$\begin{aligned} & \text{mean curvature } H \\ &= \frac{8b(4b^2 - (x^2 + y^2)^5)}{\sqrt{(x^2 + y^2)(16b^2 + (x^2 + y^2)^5)^{\frac{3}{2}}} \\ &= h(z) = \frac{8b \left(4b^2 - \left(\frac{b}{a-z}\right)^{\frac{5}{2}}\right)}{\left(\frac{b}{a-z}\right)^{\frac{1}{4}} \left(16b^2 + \left(\frac{b}{a-z}\right)^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}} \dots (7-1) \end{aligned}$$

以  $a = \frac{v_0^2}{2g}$ ,  $b = \frac{v_0^2 r_0^4}{2g}$  帶入(7-1)式，可得平均曲率對  $z$  的函數：

$$h(z) = \frac{8 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right) \left( 4 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^2 - \left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right) \right)}{\left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{1}{4}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right) \left( 16 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^2 + \left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right)^{\frac{5}{2}} \right)^{\frac{3}{2}}} \dots (7-2)$$

此函數定義域為： $\{z | z \in R, z \leq 0\}$

此函數的圖形如下：



圖三： $h(x, y) = \frac{8 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right) \left( 4 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^2 - \left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right) \right)}{\left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{1}{4}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right) \left( 16 \left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^2 + \left( \frac{\left( \frac{v_0^2 r_0^4}{2g} \right)^{\frac{5}{2}}}{\left( \frac{v_0^2}{2g} \right) - z} \right)^{\frac{5}{2}} \right)^{\frac{3}{2}}}$ ,  $v_0 = 3$ ,  $r_0 = 3$ ,  $g = 9.8$

計算(三)： $x - z$  平面曲線函數 (以  $z$  軸旋轉即為原曲面函數)

由於此函數圖形輻射對稱於  $z$  軸，故以  $y = 0$  平面( $x - z$ 平面)上討論其曲面及曲率。

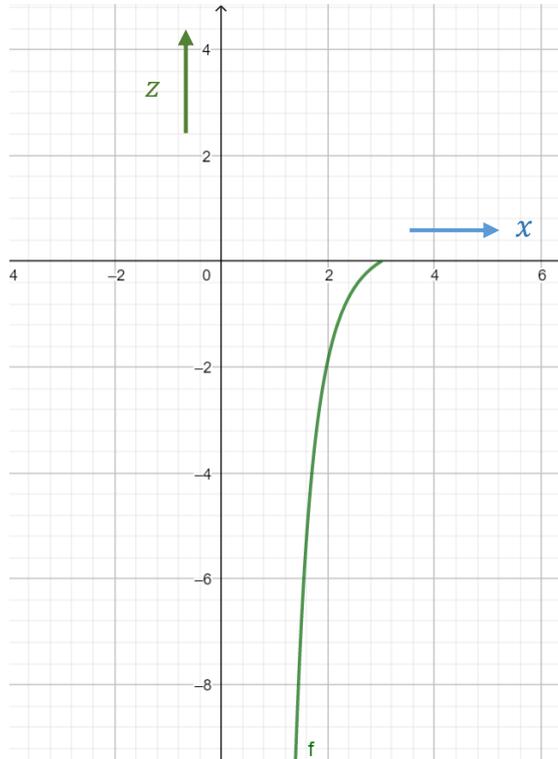
Let  $r = x$ ，(3-1)式變為  $z$  對  $x$  的函數：

$$z = g(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2 r_0^4}{2gx^4} \dots (8-1)$$

並令此函數定義域為： $\{x|x \in R, 0 \leq x \leq r_0\}$

經過定義域的設定後，會使原先在  $x - z$  平面上投影的兩支對稱於  $z$  軸曲線變為一支 ( $x$  軸正向的一支)，方便進行觀察。

此函數的圖形如下：



圖四：  $g(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2 r_0^4}{2gx^4}$ ， $v_0 = 3$ ， $r_0 = 3$ ， $g = 9.8$

利用同樣的方法，將 *mean curvature*  $H$  方程式進行同樣的處理，則(6-1)式變為：

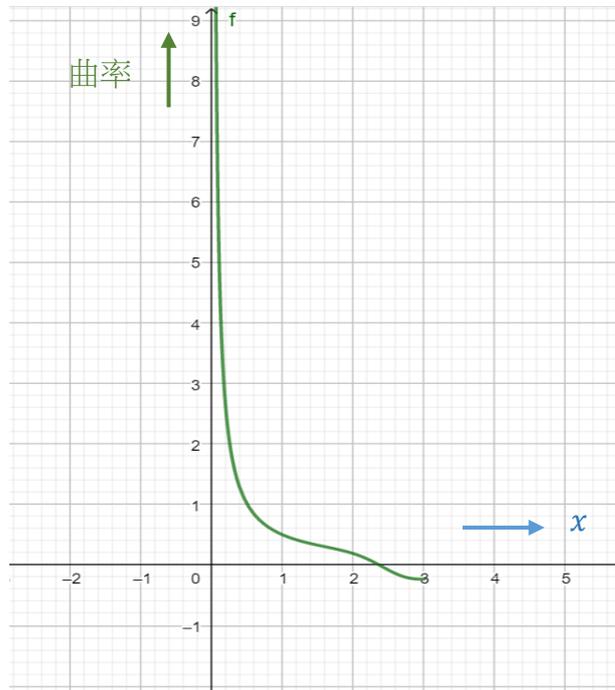
$$\text{mean curvature} = H_1(x) = \frac{8b(4b^2 - x^{10})}{x(16b^2 + x^{10})^{\frac{3}{2}}} \dots (9-1)$$

以  $b = \frac{v_0^2 r_0^4}{2g}$  帶入可得：

$$H_1(x) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - x^{10}\right)}{x \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + x^{10}\right)^{\frac{3}{2}}} \dots (9-2)$$

其定義域為： $\{x|x \in R, 0 \leq x \leq r_0\}$

此函數的圖形如下：



圖五： $H_1(x) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - x^{10}\right)}{x \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + x^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}$ ， $v_0 = 3$ ， $r_0 = 3$ ， $g = 9.8$

由於在計算曲面曲率時會考慮到圖形在  $x - y$  平面上的曲率(圓形的曲率)，故在此多計算曲線的曲率，以觀察在不考慮圓形的曲率影響下，該圖形(z 對 x)的曲率為何。

Definition3.

曲面投影單支曲線的曲率[2]為：

$$k = \frac{\left| \frac{d^2f}{dx^2} \right|}{\left( 1 + \left( \frac{df}{dx} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

利用  $a = \frac{v_0^2}{2g}$ ,  $b = \frac{v_0^2 r_0^4}{2g}$ ，將第(8-1)式改寫為：

$$z = g(x) = a - \frac{b}{x^4} \dots (8-2)$$

根據(8-2)式，我們可以計算出：

$$f' = \frac{4b}{x^5} \dots (10-1)$$

$$f'' = -\frac{20b}{x^6} \dots (10-2)$$

利用(10-1)式和(10-2)式可以得到：

$$k = k(x) = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

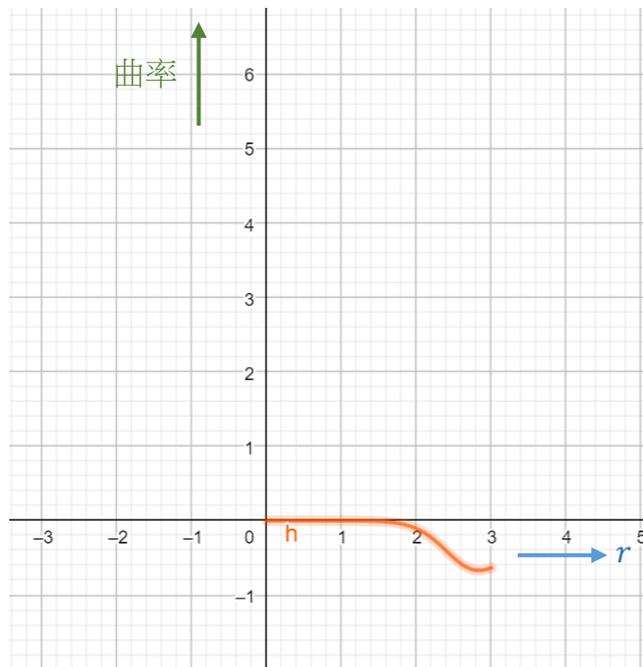
$$= \frac{-20bx^9}{(16b^2 + x^{10})^{\frac{3}{2}}} \dots (11-1)$$

帶入  $b = \frac{v_0^2 r_0^4}{2g}$  到(11-1)式，得到曲線曲率對  $x$  的函數：

$$k(x) = \frac{-20\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{2g}\right)x^9}{\left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + x^{10}\right)^{\frac{3}{2}}} \dots (11-2)$$

此函數定義域為： $\{x|x \in R, 0 \leq x \leq r_0\}$

此函數的圖形如下：



圖六： $k(x) = \frac{-20\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{2g}\right)x^9}{\left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + x^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}$ ， $v_0 = 3$ ， $r_0 = 3$ ， $g = 9.8$

## 伍、 研究結果

一、根據(3 - 2)式和(8 - 1)式觀察，可以知道：

(一)、 隨著  $g$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度加快。

(二)、 隨著  $v_0$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度變慢。

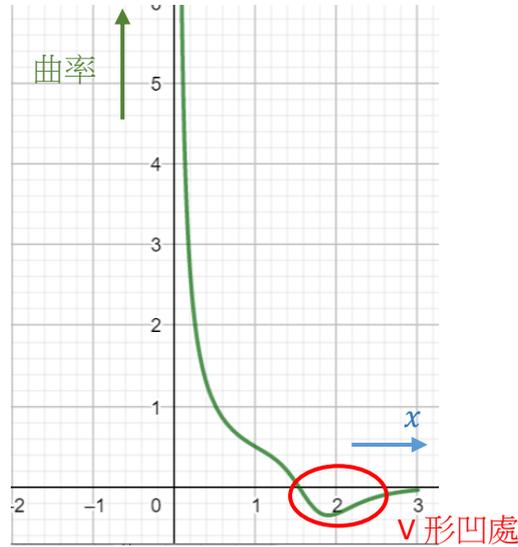
(三)、 隨著  $r_0$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度變慢，且圓形半徑起始值變大。

二、根據(6 - 2)式和(9 - 2)式觀察可以發現，由於曲面平均曲率的函數分子的變數項  $(x^2 + y^2)$  (也就是圓形半徑平方  $r^2$ )的次方數為 5 次方，分母的變數項次方則為 8 次方，故

$$\lim_{(x^2+y^2) \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - (x^2 + y^2)^5\right)}{\sqrt{(x^2 + y^2)} \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + (x^2 + y^2)^5\right)^{\frac{3}{2}}} = \infty$$

可知在水流行進至半徑極小時，曲面整體(包含  $x-y$  切面、 $x-z$  切面和  $y-z$  切面上)的彎曲程度(曲率)極大。

三、觀察(6-2)式和(9-2)式，發現該曲面平均曲率函數圖形中會出現一段曲率小於0的V形凹處(如圖七所示)。而此V形凹處位置與三種物理量的關係如下：



圖七：
$$H_1(x) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - x^{10}\right)}{x \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + x^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad v_0 = 1, \quad r_0 = 3, \quad g = 9.8$$

在此我們將(6-2)式中的  $(x^2 + y^2)$  和(9-2)式中的  $x^2$  以圓形半徑平方  $r^2$  表示

$$\text{mean curvature } H = H_2(r) = \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - r^{10}\right)}{r \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + r^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

當 *mean curvature*  $H$  為0時， $r = \sqrt[5]{\frac{v_0^2 r_0^4}{g}}$

(一)、 隨著  $g$  值變大，V 形凹處位置向左移(在平均曲率等於零時所對應到的圓形半徑  $r$  值變小)，且平均曲率的最小值(V 形凹處最低點)下移。

(二)、 隨著  $v_0$  值變大，V 形凹處位置向右移(在平均曲率等於零時所對應到的圓形半徑  $r$  值變大)，且平均曲率的最小值(V 形凹處最低點)上移。

(三)、 隨著  $r_0$  值變大，V 形凹處位置向右移(在平均曲率等於零時所對應到的圓形半徑  $r$  值變大)，且平均曲率的最小值(V 形凹處最低點)上移。

四、觀察(11-1)式，可以將曲面投影單支曲線的曲率函數和曲面平均曲率的函數相比較，並分為兩部分：

(一)、 圓形半徑  $r$  值較大處：曲面投影單支曲線的曲率走勢與曲面的平均曲率走勢趨近一致(如圖(七)紅色框中)，曲線曲率可視為曲面曲率向下平移的結果。

(二)、 圓形半徑  $r$  值較小處 ( $r \rightarrow 0$ ) 時：曲面投影單支曲線的曲率值趨近於 0，而曲面的平均曲率卻是隨著  $r$  值變小而慢慢趨近於無限大(如圖八藍色框中)。

Let 兩函數值的差距為  $\Delta h(r)$ ：

$$\Delta h(r) = H_2(r) - k(r)$$

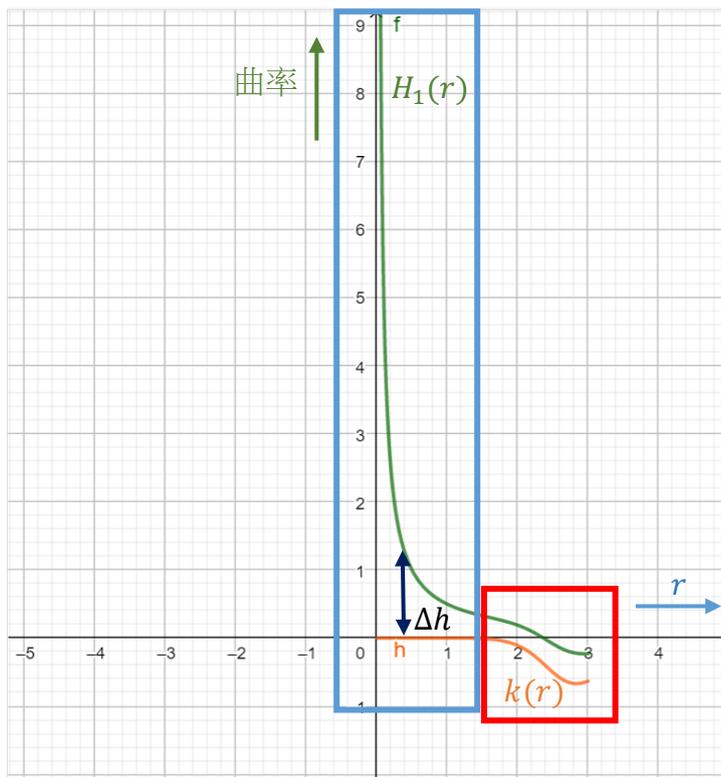
$$= \frac{\left(\frac{4v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 - r^{10}\right)}{r \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + r^{10}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-20 \left(\frac{v_0^2 r_0^4}{2g}\right) r^9}{\left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + r^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(2\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + 3r^{10}\right)}{r \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + r^{10}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

所以，當( $r \rightarrow 0$ )時：

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right) \left(2\left(\frac{v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + 3r^{10}\right)}{r \left(\left(\frac{2v_0^2 r_0^4}{g}\right)^2 + r^{10}\right)^{\frac{3}{2}}} = \infty$$

不變的是，曲面投影單支曲線的曲率值恆「小於」曲面的平均曲率值( $\Delta h(r)$  恆大於 0)，原因會在討論中詳細說明。



圖八：綠色 $H_1(r)$ ；橘色 $k(r)$ ； $v_0 = 3$ ， $r_0 = 3$ ， $g = 9.8$

## 陸、 討論

一、在研究結果四中提到：曲面投影單支曲線的曲率值恆小於曲面的平均曲率值，且在圓形半徑  $r$  值越小處，差距越大。其原因推測如下：

曲面的平均曲率包含多個方向的曲率，已知在  $x - y$  平面上，曲面切面呈現圓形，且圓形曲率為半徑的倒數  $\left(\frac{1}{r}\right)$ ，在半徑  $r$  趨於零時，圓形曲率會趨近於無限大，

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty$$

故可以推斷上述在圓形半徑趨近於零時，曲率趨近於無限大是受圓形的曲率影響。這樣也就可以解釋為何在圓形半徑  $r$  值越小處，兩者差距越大。

二、根據研究結果，我們可以看到，若只考慮三種物理量值(重力加速度  $g$ 、水流初速度  $v_0$ 、水流圓形初始半徑  $r_0$ )，水流曲面仍會呈現連貫，斷點不會產生，故就目前研究僅能進行以下統整：

(一)、隨著  $g$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度加快(研究結果一之 1)；V 形凹處位置向左移，且曲面的平均曲率最小值(V 形凹處的最低處)變小(研究結果二之 1)。可推測隨著  $g$  值變大，在  $r \rightarrow r_0$  處的曲率變化會增大。

(二)、隨著  $v_0$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度變慢(研究結果一之 2)；V 形凹處位置向右移，且曲面的平均曲率最小值(V 形凹處最低處)變大(研究結果二之 2)。可推測隨著  $v_0$  值變大，在  $r \rightarrow r_0$  處的曲率變化會減小。

(三)、隨著  $r_0$  值變大，曲面平行於  $x - y$  平面上的切面圓形半徑  $r$  隨  $z$  值遞減速度變慢(研究結果一之 2)；V 形凹處位置向右移，且曲面的平均曲率最小值(V 形凹處最低處)變大(研究結果二之 2)。可推測隨著  $r_0$  值變大，在  $r \rightarrow r_0$  處的曲率變化會減小。

## 柒、 未來展望

- 一、 目前僅討論三種物理量 (重力加速度  $g$ 、水流初速度  $v_0$ 、水流圓形初始半徑  $r_0$ ) 的影響及改變，且由上述研究可以知道，在這三種物理量值變化的情況下，水流依然呈現連貫，故無法解答我在動機時所述生成水珠的情況。所以在希望日後能加入「液體的內聚力」的改變，以判斷生成水珠的位置變化與四種物理量值的關聯性。
- 二、 希望能進行實際實驗，並綜合這次研究以及液體內聚力的影響之研究，觀察實際結果是否與理論判斷相符，並進一步推算出生成水珠的位置與四種物理量值的關係式。

## 捌、 參考資料

- [1] Riemannian Geometry *Second Edition*-----Frank Morgan. (第 36 頁)
- [2] Riemannian Geometry *Second Edition*-----Frank Morgan. (第 6 頁)

## 【評語】 010006

本作品利用質量守恆與能量守恆，並假設水柱對稱性來建構一個數學模式，模擬水龍頭水流下後的水柱形狀，並據以計算各點的 mean curvature，並探討重力加速度、初始流速、初始半徑對平均曲率最小值的影響。本作品目前是考慮在相當理想的狀態之下的討論，所得到的結果算是有趣，不過較有限。未來若是能夠探討更精巧的數學模型會相當有發展，例如考慮具有內聚力因而產生臨界值而有水珠的現象等等，或適設計實際的物理實驗，實質驗證所建立的數學模式之模擬，確實吻合實際情形，若有不盡吻合之處，則需進行模式之再次修正。整體而言是相當有發展性的題材。