如何移動棋子 ?

作者：葉均承
就讀學校：萬芳高中國中部
指導老師：李漱青

我叫葉均承,在家裡我排行老大,今年準備要上高一。爸爸是數學教授,媽媽是公務員。

我喜歡音樂、歷史、童軍及數學。因為爸爸常常會拿一些遊戲題目跟我玩,並指導我做分析,培養我的數學能力和興趣。這次科展的題目,也是從爸爸在去年暑假給我的遊戲題目中所推廣延伸的。因為我做出一些結果來,所以爸爸建議我拿來參展,沒想到竟然入選了,我真是太高興了。希望以後能繼續做研究,因為在研究的過程中,不但可以享受到成就感,而且數學能力也會進步不少哩!

研究動機

有一個遊戲：在一列八個的方格中，由左至右依序編號為1,2,3,....8，在第四個、第六個、第八個格子中各放置一個棋子。甲、乙二個人按照下列規則輪流移動棋子：甲先移動棋子，每個人每次只能動一個棋子，而且只能將這個棋子移至左邊最近的空格中(若前面連續有t個棋子時，可以跳過前面的t個棋子而且只能跳一次)。甲、乙兩個人之中，誰先將三個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是贏家。

玩這個遊戲時，有時會贏有時會輸，但是經過詳細地邏輯分析之後，得到了如何在這個遊戲中獲勝的秘密。

作完這個遊戲問題之後，我希望除了將問題推廣到一列n個方格的情況外，同時把這個問題加以變化，討論另外三種不同“輸贏結果”的規定：甲、乙兩個人之中，

A.誰先將 k 個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是輸家。

B.誰先不能再移動棋子，誰就是贏家。

C.誰先不能再移動棋子，誰就是輸家。

研究目的

藉著這問題的研究，我希望從很多的例子去觀察現象，先猜測一般的結果、經過分析、修正，再作證明，進而討論相關問題之間的關係，這樣可以培養我學習歸納和演繹的數學方法及對數學研究的興趣和耐心。

研究過程或方式

(一)定義與符號．有一個$1\times n$的方格表，由左至右依序編號為$1,2,3,\ldots,n$，在第X_1個、第X_2個、…、第X_k個格子中各放置一個棋子，其中$1<X_1<X_2<\ldots<X_k\leq n$，放置這 k 個棋子方格的編號數(簡記為這 k 個棋子的編號數)所成的集合記為$S=\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$。

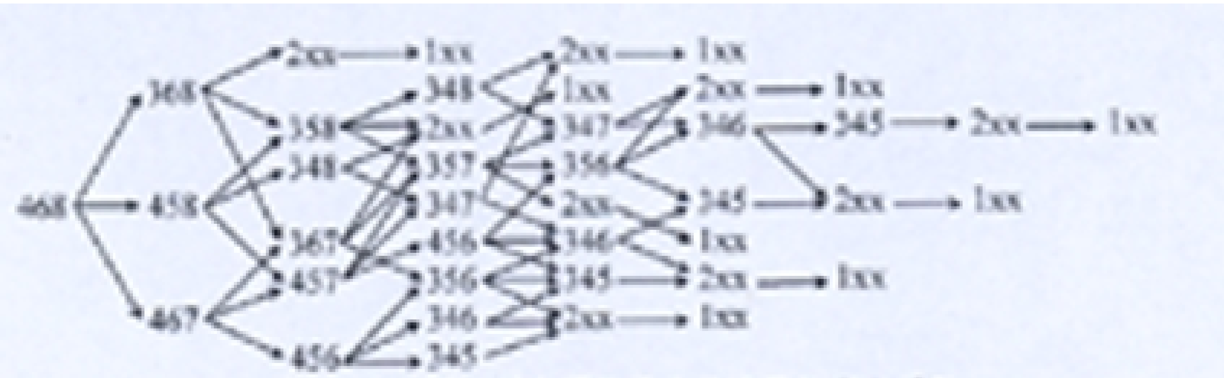
1.如果存在有一個使甲必勝的策略，則我們定義函數$f(X_1,X_2,\ldots,X_k)=0$；如果存在有一個使乙必勝的策略，則我們定義函數$f(X_1,X_2,\ldots,X_k)=1$。有時我們用$f(S)$來代替$f(X_1,X_2,\ldots,X_k)$。

2.輪到某一個人移動棋子時，我們稱這個人為先手，另一個人為後手。我們用$\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}\xrightarrow{甲}$(或$\xrightarrow{乙}$)$\{X_1',X_2',\ldots,X_k'\}$表示：經過甲(或乙)移動棋子後，這 k 個棋子的編號數所成的集合由原來的$\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$變成為$\{X_1',X_2',\ldots,X_k'\}$。而此時原來的先手變成後手，原來的後手反而變成先手。

3.$S+r$表示$\{X_1+r,X_2+r,\ldots,X_k+r\}$。

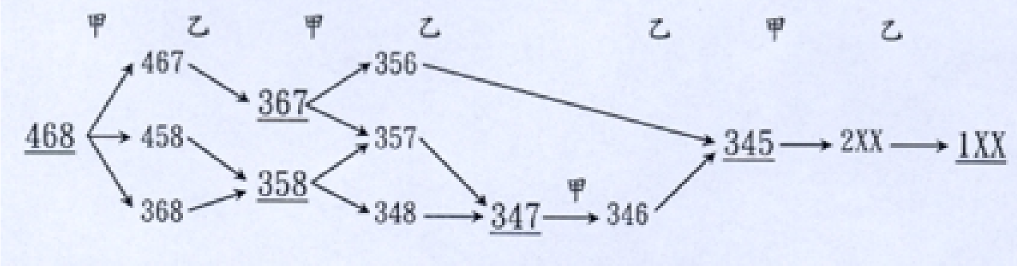
4.我們定義函數$\chi(a)=\begin{cases}1 & \text{如果}a\text{是奇數;}\\ 0 & \text{如果}a\text{是偶數。}\end{cases}$

(二)例子與樹狀圖形．現在我們討論研究動機所提到的問題 問題中原來三個棋子的編號數所成的集合為$\{4,6,8\}$。由於輪到某一個人移動棋子，如果他把棋子移到編號為 2 的方格，對方就會把這個棋子移到編號為 1 的方格，則他就是輸家。所以甲、乙兩個人都避免把棋子移到編號為 2 的方格，除非他被迫把某一個棋子移到編號為 2 的方格。如果這三個棋子的編號最小的數目是 2，則我們把這三個棋子的編號記為 2xx；如果三個棋子中編號最小的數目是 1，則我們把三個棋子中編號記為 1xx。為了方便描述起見，我們使用$f(4,6,8)$所有可能產生的狀況的樹狀圖形來說明〈見圖一〉。



圖一、$f(4,6,8)$ 所有可能產生的狀況的樹狀圖形

圖一的樹狀圖形告訴我們放置這三個棋子方格的編號數，經過甲乙兩個人輪流移動後，所有可能產生的狀況 (為了方便畫圖起見，有些狀況會重複出現)。我們再從 xx1 倒推回去，可以推到出存在有一個使乙必勝的策略，再由乙的觀點出發，去除掉乙不會選擇的狀況，而得到比較簡單圖形(相同的狀況會統一描述，不會重複出現)。(見圖二)



圖二. $f(4,6,8)$ 的樹狀圖形

我們將證明存在有一個使乙必勝的策略：

甲可以移動三個棋子中任意一個棋子,

1.$\{4,6,8\}\xrightarrow{甲}\{4,6,7\}$或$\{4,5,8\}$或$\{3,6,8\}$。

(a).如果$\{4,6,8\}\xrightarrow{甲}\{4,6,7\}$，則$\{4,6,7\}\xrightarrow{乙}\{3,6,7\}$;

(b).如果$\{4,6,8\}\xrightarrow{甲}\{4,5,8\}$或$\{3,6,8\}$，則乙可以把$\{4,5,8\}$或$\{3,6,8\}$變成為$\{3,5,8\}$。

2.這時甲面對這3個棋子的編號數所成的集合是$\{3,6,7\}$或$\{3,5,8\}$。由於 $\{3,6,7\}\xrightarrow{甲}\{3,5,6\}$或$\{3,5,7\}$ 和 $\{3,5,8\}\xrightarrow{甲}\{3,5,7\}$或$\{3,4,8\}$。

(a).如果甲把這3個棋子的編號數所成的集合變成為$\{3,5,6\}$，則$\{3,5,6\}\xrightarrow{乙}\{3,4,5\}$;

(b).如果甲把這3個棋子的編號數所成的集合變成為$\{3,5,7\}$或$\{3,4,8\}$，則乙可以把這3個棋子的編號數所成的集合變成為$\{3,4,7\}$。

如果$\{3,4,7\}\xrightarrow{甲}\{3,4,6\}$，則$\{3,4,6\}\xrightarrow{乙}\{3,4,5\}$。

3.這時甲面對這3個棋子的編號數所成的集合是$\{3,4,5\}$。甲被迫把某一個棋子移到編號為2的方格，即$\{3,4,5\}\xrightarrow{甲}\{2,x,x\}$，則乙可以把這個編號為2方格中的棋子移到編號為1的方格，所以乙就是贏家。

經過仔細分析圖一和圖二的樹狀圖形後，我們發現不僅知道$f(4,6,8)=1$及$f(5,6,8)=0$，而且我們也可以知道

$f(5,6,7)=f(3,6,7)=f(3,5,8)=f(3,4,7)=f(3,4,5)=1$ 和

$f(4,6,7)=f(4,5,8)=f(4,5,7)=f(4,5,6)=f(3,6,8)=f(3,5,7)=f(3,5,6)=f(3,4,8)$

$f(3,4,6)=0$。

(三)觀察現象. 在經過觀察一些例子的樹狀圖之後，我們討論一些比較一般的現象：

現象1. 由於輪到某一個人移動棋子，如果他看到編號為2的方格有一個棋子，他可以把這個棋子移到編號為1的方格，則他就是贏家。也就是說如果$2\in S$，則$f(S)=0$。

現象2. 當k個棋子的編號數所成的集合為$S=\{X_1,X_2,\ldots,X_k\}$，其中$1<X_1<X_2<\ldots<X_k\le n$。輪到先手移動棋子時，如果他把放在編號為$X_i$方格的棋子移到它左邊最近的空格，$1\le i\le k$，此時我們把移動後的$k$個棋子的編號數所成的集合記為$S_i$。當然每位先手總希望能贏，希望能找出必勝策略。由於移動棋子後，原來的先手變成後手，原來的後手反而變成先手。所以我們知道：如果存在有一個S_i使得$f(S_i)=1$，則$f(S)=0$；如果所有的S_i使得$f(S_i)=0$，則$f(S)=1$。也就是說：

$$f(S)=1-\max\{f(S_i)1\le i\le k\}.$$

(四)函數 $f(a,b,c)$ 的值. 經過分析，我們對 $a+b+c$ 的值作數學規納法來證明函數 $f(a,b,c)$ 的值。令在一列 n 個的方格中放置 k 個棋子，令這 k 個棋子的編號數所成的集合記為 $S=\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$，其中 $3\le X_1<X_2<\dots<X_k\le n$。如果 $2\in S$，則 $f(S)=0$。所以甲、乙兩個人都避免把棋子移到編號為 2 的方格，所以也就是說大家都只會把棋子移到編號 ≥ 3 的方格。如果編號為 3 的方格已經放置一個棋子，誰移動這個編號為 3 的棋子，誰就是輸家。所以甲、乙兩個人都可以把 $1\times n$ 的方格表中編號為 3 的方格忽略掉，所以 $f(3,X_1+1,X_2+1,\dots,X_k+1)=f(X_1,X_2,\dots,X_k)$。

(五)不同"輸贏結果"問題的研究及它們之間的關係. 前面我們討論的"輸贏結果"是：甲、乙兩個人之中，誰先將三個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是贏家。在這一部份我們將對"結果規定"加以變化，同時討論不同"輸贏結果"問題之間的關係。當 k 個棋子的編號數所成的集合為 $S=\{X_1,X_2,\dots,X_k\}$，輪到甲(先手)移動棋子時，如果他把放在編號為 X_i 方格的棋子移到它左邊最近的空格，$1\le i\le k$，此時我們把移動後的 k 個棋子的編號數所成的集合記為 S_i。由現象 2 我們知道

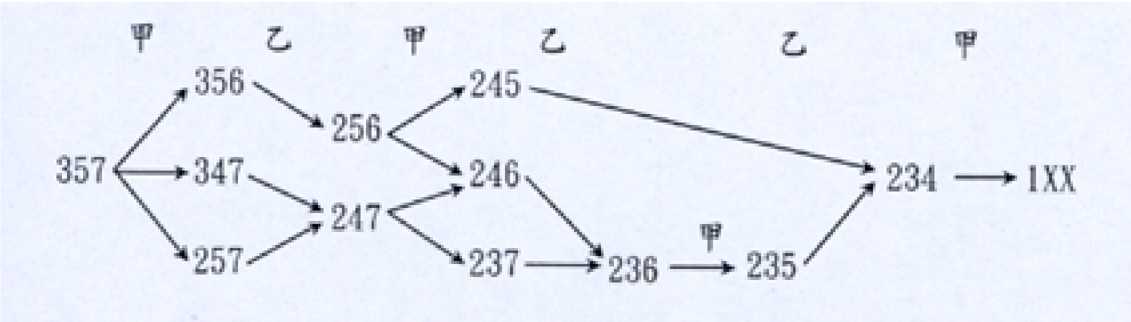
$$f(S)=1-\max\{f(S_i)1\le i\le k\}.$$

如果存在有一個使甲(先手)必勝的策略，則我們定義函數 $p(X_1,X_2,\dots,X_k)=0$；如果存在有一個使乙(後手)必勝的策略，則我們定義函數 $p(X_1,X_2,\dots,X_k)=1$。我們也有

$$p(S)=1-\max\{p(S_i)1\le i\le k\}.$$

1. 首先，我們將"輸贏結果"改為：甲、乙兩個人之中，誰先將三個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是輸家。如果存在有一個使甲必勝的策略，則我們定義函數 $g(X_1,X_2,\dots,X_k)=0$；如果存在有一個使乙必勝的策略，則我們定義函數 $g(X_1,X_2,\dots,X_k)=1$。

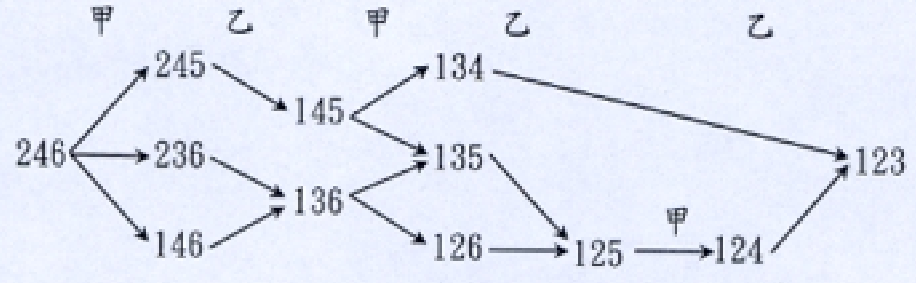
為了解答這個問題，我們還是從例子著手。由圖三的 $g(3,5,7)$ 樹狀圖得知 $g(3,5,7)=1$；同時我們看到圖三與圖二幾乎一樣。從圖二中每個數字都減去 1 就得到圖三。又觀察了幾個例子，也都有相同的情形，經過分析與證明，我們發現這個觀察現象是對的。



圖三. $g(3,5,7)$ 的樹狀圖形

2. 再來我們將"輸贏結果"改為：甲、乙兩個人之中，誰先不能再移動棋子(所有棋子放在編號為 $1,2,3,\dots,k$，誰就是輸家。如果存在有一個使甲必勝的策略，則我們定義函數 $u(X_1,X_2,\dots,X_k)=0$；如果存在有一個使乙必勝的策略，則我們定義函數 $u(X_1,X_2,\dots,X_k)=1$。

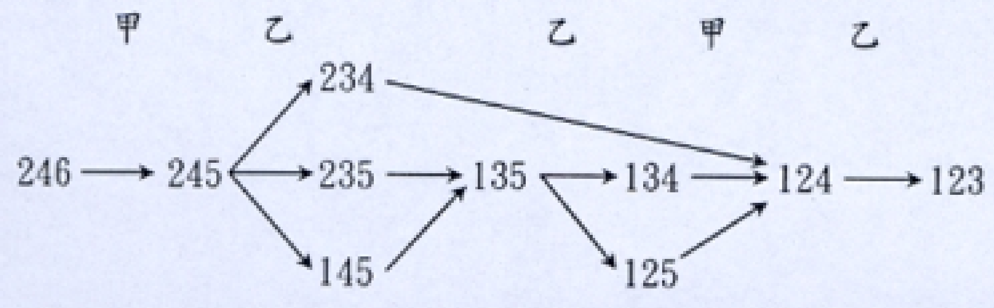
從這個問題的例子我們也看到圖四與圖二幾乎一樣。從圖二中每個數字都減 2 就得到圖四。又觀察了幾個例子，也都有相同的情形，同樣地經過分析與證明，我們發現這個觀察現象是對的。



圖四. $u(2,4,6)$ 的樹狀圖形

3.最後我們將“輸贏結果”改為：甲、乙兩個人之中，誰先不能再移動棋子，誰就是輸家。如果存在有一個使甲必勝的策略，則我們定義函數 $v(X_1, X_2, ..., X_k) = 0$；如果存在有一個使乙必勝的策略，則我們定義函數 $v(X_1, X_2, ..., X_k) = 1$。

從這個問題的例子，我們也期望看到圖五的樹狀圖也可以從圖二中每個數字都減去某個數就得到。但是我們觀察了幾個例子，它們都大不相同，這個現象使我們感到失望和興奮。失望的是它們之間沒有明顯的密切關係；興奮的是我們將又面對一個新的挑戰問題。經過了冗長分析，我們對 $a+b+c$ 的值作數學歸納法來證明函數 $f(a,b,c)$ 的值。



圖五. $v(2,4,6)$ 的樹狀圖形

研究結果

在一列 n 個的方格中，由左至右依序編號為 $1,2,3,...,n$，在第 X_1 個、第 X_2 個、…、第 X_k 個格子中各放置一個棋子，其中 $1 < X_1 < X_2 < \ldots < X_k \le n$，這 k 個棋子的編號數所成的集合記為 $S = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$。在這個研究中，我們討論四種不同的結果規定：

1.甲、乙兩個人之中，誰先將 k 個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是贏家，則

$$f(a,b,c) = \begin{cases} 1-\chi(a+b+c) & \text{if } 2 \le a < b-1 < c-2; \\ \chi(ac) & \text{if } 2 \le a = b-1 < c-2,\ \text{或}\ 2 \le a < b-1 = c-2; \\ \chi(a) & \text{if } 2 \le a = b-1 = c-2. \end{cases}$$

而且 $f(a,b) = \chi(a+b)$ 及 $f(a) = \chi(a)$。

2.甲、乙兩個人之中，誰先將 k 個棋子中任意一個棋子移到第一個方格，誰就是輸家，則

$$g(a,b,c) = \begin{cases} \chi(a+b+c) & \text{if } 2 \le a < b-1 < c-2; \\ \chi(ac) & \text{if } 2 \le a = b-1 < c-2,\ \text{或}\ 2 \le a < b-1 = c-2; \\ \chi(a) & \text{if } 2 \le a = b-1 = c-2. \end{cases}$$

3.甲、乙兩個人之中，誰先不能再移動棋子，誰就是贏家，則

$$u(a,b,c)=\begin{cases}1-\chi(a+b+c) & \text{if } 1\le a<b-1<c-2;\\ \chi(ac) & \text{if } 1\le a=b-1<c-2,\ \text{或}\ 1\le a<b-1=c-2;\\ \chi(a) & \text{if } 1\le a=b-1=c-2.\end{cases}$$

4.甲、乙兩個人之中，誰先不能再移動棋子，誰就是輸家，則

$$v(a,b,c)=\begin{cases}\chi(a+b+c) & \text{if } 1\le a<b-1<c-2;\\ \chi(a)(1-\alpha(c)) & \text{if } 1\le a=b-1<c-2,\\ (1-\chi(a))\chi(c) & \text{if } 1\le a<b-1=c-2;\\ 0 & \text{if } 1\le a=b-1=c-2.\end{cases}$$

5.不同"結果規定"的問題之間的關係有

$$u(X_1,X_2,\dots,X_k)=f(X_1+2,X_2+2,\dots,X_k+2)=g(X_1+1,X_2+1,\dots,X_k+1)$$

討論及應用

1.作完這個研究，我發現樹狀圖的功能很大，大部份我們遇到的遊戲都能夠利用樹狀圖來找出必勝的策略。

2.在這個研究中，使我更熟悉數學歸納法的運用。

結論

我將繼續研究探討的 $f(X_1,X_2,\dots,X_k)$ 之值是多少？

參考資料及其它

1.趙文敏. 寓數學於遊戲第一輯. 台北九章出版社, 1981。

2.孫君儀、葉均承、陳天任. 土撥鼠遊戲研究. 中央研究院數學傳播. 第23卷. 第四期, p.32-38。

3.葉均承. Apex遊戲的推廣.中央研究院數學傳播. 第24卷. 第三期, p.66-83。