

太陽 Limb Darkening 效應之探討



獲獎榮譽榜

參加美國第五十二屆國際科技展覽會
獲
大會獎團隊地球與太空科學科三等獎
柯達公司一等獎

作者：葉丞育 陳至凡

就讀學校：大同高中

指導老師：廖哲毅

葉丞育

當 1998 年初春，丞育在祝山山頂用手指著 Hale-Bopp 彗星的尾巴時，他自己都還沒想過任何一點關於那天能站在美國 52nd ISEF 聖河西州立大學頒獎台上的可能性。就在這麼短的時間裡，我在高中天文社裡學會了如何領導一個社團；懂得了怎麼在自己十八歲前，立下人生第一個自認重大的目標；體會了用淚和一種得意捏成的夢想的形狀。現在，丞育像個傳教士一般，為人傳頌著他自己也不太懂得的信仰，教人去種下理想，或許，他說這麼多，只不過是為了讓人也能體會到，在別人堅持不下去的瓶頸，執意前進的決心，以及在挫折中保持清醒的毅力。

很榮幸，能得到這些獎，但誠如許多陳腔濫調所言，這些都不重要，重要的是，所有附加的肯定，不過是為下一個企圖所預留的伏筆。此外，萬分感謝師大地科系傅學海教授的知遇之恩，不但在科學方法上給予指導，並給我許多鼓勵與自信，教我怎麼規劃未來。這些經驗，讓自己不曾後悔，因為野性驅使著我追逐，即使滿身傷口，也義無反顧。

陳至凡

我來自一個自由而快樂的家庭、從小受到父親的影響，便對大自然有了濃厚的興趣，加上受到國中、高中的物理老師啟發式的教學，更是對科學有了更深的了解以及興趣，高中開始加入天文社，不但多了和同學討論天文、物理... 等的機會，更可以在過程之中學到與他人共事的方法，所以在高二便和丞育一起投入科學的研究，當然過程之中、沒有受到許多人的幫助、以及指導，我們是不會有這樣的機會，而作到這樣的作品，甚至這樣的成績，感謝學長以及大同高中的師生鼓勵支持、許多評審教授的指導，更特別感謝師大地科的傅學海教授、在研究過程之中細心的指導，讓我對於科學研究，有完整而詳細的認知，沒有這麼多人的幫助，是沒有我們的，謝謝你們一路陪著我們，指導我們，謝謝你們。

研究動機

觀察太陽表面光球 (photosphere) 之影像，除了局部活動區 (如黑子、光斑 等) 的不規則外，可以很容易的觀察到太陽盤面由中心到盤面邊緣較大尺度的亮度變化，日面中心區最亮，越近邊緣越暗。這種現象，稱為 Limb Darkening 效應，其原因可由輻射轉移方程 (radiative transfer equation) 推導出。由於太陽盤面上任一觀測點，它的法線方向與視線方向夾一 角度，根據輻射轉移方程：

$$\cos\theta \frac{dI_\lambda(\theta)}{d\tau_\lambda} = I_\lambda(\theta) - S_\lambda, \quad I_\lambda = I_\lambda(\tau_\lambda, \theta)$$

這裡 I_λ 為輻射強度 (intensity)、 S_λ 為源函數 (source function)、 τ_λ 為光學深度 (optical depth)。可以推導出：

$$I_\lambda(0, \theta) = -\int_0^\infty S_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec\theta} d(\tau_\lambda \sec\theta)$$

假定源函數 S_λ 隨光學深度的分布由：

$$S_\lambda = a_\lambda + b_\lambda \tau_\lambda$$

描述之，可得：

$$\begin{aligned} I_\lambda(0, \theta) &= \int_0^\infty a_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec\theta} d(\tau_\lambda \sec\theta) + b_\lambda \int_0^\infty \tau_\lambda e^{-\tau_\lambda \sec\theta} d(\tau_\lambda \sec\theta) \\ &= A_i + B_i \cos\theta = a_\lambda + b_\lambda \cos\theta = S_\lambda(\tau_\lambda = \cos\theta) \end{aligned}$$

則在一般情況下，當

$$S_\lambda(\tau_\lambda) = \sum_i a_{\lambda i} \tau_\lambda^i$$

可得一般式：

$$I_\lambda(0, \theta) = \sum_i A_i \cos^i \theta, \quad \text{而 } A_i = a_{\lambda i} i!$$

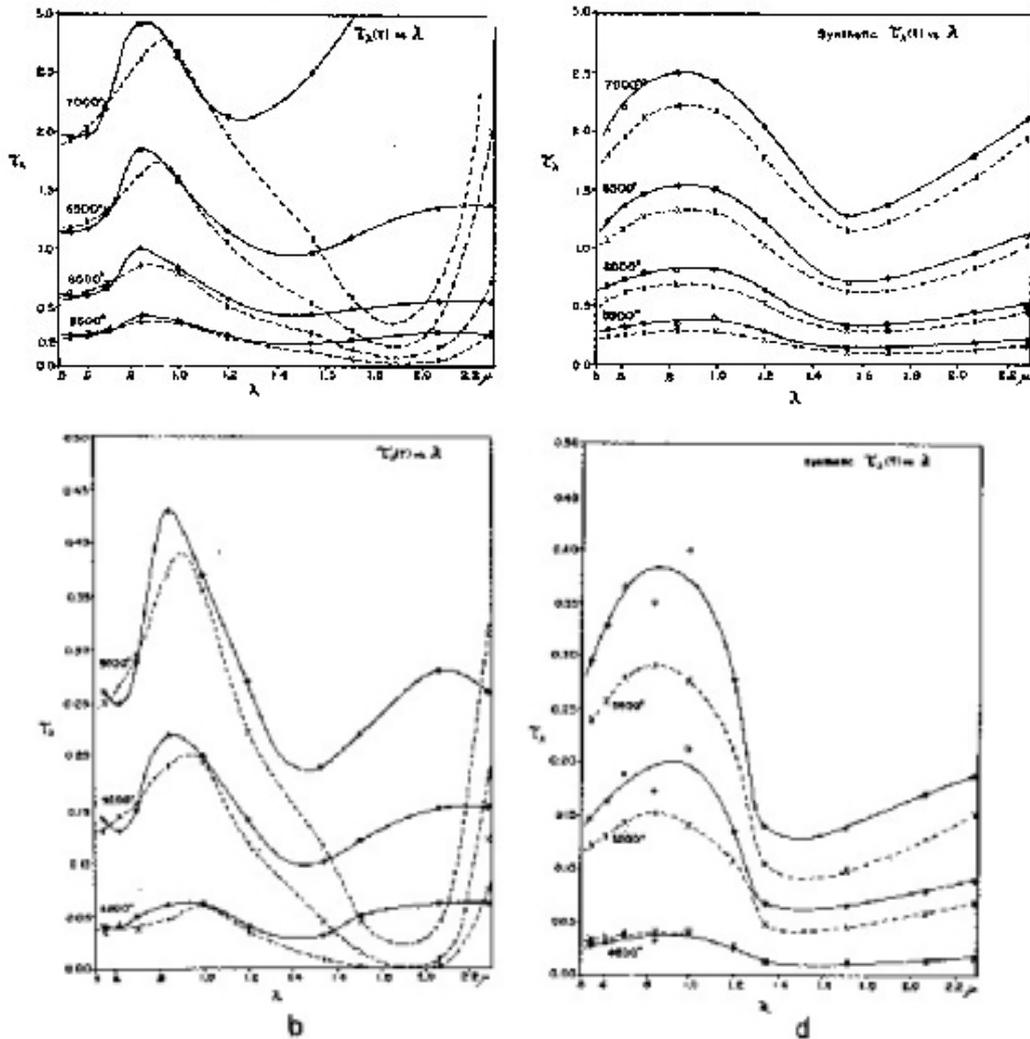
其中 $I_\lambda(0, \theta)$ 為光球表面 ($\tau_\lambda = 0$) 任一觀測點上的輻射強度 I_θ 。則為了方便觀察太陽的 limb darkening，將此一般式除以 $I_\lambda(0, 0)$ 作為比較：

$$I_\lambda(0, \theta) / I_\lambda(0, 0) = a_\lambda + b_\lambda \cos\theta + c_\lambda \cos^2\theta + \dots$$

而在完美的熱動力平衡下，其輻射被視為完美的黑體輻射，則 $S = I = B$ ， B 為普朗克方程式 (Planck function)，但這結果與真實恆星外層的大氣狀況是不符合的，為了求得恆星大氣模型的近似，引用 1906 年 K. Schwarzschild 及 1921 年 B. Y. Mills 太陽大氣為局部熱動平衡 (local thermodynamic equilibrium, LTE) 的假設，在 LTE 下，根據 Kirchhoff 定律 $S = B$ ，則藉由 I_λ 的媒介，我們可以逐步建構出太陽大氣的模型。此外，吸收係數隨波長改變 (例如：1946 年 Chalonge 和 Kourganoff 由 τ_λ 和波長關係得到的結論)，所以太陽並非是和波長無關的灰色大氣 (gray atmosphere)，藉由不同波段下所觀測的太陽，可得到不同的大氣結構模型。

Fig1: 摘自考資料(七)-光學深度隨波長改變的關係

Fig1: 摘自考資料(七)- 光學深度隨波長改變的關係



研究目的

- (一)、由測量可見光影像 $I(0, \theta)$ 所得的係數 a 、 b 和 c ..., 可得到灰色大氣假設下溫度隨深度的分布。
- (二)、藉由 H- α 及 Ca II 兩種波長的太陽影像分析, 測量並比較不同波長下的 $I(0, \theta)/I(0, 0) - \cos\theta$ 關係式係數值, 我們可以得到不同波長所相對的太陽大氣結構模型。
- (三)、不同演化階段的恆星也有不同的大氣結構, 所以想嘗試從觀測到的不同 limb darkening 效應中比較其他恆星與太陽在大氣結構上的不同。

研究設備器材

(一)、分析影像：

1. 為分析太陽在不同波段下所觀察的大氣模型, 我們使用 Big Bear Solar Observatory 所拍攝可見光及 H- α 、Ca II-K 兩個波段的太陽影像各一張。其中可見光及鈣離子的太陽影像是由 8-bit Kodak MegaPlus 1.4i CCD camera 所攝; 而 H- α 的影像是由 14-bit, 2032 x 2032 pixel Apogee KX4 CCD 攝得。

2. 由於恆星演化末期大氣結構有極大的轉變, 因此, 我們想用相同的方式觀察不同恆星的 limb-darkening 效應, 以了解其大氣結構。所以從哈伯太空望遠鏡所拍攝的影像中挑選出參宿四 (Betelgeuse, a Orion M2 Iab) 紫外線波段下的盤面影像由 FOC (Faint Object Camera) 攝得, 中心波長為 2550 Angstroms。

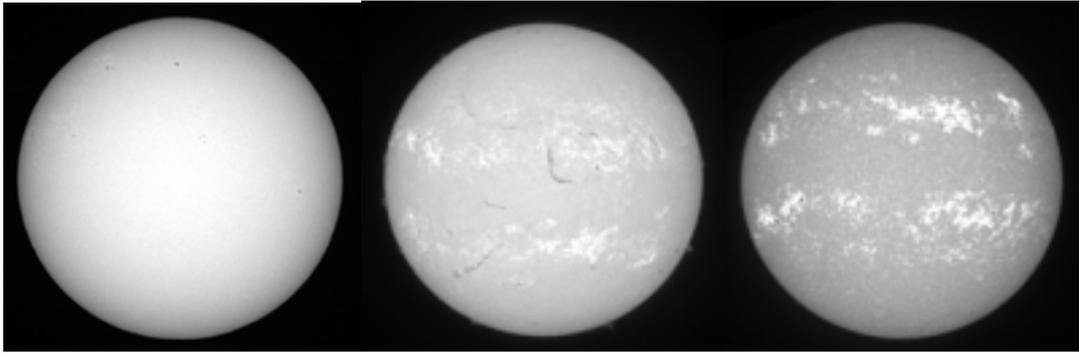


Fig2:可見光太陽影像 Fig3: H- α 波段太陽影像 Fig4: Ca II K 現波段太陽影像

(二)、電腦軟體：

- 1.Astroart 天文影像處理軟體：用以求得影像上每個 pixel 的輻射強度，並以此作分析。
- 2.Microsoft Excel：繪製各種 limb darkening 的關係圖，所以當我們在求趨勢函數時，使用迴歸分析，也就是最小方差法。

研究過程與方法

根據輻射轉移方程所推導出的關係式，我們可以藉由實驗得到實際太陽大氣中輻射過程的源函數 S_{λ} 與光學深度 τ_{λ} 的關係，所以求得 $I(0, \theta)$ 以及定義 $\cos\theta$ 值，利用迴歸分析最後描繪出太陽盤面亮度分布曲線是數據分析中最重要的一環。以下將對 I_0 、 I_{θ} 及 $\cos\theta$ 值的求法作說明。

(一)、太陽盤面中心：

為了建立太陽盤面上各觀測點所相對的位置及關係，首先得先決定太陽的中心作為基準。考慮太陽盤面無論在幾何形狀及亮度均以中心對稱的性質之後，取影像上所有平行 X 軸直線上的亮度值，平均後繪出一條左右對稱的平均亮度變化曲線，利用拋物線同為左右對稱的性質，逼近觀測的曲線並求拋物線的對稱中心位置，對照實際太陽影像上的座標，定為太陽盤面 Y 軸上的中心；同理求出 X 軸上的中心。

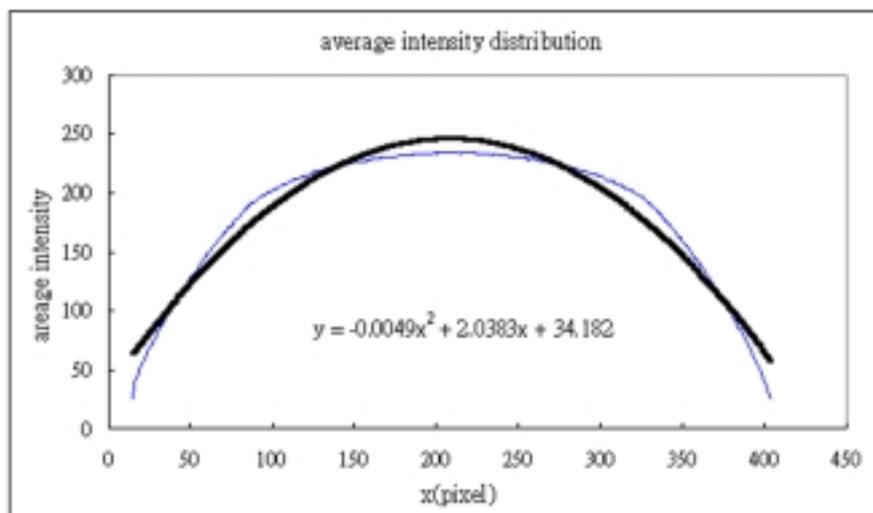


Fig5: 對稱求中心方法示意圖

(二)、邊緣及半徑：

觀察影像上由盤面經過邊緣到背景上的亮度變化曲線，可以發現亮度由中心往邊緣遞減，雖然在靠近邊緣的區域大幅減弱近於背景，但向外延伸的光暈等諸多因素，使得邊界與背景模糊難分。為求邊緣，將靠近邊緣的區域中亮度變化率最大的兩點連線取一方程式，並在遠離太陽邊緣的背景區域上(沒有亮度變化)取得背景亮度，則沿著方程式，太陽盤面亮度減弱至背景亮度的位置，便將這點定為太陽邊緣。而太陽盤面中心與邊緣的距離即為太陽半徑，以 R 代表， pixel 為單位。

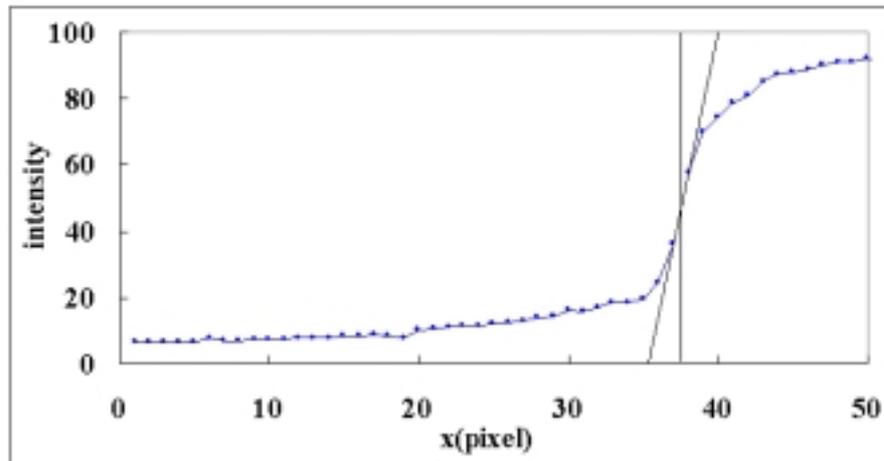


Fig6: 邊緣定義示意圖

(三)、 $\cos\theta$ 值：

盤面上任一觀測點對於盤面中心有一距離，以 r 表之，則： $\cos\theta = \sqrt{1 - (r/R)^2}$ 。而當我們取樣時，以每個 pixel 為單位，即每隔一個 pixel 取一段距離 r 。

(四)、中心亮度 I_0 及 I_θ ：

觀察實際太陽盤面上的亮度，會有局部起伏變化，因此無法以中心位置的單一個輻射強度值代表實際的 I_0 。針對亮度起伏為隨機分布，所以當統計 I_0 的值時，中心附近區域內亮度分布應為左右對稱的正態分布，而所有樣本(輻射強度)的中間值必等與母分布(一區域內的亮度分度)平均值，因而在有限實驗次數下，我們以盤面中心向外延伸的正方形面積內樣本中間值得以最接近平均值的的最小範圍為樣本空間，取輻射強度的平均值為 I_0 。

而任意觀測點的 I_θ 值，則隨 r 同樣以每個 pixel 為單位的間隔在平行視線平面上的直徑上取樣。

研究結果

(一)、 $I(0,\theta)$ - $\cos\theta$ 關係式：

1、表例

ㄅ、關係式：

波長	關係式
1 可見光 (white light)	$I(0,\theta)/I(0,0) = -0.1634\cos^2\theta + 0.8749\cos\theta + 0.2828$
2 H- α (6563Angstrom s)	$I(0,\theta)/I(0,0) = -0.6228\cos^2\theta + 1.2792\cos\theta + 0.3261$
3 Ca II-K (3933Angstrom s)	$I(0,\theta)/I(0,0) = -0.1136\cos^2\theta + 0.7058\cos\theta + 0.3994$

又、係數：

波長	c_λ	b_λ	a_λ
1 可見光 (white light)	-0.1634	0.8749	0.2828
2 H- α (6563Angstrom s)	-0.6228	1.2792	0.3261
3 Ca II-K (3933Angstrom s)	-0.1136	0.7058	0.3994

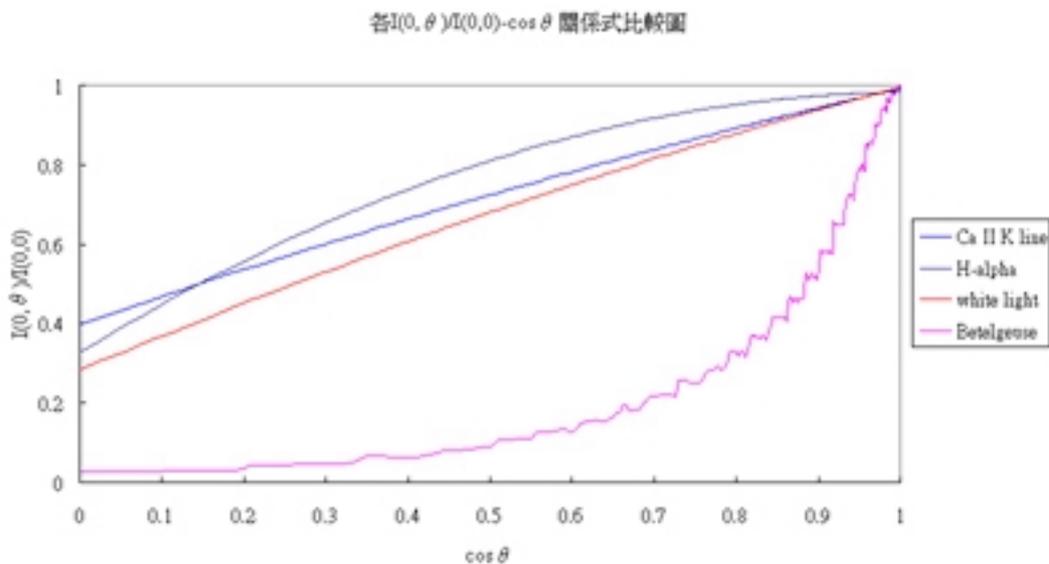


Fig7: 各波段結果比較圖

討論及應用

(一)、根據輻射轉移方程所推導的 $I(0,\theta)/I(0,0) - \cos\theta$ 關係式，首先利用可見光波段的太陽影像，討論灰色大氣模型下 limb darkening 的成因。在灰色大氣模型的假設下，得吸收係數， $k = \int k_\lambda d\lambda$ 不隨波長改變，且由 $\tau = \int k\rho ds$ 知當密度一定時 (LTE 下已假設密度一定)，光學深度與光所走路徑長成正比，所以當同是由光球頂層回朔輻射源，光所走的路徑越短，輻射源近光球頂即相對於光球底層較高，而來自較高位置的光球層；當光學深度愈大時表示其光波來自於光球的愈底部，由於光球溫度隨高度作變化，故光學深度愈大時溫度也越高，源函數值也會愈大。反之，也可由普朗克方程式證得溫度隨高度的變化。

(二)、在數據分析中發現，二階多項式已可以充分顯現出其關係的趨勢，因此取 a_λ 、 b_λ 和 c_λ 三個係數觀察在 $I(0,\theta) - \cos\theta$ 關係圖上所代表的意義，及這些係數隨波長改變所表現出的太陽盤面。在關係式中， a_λ 是當 $\cos\theta=0$ 時，太陽盤面邊緣的輻射強度 $I(0,\pi/2)/I(0,0)$ 比值，代表盤面邊緣的輻射強度；而斜率的變化率 c_λ 對應的是 $I(0,\theta) - \cos\theta$ 關係式彎曲程度，代表 limb darkening

的程度。這代表著，當 a_λ 越大， c_λ 越小時，所呈現的是較均勻而無亮度變化的太陽盤面； $a_\lambda=0$ 時，邊緣的輻射強度減弱為 0，是完全的 limb darkening。由此，並根據(五)研究結果顯示，H- α 影像所觀察到的太陽盤面 limb darkening 程度較 Ca II 影像來的小，且邊緣亮度比較高。

(三)、根據 $I(0,\theta)-\cos\theta$ 關係圖知，當我們觀察到的是太陽光球表面下兩波段相同 τ_λ 的大氣層面時，H- α 影像所得到的源函數較大，且由普朗克方程式知，其溫度較高；反之，若觀測不同波長而得到相同的源函數時，我們看到的 H- α 影像是光學深度較小的層面，因 $\tau_\lambda = \int k_\lambda \rho ds$ ，所以我們也可以說，當兩波段的光所走的路徑長相等，即相同幾何深度、相同溫度，而所經的大氣密度亦相當，H- α 波段所得的吸收係數較小。

(四)

1. 當我們觀察太陽盤面輻射強度變化曲線時，發現，H- α 影像在各觀察點強度上，高於 Ca II 影像，由實驗結果知，因為：

$$\pi F_\lambda(\tau_\lambda) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\lambda(\tau_\lambda, \theta) \cos\theta d(\cos\theta)$$

πF 為單位面積得到的輻射流，又：

$$L = 4\pi R^2 \times \pi F$$

L (luminosity) 為整個太陽盤面的輻射總量，而在相同光學深度下的太陽，H- α 波段所得到的源函數較大，故 πF 及 L 都高於 Ca II 波段。

2 此外

$$\pi F_\lambda(0) = 2\pi \int_0^1 (a_\lambda + b_\lambda \cos\theta) \cos\theta d(\cos\theta) = (a_\lambda + \frac{2}{3}b_\lambda)\pi$$

則比較所得的源函數，可得 Eddington-Barbier 關係：

$$F_\lambda(0) = S_\lambda(\tau_\lambda = \frac{2}{3}) = B_\lambda(\tau_\lambda = \frac{2}{3})，因為 S_\lambda = B_\lambda$$

$$\pi F(0) = \pi \int_0^\infty F_\lambda(0) d\lambda = \pi \int_0^\infty B_\lambda(T_0) d\lambda$$

$$\pi F(0) = \sigma T_0^4，T_0 = T(\tau = \frac{2}{3})，T_{eff}^4 = T^4(\tau = \frac{2}{3})$$

故在 $\tau_\lambda = \frac{2}{3}$ 時，如果測得恆星光度 L、半徑 R 便可知道它的有效溫度而確定它的光譜型。

(五)、觀察參宿四紫外線波段的影像，若以相同分法分析得其 τ_λ 對 S_λ 的關係，並不像太陽在多個波段下所看到的趨勢，是截然不同的大氣結構，根據曲線顯示，當觀察點越接近盤面中心光學深度越大的大氣層面時，所得的源函數值增加的幅度越大，而近似指數函數的圖形，而其 limb darkening 程度也較大。

結論

(一)、局部熱動力平衡下灰色大氣模型的太陽大氣，吸收係數及密度為定值，則溫度隨幾何深度增加而增加。

(二)、根據 $I(0,\theta)-\cos\theta$ 關係式係數值的實驗結果，吸收係數隨波長改變而跟著改變，因而在太陽光譜上產生連續吸收，其原因取決於不同元素的電子軌域狀態及游離能。

(三)、晚期恆星大氣結構有重大改變，溫度在距離光球底附近即大幅下降，因此大部分大氣成比較低溫的狀態，而結構也較鬆散。

參考資料及其它

(一)、 Ronald L. Gilliland and A. K. Dupree 1996, ApJ. Vol.463 L29-L32

(二)、 D. Burns, J. E. Baldwin, R. C. Boyesen, C. A. Haniff, P. R. Lawson, C. D. Mackay, J. Rogers, T. R. Scott, P. J. Warner, D. M. A. Wilson and J. S. Young 1997, MNRAS. 290L. 11B-L16

(三)、 A. Claret and A. Gimenez 1990, A & A. Vol. 230, p.412-418

(四)、 D. Hestroffer and C. Magnan 1998, A & A. Vol.333 p.338-342

(五)、 A. Keith Pierce and Lawrence H. Aller 1951, ApJ. Vol.114 p.145

(六)、 Erika Bohm-Vitense, Introduction to stellar astrophysics vol. 2 Cambridge University Press 1989

(七)Chlonge, D. and V. Kourganoff, 1946, Annales d'Astrophysique, 969.

Study on Solar Limb Darkening

Introduction

The brightness of the solar image is decreasing from center to limb, which is called limb darkening. The effect of limb darkening can be derived from the radiation transfer equation:

$$\cos \theta \frac{dI_{\lambda}(\theta)}{d\tau_{\lambda}} = I_{\lambda}(\theta) - S_{\lambda} \quad \text{where } I_{\lambda} = I_{\lambda}(\tau_{\lambda}, \theta)$$

where S_{λ} is the source function, τ_{λ} is the optical depth and $I_{\lambda}(0, \theta)$ is the radiation intensity of the position with an angle θ to the center of solar disk where $\tau_{\lambda}=0$.

In the general case, assuming

$$S_{\lambda}(\tau_{\lambda}) = \sum_i a_{\lambda i} \tau_{\lambda}^i$$

The result is :

$$I_{\lambda}(0, \theta) = \sum_i A_i \cos^i \theta, \quad \text{with } A_i = a_{\lambda i} i!$$

In practically, the ratio of $I_{\lambda}(0, \theta)$ and $I_{\lambda}(0, 0)$ is used for study :

$$I_{\lambda}(0, \theta) / I_{\lambda}(0, 0) = a_{\lambda} + b_{\lambda} \cos \theta + c_{\lambda} \cos^2 \theta + \dots$$

The material is called black body when it is in perfect thermodynamic equilibrium. Assuming that the solar atmosphere is in local thermodynamic equilibrium (LTE) so that $S_{\lambda} = I_{\lambda} = B_{\lambda}$, where B_{λ} is the Planck function. Then the relation between optical depth and temperature can be derived. But the solar atmosphere is not the gray atmosphere, which is wavelength independent. Observing two strongly emission bands H α and CaII K line in chromosphere, and we can get more information from the solar atmosphere.

Data Analysis

Observations

We used the Kodak TP2415 negative film and the Takahashi FS78 telescope (aperture:78mm; focus length:630mm) to take the solar images. The ND4 filter was used, and the exposure time was controlled between 1/60~1/4000 sec. Finally, we choose the one took in 1/125 sec to analyze.

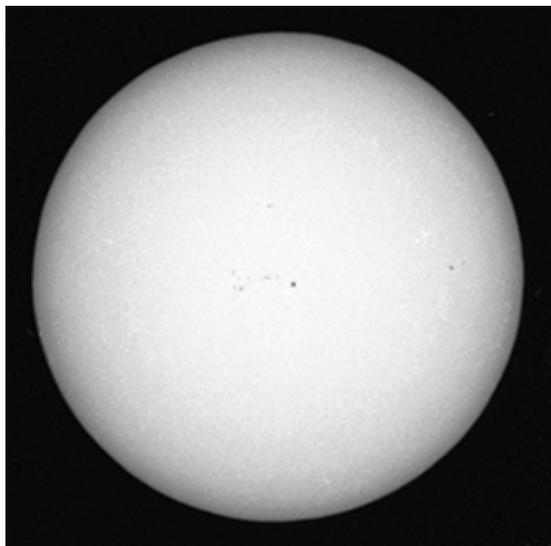


Fig1: the image in white light

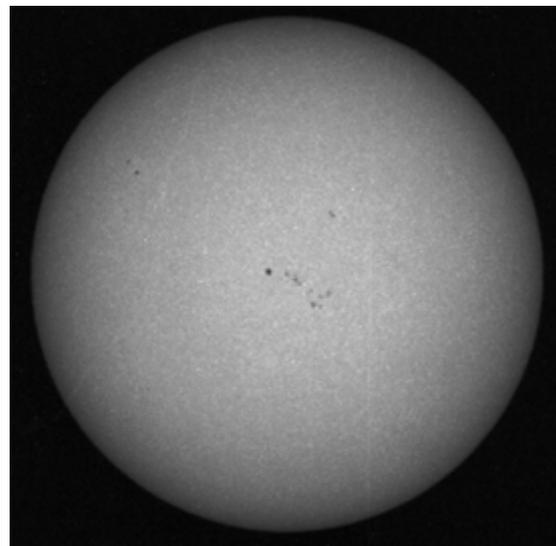


Fig: the image in red light

Digital images from Big Bear Observatory

In order to analyze the models of the solar atmosphere in different bands, we also compared our images with those from Big Bear Observatory, in $H\alpha$, CaII K line and white light. The white light and the K line images was taken by 8-bit Kodak MegaPlus 1.4iCCD camera ; The $H\alpha$ images was taken by 14-bit, 2032× 2032 pixel Apogee KX4 CCD.

A supergiant on the late period of evolution and its atmosphere has a great different probably. The image of Betelgeuse (M2 Iab) from Faint Object Camera of Hubble Space telescope was chosen for comparing.

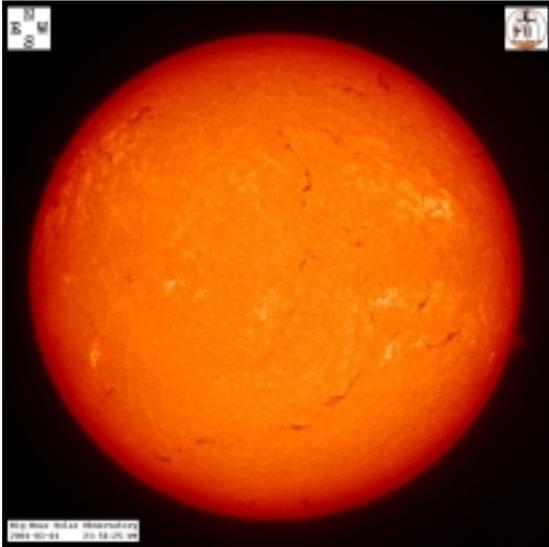


Fig3: the image from BBSO in $H\alpha$

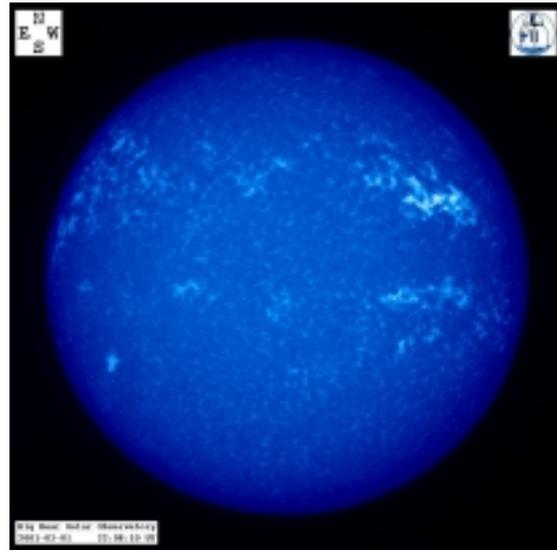
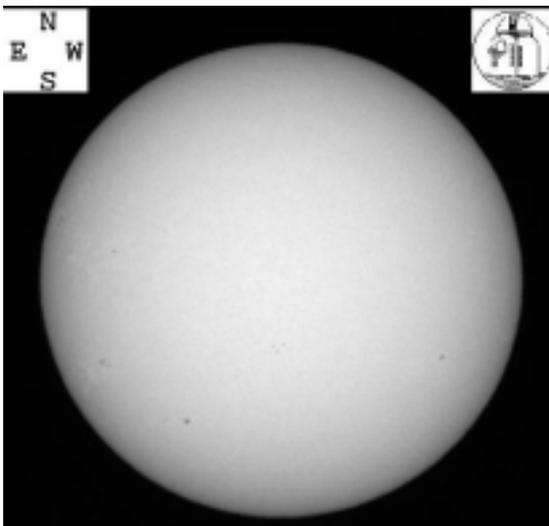


Fig4: the image from BBSO in CaII K line



Big Bear Solar Observatory 2000-10-17 16:36:36 UT
Fig5: the image from BBSO in white light

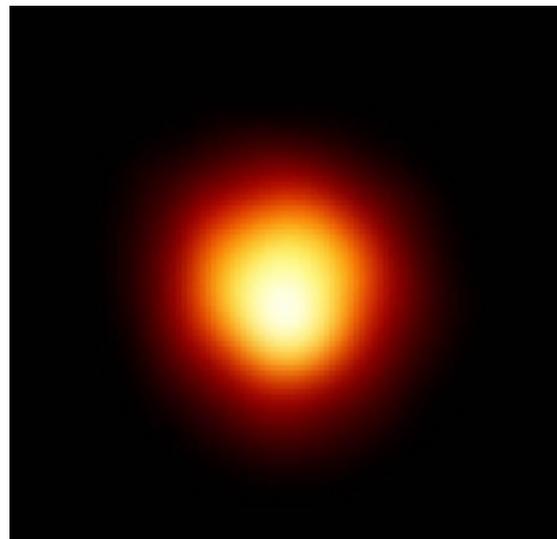


Fig6: Betelgeuse's image from HST

Software

We used the software Astroart to get the intensity on every pixel of the images.

Image processing methods

1. The center coordinates of the solar disk are determined in terms of the symmetry of light and geometry on the solar disk.

2. Finding out the two points which change largest near the limb, the center position of the two points

is the definition of the limb; The radius is the distance between disk center to the limb with the unit pixel.

3. From a simple geometry, it is easy to find $\cos\theta=(1-r/R)^{1/2}$, where R is the radius of the solar disk and r is the distance from the position we observed to the center with the unit pixel.

4. Assuming that the intensity distribution in the area near the disk center is random, and we average the values of the intensity in this square area to be the $I_{\lambda}(0,0)$.

Results

Coefficient for representation of limb darkening:

	wavelength	c_{λ}	b_{λ}	a_{λ}
1	white light(TP2415)	-0.015	0.8008	0.2197
2	red light	-0.3021	0.9832	0.332
3	white light(BBSO)	-0.1082±0.0188	0.7702±0.0267	0.2994±0.039
4	Ha (6563Å)	-0.3225±0.4368	0.8270±0.053	0.4850±0.0265
5	CaII-K (3933Å)	-0.1282±0.0965	0.6955±0.1431	0.4502±0.0461

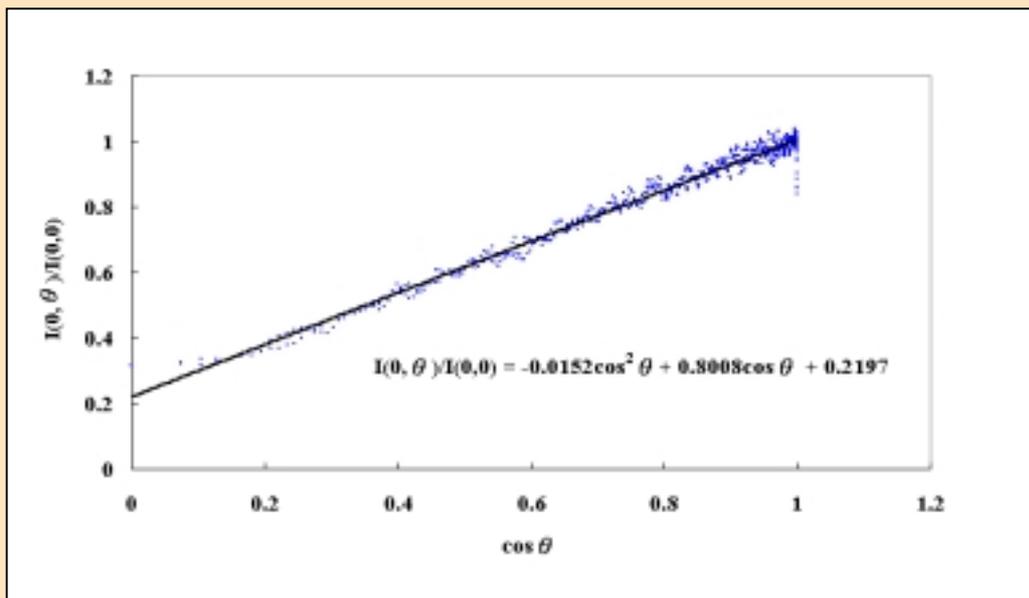


Fig7: white light (TP2415)

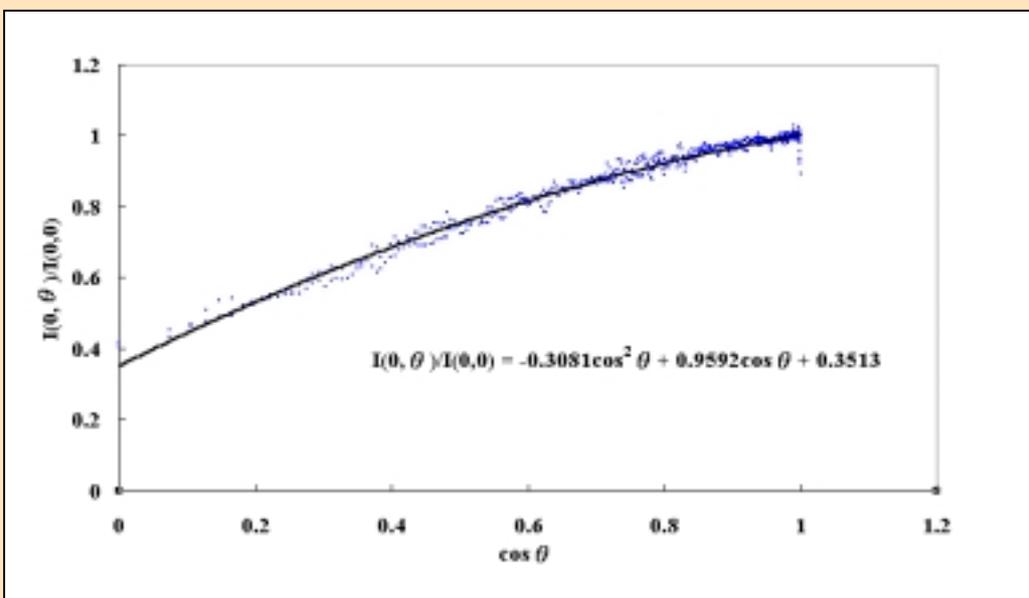


Fig8: red light

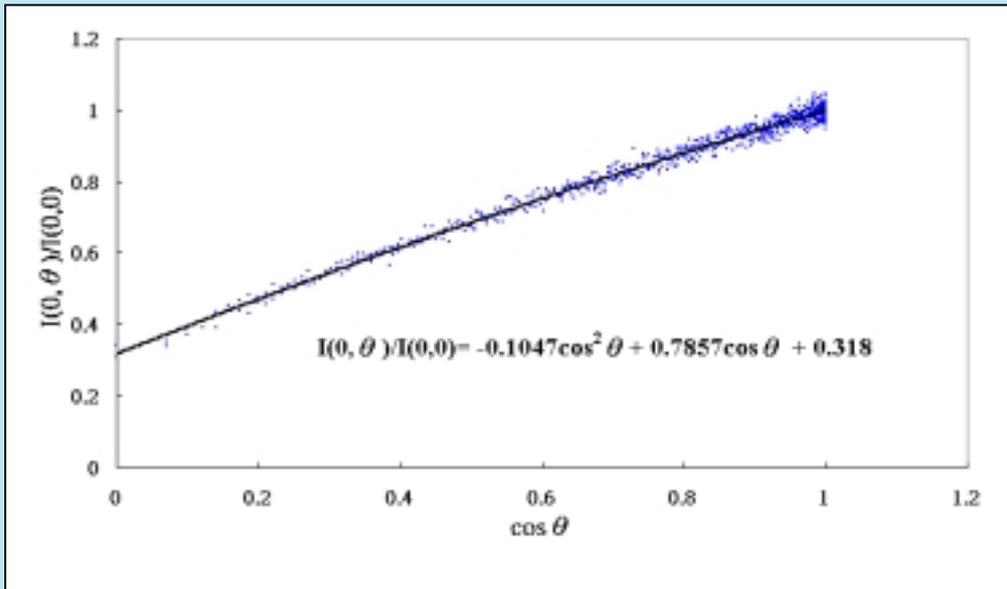


Fig9: white light
(BBSO)

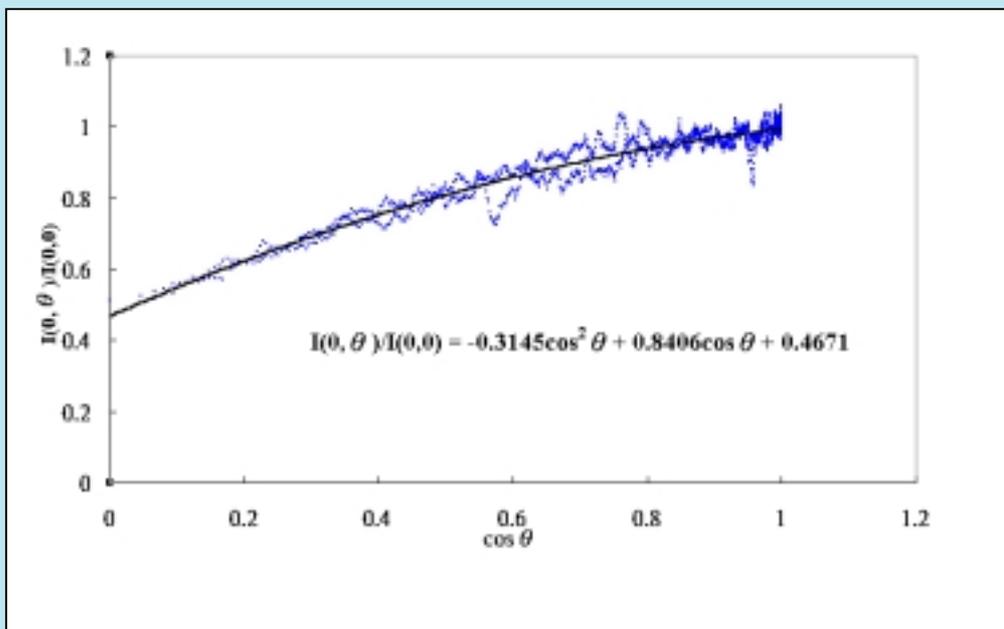


Fig10: $H\alpha$
(6563Å)

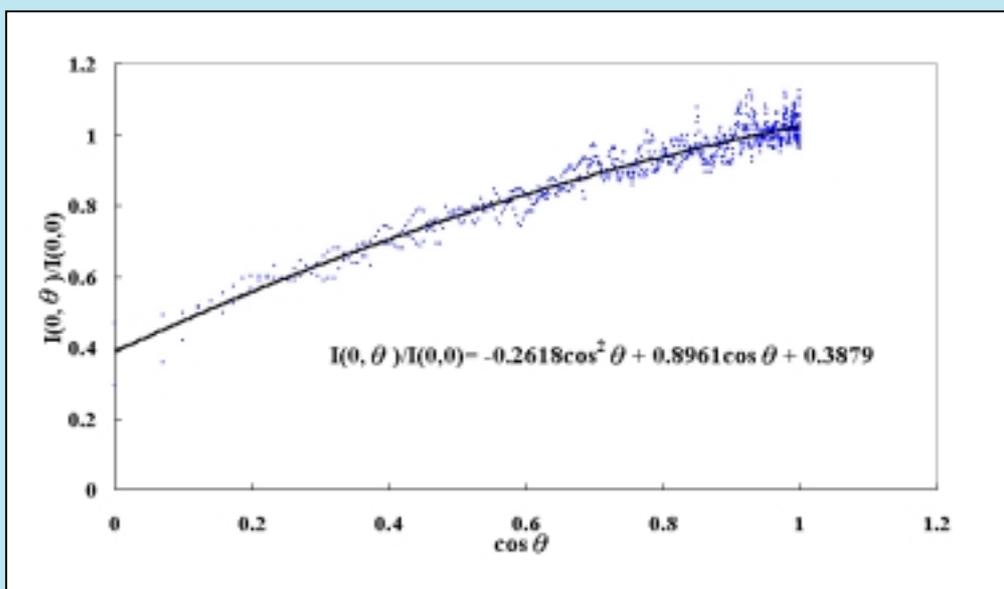


Fig11: Ca II-K
(3933Å)

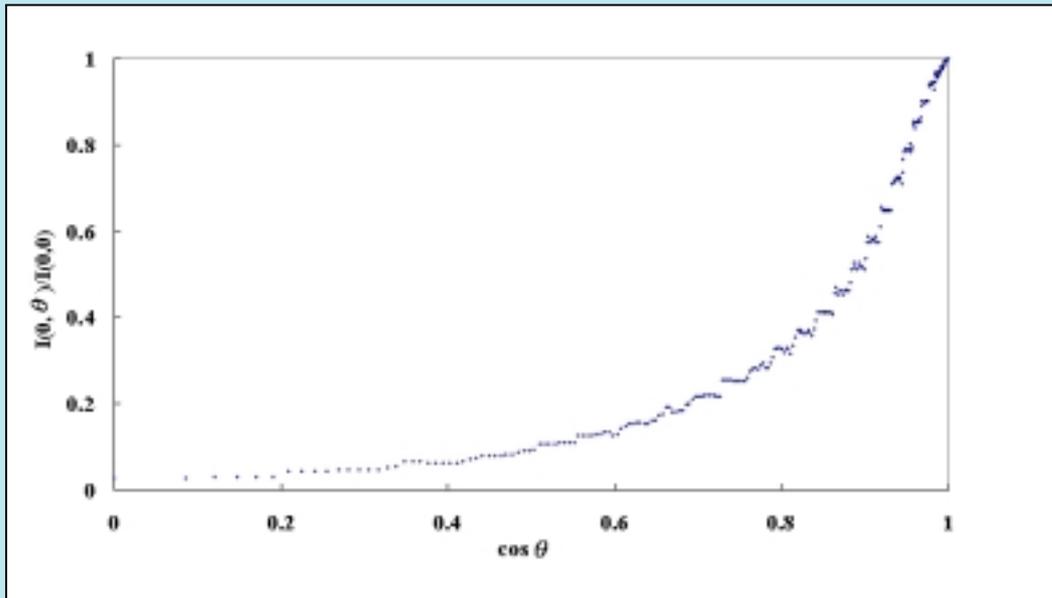


Fig12: Betelgeuse

Discussions

1. According to the definition that $\tau = \int k\rho ds$, where k is the absorption coefficient, ρ is the density and s is the path of light, then we know that the absorption coefficient is wavelength independent based on the hypothesis that the solar atmosphere is a gray atmosphere. When s is a fixed quantity, the τ_λ is proportional to the ρ and the temperature. From this, we know that the ρ and the temperature decreasing from the bottom of the solar atmosphere to the higher layer in photosphere.

2. The degree of absorption in red light is smaller than that in white light, so we can see the deeper layer of solar atmosphere in red light than the one in white light.

3. Discussing the character of the source functions of white light in photosphere and the H α and K line in chromosphere, the function of white light, which is approximate linearity, is different from the functions of H α and K line.

4. The source functions derived from daily images of H α and K line are quite different. The active regions on the solar disk influence it, but you cannot see the change in white light.

5. Analyzing the image of Betelgeuse, the logarithmic relation between S_λ and τ_λ indicated a different atmospheric structure.

Conclusions

1. The solar atmosphere based on the hypothesis that it is a gray atmosphere in white light in LTE, the temperature decreasing with the optical depth in a ratio of 0.7.

2. There is a great difference on structure in terms of two emissive strongly bands between chromosphere and photosphere.

3. Betelgeuse is an M type supergiant. It is quite different between its atmosphere and solar atmosphere.

References

1. A. Keith Pierce and Lawrence H. Aller, 1951, Ap.J., Vol. 114, p145.
2. A. Keith Pierce and Charles D. Slaughter, 1977, So.Ph., Vol. 51, p25.
3. Walter E. Mitchell, 1981, So.Ph., Vol. 69, p391.
4. Erika Böhm-Vitense, 1989, Introduction to Stellar Astrophysics Vol. 2, Cambridge University Press, U.K.

Acknowledgements

First, we would like to thank the advisor of this study, Prof. Hsieh-Hai Fu from Department of Earth Sciences, National Taiwan Normal University and Prof. Hsin-Heng Wu from Graduate Institute of Astronomy, National Central University. They help us to make the study more integrated. And thanks the research fellows from Taipei Astronomical Museum for spending so much time to help us taking the solar images. We are also appreciate the generosity of Big Bear Observatory to share the solar images on the internet.