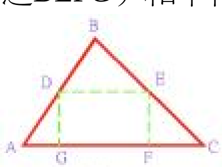
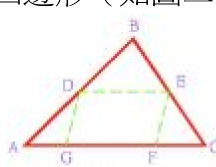
有趣的幾何變形魔術（正三角形分割翻轉變形正方形之迷思與演繹探討） 參加香港第三十三屆聯校科學展覽會  作者簡介 作 者:邱 冠 霖 就讀學校:陽明國中 指導老師:陳 秀 春 江 安 代 我出生於屏東農村，目前即將升上建國中學一年級；從小我父母就讓我適性發展，因此沒 有幫我補習，也不會硬要我去學甚麼，只是讓我閱讀非常非常多的課外書，使我培養了經常思考的習慣，也奠定了我在數學及自然科學方面的興趣。國小五年級時開始接觸電腦，更從此成 了我最大的興趣，也是我的最愛。這次科展從上網蒐集資料、研究分析、編輯打印、製作海報 和動態展示都在電腦上完成，也因歷年來的電腦表現，讓我獲得「中華民國第二屆傑出資訊青 少年」的榮譽！將來我的志向就是朝資訊科技方面發展。這次出國參展讓我學到許多，其中更 要感謝清華大學全任重教授的熱心指導，才能使這次的參展劃下完美的句點。 一、研究動機 國二上時，我曾逛到本題目之幾何網站，當時我就對這些奇特的幾何分割圖形感到很好 奇，直到國二下時正好在學幾何，才真正引發我一探究竟的興趣，於是，在師長的鼓勵及環 境的配合下，加上我對電腦又頗為擅長，我自 然就選了這個令我十分好奇而又有趣的題目。

二、研究目的 1. 探討正三角形分割翻轉變形正方形之原理與 分割方法。 2. 探討正三角形分割翻轉變形各種四邊形之可 行性與分割方法。 3. 逆推正方形分割翻轉變形各種三角形之可行 性與分割方法。 4. 以此研究建構類似幾何分割的研究模式及資 料，供後人應用。 三、研究設備 電腦軟體包括：Windows 98、IE 5.0、AutoCAD R14、PhotoImpact 5.0、Word 2000、Corel Draw 9、 PowerPoint 2000、GIF Animator 2.0、ACDSee 32。四、研究過程與方法 一、理論基礎 本研究主要為探討將一幾何圖形分割成四塊翻轉成另一幾何圖形。（因題目太大，故幾 何圖形只探討三角形及四邊形） 由於須將切割部份翻轉使之重合，所以必須在 三角形兩邊中點連線的架構下，建立矩形（如圖一之DEFG）和平行四邊形（如圖二之DEFG） 兩種基本分割模式。



圖一

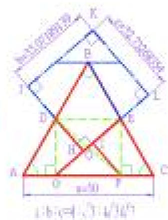


圖二

（一）矩形分割模式 用此模式可將三角形分割成矩形、梯形 、平行四邊形、菱形 等。 （二）平行四邊形分割模式 在此模式下，三角形也可以翻轉成矩形 、梯形、平行四邊形、菱形等。 有些四邊形只能在矩形分割模式下設計，如鶯形。有些四邊形必須要用平行四邊形分割 模式設計，如正三角形變正方形即是。 建立分割模型後，即可依欲分割之圖形特性去 設計分割頂點。 二、正三角形分割為正方形之迷思與驗證討論 圖三是由台灣師

大數學系的學生網站節錄下來，其中提到的正三角形切割成四塊然後重新組合為一正方形，因沒有說明其設計和分割方法，原以為屬矩形分割模式，但再深入探討 ：因為 線段JK＝HL＝HE＋EL＝GE＝DF，線段KL＝JH＝2DH＝DH＋IF（如圖四）。 因為直角△DHO和△IFO全等且斜邊大於另兩股，由此可看出，線段DF＞DH＋IF，故可得 知線段JK＞KL。但由於差距極小，因此外觀上四邊形HJKL（如圖四）極易讓人誤以為是正方 形，其實是矩形。


圖三


圖四

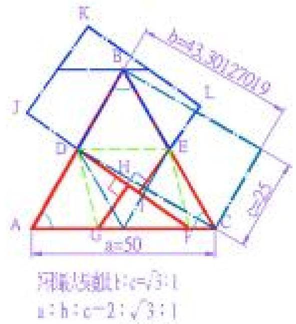
由此可知在矩形分割模式中，不可能翻轉重組成正方形；為了找出正確圖形，所以利用 其不論如何分割翻轉面積都一樣的特性為根據作出幾何作圖：如圖五所示。 1.由B點往下延伸高的二倍，得M點。 2.以M為圓心，正三角形邊長2為半徑畫圓，交 BM延長線於P。 3.取BP中點Q，以Q為圓心，QP長為半徑畫圓， 與過M之BP垂直線交於O。 4.由幾何內冪公式可知： 5.取MO中點得N，則MN＝$4\sqrt{3}$（正方形之邊 長）。 6.以E為圓心，MN為半徑畫圓，交底邊於G， 即得正確之正方形之邊長EG。 三、正三角形分割翻轉成四邊形之推演申論 正三角形分割成各種不同四邊形，就其特定邊長比值或極限值計算與探討。 （一）矩形 1.預期形狀性質：四角皆直角、兩鄰邊不等 長。


圖五

BMx MP＝$2\sqrt{3}$x 2＝MO^2。MO＝2（$\sqrt[4]{3}$） MN＝$\sqrt[4]{3}$

設 a=2，則 b（也就是平行四邊形的較長對角線 DC）
=$\sqrt{3}$（因 D 為中點，DC 為正三角形的高）。
又正三角形的面積與矩形相同，故 1/2x 2 x $\sqrt{3}$
=$\sqrt{3}$x c，∴ c=1，
則 a：b：c=2：$\sqrt{3}$：1。

2.基本分割模式：矩形、平行四邊形兩種皆 可。 3.分割頂點位置：基本分割形之兩對角頂點 在另一對角線上之垂足。 4.特定邊長比值或角度極限值之計算： （1）矩形分割模式特定邊長比值：（如 圖四） （2）平行四邊形模式極限值邊長比：（圖六） 將平行四邊形的兩對角線的差值拉至最大（也就是平行四邊形的一邊與正三角形重合），就 可得到長寬比最大的矩形。 （二）菱形（圖七） 1.預期形狀性質：四邊等長、相鄰兩角不 相等。 2.基本分割模式：矩形、



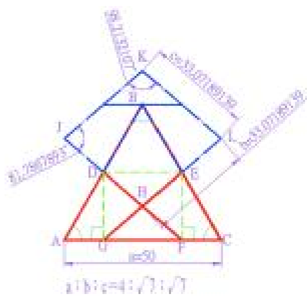
平行四邊形兩種 皆可。 圖六 b

B＝HE+IE＝HE+HG＝GE＝（$2^2+\sqrt{3}^2$）$^{1/2}$＝$\sqrt{7}$，c＝2DH。
△DEG 面積＝1/2（DH× GE）＝1/2（DH× $\sqrt{7}$）
又△DEG 面積＝1/4× △ABC 面積＝1/4× 1/2（AC× △ABC 的高 h）
＝1/8（8$\sqrt{3}$）＝$\sqrt{3}$
即 1/2（DH× $\sqrt{7}$）＝$\sqrt{3}$， ∴DH＝2（$\sqrt{3}/\sqrt{7}$）。
故 c＝2DH＝4（$\sqrt{3}/\sqrt{7}$）
故 a：b：c＝4：$\sqrt{7}$：4（$\sqrt{3}/\sqrt{7}$）

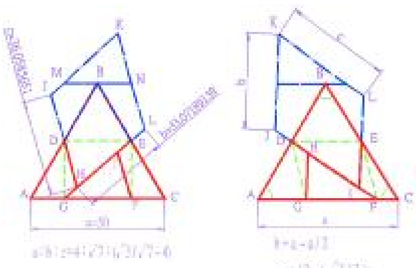
3.分割頂點位置：在矩形DEFG取對角線交 點、平行四邊形爲特定點。 4.特定邊長比值或角度極限值之計算：（1）矩形分割模式特定邊長比值： 若a＝4，則 （2）平行四邊形模式邊長範圍與邊長極限值 比：（圖八） 平行四邊形模式中，點F的範圍從E在AC上的 垂足到正三角形頂點C，故由前面推得的數值得知：菱形邊長b、c的大小範圍（即DF之值） 爲 。 且由上面所說的範圍中，可知：當DF爲最大值時（即F點與C重疊），可得到對角線長比最大的菱形。在這種情形下，DF即爲正△ABC的高$\sqrt{3}$（設a＝2時），故得到對角線長比最大的菱

DF＝（2^2＋（$\sqrt{3}$）^{2}）$^{1/2}$＝$\sqrt{7}$＝JH＝HL

形與正三角形的邊長比爲 a：b：c＝2 故 a：b：c＝4：$\sqrt{7}$：$\sqrt{7}$ ：$\sqrt{3}$：$\sqrt{3}$。



a（$\sqrt{7}$）/4～ a（$\sqrt{3}$）/2 圖七 （三）平行四邊形（圖九） 1.預期形狀性質：兩雙對角相等、兩雙對 邊等長。 2.基本分割模式：矩形、平行四邊形。 3.分割頂點位置：對角線交點、特定點。 4.特定邊長比值或角度極限值之計算： 平行四邊形分割模式的邊長範圍及特定邊 長比值： 將平行四邊形DEFG的F移至C時，且H移至D、I移至F（即C），可得邊長最大的平行 四邊形。此時，b與a等長，c正好爲正三角形的高，故a：b：c＝2：2：$\sqrt{3}$ （四）梯形 1.預期形狀性質：一雙對邊平行且不等長。 2.基本分割模式：矩形、平行四邊形。 3.分割頂點位置：其中一對角線上除中點外 之任意點。 4.特定邊長比值或角度極限值之計算： （1）矩形分割模式特定邊長比值：（圖十） 設梯形上底爲b、下底爲c，則b＋c ＝ （HE＋GH）×2＝2GE。 設三角形邊長a＝2時， DE＝1，DG＝ （$\sqrt{3}$）/2， 故GE＝（$\sqrt{7}$）/2 則a：（b＋c）＝2：$\sqrt{7}$。 而梯形的高h則可用等積的方式來算它 的面積：

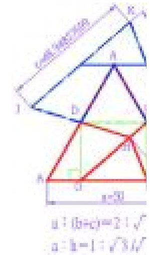


圖九

圖八

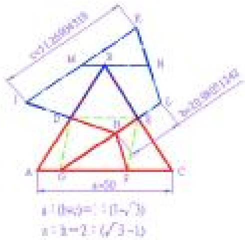
（b＋c）×h/2＝$\sqrt{3}$ 即GE×h＝$\sqrt{3}$， ∴（$\sqrt{7}$）×h/2＝$\sqrt{3}$ 則h＝（2$\sqrt{3}$）/$\sqrt{7}$，故a：h＝1： $\sqrt{3}/\sqrt{7}$

四邊形分割模式的邊長範圍及特 定邊長比值：（圖十一） 由（1）知b＋c＝2GE 當G在A上時，GI
的高； 因此a：（b＋c）＝1：$\sqrt{3}$ 當F在C上時，GE爲正三角形兩邊中點 連線（邊長的一半）； 因
c）＝1：1。 而梯形的高h爲： 當G在A上時，B點與M重合，即h＝BE ＝正三角形邊長的一半， 故
當F在C上時，G點在AC中點上，GE就 是正三角形兩邊中點連線，即h＝正三 角形高。 故a：h＝2



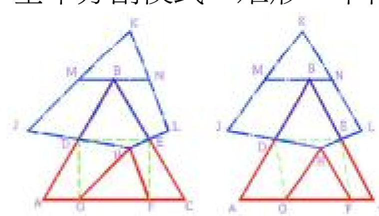
上的推論，可整理出： a：（b＋c）＝1：（1～$\sqrt{3}$）及a：h ＝2：（$\sqrt{3}$～1）等結果。

圖十



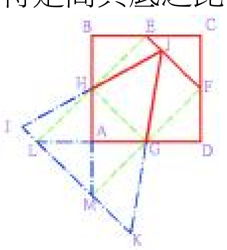
圖十一

（五）任意四邊形（圖十二） 1. 預期形狀性質：四角不相等、四邊不等長且 不
本分割模式：矩形、平行四邊形。 3. 分割頂點位置：在以上所討論的特定點外的 其他任意點。 E
割翻轉成三角形之逆推 既然可以設計正三角形分割成各種四邊形，當然也可以逆推正方形分割翻
角 形。正方形分割成三角形分割點只有一個（J），分割模式也和前述之三角形變成四邊形 一樣
（EFGH）。如圖十三。 本章節探討的便是正方形分割設計翻轉各種不 同三角形，及其特定邊長
限值之計算如下： （一）等腰三角形 1.預期形狀性質：兩邊等長。 2.基本分割模式：矩形、平行



特定高與底之比值與極限值： （1）矩形基本分割模式：（圖十四）

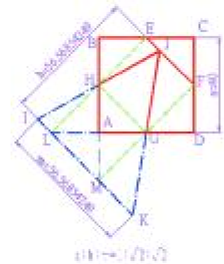
圖十二



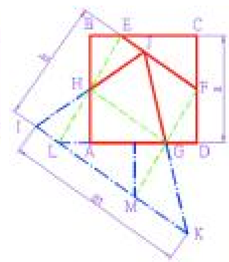
圖十三

（三）不等三角形（圖十八、十九） 1.預期形狀性質：三邊不等，三角亦不等。 2.基本分割模式
與底之比值與極限值：同前（一）等腰 三角形之敘述。 五、結論 1.正三角形分割爲正方形的底邊
正三角形邊長爲4下，算出 精確的比值爲0.981969533：2：1.018030467 ，與正三角形在矩形分割模
線段比1：2：1不同。 2.正三角形分割翻轉成正方形理論上可行，也 可用幾何作圖方式求出4$\sqrt{3}$的
正三角形可變形成各種不同四邊形，其限制 條件導致翻轉四邊形出現特定邊長比值或角 度特定值
長， b、c各爲四邊形兩邊長，h爲四邊形的高） （1）矩形：在矩形分割模式下之特定邊長比 值 a

在平行四邊形模式下之極限值邊長比 a：b：c＝2：$\sqrt{3}$：1。

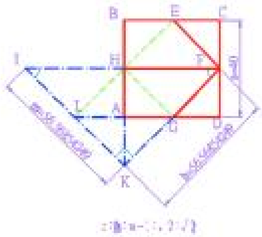


圖十八



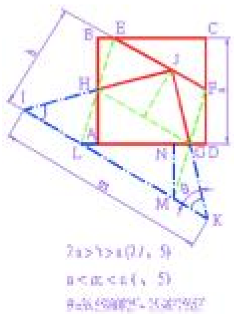
圖十九

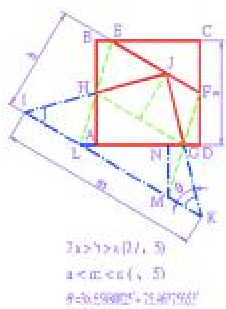
4$\sqrt{3}$



圖十七

設正方形邊長爲a，則m＝2HG＝□ABCD的 對角線長＝a$\sqrt{2}$；同理，h＝a$\sqrt{2}$ i
腰△IJK 之底與高等長。（2）平行四邊形基本分割模式：（如圖十五） 當E在BC線上移動，B、
（$\sqrt{5}$）a； 當E、C點重合時，h＝2a＝2m。 故範圍爲2a＞h＞（2/$\sqrt{5}$）a， a＜m＜a（$\sqrt{5}$）。（
七） 1.預期形狀性質：一角直角。 2.基本分割模式：矩形、平行四邊形。 3.特定高與底之比值與





之敘述。 圖十四 圖十五

（2）菱形：在矩形分割模式下，特定邊長比 值a：b：c＝4：$\sqrt{7}$：$\sqrt{7}$。在平行四邊形分割模式下，邊長範圍爲a（$\sqrt{7}$）/4～ a（$\sqrt{3}$）/2；邊長最大極限值比a：b：c ＝ 2：$\sqrt{3}$：$\sqrt{3}$。（3）平行四邊形：在矩形分割模式下，特定 邊長比值 a：b：c＝4：$\sqrt{7}$：（$\sqrt{3}$/ $\sqrt{7}$～4）。在平行四邊形分割模式下， 邊長範圍爲b = a～a/2，c = a/2～a（$\sqrt{3}$）/2；邊長最大極限值比a：b：c＝ 2：2：$\sqrt{3}$。（4）梯形：在矩形分割模式下特定邊長比值 a：（b＋c）＝2：$\sqrt{7}$； a：h＝1：（$\sqrt{3}$/$\sqrt{7}$）。 在平行四邊形分割模式下的邊長範圍 a：（b＋c）＝1：（1～$\sqrt{3}$）及a：h＝ 2：（$\sqrt{3}$～1） 4.正方形亦可設計分割翻轉變形成各種不同三 角形。其限制條件導致翻轉圖形出現特定高 與底之比值或角度極限值。（其中，a爲正方 形邊長、m爲三角形底邊、h爲三角形的高）（1） 在矩形分割模式下的邊長比a：m：h＝ 1：$\sqrt{2}$：$\sqrt{2}$。（即底＝高）（2） 在平行四邊形分割模式下的範圍：2a＞ h＞a（2/$\sqrt{5}$）；a＜m＜a（$\sqrt{5}$） 5.在相同推導原理下，任意三角形皆可變形成 各種不同四邊形，也可變形成任一三角形； 反之，任一四邊形亦皆可變形成任一三角形 或四邊形， 6.本研究成果可以：（1）應用爲幾何的教材；（2）製成極富教育意義之幾何教助模型；（3） 製成益智玩具；（4）可實物應用製成拼盤或 桌子，三角桌供三人坐，四方桌供四人坐。 六、參考資料 1. 清大數學系全任重教授的幾何網站Geomet- ric Construction，http://www.math. nthu.edu.tw/gc/chuan/gc.html 2. 師大數學系幾何作圖首頁，http://www. math.nthu.edu.tw/gc/chuan/test.html； 分割問題，http://www.math.nthu.edu.tw/

gc/chuan/dissect/dissect.html 3. The Puzzle World of Polyhedral Dissec- tions By Stewart T. Coffin，http:// www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/ chap01e.htm 4. Dissection，http://www.treasure -troves.com/math/Dissection.html 5. Haberdasher's Problem，http://www. treasure-troves.com/math /HaberdashersProblem.html 6. Congruent Transformation，http://www. ies.co.jp/math/java/contra/contra.html 7. Dissections de polygones，http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/ Panoplie/Dissect/dudeney.htm 8. Triangle - Carre (Gif anime Aller- retour)，http://www-cabri.imag.fr/ abracadabri/Coniques/Panoplie/Dis sect/ TrC1Gif2.htm 9. 趣味幾何，http://www.tacocity.com.tw/ math01/等積變形.html 10. Specials Puzzle Page，http://www. ultranet.com/~puzzles/specials.html 11. Triangle to Square討論區 http://forum. swarthmore.edu/~sarah/HTMLthreads/ articletocs/triangle.square.html

---

12. 蔣聲著，〝幾何變換〞，凡異出版社， p47~60，1994.3 13. 談詳柏、張景中編，〝數學遊戲大觀〞， 謙謙出版社，p88~94，1991.8 14. 張潤青等編，〝數學萬花筒〞，謙謙出版 社，p47、p142，1990.12 15. 斯坦因豪斯著、裘光明譯，〝數學萬花 鏡〞，上海教育出版社，1981 16. 林龍震著，AutoCAD R14中文版使用手冊， 松崗電腦圖書公司，1997. 七、評語 手法自然，未經雕琢，顯現孩子具有非凡的數學潛力。在使用電腦軟體的能力上有很特 殊的表現。 活潑、親合力強，對所作內容可與人做有效溝通。作品本身爲趣味數學的經典之作的延 伸，這些特質最適合香港高校聯展的特性及今年主題。