整數的次方分解鏈 參加新加坡第二屆亞太青年科學節

作者簡介 作 者:黎 冠 成 就讀學校: 高雄高中 指導老師:劉 宏 泰 蘇 源 森 我，黎冠成，出生於高雄，也在高雄長大。從小就喜愛思考新奇的事物。於民國八十六 年進入高雄中學數學資優班就讀。從此奠定了我對科學方面的興趣與研究能力。 非常興奮能在此次激烈的國家代表選拔中，脫穎而出。除了對自已努力多時的成果受到 肯定而高興外，我更要感謝永遠支持我的父母以及師長們，這使我了解到：科學研究是一條漫 長的路，沒有捷徑，更不像平常的考試般單純，它需要的是更多的耐心與毅力。願藉此與大家 共勉。 一、研究動

$1=1$

$2=-1^2-2^2-3^2+4^2$

$3=-1^2+2^2$

$4=-1^2-2^2+3^2$

$5=1^2+2^2$

機與目的 上課時，老師提出一個問題：觀察 $6=1^2-2^2+3^2$ 證明：對於任合正整數ｎ，ｎ均可表為下列之形式： 引起了我研究此問題的興趣，並考慮將二次推廣為ｒ

$n=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^2+\ldots+\varepsilon_m m^2$，

次。 其中 $m \in N$，$\varepsilon_i = 1 \vee -1$， $i=1,2,\ldots m$

二、研究過程與方法 定義：若一個正整數ｎ可表為： 其中 ，稱為ｎ之 ｋ次正基本分解鏈。 一、一次及二次基本分解鏈 考慮數列（2－1），(3－2），(4－3）・・・得第一階差數列1,1,1・・・ 性質１－１： 定理１－Ａ： 之一次基分解鏈存在 接著在參照性質１－１的方法，試過幾個數字之後，發現皆可找出其基本分解鏈（表法 不唯一），引入階差觀念，在實際的寫出前幾項後，順利的發現下述關係。 如果我們取第一階差數列（4－1），(9－4），(16－9）・・・得等差數列3,5,7・・・。但 是這樣一種關係對我們所想要的最終目標而言是不必要的，因為其前後項均含有相同的一個 項，但在鏈中每一個都只有一項，所以我們必須把1,2和3,4拆開・・・，就等於在3,5,7,9 這個等差數列之間，將偶數項略去，成為3,7,11,15・・・這樣一個新的等差數列，將之還原 就得到 ...。由以上的結果，顯然用後項減前項為公差的概念，就 可以寫出[(x+3)2-(x+2)2]-[(x+1)2-x2]= 4 恒等式， 展開後得 (x+3)2-(x+2)2-(x+1)2+x2=4，其證明如下， 性質１－２ 將性質１－２推廣並應用，不難發現 $n=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_i k^r$

$r \in N$，$\varepsilon_i = 1 \vee -1$， $i=1,2,\ldots m$

x 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1 1 1 1 1 1 1 1

$\forall n \in N \quad (n+1)-n=1$ $\forall n \in N$ n

x 1 2 3 4 5 6 7 8 9

x^2 1 4 9 16 25 36 49 64 81

3 5 7 9 11 13 15 17

2 2 2 2 2 2 2

$(2^2-1^2),(4^2-3^2),(6^2-5^2),(8^2-7^2)$ $[(x+3)^2-(x+2)^2]-[(x+1)^2-x^2]=4$

$(x+3)^2-(x+2)^2-(x+1)^2+x^2=4$ $\forall k \in N$，$(k+3)^2-(k+2)^2-(k+1)^2+k^2=4$ 性質１－３： ,若n的二次基本分解鏈存在,則n+4的二次基本分解鏈也存在。 證明：若 則 性質１－４ ：n=1,2,3,4之基本分解鏈存在。 證明： 於是我們利用性質１－３及來證明其他分 解鏈的存在證明： (1) 若n=4k+1,則 (2) 若n=4k+2,則 (3) 若n=4k+3,則 (4) 若n=4k+4,則 定理１－Ｂ： ，n的二次基本分解鏈存在 二、三次基本分解鏈 仿照二次方階差的形態來測試三次方階差，得到以下的結果： 於是就可以得到 展開後得 性質２－１： 於是，同性質１－３，根據性質２－１得到下面性質２－２

$1=1^2$

$2=-1^2-2^2-3^2+4^2$

$3=-1^2+2^2$

$4=1^2-2^2-3^2+4^2$

$n+4=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^2+\ldots+\varepsilon_m m^2$

$+(m+1)^2-(m+2)^2-(m+3)^2+(m+4)^2$

$\forall n\in N \quad n=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\varepsilon_3 3^2+\ldots+\varepsilon_m m^2,\ m\in N$

$n=1^2+\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j+1}\left[(2j)^2-(2j+1)^2\right]$

$n=-1^2-2^2-3^2+4^2+\sum_{j=2}^{2k+1}(-1)^j\left[(2j+1)^2-(2j+2)^2\right]$

$n=-1^2+2^2+\sum_{j=1}^{2k}(-1)^{j+1}\left[(2j+1)^2-(2j+2)^2\right]$

$n=-1^2-2^2+3^2+\sum_{j=2}^{2k+1}(-1)^{j+1}\left[(2j)^2-(2j+1)^2\right]$

$\forall n\in N$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 …
1 8 27 64 125 216 343 512 729 …
7 19 37 61 91 127 169 217
12 18 24 30 36 42 48
6 6 6 6 6 6

$[[(x+7)^3-(x+6)^3]-[(x+5)^3-(x+4)^3]]-[[(x+3)^3-(x+2)^3]-[(x+1)^3-x^3]]=48$

$-x^3+(x+1)^3+(x+2)^3-(x+3)^3+(x+4)^3-(x+5)^3-(x+6)^3+(x+7)^3=48$

$\forall k\in N,\ (k+7)^3-(k+6)^3-(k+5)^3+(k+4)^3$

$-(k+3)^3+(k+2)^3+(k+1)^3-k^3=48$

性質２－２： 若n的三次基本分解鏈存在，則n+48的三次基本分解鏈也存在 此時發現要一一找出1～47的三次本分解鏈，如果使用純人工的手法來進行，似乎並不 可行，且容易有所遺漏，所以便抱著姑且一試的心情，Ｃ語言寫了一個電腦程式來測試， 結果順利的排出1～47的三次基本分解鏈。 性質２－３：n=1,2,3,...,47之基本解鏈存在 由性質２－３，並仿性質１－４的方式，可進而得到定理二 定理二： , n的三次基本分解鏈存在 三次基本分解鏈 首先要找出如性質１－２、２－１的恆等式， 我們從二次階差數列著手觀察，發現其數字由小大的正負號排列"＋－－＋" 非常規律,再看三次階差數列數字由小到的大正負號排列"－＋＋－＋－－＋"也是秘的規律性,所以 猜測此數列的由小到大正負號排列有以下的關係。 第k階的排列爲：第k-1階的排列全部變號再 接上原第k-1階的排列 如： 一次方：－＋ 二次方：＋－－＋ 三次方：－＋＋－＋－－＋ 四次方：＋－－＋＋－ －＋＋－＋－－＋ 我們從二次與三次的結果猜測四次方也存在同樣一個恆等式。實際代入任意16個連數字去 運算，果真如我們所料，其值恆爲一常數 $\forall n\in N$ $\forall n\in N$

$$\begin{cases} b_2=4 \\ b_3=48=4\cdot 3\cdot 4=2^2\cdot 3\cdot b_2 \\ b_4=1536=8\cdot 4\cdot 48=2^3\cdot 4\cdot b_3 \\ b_5=122880=16\cdot 5\cdot 1536=2^4\cdot 5\cdot b_4 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

性質３－１：$b_k=2^{\frac{k(k-1)}{2}}\cdot k!$

（B_x^k 表級數 $\sum_{i=1}^{2^k}\varepsilon_i x_i^{\ k}$，$b_k$ 表級數 B_x^k 之值 ） $b_k=2^{k-1}\cdot k\cdot b_{k-1}$

$b_2=4=(2^2)$，$b_3=48=(2^4)\times 3$，$b_4=1536=(2^9)\times 3$

$\frac{48}{4}=12=2^2\times 3$；$\frac{1536}{48}=32=2^5=2^3\times 4$，

1536。 在此我們將所猜測列規則定義一個新的符 號: 以新符號表示 可知 b2=4, b3=48, b4=1536 其次經由觀察發現4、48、1536這些數字有相當的規律性。於是，著手將之因式分解： 我們發覺ｂ k 似乎存在著以下的神祕關係: 所以可以觀察得有

B_x^k 表級數 $\sum_{i=1}^{2^k}\varepsilon_i x_i^{\ k}$ 之展開式，b_k 表級數 B_x^k 之值

其中 $x_1=1$，$x_i=x_1+(i-1)$

$k\geq 2 \quad \varepsilon_i=(-1)^i\prod_{j=1}^{k-1}(-1)^{\left[\frac{i}{2^j}+1\right]}$

令 $cB_{x_1}^k$ 表 c 個連續的 $B_{x_1}^k$ 級數 其中 c 爲常數

（ε_i 表示 B_x^k 中元素的性質符號，排列規則如下：

$k=t$ 時 B_x^t 級數中之數的值號爲 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{2^t-1},\varepsilon_{2^t}$

$k=t+1$ 時 B_x^{t+1} 級數中之數的值號爲

上述一連串的觀察與猜測，我們歸納爲性質３－１

$-\varepsilon_1,-\varepsilon_2,-\varepsilon_3,\cdots,-\varepsilon_{2^t-1},-\varepsilon_{2^t},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{2^t-1},\varepsilon_{2^t}$

已知: 性質３－２：若 ，使n的k次基本分解鏈存在，則n+bn的基本分解鏈亦存在， 綜合以上所得定理，我們找出了一項最簡單的方法： 將自然數分類成 的形式， 其中 當s = 0時,我們只要將t個連續的基本串列串接在一起，即可排出一分解鏈。 當s = 1至bk-1時，只要能夠找出s的基本分解鏈，（爲了說明方便，以下稱 爲基本串列）再串接t個連續的基本串列，即可找出n的分解鏈。 例如：k=2時，b2=4 上述方法套用在2次方或3次方的證明時也許是 輕鬆愉快的，但在求高

例如：k=3時， 如果將其改寫餘的形式，則可以得： 性質３：這也就是說，我們能夠從個存在分解鏈的數n 下手，求模bk所得之數n’亦存在一基本鏈。現在我們所要做的，就是出模b k爲1,2,3,....,bk-1的基本分鏈。 觀察基本串列 中各個數們發覺若改變其中一項元素 的負號,我們可以得到一串新的鏈其值爲b’當然在選取數X p時簡單的就是取模bk爲１的數了

次方的分解鏈時，我們發現要一一找尋1～b k-1的分解鏈無疑是一件十分吃力、費時的事。即使利用電腦程式硬去 求解，仍然無法達到我們一般化的要求。回到原點，於是只好從基本串列 下手。現在回頭過來觀察性質３－２，我們發現可以將其重新寫成下列形式： 若n的基本分解鏈存在 則n+t×b $n=s+t\cdot b_k$ k的基本分解鏈亦存在，其中 當t小於零時，我們只要將加在n的分解鏈尾巴 的基本串列變

k = t 時 B_x^t 級數中之數的性值符號爲 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{2^t-1}, \varepsilon_{2^t}$

k = t + 1 時 B_x^{t+1} 級數中之數的値號爲

號即可 $-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, -\varepsilon_3 \cdots -\varepsilon_{2^t-1}, -\varepsilon_{2^t}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_{2^t-1}, \varepsilon_{2^t}$

$\exists n \in N$ $s \in R_k, R_k = \{0,1,2,..,b_k-1\}$ B_x^k

11 = 3 + 4 × 2 = (-1^2+2^2) + ($3^2-4^2-5^2+6^2$) + ($7^2-8^2-9^2+10^2$) B_x^k

$\forall n \in N$ t∈Z

$b'_k \equiv -2\ \varepsilon_p$ （mod b_k）

$\Rightarrow B_3^2+2\cdot 5^2 = 3^2 - 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 \equiv 2$（mod b_2）

p

例如：$B_2^2 = 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2 = 4 \equiv 0$（mod b_2），其中 $5 \equiv 1$（mod b_2）

$\Rightarrow B_2^2 - 2\cdot 5^2 = 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 \equiv -2$（mod b_2）

$\Rightarrow -B_2^2 + 2\cdot 5^2 = -2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \equiv 2$（mod b_2）

即Xp≡1(mod bk)接下來,改變 所選取之Xp的正負號,即可得 (1) (2) 當 a =1時,bk ≡−2（mo bk）則需要再經過適當的變號 可造出模bk爲 2的基本串列了

$100 = 1^3+2^3+3^3+4^3$

則 $52 = 100 - 48 = 1^3+2^3+3^3+4^3-(-5^3+6^3+7^3-8^3+9^3-10^3$

∀n∈N 若 n 的基本分解鏈存在，且 n≡n'（mo

則 n'基本分解鏈亦存在

若 $x_p \equiv n$ （mod b_k）

則 $x_p^k \equiv n^k$ （mod b_k）

$\Rightarrow \varepsilon_p x_p^k \equiv \varepsilon_p n^k$ （mod b_k） （其中 $\varepsilon_p = \pm 1$ 爲

$\Rightarrow b'_k = b_k - 2\ a_p x_p^k$

$\equiv -2\varepsilon_p x_p^k$ （mod b_k）

$\equiv -2\varepsilon_p n^k$ （mod b_k）

B_x^k x_p^k k 即 $b'_k \equiv -2\varepsilon_p n^k$ （mod b_k）

［ 註：後文爲方便表達 $-B_2^2 + 2\cdot 5^2 = -2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$ 將給予定義新符號 $\overline{B_2^2}$ ］不過，並非所有的基本串列都可以找到一數模 b2爲1。事實上，當b2 =4時,任一串列爲連續四數,所以其中必存在一數模b2爲1，但b3=48時，任一串列爲連續8數，所以不一定存在模b3爲1的數，因此我們必須連結6個連續的基 本串列，使之爲連續的48個數，而必存在一數模48爲1，所以歸納下結果：一項基本串鏈的 長度爲 ，但 ，也就是說每 個連續基本串列必出現一個模bk爲1的數。 例如：取R3中的數3， 3 = 1+ 2・1 由性質３－３可以造出3的基本分解鏈 經過這個步驟的構想，我們似乎已經找到通往 解答的道路了，接下來所要做的，便是給出一般化的證明。爲了方便表示類似的串列，我們 再定義下列的符號： 符號 若級數中不存在模bk爲1之項 則 $\frac{b_k}{2^k}$ $b_k = \prod_{i=1}^{k-1} 2^i \bullet k! \geq 2^k$ 2^k $1^3 + (\frac{48}{8}-1)B_2^3 - (B_{42}^3 - 2\cdot 49^3) = 1^3 - 2^3 + 3^3 + 4^3 - 5^3 + 6^3 - 7^3 - 8^3 + 9^3 \cdots - (-42^3 + 43^3 + 44^3 - 45^3 + 46^3 - 47^3 - 48^3 - 49^3) \equiv 3$（mod b_3）

$\overline{B_x^k}$

當級數 B_x^k 中存在一項 x_i 使得 $x_i \equiv 1$ （mod b_k）

$\overline{B_{x_i}^k} = -\varepsilon_i(B_{x_i}^k - 2\varepsilon_i x_i^k)$

則 $\overline{B_{x_i}^k} \equiv 2$ （mod b_k）

證明：(1) $a_i = 1$，$\overline{B_{x_i}^k} = -1\cdot(B_{x_i}^k - 2x_i^k)$

$\equiv -1\cdot(B_{x_i}^k - 2)$

$\equiv 2$ （mod b_k）

(2) $a_i = -1$，$\overline{B_{x_i}^k} \equiv (B_{x_i}^k + 2)$

$\equiv 2$ （mod b_k）

$\overline{B_x^k} = B_x^k$ $\forall r \in R_k$，$R_k = \{0,1,2,3,\ldots,b_k-1\}$ 例如: 現在我們可以利用先前方法，將Rk={0,1,2,3,....bk-1中的元素分類成2 t , 2t+1。直觀上似乎可以找出t個模bk爲2的串列，再在其中塡入 個基本串列，使其成爲一個連續的分解鏈。組合出模bk爲2t或2t+1的基本分解鏈。 以下是一般化的證明： 1. 若r = 2 t 由性質３－３知 故r存在一基本分解鏈 2. 若r = 2t + 1 由性質３－３知 故r存在一基本分解鏈 由1. 2.我們可以得到 性質３－４： ，r的基本分解鏈存在 結合性質３－２、性質３－４，則又可得

(1) $B_5^2 = 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 = 4 \equiv 0$ （mod b_2）

$\Rightarrow -2\cdot 5^2 + B_5^2 \equiv -2$ （mod b_2）

$\Rightarrow 2\cdot 5^2 - B_5^2 \equiv 2$ （mod b_2）

$\Rightarrow \overline{B_5^2} = 2\cdot 5^2 - B_5^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 - 8^2 \equiv 2$ （mod b_2）

(2) $\overline{B_2^3} = -2^3 + 3^3 + 4^3 - 5^3 + 6^3 - 7^3 - 8^3 + 9^3 \equiv 0$ （mod b_3） $\frac{b_k}{2^k} - 1$ $\forall r \in R_k$ ， $R_k = \{0,1,2,3,\ldots, b_k - 1\}$

$\overline{B_1^k}+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_{2^k+1}+\overline{B^k_{b_k+1}}+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_{b_k+2^k+1}+\ldots+\overline{B^k_{(t-1)b_k+1}}$
$\equiv 2+0+2+0+2+\cdots+2 \pmod{b_k}$ （其中有 t 個 $\overline{B^k_n}$ 有 t-1 個 $(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_n$）
$\equiv 2t \pmod{b_k}$
$\equiv r \pmod{b_k}$

$1^k+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_2+\overline{B^k_{2+b_k-2^k}}+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_{2+b_k}+\overline{B^k_{2+2b_k-2^k}}+\ldots+\overline{B^k_{2+tb_k-2^k}}$
$\equiv 1+0+2+0+2+0+2+\cdots+2 \pmod{b_k}$
$\equiv 1+2t \pmod{b_k}$
$\equiv r \pmod{b_k}$

定理三： ，n的k次基本分解鏈存在 例如 : (1) k = 2，餘數爲3時， (2) k = 3，餘數爲7時，四、分解鏈的推展 在成功證明任意自然數的k次基本分解鏈 存在之後，我們繼續研究推廣。觀察基本分解鏈中的連續整數1、2、3…，其實就是一個首 項爲1，公差爲1的等差數列。我們很直覺地猜測：是否改變其首項，或改變其公差，或甚至 同時改變時，對任意自然數同樣存在基本分解鏈呢？ 在原始的命題當中，我們根據了三個重要線 索： 性質３－１： ；性質３－２：n的k次基本分解鏈存在，則 n + bk 的基本分解鏈亦存在；以及定理三： ，r的基本分解鏈存在。 只要上述三項定理在首項或公差改變時都能成 立，那麼基本分解鏈就存在了。 定義 v(n,k,a,d)表一値爲n，a爲首項，d爲公差的 k次分解鏈， 其中 (1)先討論改變首項的情形 很明顯的，單純改變首項對性質３－１、３－ ２並無影響。只要重新

$B_2^2 = 2^2-3^2-4^2+5^2 = 4$

證明定理三即可： 令首項爲a，則 $\forall n,k \in N$ $1^2+\overline{B_2^2}=1^2+(-2^2+3^2+4^2+5^2)=47 \equiv 3 \pmod{b_2}$

$1^2+5B_2^3+\overline{B_{42}^3}+5B_{50}^3+\overline{B_{90}^3}+5B_{98}^3+\overline{B_{138}^3} \equiv 7 \pmod{b_3}$ $b_k=\prod_{s=1}^{k-1}2^s\cdot k!$ $\forall r\in R_k$，$R_k=\{0,1,2,3,\ldots,b_k-1\}$ n , k , a , d $\in N$ $\forall r\in R_k'$ $R_k'=\{a,a+1,a+2,\cdots,a+b_k-1\}$ 1. 若r = 2 t 2. 若r = 2 t + 1 （1） （2） 由（1）、（2），r存在一基本分解鏈 由1.2.知性質３－４在首項爲a時亦成立 可推得 性質４－１： 恆存在 (2)改變公差的情形 由之前對自然數的k次方階差關係的觀察 可知，即使公差不爲1，相鄰等差項之間的階差關係仍然存在。也就是說bk仍然存在（當然 其值有所變更）。 證明： 令bk(d)表bk假設中 將其代入bk式中 得 也就是說，性質３－１在此可推廣爲 b k(d)爲一常數，且 =（d爲整數列之公差）

若 $a^k = 2s+1$
$a^k+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_{a+1}+\overline{B^k_{a+1+b_k-2^k}}+(\frac{b_k}{2^k}-1)B^k_{a+1+b_k}+\overline{B^k_{a+1+2b_k-2^k}}+\ldots+\overline{B^k_{a+1+tb_k-2^k}}$
$\equiv 2s+1-2s+2t \pmod{b_k}$
$\equiv 2t+1 \pmod{b_k}$

若 $a^k = 2s$ $(a+1)^k = 2p+1$
$t\cdot\frac{b_k}{2^k}\overline{B^k_a}$ ［每 $\frac{b_k}{2^k}$ 個連續基本串列，必有一數 mod b_k 爲 1］
$\equiv 2t \pmod{b_k}$
$\equiv r \pmod{b_k}$

$a^k+(a+1)^k-(s+p)\frac{b_k}{2^k}\overline{B^k_{a+1}}+t\frac{b_k}{2^k}\overline{B^k_{a+(s+p)b_k+1}}$
$\equiv 2s+2p+1-2(s+p)+2t \pmod{b_k}$
$\equiv 2t+1 \pmod{b_k}$

∴ r 存在一基本分解鏈

<$(s+p)\frac{b_k}{2^k}\overline{B^k_{a+1}}$ 表示連續 $(s+p)\frac{b_k}{2^k}$ 個修正過的基本串列>

$\forall n,k,a \in N$，$v(n,k,a,1)$ $_{x_1=1, x_{i+1}=x_i+(i-1)d}$

$$b_{k(d)} = \varepsilon_1(x+d)^k+\varepsilon_2(x+2d)^k+\cdots\cdots+\varepsilon_{2^k}(x+2^k d)^k$$
$$= c_k^k\left[\varepsilon_1 d^k+\varepsilon_2(2d)^k+\cdots\cdots+\varepsilon_{2^k}(2^k d)^k\right]$$
$$= d^k\left[\varepsilon_1+\varepsilon_2 2^k+\cdots\cdots+\varepsilon_{2^k}(2^k)^k\right]$$
$$= d^k b_k$$

$b_{k(d)}=d^k\prod_{s=1}^{k-1}2^s\bullet k!$

而性質３－２亦可以如同公差爲1的證明手法證明之。故改變公差對任意自然數而言仍存在 基本分解鏈。則可推得： 性質４－２： 恆存在 (3)同時改變首項及公差的情況 我們接下來猜想，是否公差及首項同時改 變時分解鏈也存在呢？顯然，必定有些條件限制，因爲我們很容易就能得到一反例： 取a=2，d=2時，若n爲奇數，則v(n,k,2,2)必不存在那麼如何能夠成立呢？ 我們令整數鏈的首項爲a，公差爲d且整數鏈的某項q = a +（p-1）d 根據性質４－１、４－２中的討論可知，不論a、d爲何，性質３－１、３－２皆能成立。唯 一決定v(n,k,a,d)是否存在的關鍵就在於 的關係是否存在。也就是說在 之中是否存在x＝x１≡1 （mod bk）。 嘗試以整數解的概念尋找其充要條件：若q = a +（p-1）d = bk(d)‧t+1 同義於 : bk(d)‧t - p‧d = a - d - 1 若（p , t）存在整數解時 則根據整數論定理知： gcd(bk(d), d)整除(a - d - 1) d｜(a - d -1) d｜(a - 1) 令p爲直角座標系之x座標，t爲y座標 則直線 bk(d)‧t - p‧d = a - d - 1 因其斜率 ，直線必過第一象限，故恆存在t , 之解。 即必可找到某項q，使 。則定理三 $\forall n,k,d \in N$，$v(n,k,1,d)$

$\overline{B^k_{x_1(d)}} \equiv 2 \pmod{b_k}$ $\overline{B^k_{x(d)}}$ $\frac{d}{b_{k(d)}}>0$ p$\in N$ $\overline{B^k_{x(d)}} \equiv 2 \pmod{b_k}$ 可得到證明。故得 定理四 若 恆存在。三、結論 經過不斷的探討，從最初的二次基本分解鏈，到三次基本分解鏈的完成，當要推到4次、5次甚至次時，就遇到很大的困難，後發現引入同餘理論的概念，再經過不斷的嘗試、 思考，終於使次基本分解鏈，對每一自然數 得以完成，於是，再接再厲，改變整數列之公差大於1，如1，3，5，7，・・・亦可證出其成立， 再改變其公差與首項而求其充要條件。四、評語 代數分析的技巧巧妙、細膩、完整。從一些簡單的例子自行推廣，做出一般化深入的結 果。可做爲高中生研就數學科展主題的典範。本

問題較缺乏後續發展的空間。 $d \mid (a-1) \Leftrightarrow$ $v(n,k,a,d)$ n, $n=\varepsilon_1 1^k+\varepsilon_2 2^k+\varepsilon_3 3^k+\ldots+\varepsilon_m m^k$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1,1\}$