

特殊子圖數極值的探討 參加美國第五十一屆國際科技展覽會



作者簡介

作者：何思賢
就讀學校：高雄師大附中
指導老師：吳吉昌 康木村

就讀於國二時，在吳老師的指導下我首次接觸到科學展覽，由於覺得很有意義，加上家人的支持，之後我年年均參與科展。今年很幸運的能代表國家參加第五十一屆美國科技展覽會。在出國前的準備過程中，才發現有各種超乎預期的工作要忙，不過從中也學到不少寶貴的經驗。雖然最後在國外未拿到獎項，但這也不失為一種磨練我的好機會，使我有進步的空間。在這件作品中，我還特別感激朱緒鼎教授及葉永南教授，他們改善了我的研究方向及論文敘述方式。我也很感謝同團出國的各個教授、團友和科教館的工作人員們，他們幫我補足這段科展生涯令人懷念的句點。

根據 Ramsey 定理：若用有限種顏色染一足夠大的完全圖的邊，一邊著一色，則單色三角形必定存在。

一個自然的接續問題是：給定顏色數時，單色三角形最少數與頂點數間存在著什麼關係？對於總顏色數為 2 的情況，可用一種二次計數方式獲得解決；但對於總色數 ≥ 3 的情況，使用此法卻會產生多個變數，而得加以討論。

另外，若將完全圖的每邊賦予方向，所得的稱為競賽圖。類似的我們可以研究迴路最多個數：當迴路的邊數為 3 時，也能用相同想法得到其值；邊數為 4 時，雖然也會碰到上述的困難，但可藉助邊數為 3 的結果和兩者的特殊關係獲得解答。在競賽圖中還可以考慮相關的問題：傳遞圖的最少個數。我們的目標是求出傳遞四邊形數的最小值。

一、研究動機

二、研究目的

(一)·用二次計數方式計算有向 $\triangle$ 及單色 $\triangle$ 數之極值。

(二)·競賽圖中，傳遞四邊形數之極值。

三、本文

A. 定義

1. 在一 n 階圖中, 我們可(依需求)將頂點編號 $1, 2, \dots, n$.
2. 對於一個二色 n 階完全圖 K_n , (本文是以 C_1, C_2 表二色), 以 m_i 表: 和 i 號點相鄰的 C_1 色邊數.
3. 對於 n 階競賽圖 T_n , 令集合 $V_i = \{v_j \mid i \rightarrow v_j\}$ 則設 $m_i = |V_i|$, (其中 i, v_j 表頂點編號), 且稱 $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ 為 out degree 序列.
4. 有向 $\triangle$ 是指一 $\triangle$ 若三頂點編號為 i, j, k 滿足: $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ 稱之, 並以 (i, j, k) 表示此一有向 $\triangle$, 其和 $(j, k, i), (k, i, j)$ 意義相同. 如圖(A1).
5. 若有向完全圖中的一個經過 k 個點的圈滿足: 在此圈中, 對於每一頂點, 其箭號出入情形均為一進一出, 則稱此圈為一有向 k 階圈 C_k . 特別的, $k = 3$ 時即為有向 $\triangle$.
6. 傳遞 $\triangle$ 是指一 $\triangle$ 若三頂點編號為 i, j, k , 滿足: $i \rightarrow j \rightarrow k, i \rightarrow k$, 則此類之 $\triangle$ 稱為傳遞 $\triangle$ (可顯示出遞移性的 $\triangle$), 如圖(A2). 類似的可以定義傳遞 k 階完全圖 T_k , 在此 T_k 是完全圖



圖(A1)有向 $\triangle$



圖(A2)傳遞 $\triangle$



圖 (B1)

B. 有向 $\triangle$ 的計數

1. 計數定理：若一有向圖 T_n 的 out degree 序列 $= \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$,

$$\text{則有向}\triangle\text{個數} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \right) - C_3^n \right]$$

證明：設有向 $\triangle$ 數為 X ，則傳遞 $\triangle$ 數 $= C_3^n - X$

現在我們使用二種方法計算 X ：

(1) 對於圖(B1)的箭號關係，有向 $\triangle$ 每一有 3，傳遞 $\triangle$ 每一有 1

$\therefore$ 總數 $= 3X + 1(C_3^n - X)$ 。另外，對於編號 i 之頂點，

有 $m_i(n-1-m_i)$ 個圖(B1)的箭號關係，則總數 $= \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$,

$$\text{故可得：} 3X + 1(C_3^n - X) = \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$$

$$\text{解得 } X = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \right) - C_3^n \right] \text{ 定理得證。}$$

(2) 對於圖(B2)的箭號關係，有向

$\triangle$ 均無，傳遞 $\triangle$ 每一有 2。

$\therefore$ 總數 $= 2(C_3^n - X)$

另外對於編號 i 之頂點，

有 $C_2^{m_i} + C_2^{n-1-m_i}$ 個



圖 (B2)

圖 (B2) 的箭號關係，則總數有 $\sum_{i=1}^n (C_2^{m_i} + C_2^{n-1-m_i})$

$$\text{故 } 2(C_3^n - X) = \sum_{i=1}^n (C_2^{m_i} + C_2^{n-1-m_i}) \text{ 解得 } X = C_3^n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (C_2^{m_i} + C_2^{n-1-m_i}).$$

註：以下之討論均以 (1.) 為主，(2.) 是提供另一思考方法。

2. 已知頂點數 n ，求 T_n 之有向 $\triangle$ 個數的最大值：

由 $X = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \right) - C_3^n \right]$ 知： (m_i) 可當作變數) 為求 $\max X$,

僅需求 $\max \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 我們得應用底下的引理：(證明從略)

引理：若 $p+q=r, p \leq q$ 且 $p, q, r \in \mathbb{N}$ 則對於定數 r

(1). 若 $2 \mid r$ ，則 $(p, q) = (\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ 時 p, q 有 $\max$ 值。

(2). 若 $2 \nmid r$ ，則 $(p, q) = (\frac{r-1}{2}, \frac{r+1}{2})$ 時 p, q 有 $\max$ 值。

依此引理，對於 $\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 我們得分兩情形討論：

(注意： $\sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2}n(n-1)$ 為必要條件)

(1) $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ 則 $2 \mid (n-1)$

則對每個 m_i 取 $m_i = \frac{n-1}{2} = k, m_i(n-1-m_i)$ 有 $\max$ 值，

則 $\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 有 $\max$ 值。

另外，我們構造一圖 K_n 之 $m_1 = m_2 = \dots = m_n = k$ 構造法為：

※ $\forall i$ 號點： $i \rightarrow v_i \Leftrightarrow v_i \in \{i+1, i+2, \dots, i+k\}$

並令當 $v_i > 2k+1$ 時 v_i 號點表 $v_i - (2k+1)$ 號點。

圖(B3)為 $k=3$ 的情形

結論：(a)※證明了存在性，而事實上最大值的解 $(m_1, m_2, \dots, m_n)$

$= (k, k, \dots, k)$ 是唯一的，只是編號次序可以改變而已。

(b)有了※便可放心計算 $\max X$ 了：

$$\max X = \frac{1}{2}(nk^2 - C_3^n)$$

$$= \frac{1}{2}[(2k+1)k^2 - \frac{1}{6}(2k+1)(2k)(2k-1)]$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$



圖 (B3)

(2) $n=2k, k \in \mathbb{N}$ 則 $2 \mid (n-1)-1$

則 m_i 取 $\frac{(n-1)-1}{2}$ 或 $\frac{(n-1)+1}{2}$ ，即 $k-1$ 或 k 時

$m_i(n-1-m_i)$ 有 $\max$ 值。

設有 t 個 $m_i = k-1$ ， $n-t$ (即 $2k-t$) 個 $m_i = k$

由 $\sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2}n(n-1) = k(2k-1)$ 得 $(k-1)t + k(2k-t) = k(2k-1)$

解得： $t=k$ 故分別有 k 個 m_i 等於 k 及 $k-1$

另外，我們構造一圖滿足此條件，不妨令

$m_1 = m_2 = \dots = m_k = k, m_{k+1} = m_{k+2} = \dots = m_{2k} = k-1$ 構造法為：

※ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : i \rightarrow v_i \Leftrightarrow v_i \in \{i+1, i+2, \dots, i+k\}$

$\forall j \in \{k+1, k+2, \dots, 2k\} : j \rightarrow v_j \Leftrightarrow v_j \in \{j+1, j+2, \dots, j+k-1\}$

並令當 $v_i > 2k$ 時， v_i 號點表 $v_i - 2k$ 號

圖(B4)為 $k=4$ 的情形

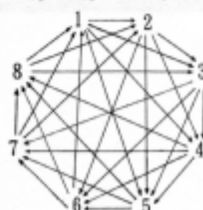


圖 (B4)

結論：(a)※證明了存在性，而事實上最大值的

解若不計次序是唯一的，只是編號

次序也可以改變罷了，但結構不

一定唯一，如圖 (B5)。(頂點數, = 6 是最小的例子)

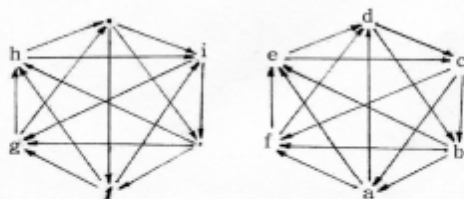


圖 (B5)

證明：(i)如圖，將左圖之一特定頂點編號為 1，則 $m = 3$

則右圖只能令 a, b, c 中的某頂點之編號為 1

且拿掉此頂點和相鄰邊後 out degree 序列

$= \{2, 2, 2, 2, 2\}$ ，則只能令 $a = 1$

(ii)左圖 1 號射達 g, h, i 之點，則此三點構成一有向 $\triangle$ ，

右圖 a 射達 d, e, f 三點，而此三點構成傳遞 $\triangle$ ，則

兩圖絕對不同構！

(b)有了滋，便可放心計算 $\max X$ 了。

$$\begin{aligned} \max X &= \frac{1}{2}[nk(k-1) - C_3^n] = \frac{1}{2}[2k^2(k-1) - \frac{1}{6}(2k)(2k-1)(2k-2)] \\ &= \frac{1}{3}k(k-1)(k+1) \end{aligned}$$

(c). 以(2)(a)證明結構不唯一的例子為基礎，我們可以構造出最小

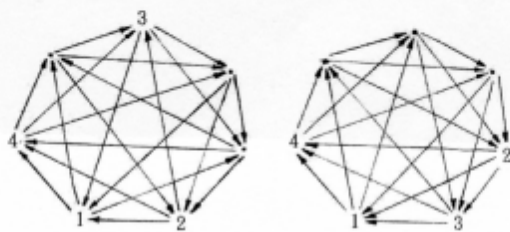


圖 (B6)

解時，結構不唯一的例子，如圖(B6)：(頂點數=7, 此為最小例子)
 證明：如圖將左圖之特定4點編號為1, 2, 3, 4, 此4點有一特性：
 $2 \rightarrow 1$ 且 $\exists! 3, 4$ 使 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4$ 且 $1 \rightarrow 4$; 而3, 4
 滿足： $4 \rightarrow 3$. 對右圖由對稱性可任取一點為1號點，則相隔
 一點且射入1的為2號點，則3, 4如圖，但3恒射入4，
 但左圖之 $4 \rightarrow 3$ ，故二圖結構不同。

3. 已知頂點數 n ，求 T_n 之有向 $\triangle$ 個數的最小值：

(1) 定理：有向 $\triangle$ 之最少個是 0

證明：依此構造法即可： $\forall i > j \Leftrightarrow i \rightarrow j$ ，證明的方法有二，

一為：以 $m_i = i - 1$ 代入 $X = \frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)) - C_3^n]$ 即可。

另一法為反證法：反設至少存在一有向 $\triangle$ 設為 (e, f, g)

則 $e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow e$ ，依構造法知： $e > f > g > e$ ($\rightarrow \leftarrow$)。

(2). 上面說明了： $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ 時， $(m_1, m_2, \dots, m_n)$

$= (0, 1, \dots, n-1)^n$ 是“有向 $\triangle$ 數=0”的充分條件，

下面證明此亦為必要條件：(只要證： $m_1, \dots, m_n$ 互異)

反設有向 $\triangle$ 數=0， $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$ 時，

存在 $i = j + 1$ 使 $m_i = m_j$ 分二情形討論：

(i) $i \rightarrow j$ ：由 $m_i - 1 < m_j$ 知，存在 h 使 $j \rightarrow h$ 且 $i \leftarrow h$

則 $i \rightarrow j \rightarrow h \rightarrow i$ 即 (h, i, j) 為有向 $\triangle$ ($\rightarrow \leftarrow$)。

(ii) $i \leftarrow j$ ：仿(a)可證有“有向 $\triangle$ ” ($\rightarrow \leftarrow$) $\therefore m < m < \dots < m$

註：由此，可知有向 $\triangle$ 的個數=0時，圖形結構是唯一的

(By induction). 另外，這種構造法也同時說明了：

T_n 的有向 t 邊形的個數可為 0，但此時可有別的結構。

C. 單色 $\triangle$ 的計數

1. 計數定理：若一二色圖之 C_1 degree $= \{m, m, \dots, m\}$

$$\text{則單色 } \triangle \text{ 個數} = C_3^n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$$

證明：設單色 $\triangle$ 數為 Y ，則非單色 $\triangle$ 數為 $C_3^n - Y$ 類似的可由

$$\text{前法得：} 0 \neq 2(C_3^n - Y) = \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \text{ 解之可得證。}$$

2. 單色 $\triangle$ 個數的最小值

首先要說明的是：最大值的問題立刻可以看出是 C_3^n ，只要每一邊都染同一色即可，剩下的就是最小值的問題了。

由 $Y = C_3^n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 知：為求 $\min Y$ 僅需求 $\max \sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$

$\max$ 仿前討論我得分二情形著手，即 $2 \mid n-1$ 和 $2 \mid n$ ，

但當 $2 \mid n-1$ 時, 由以前的經驗本可判斷: $m_1 = m_2 = \dots = m_n = \frac{n-1}{2}$ 時,

$\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 有 $\max$ 值, 但 $\sum_{i=1}^n m_i = n(\frac{n-1}{2})$ 不一定是 2 的倍數,

(注意: 必要條件為 $2 \mid \sum_{i=1}^n m_i$) 得視 $\frac{n-1}{2}$ 的奇偶性而定.

故要再分 $2 \mid \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) 與 $2 \mid \frac{n-1}{2} - 1 \Leftrightarrow$

$n = 4k+3$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) 這二種情形.

討論: (1). $n = 4k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)

對於每個 m 取 $m_i = \frac{n-1}{2} = 2k$, $\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 有 $\max$ 值,

且滿足必要條件, 其中一種構造法如下:

※ $\forall i$ 號點邊 (i, j) 著 C_1 色 $\Leftrightarrow 4 \mid |i-j|$ 或 $4 \mid |i-j|-1$

結論(a)※證明了存在性, 而事實上, 最小值的解是唯一的,

只是編號次序可以改變而已, 但圖形結構也不唯一,

如圖(C1): (頂點數 = 9 是最小的例子)

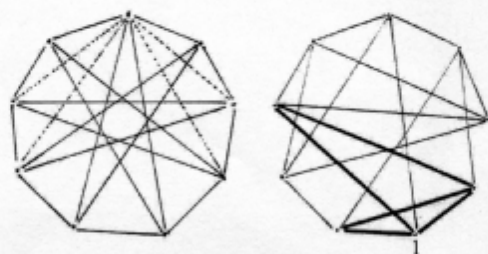


圖 (C1)

(圖中, 只標示 C_1 色(實線) C_2 色視說明而留空或以虛線表示)

證明: 令右圖之特定点為 1, 則和 1 相鄰的 C_1 色線構成 2 個

單色 $\triangle$. 而對於右圖由對稱性, 可令任一點為 1,

對於實線有 3 個單色 $\triangle$; 對於虛線有 1 個單色 $\triangle$,

均無 "2 個單色 $\triangle$ " 的情形, 故二圖絕不同構.

(b). 有了※可計算得: $\min Y = C_3^n - \frac{1}{2}n(2k)^2$

$$= \frac{1}{6}(4k+1)4k(4k-1) - \frac{1}{2}(4k+1)(2k)^2 = \frac{2}{3}k(k-1)(4k+1)$$

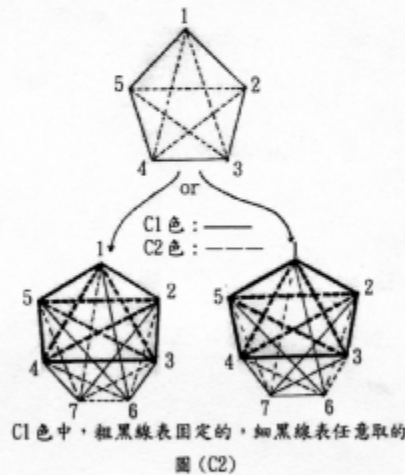
(2). $n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

由於 $m_1 = m_2 = \dots = m_{4k+3} = 2k+1$ 是不可能的, 我們可以退而求其次: $m_1 = m_2 = \dots = m_{4k+2} = 2k+1, m_{4k+3} = 2k$ 或 $2k+2$.

我將證明這個圖形是存在的, 如下:

※ 採 $n=4k+1$ 時的構造法, 再添兩個點編號為 $4k+2, 4k+3$ 我們有二種染色法如下:

- (i) 編號 $4k+2$ 的點與 $1 \sim 4k+1$ 之任 $2k+1$ 個點著 C_1 色
編號 $4k+3$ 的點與 $1 \sim 4k+1$ 的其餘 $2k$ 個著 C_1 色
則 $m_1 = m_2 = \dots = m_{4k+1} = m_{4k+2} = 2k+1, m_{4k+3} = 2k$.
- (ii) 編號 $4k+2$ 的點與 $1 \sim 4k+1$ 之任 $2k$ 個著 C_1 色, 編號 $4k+3$ 的點與 $1 \sim 4k+1$ 的其餘 $2k+1$ 個點著 C_1 色, $(4k+2, 4k+3)$ 著 C_2 色, 則 $m_1 = \dots = m_{4k+2} = 2k+1, m_{4k+3} = 2k+2$
- 圖(C2)為 $k=1$ 時, $4k+1, 4k+3$ 的染法



結論:(a)※證明了存在性, 而事實上最小值的解只有二種, 只是可以改變編號次序, 而 C_1, C_2 有對稱性, 二種解又可歸一
但圖形結構不是唯一的. 如: 只要把圖(C2)之左圖(6, 7)染成實線, 則此圖的6對應右圖的7 (C_1 degree=4). 左圖(2, 6), (4, 6)為 C_2 色, (2, 4)亦為 C_2 色, 而右圖對應的(1, 5, 7)卻不是單色 $\triangle$.

(b)有了※可計算得

$$\min Y = C_3^n - \frac{1}{2}(n-1)(2k+1)^2 - \frac{1}{2}(2k)(2k+2)$$

$$= \frac{1}{6}(4k+3)(4k+2)(4k+1) - \frac{1}{2}(4k+2)(2k+1)^2 - k(2k+2)$$

$$= \frac{2}{3}k(k+1)(4k-1)$$

(3). $n=2k, k \in N$

有了以前的經驗，可判斷 $m_i = k$ 或 $k-1$ 但要滿足 $2 \mid \sum_{i=1}^n m_i$

一可行的構造法如下：

※(取 $m_1 = m_2 = \dots = m_n = k$)， (i, j) 著 C_1 色 $\Leftrightarrow I, j$ 之奇偶性不同。

圖(C3)為 $k=4$ 時， $2k$ 的染法

註：此種染色法將使單色 $\triangle$ 均為 C_2 色的。

結論：(a)※證明了存在性，而最小值的解若

不計次序，有 $k+1$ 種，依 C_1, C_2 對

稱性可歸成 $\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ 種

(b)有了※可計算得： $\min F = C_3^n - \frac{1}{2}nk(k-1)$

$$= \frac{1}{6}2k(2k-1)(2k-2) - \frac{1}{2}(2k)k(k-1)$$

$$= \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$$

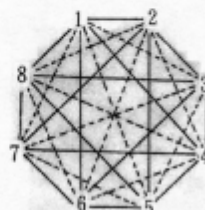


圖 (C3)

D. 以二次計數法繼續研究時，所遭遇之問題

1. 對於有向 k 階圖數的最小值問題，特別的當 $k=4$ 時，若我們採用二次計數法，可得如下之敘述：設分別有 x, y, z 個圖 (D1-(a)), (D1-(b)), (D1-(c)) 的圖形，且有向 $\triangle$ 個數為 X 。

仿前的二次計數方法知：

$$\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) = C_3^n + 2X$$

$$\text{則 } (n-3) \left(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \right)$$

$$= (n-3) C_3^n + 2(n-3)X$$

$$= (n-3) C_3^n + 2(2x + y)$$

$$= 2(2C_4^n + 2x + y).$$

或可由等式 $x + y + z = C_4^n$ 得：

$$(n-3) \left(\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i) \right) = 2(2C_4^n + 2x + (C_4^n - x - z)) = 2(x - z + 3C_4^n)$$

但此二等式均有二變數，所以當每個 m_i 固定時(即已知 out degree 序列)， x 不一定固定，此可由圖(B5)看出！

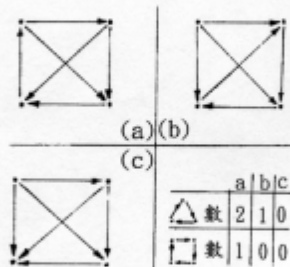


圖 (D1)

	a	b	c
$\triangle$ 數	2	1	0
$\square$ 數	1	0	0

如此，討論方式就不能像以往一樣的只需控制： $\sum_{i=1}^n m_i(n-1-m_i)$ 大小！

2. 而對於三色圖，以二次計數方法則有如下敘述：

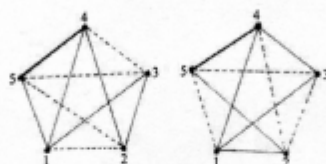
以 p_i, q_i, r_i 分別表 i 號點相鄰之 C_1, C_2, C_3 色邊數。

(則 $p_i + q_i + r_i = n-1$)，並設共有 x 個單色 $\triangle$ ， y 個二色 $\triangle$ ，

z 個三色 $\triangle$ ，於是可由二次計數法得： $\sum_{i=1}^n (p_i q_i + q_i r_i + r_i p_i) = 2y + 3z$

對於已知 p_i, q_i, r_i 情況，可知 $2y+3z$ 的值，但無法知個別值(利用 $x+y+z = C_3^n$ 代換仍然會得到一個擁有二變數的關係式)

且和情況 1 相似的是： p_i, q_i, r_i 固定時，單色三角形數不一定固定，如圖(D2)。



C_1 ：細實線， C_2 ：虛線， C_3 ：粗線

$\{(p_i, q_i) | i=1, 2, \dots, 5\} = \{(3, 1), (2, 2), (2, 2), (2, 1), (1, 2)\}$

左圖：0 個單色 $\triangle$ ；右圖：1 個 C_1 色 $(1, 3, 4)$

圖(D2)

未來發展方向：

3. 因此，對於 1, 2 的情形，我們有兩條路可以進行：一為尋另一方向下手，

即另起爐灶；為以上述方法為基礎，加上所能發展的適當方法討論下去。

後者所具備的好處是：若能解決情況 1，則 2 的討論方式可能類似。

若又順利解決情況 2，則因為對四色以上的完全圖而言，所得之關係式，

左邊視為已知，而右邊和三色情形全相同，所以或許可循同一方式解決。

因此，目標可放在 1，它或許是極重要的踏板。

後記：在有向三角形的結果之基礎上，我們推出了 G_1 的極值，如下：

$$(1) n = 2k+1 (k \in N), \text{Max.} = \frac{1}{6} k(k-1)(k+1)(2k-3)$$

$$(2) n = 2k (k \in N), \text{Max.} = \frac{1}{6} k(k-1)(k+1)(2k+1).$$

而對於之前有向及單色三角形的結果，我使用了逐步調整法(見註)給予了不同的證明；甚至在單色三角形方面，我們另外有特殊「賦值」的方法也可達到同樣結果，此法適用於以電腦檢驗。另外這個研究也給予了對傳遞子圖最小值的估計式

註：逐步調整法大要如下：(僅列有向圖情形，單色圖之的方法大同小異)

- (1). 稱兩個擁有相同 out degree 序列但不同結構的圖稱為同序異構圖. 將兩個同序異構圖的頂點編號, 使編號相對應的頂點有相同的 out degree 值, 此時方向不同的對應邊與相鄰的頂點和稱為差異子圖.
- (2). 注意到差異子圖的頂點均為偶頂點. 由 Euler 的著名結果知道此圖可一筆畫, 故可視為一圓. 以 Induction 易證: 存在有向 $\triangle$, 其邊中至少有二屬於差異子圖的邊. 每次對一圓調整一個有向 $\triangle$, 使 out degree 序列保持不變, 差異子圖的邊數減少 1 或 3 邊, 我們可以證明: 每次調整時, 有向 $\triangle$ 數不變. 如此便可知兩圖擁有相同數目的有向 $\triangle$.
- (3). 我們僅需考慮在何種 out degree 序列下的圖擁有最多有向, 仍採調整的技巧. 如對 $n = 2k + 1$ 的情況, 若有二頂點的 out degree 分別 $> k$ 和 $< k$, 則必可以在和二點相鄰的邊中找到一邊, 使調整此邊方向後, 有向 $\triangle$ 個數增加 (...否則, 會推出頂點數 $> 2k$, 矛盾!), 則此圖不是擁有最多有向 $\triangle$ 的圖. 又必有一圖擁有最多有向 $\triangle$, 則此圖的 out degree 序列為 $= \{k, k, \dots, k\}$... (雖然此計算方法沒有文中方法簡捷, 但或許可以推廣).

(一) · 有向 $\triangle$ 數的極值

1. 有向 $\triangle$ 的最少個數為 0, 且此時圖形的結構在本質上是唯一的.
2. 有向 $\triangle$ 的最多個數:

- (1) 頂點數為 $2k+1$ 時 ($k \in N$) 其值為 $\frac{1}{6} k (k+1) (2k+1)$ 且此圖形 out degree 序列是唯一的, 但結構不唯一.
- (2) 頂點數為 $2k$ 時 ($k \in N$), 其值為 $\frac{1}{3} k (k-1) (k+1)$ 且此圖形的 out degree 序列若不計順序是唯一的, 但結構不唯一.

(二) · 單色 $\triangle$ 數的極值

1. 單色 $\triangle$ 的最多個數是 C_3^n , 若且唯若圖形只用一種顏色去染.
2. 單色 $\triangle$ 的最少個數

- (1) 頂點數為 $4k+1$ 時 ($k \in N$) 其值為 $\frac{2}{3} k (k-1) (4k+1)$ 且此圖形的 out degree 序列是唯一的, 但結構不唯一.
- (2) 頂點數為 $4k+3$ 時 ($k \in N \cup \{0\}$), 其值為 $\frac{2}{3} k (k+1) (4k-1)$ 且此圖形的 C_1 degree 序列或 C_2 degree 序列必唯一, 但結構也不唯一.
- (3) 頂點數為 $2k$ 時 ($k \in N$), 其值為 $\frac{1}{3} k (k-1) (k-2)$, 且圖形的 C_1 degree 序列可有 $k+1$ 種.

四、結論

(一) 高中數學競賽教程	著者: 嚴鎮軍等人	九章出版社
(二) 圖論中的幾個極值問題	作者: 管梅谷	上海教育出版社
(三) 高中數學競賽導引	著者: 常庚哲等人	上海教育出版社

五、參考資料