

# 2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160022

參展科別 物理與天文學

作品名稱 扁平長方容器中顆粒體之轉動現象探討

得獎獎項

就讀學校 高雄市立新莊高級中學

指導教師 呂台華、蕭述三

作者姓名 陳昱睿、林佳暄、吳承哲

關鍵詞 顆粒體、自由面

## 作者簡介



我是林佳暄(右)，目前就讀高雄新莊高中二年級，喜歡探討日常現象的自然原理，也喜歡將課堂中學習到的自然知識學以致用。希望能透過這次的科展培養發現問題後積極解決的能力，及增進對自然知識的了解

我是吳承哲(中)，目前就讀高雄新莊高中二年級，喜歡觀察日常中的自然現象，也喜歡用學習到的知識來解釋周圍的事物。希望能透過這次的科展增進我對自然原理的了解，且提升我解決問題的能力。

我是陳昱睿(左)，目前就讀高雄新莊高中二年級，由於家裡的培養，讓我從小就對物理很感興趣，這次有榮幸可以參加科展這個比賽對與我來說是莫大的肯定希望之後可以繼續專研物理這個領域

## 摘要

顆粒體(細沙、塑膠珠與鋼珠)於扁平長方容器內近二維堆積在高速轉動時，其自由面有要成為拋物線的趨勢，但因有摩擦力的存在易導致自由面出現中央尖錐區與兩側線性堆積區之分布，因而呈現類似 W 之外型。近二維堆積顆粒體高速轉動下，摩擦力大者(如細沙、塑膠珠)易在近轉軸處出現中央尖錐；而摩擦力小者(如鋼珠)在近轉軸處則易出現較平坦之分布。另近二維堆積顆粒體在轉動過程達穩定後之自由面分布，會受經過的歷程所影響，不具可再現性。

相同數量(1000 顆)與尺寸(3 mm)的鋼珠與塑膠珠混合後以高速(>500 rpm)轉動，其堆積分布與同轉速下的鋼珠一致，代表混合態高速轉動後穩定堆積的自由面分布是由慣性大的顆粒體所決定。

顆粒體和液體轉動時類似卻又不同的現象讓值得進一步的探討。

## Abstract

When the quasi-2D stacked granules of a flat rectangular container rotate at high speed, the free surface tends to be parabolic, but be led to the W shape by the friction among the granules. Under the high-speed rotation, the free surface of quasi-2D stacked granules of high friction (ex: sand and plastic beads) tend to appear a apex near the axis of rotation; while those of low friction (ex: steel balls) tend to be flat near the axis of rotation.

In addition, the distribution of the free surface of the quasi-2D stacked granules is affected by the history process and cannot be reproducible.



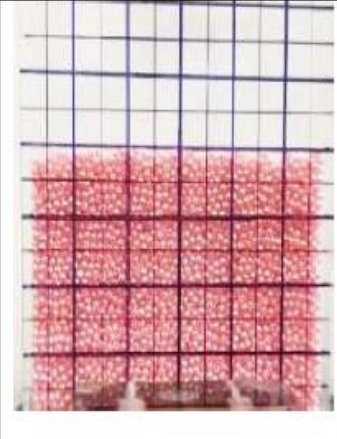

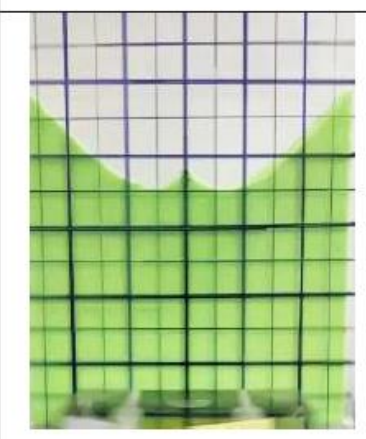
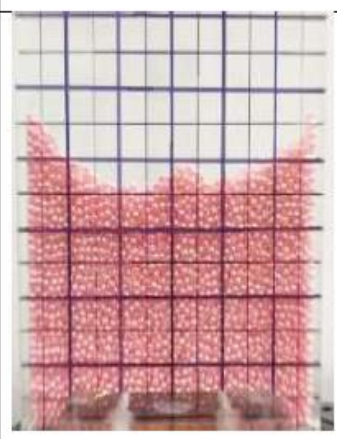
The free surface of the mixed quasi-2D stacked granules under high speed rotation is dominated by the larger-inertia granules.

# 一、前言

## (一) 研究動機

老師在課堂中示範液體在扁平的長方形容器中轉動，液體表面會由水平凹陷形成拋物面如圖 1-1a、b 所示。因為實驗室中恰好有探究課程用到的細沙與圓珠，我便好奇那把細沙或圓珠倒入這個扁平的長方形容器中轉動會有甚麼現象發生呢？經過實驗發現容器中的細沙在 400 rpm 轉速的轉動前、後會呈現如圖 1-2 上、下的分布；而塑膠珠在 400 rpm 轉速的轉動前、後會呈現如圖 1-3 上、下的情形。圖 1-2 顯示轉動時，表層離轉軸較遠的細沙會沿徑向往外側移動堆積，使原處表面下凹成曲面，但靠近轉軸附近的細沙似乎停留在原位置沒有移動；而圓珠(粒徑 3mm)在轉動下的情形與細沙類似。在近似二維的系統中液體和顆粒體(細沙、塑膠珠)的轉動堆積的自由面，有些像又不太一樣的現象讓我們感到很有趣，便想做進一步的探討。



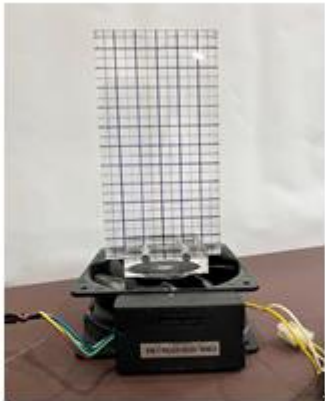

## (二) 研究目的

		
		
圖 1-1 扁平長方形容器中液體 200 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之照片	圖 1-2 扁平長方形容器中細沙 400 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之堆積情形	圖 1-3 扁平長方形容器中圓珠 400 r.p.m 轉速轉動前、後(上、下圖)之堆積情形

1. 固定顆粒體尺寸、種類，改變轉速，觀察不同轉速下顆粒體二維堆積之轉動情形並加以分析。
2. 固定轉速、顆粒體尺寸，改變顆粒體種類，觀察不同種類顆粒體在二維轉動之分布情形並加以分析。
3. 固定轉速、顆粒體種類，改變顆粒體尺寸觀察不同種類顆粒體在二維轉動之分布情形並加以分析。
4. 將相同數量 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合並加以轉動，與純 3mm 鋼珠、純 3mm 塑膠珠之轉動堆積情形加以比較分析。

## 二、研究方法或過程

### (一)實驗器材

	
<p>圖 2-1 不同尺寸之顆粒體</p>	<p>圖 2-2 變頻器與轉動平台</p>
	
<p>圖 2-3 扁平長方形容器 (容積尺寸：25cm*11.4cm*10 mm)</p>	<p>2-4 轉速測量計</p>

## (二)理論探討

### 1.實驗原理

#### (1)液體轉動之拋物面[1]：

當裝有液體的扁平容器以中心軸線作等角速度轉動時，液體中的任何質點均會一起作等速率圓周運動，此時液體的自由表面會形成拋物面，以下為相關的理論分析。裝有液體的扁平長方形容器以通過容器之中心線為轉軸  $z$ ，以  $\omega$  之等角速度轉動，則液面上一質量  $m$  的質點距轉軸為  $r$ ，在加速座標系統中，會受到重力  $mg$ ，鄰近液體給其之正向作用力  $F$  與假想力  $m\omega^2 r$ ，其所受的合力為 0，如圖 2-5 所示。在此加速座標中，相關的受力方程式如下所示：

$$r \text{ 方向：} F\sin\theta = m\omega^2 r \quad \text{-----}(2-1)$$

$$z \text{ 方向：} F\cos\theta = mg \quad \text{-----}(2-2)$$

$$(2-1)、(2-2) \text{ 2 式相除可得 } \tan\theta = \frac{r\omega^2}{g} \quad \text{-----}(2-3) \text{，而 } \tan\theta = \frac{dz}{dr}$$

整理可得  $gdz = r\omega^2 dr$ ，將等號兩邊分別積分可得

$$\int gdz = \int r\omega^2 dr$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \quad \text{-----}(2-4)$$

$r$  為拋物面上質點到中心軸的長度， $Z$  為該點的水深， $R$  為容器半寬， $H$  為靜止時的水深， $t$  為容器內之厚度。

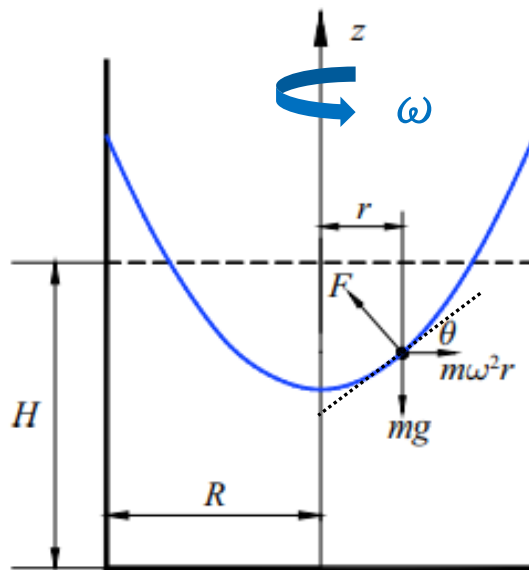


圖 2-5 扁平長方容器內液體受力之分析圖[1]

在轉動狀況下的容器中液體的體積  $V$  可以表示為(2-5)式，且與靜止時體積相等

$$V = \int_{-R}^R t z dr = \int_{-R}^R t \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C \right) dr = 2RHt \quad \text{-----}(2-5)$$

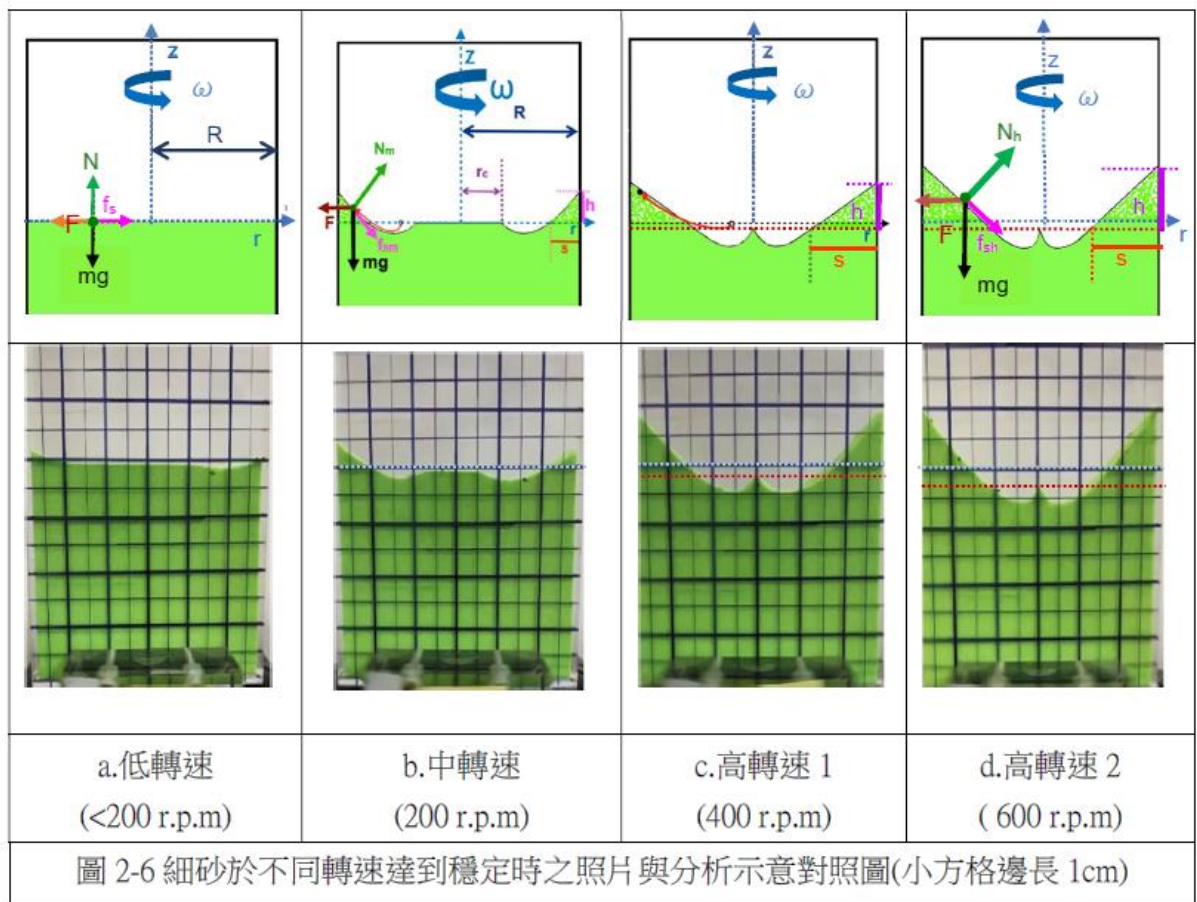
$$\text{整理(4-5)式可得 } C = H - \frac{\omega^2 R^2}{6g} \quad \text{-----}(2-6)$$

$$\text{帶入(4-4)式可得 } z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g} \quad \text{-----}(2-7)$$

故旋轉液面呈拋物面之軌跡。

(2)顆粒體二維堆積轉動後之特殊分布[2,3,4]：

(3)顆粒體除了像固體一般可以支撐重量和承受切變(Shear)，也能像液體一樣流動(例如流沙)，而其運動主要受到摩擦力和流體力學的行為所影響。單一顆粒體可用牛頓力學加以分析，但是當一堆顆粒體的群體行為所對應的現象就變成十分複雜，它們的物理行為並不能用一般的固體來理解，同樣也不能用一般的流體理論來解釋。顆粒體的複雜現象主要是因為摩擦力造成顆粒間的碰撞是非彈性的碰撞(Inelastic collision)所導致。由於此種系統相當複雜，具有非線性的特質及不穩定性，本作品目前僅就所觀察到的現象做一些定性的分析探



討。

下面為我們針對堆積高度 8cm 的細沙由靜止加速至 4 種不同的轉速下形成穩定堆積情形的相關探討。比照裝有液體的情形，仍以通過容器之中心線為轉軸  $z$ ，顆粒體以  $\omega$  之等角速度轉動， $R$  為容器半寬， $t$  為容器內部厚度。表面上一質量  $m$  的顆粒體距轉軸為  $r$ ，在加速座標系統中所受之重力  $mg$ ，離心力  $F = mr\omega^2$ ，最大靜摩擦力為  $f_{s(max)}$ ，靜摩擦力  $f_s$ ，鄰近細沙所形成之正向支持力  $N$ ，而中、高轉速的正向力分別為  $N_m$ 、 $N_h$ ；靜摩擦力以  $f_{sm}$ 、 $f_{sh}$  分別標註，如圖 2-6 系列所示。

#### a、低轉速

當轉速偏低時(如圖 2-6 a)，質量  $m$  之顆粒體在加速座標內所受之離心力  $mr\omega^2$  尚未超過其所受之最大靜摩擦力  $f_{s(max)}$ ，此時顆粒體  $m$  在  $r$  方向之假想力  $F$  與靜摩擦力  $f_s$  相等，故  $r$  方向合力為 0，系統中絕大多數的顆粒體保持靜止不動，所以細沙表面之分布與未轉動比較只有些微的變化。

#### b、中轉速

我們將質量  $m$  之顆粒體在中轉速下分成幾個區間分別探討其堆積的現象(如圖 2-6 b)。

##### i. 平坦區 ( $r \leq r_c$ ) :

此範圍之細沙因靠近轉軸，在加速座標內所受之離心力  $mr\omega^2$  尚未超過其所受之最大靜摩擦力，顆粒體保持靜止不動，所以細沙表面之分布仍幾乎保持原有的水平分布。

##### ii. 凹陷區 ( $r_c < r \leq R-s$ ) :

此區之細沙  $m$  因離心力  $mr\omega^2$  超過其所受之最大靜摩擦力因而產生滑動往外側移動偏離原有位置，此區域因轉動移出的細沙會沿原分布之表面往外側移動堆積(如圖 2-6 b 之紅色箭頭所示)造成表面向下塌陷。因近二維分布之顆粒體總體積守恆，故左右兩側線性堆積區之總面積  $sh$  應趨近於圖 2-6 b 中藍色水平虛線下方 2 凹陷處的面積總和。

##### iii. 線性堆積區 ( $R-s < r \leq R$ ) :

經觀察此區在原先靜止之水平線(如圖 2-6 b 之藍色水平虛線)以上因凹陷區之顆粒體移入及擠壓，造成細沙向上堆積，且此堆積區之邊緣呈現直線分布，故定義此區為線性堆積區，如圖 2-6 b 所示。

#### c、高轉速

##### i. 中央尖錐區



高轉速下的細沙分布，中轉速時的中央平坦區消失，被中央尖錐區所取代如圖 2-6 c、d 所示。原堆積表面為水平之顆粒體在高轉速下，於轉軸處形成一尖銳突起，代表此時平坦區之  $r_c \rightarrow 0$ 。另此突起之尖頂較原先水平位置來得低，代表轉軸上有部分細沙移動離開原有位置。依理論轉軸上的細沙顆粒  $m$  因離心力為 0，應不可能超過最大靜摩擦力產生移動，但顆粒體的運動行為不能單看一個顆粒體的受力表現，而需將多個顆粒體一起做討論分析，所以轉軸上的顆粒體仍有機會受到鄰近顆粒體的連帶影響造成偏移。因細沙顆粒體仍有最大靜摩擦力需克服的問題，故在中心轉軸處定會形成一小突起，只是通常轉速越快，此小突起會越小且越尖銳。

比較圖 2-6 c、d 可看出，轉速為 400 rpm 時，中間突起點較原先 8 cm 之堆積高度(藍色水平虛線)低約 4.1 mm；轉速 600 rpm 時，中間尖頂較原先 8 cm 堆積處低約 8.2 mm。代表轉速越快，中間突起的尖頂越低陷，此時轉軸附近有更多的細沙由原有位置往兩側移出並往上堆積(如圖 2-6 c 之紅色實線所示)。另比較圖 2-6 c、d 可看出轉速越高凹陷區面積越大，代表越多細沙由原位置移出往兩側堆積。

ii.線性堆積區：

觀察圖 2-6 c、d 可看出，轉速越高，靠近器壁兩側的線性堆積區越陡峭，也就是斜率越高。裝有顆粒體的扁平長方形容器以通過容器之中心線為轉軸  $z$ ，以  $\omega$  之等角速度轉動達到穩定時，若顆粒體自由面上一質量  $m$  的質點距轉軸為  $r$ ，在加速座標系統中，受到重力  $mg$ ，鄰近顆粒體體給其之正向作用力  $N$ 、最大靜摩擦力  $f$ ， $\mu$  為摩擦係數，假想力  $F=mr\omega^2$ ， $\theta$  為線性區自由面與水平面的夾角，如圖 2-7 所示。

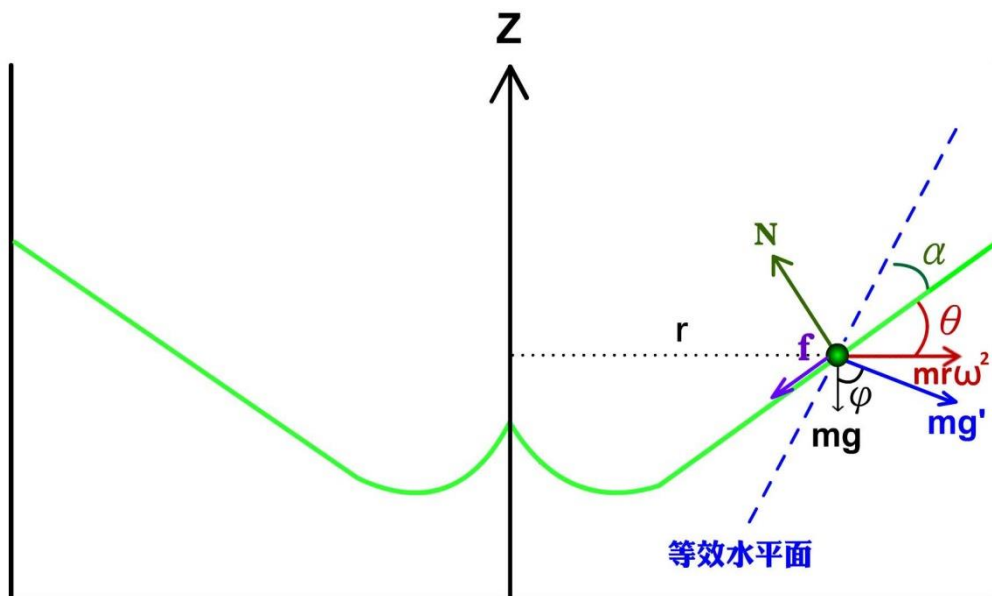


圖 2-7 細沙在轉動達穩定時之顆粒體堆積分析示意圖

參考靜止狀態下休止角的定義為細沙自由面與水平面之夾角(如圖 2-8 所示)，另定義  $r$  位置之等效重力場強度

$$g' = \sqrt{g^2 + (r\omega^2)^2}, \text{ 等效重力場與重力場間}$$

的夾角為  $\varphi$ 。

等效水平面定義為與等效重力場垂直之平面(如圖 2-8 所示)，則：

$$\frac{r\omega^2}{g} = \tan\varphi \quad \text{-----}(2-8)$$

另定義  $r$  位置之準靜態休止角  $\alpha(r)$  (quasi-static angle of repose) 為該位置自由面與此處等效水平面的夾角，故線性堆積區準靜態休止角  $\alpha = \varphi - \theta$ ；而尖錐區處的準靜態休止角  $\alpha = \theta + \varphi$ ，如圖 2-7 所示。後方會對轉動達穩定時，細沙線性堆積區之準靜態休止角  $\alpha(r)$  做出分析討論。

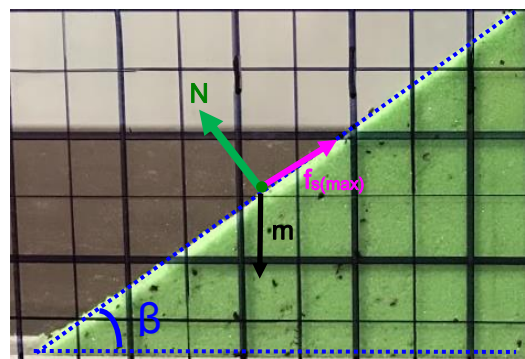


圖 2-8 細沙二維堆積之休止角  $\beta (\approx 33^\circ)$

在此加速座標中，相關的受力方程式如下所示：

$$\text{等效水平面方向：} mg' \sin\alpha = f \quad \text{-----}(2-9)$$

$$\text{等效重力場方向：} mg' \cos\alpha = N \quad \text{-----}(2-10)$$

$$\text{上述 2 式相除可得 } \tan\alpha = \frac{f}{N} = \mu \text{-----}(2-11)$$

若系統中顆粒體之堆積可視為連續分布，堆積出的自由面的斜率  $\tan\theta$  滿足下式

$$\frac{dz}{dr} = \tan\theta = \tan(\varphi - \alpha) = \frac{\tan\varphi - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha \tan\varphi} = \frac{\frac{r\omega^2}{g} - \mu}{1 + \frac{\mu r\omega^2}{g}} \text{-----}(2-12)$$

由(2-12)可看出，流體的  $\mu = 0$ ， $\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$ ，自由面就會得到如(2-4)的拋物線分布。

若視連續分布顆粒體(如細沙)之摩擦係數  $\mu$  為定值，將(2-8)、(2-11)代入(2-12)整理可得

$$\int dz = \int \frac{r\omega^2 - g\mu}{g + \mu r\omega^2} dr \text{-----}(2-13)$$

令  $y = g + \mu r\omega^2$ ， $dy = \mu\omega^2 dr$  代入(2-13)整理後積分可得

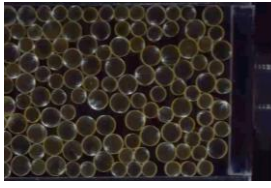
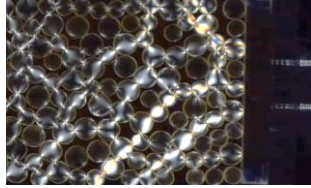
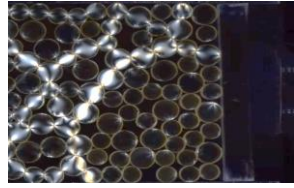

$$z = \frac{r}{\mu} - \frac{g(\mu^2 + 1)}{(\mu\omega)^2} \ln(g + \mu r\omega^2) + C \text{-----}(2-14)$$

(2-14)中當  $\omega$  為高轉速時，第 2 項可忽略，就會只剩第 1 項的線性堆積區，且此線性區

斜率為  $\frac{1}{\mu}$ ，相較於靜止狀態下休止角  $\beta$  對應之斜率，斜率 =  $\tan \beta = \mu$ ，兩者表現完全不同。

#### (4) 顆粒體間的力鍊(force chain)作用與歷史效應[5]

做文獻搜尋時，網路上一部關於顆粒體的影片(如圖 2-9 系列 a、b、c)介紹力鍊與歷史效應的概念。影片 [5] 中用透明顆粒體做示範，當容器內大量的透明顆粒體受到來自容器側面的擠壓，透明顆粒體由於應力作用產生顏色的改變，稱為光彈效應(Photo-elastic effect)，這可顯示出哪些顆粒體間產生交互作用，形成力鍊。影片中同時也顯示當側表面的擠壓力量消除後，透明顆粒體間的力鍊仍然存在，代表顆粒體經歷過的事件會對它的堆積產生影響，在此我們稱它為歷史效應，而沙堆之間的力傳播的結構顯影(力鍊分布)的示意圖如圖 2-9d 所示。圖 2-9b、c、d 中比較亮的部份代表的那個部分所承受的壓力比較大。而由圖 2-9 可以發現壓力並非均勻且有方向性地傳播的，甚至有一些地方是並沒有壓力存在的。

			
<p>圖 2-9 a. 容器內多顆透明球狀的顆粒體[5]</p>	<p>b. 容器右側受到擠壓，造成顆粒體產生特殊顏色[5]</p>	<p>c. 容器右側擠壓消失，部分顆粒體仍保有應力變化(特殊顏色) [5]</p>	<p>d. 沙堆中顆粒體間壓力傳播的示意圖 [4]</p>

### (三) 實驗方法

因為影響顆粒體堆積分布的變因太多，我們先以 3mm 塑膠珠為對象，觀察那些變因會影響轉動下顆粒體的堆積分布。圖 2-10 為 3mm 塑膠珠在 3 種不同堆積高度，5 種不同轉速拍攝其堆積情形。由圖 2-10 可看出堆積高度不會影響轉動穩定後顆粒體堆積之自由表面分布，故實驗設計中不納入堆積高度之變因討論。





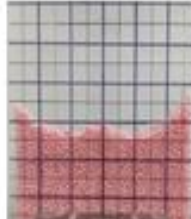


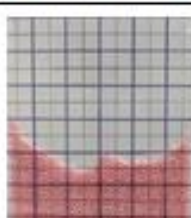
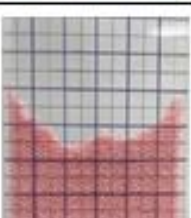

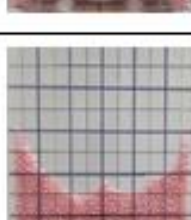


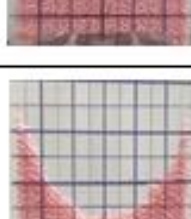
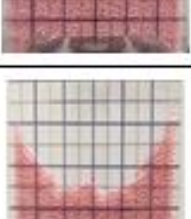
堆積高度(cm) 轉速(r.p.m)	4	6	8
300			
400			
500			
600			
700			

圖 2-10 三種堆積高度的 3mm 塑膠珠在不同轉速下的穩定堆積情形

為能清楚分析顆粒體在轉動時的移動軌跡，因細沙顆粒太小，要做轉動下的堆積觀察難度太高，故採用直徑均為 3mm 的金珠與粉珠來做分析。我們在堆積高度約 7cm 的粉珠上鋪一層高度約 1cm 的金色圓珠(如圖 2-11 所示)，藉以判斷顆粒體在轉動下的移動堆積行為。由圖 2-11 可看出，圓珠(粒徑 3mm)在堆積高度固定下，於不同轉速下的堆積行為與細沙頗為類似，只是因顆粒較大，堆積之圖案不

若細沙那麼完美對稱。而轉速 600rpm 以上的堆積圖案已沒有甚麼變化，可能是因為顆粒往兩旁擠壓，但因堆積密度已達極限，所以堆積形狀不會再改變。但若細部去分析顆粒體間的作用力應當還是會隨著轉速增加而提高。











轉速(r.p.m)	轉動前	轉動後
300		
400		
500		
600		
700		

圖 2-11 堆積高度 7 公分之粉珠與上層堆積高度 1cm 的金珠在不同轉速下的穩定態情形

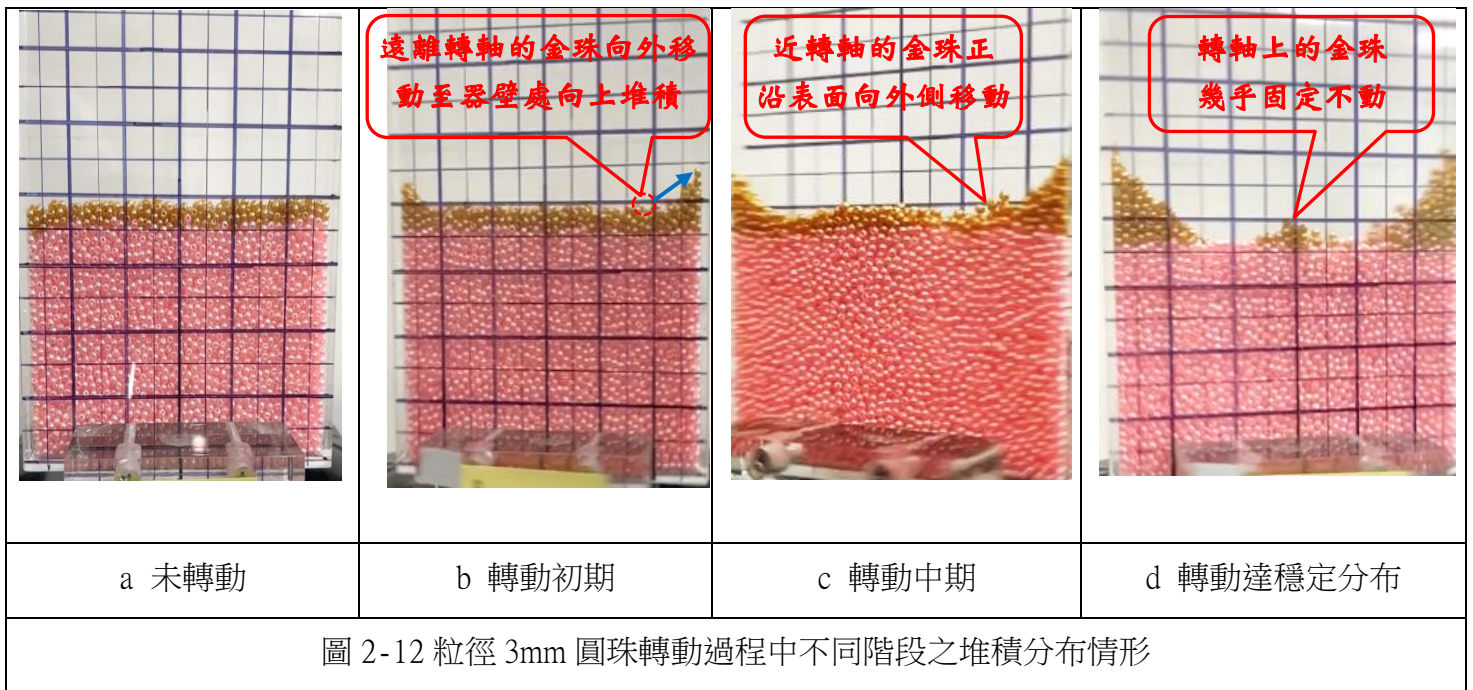
我們以 iphone 12 手機拍攝轉動過程中的顆粒體，將轉動過程分為初期、中期與穩定分布(如圖 2-12)。藉由慢動作播放觀察到上層的金珠大致上有四種的運動模式：

1、大多數的金珠往兩側移動：

如圖 2-12a 此時圓珠尚未轉動，表面分布近似水平。轉動初期是原先離轉軸較遠的金珠(如圖 2-12b 中紅色圓圈處)往外側移動，並沿著容器之器壁逐漸往上堆積

(圖 2-12b 中藍色箭頭所示)，接著再由接近轉軸的金珠往外側沿堆積的表面向上移動堆積(如圖 2-12c)。當轉動達穩定時，圓珠不再運動，分布如圖 2-12d。

- 2、極少數的金珠往中心轉軸移動，這些金珠據觀察是運動過程中與其他金珠產生碰撞後所導致。
- 3、靠近轉軸的金珠幾乎固定不動，但若鄰近轉軸的金珠往外側偏移產生空缺後，轉軸附近的部分金珠會受到擾動產生移動，使得鄰近轉軸的金珠堆積高度下降。
- 4、部分金珠在轉動過程中被其他金珠碰撞或擠壓後，獲得不小的速度彈跳至空中直接落在器壁附近後堆積。

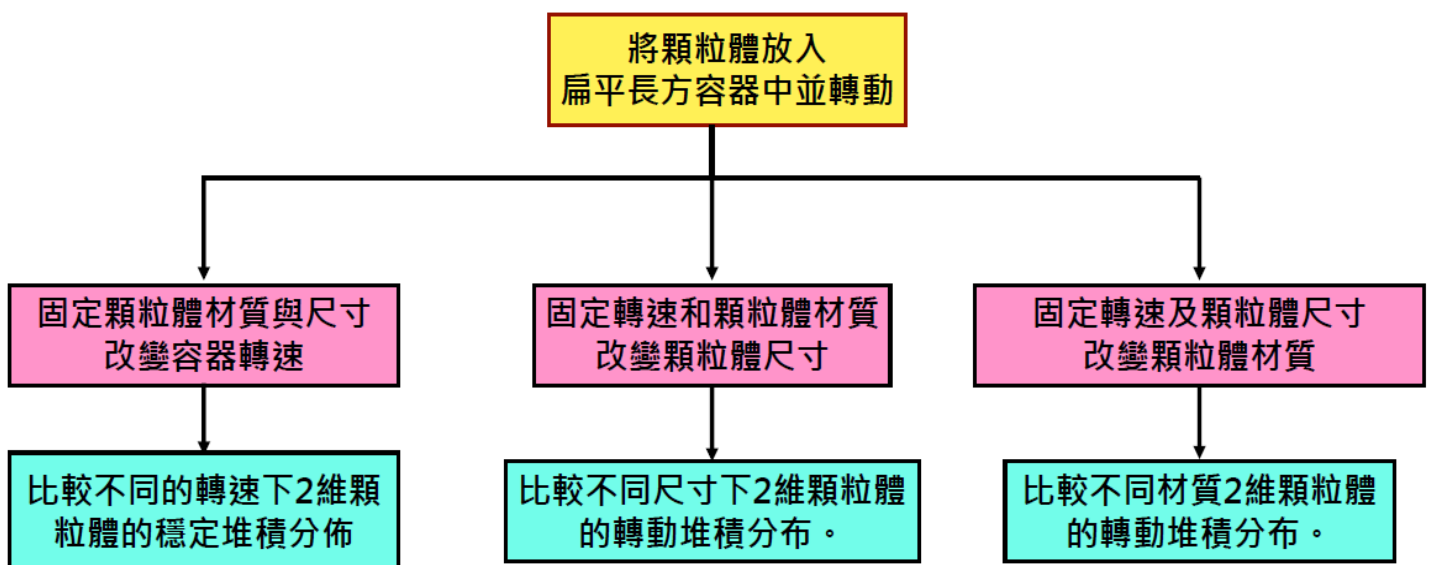


本實驗藉由下列步驟，對二維顆粒體的轉動堆積現象做分析探討：

- 1、固定顆粒體材質及尺寸，改變轉速，觀察不同轉速下 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 2、固定轉速及顆粒體材質，改變顆粒體尺寸，觀察不同尺寸下 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 3、固定轉速及顆粒體尺寸，改變顆粒體材質，觀察不同材質 2 維顆粒體的轉動堆積分布。
- 4、將 2 種相同尺寸，不同材質的顆粒體混合堆積於容器，觀察其轉動後的分布情形。

(四) 實驗的設計流程圖

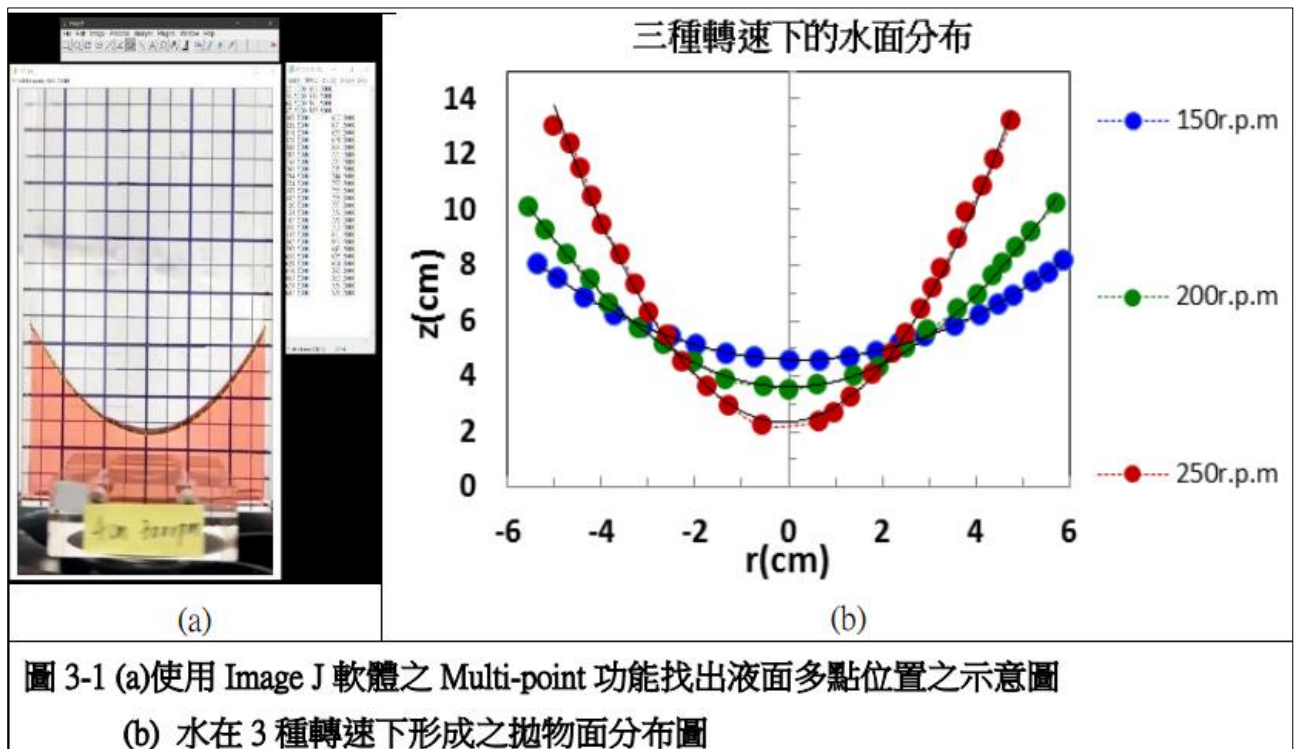
## 實驗流程圖



### 三、研究結果與討論

#### (一)、液面轉動形成之拋物面探討：

如圖 3-1(a)所示，將 Image J 軟體分析實驗中轉動下的液面之照片，利用 Multi-point 的功能將液面曲線描繪出來，圖 3-1(a)即為利用 Image J 將液面取點，並存下這些點的像素位置(x,y)，利用像素位置與原系統的位置座標(r, z)之線性轉換，計算得出轉動下液面的各點位置。圖 3-1(b)為水在三種轉速 150 rpm、200 rpm 與 250 rpm 之自由面之分布，而表 3-1 為深度 6cm 的水，在 3 種轉速下形成之拋物面軌跡函數，其實驗值與理論值的對照表。



由前(2-7)式， $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ ，實驗中水深  $H=6\text{cm}$ ，容器半寬  $R=5.7\text{cm}$ ， $g=980\text{cm/s}^2$ ，代入理論值計算對應之拋物線函數與實驗值對照得到表 3-1。

表 3-1 水在 3 種轉速下形成之拋物面函數實驗值與理論值的對照表

轉速	理論值	實驗值
150 rpm	$z=0.12r^2+4.64$	$z = 0.11r^2 - 0.04r + 4.61$
200 rpm	$z=0.22r^2+3.58$	$z = 0.21r^2 - 0.01r + 3.62$
250 rpm	$z=0.39r^2+2.21$	$z = 0.47r^2 + 0.08r + 2.35$



由表 3-1 可看出，3 種不同轉速下水面均呈現與理論值相當接近的拋物線軌跡，但在較高轉速 250 rpm 實驗值與理論值差距較大，原因不清楚。

## (二)、同種顆粒體在轉動達穩定分布之分析

### 1、 細沙顆粒體

細沙轉動後形成之圖案非常對稱且清晰，我們使用堆積高度 7 cm 之細沙由靜止加速至不同的轉速達穩定堆積後，根據實驗結果配合前方理論分析，做出下列的探討。

#### (1) 線性堆積區探討

當二維堆積之細沙  $m$  在中高轉速達穩定平衡時，會在兩側形成理論分析中的線性堆積區，而其受力情形如圖 2-6b 之力圖所示。

圖 2-6b 中若  $s$  為顆粒體線性堆積區的底部寬度， $h$  為此線性堆積區的高度，經量測轉速 200 rpm 穩定堆積下之  $s=7.7$  mm、 $h=4.2$  mm，故此時線性堆積區自由面之直線斜率約為 0.45。

利用前述液面的分析方法，將堆積高度 7 公分的細沙由靜止分別達到 200 rpm、300 rpm、400 rpm、500 rpm 與 600 rpm 五種不同轉速，穩定後的自由表面分布做成圖 3-2，並將前述 5 種轉速下線性堆積區的斜率做成表 3-2。

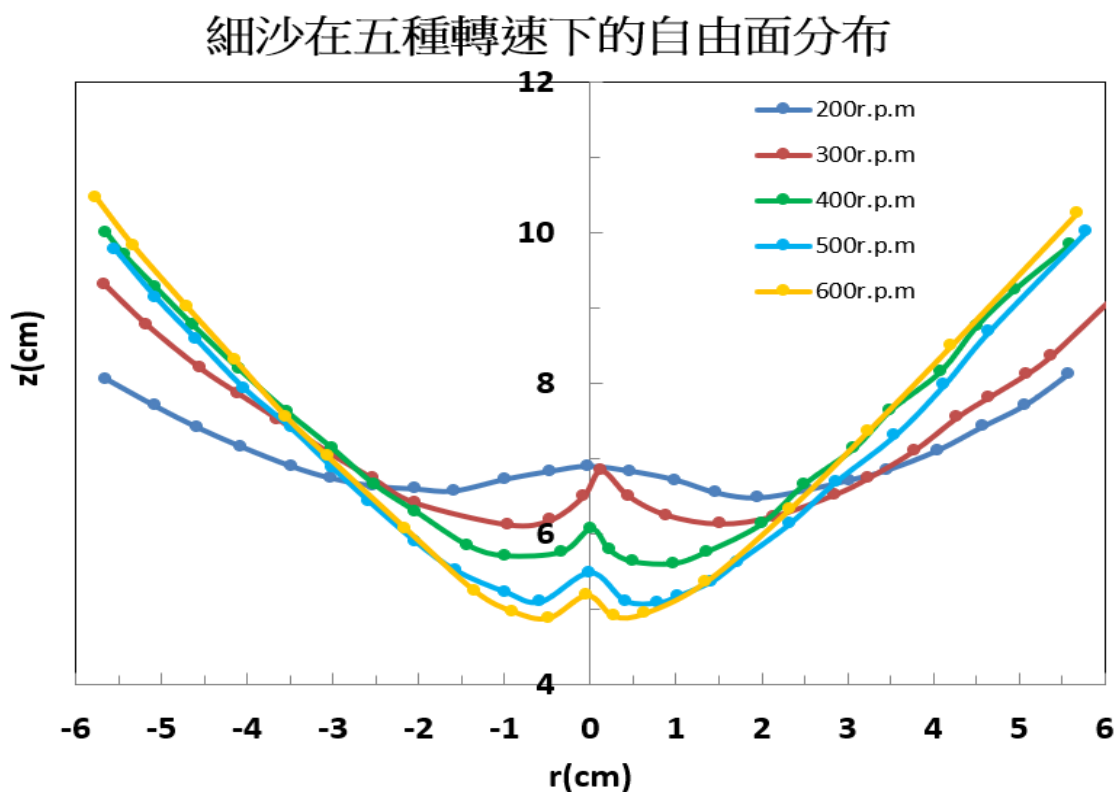


圖 3-2 細沙由靜止加速至五種轉速 200 rpm、300 rpm、400 rpm、500 rpm 與 600 rpm 達穩定時的自由面分布圖

表 3-2 細沙由靜止達 5 種轉速穩定分布時的線性堆積區之斜率對照表

轉速	線性堆積區斜率大小(左側)	線性堆積區斜率大小(右側)
200 rpm	0.46	0.44
300 rpm	0.85	0.81
400 rpm	1.09	1.05
500 rpm	1.13	1.06
600 rpm	1.22	1.18

由表 3-2 可看出細沙在不同的中高轉速下形成的線性堆積區，其對應之斜率大小會隨轉速提高而逐漸增加，但在轉速超過 400rpm 時，線性堆積區之斜率逐漸趨向一定值。推測當轉速到達某一臨界值時，細沙顆粒體達到最密堆積的狀態，也就是顆粒體間的擠壓程度到達一極限，此種線性區之細沙堆積之自由面與等效水平面間之準靜態休止角，應與二維顆粒體受重力作用達穩定堆積(如圖 2-7)時之休止角  $\theta$  情況類似。在此我們藉由前述的理論探討及圖 2-8 之分析示意，將細沙由靜止加速分別達 4 種不同轉速(300 rpm、400 rpm、500 rpm 及 600 rpm)，待細沙堆積達穩定後，將線性區不同 r 位置的準靜態休止角  $\alpha(r)$  做成圖 3-3。

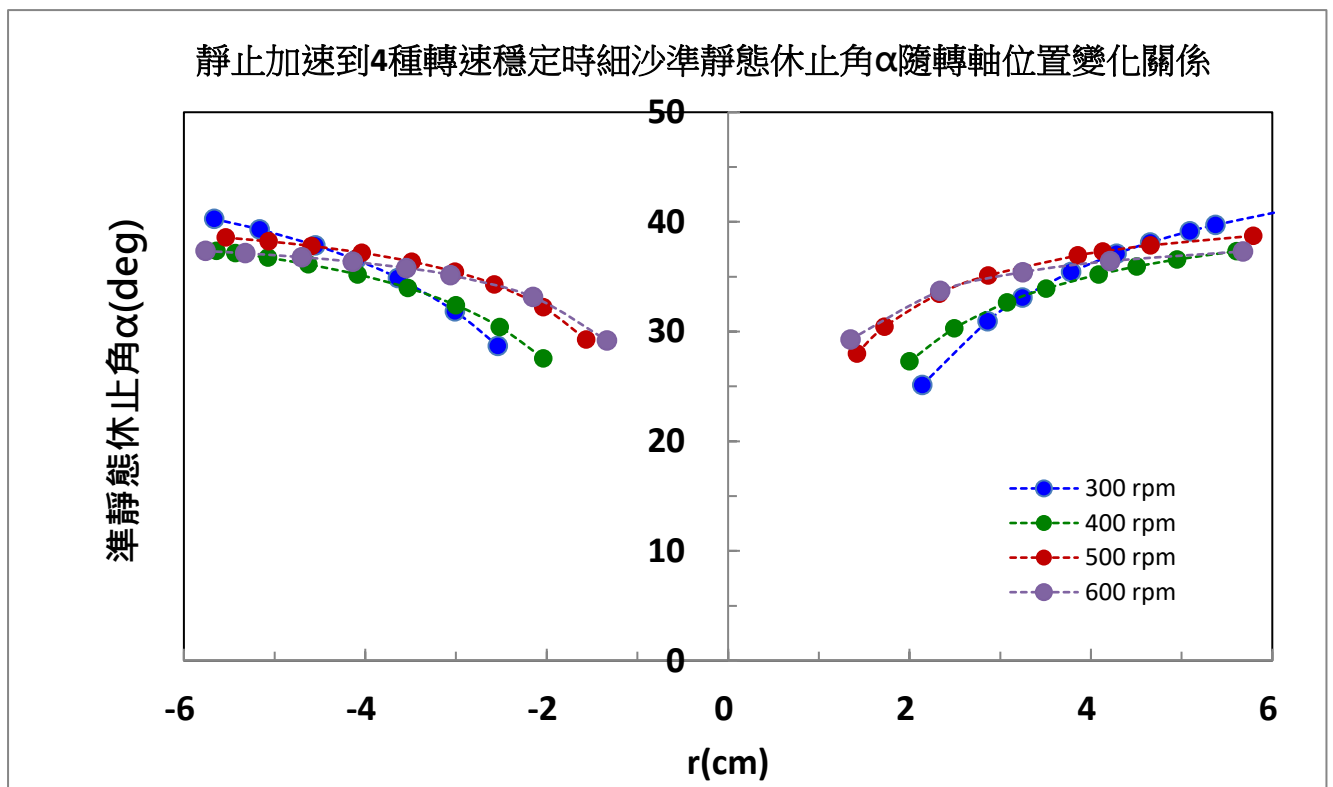


圖 3-3 細沙由靜止達 4 種轉速穩定分布時的準靜態休止角  $\alpha$  隨 r 之變化情形

由圖 3-3 可看出，在  $r \leq 2.5$  cm 範圍內，轉速越高，細沙擠壓越劇烈，推測此時顆粒體間的力鍊形成數量較多，且彼此間作用較強，導致準靜態休止角  $\alpha$  越大。

但當 $r > 2.5 \text{ cm}$ 時， $\alpha$ 卻隨轉速增加逐漸趨向於 $40^\circ$ ，推測此時細沙應當已達最密堆積，顆粒體間的交互作用已達飽和所致。但轉動下細沙對應的最大的準靜態休止角 $40^\circ$ 要比圖 2-8 中未轉動的靜態休止角 $33^\circ$ 要來的大，那是因為離心力的引入可以讓細沙間的接觸擠壓更緊密，例如在 $r=5\text{cm}$  位置，300 rpm 轉速的等效重力場強度 $g'$ 約是重力場強度 $g$ 的 5 倍，此時的自由面可容許堆積出的休止角就更大些。

在此將前述原理(2-14)式中細沙在高轉速下自由面分布第一項線性關係  $z \sim \frac{r}{\mu}$ ,

所對應之直線斜率 $\frac{1}{\mu} = \cot\alpha$ ，此處先將 $r > 2.5 \text{ cm}$  得出不同  $r$  位置之準靜態休止

角 $\alpha$ 求平均值，再計算出對應的理論值斜率，並與實驗值斜率比較，做成表 3-3。

表 3-3 細沙由靜止達 3 種高轉速穩定時線性堆積區斜率之實驗值與理論值對照表

轉速(rpm)	線性堆積區斜率(實驗值)	線性堆積區斜率(理論值)	誤差(%)
400	1.07	1.38	15.2
500	1.10	1.31	16.0
600	1.20	1.33	9.8

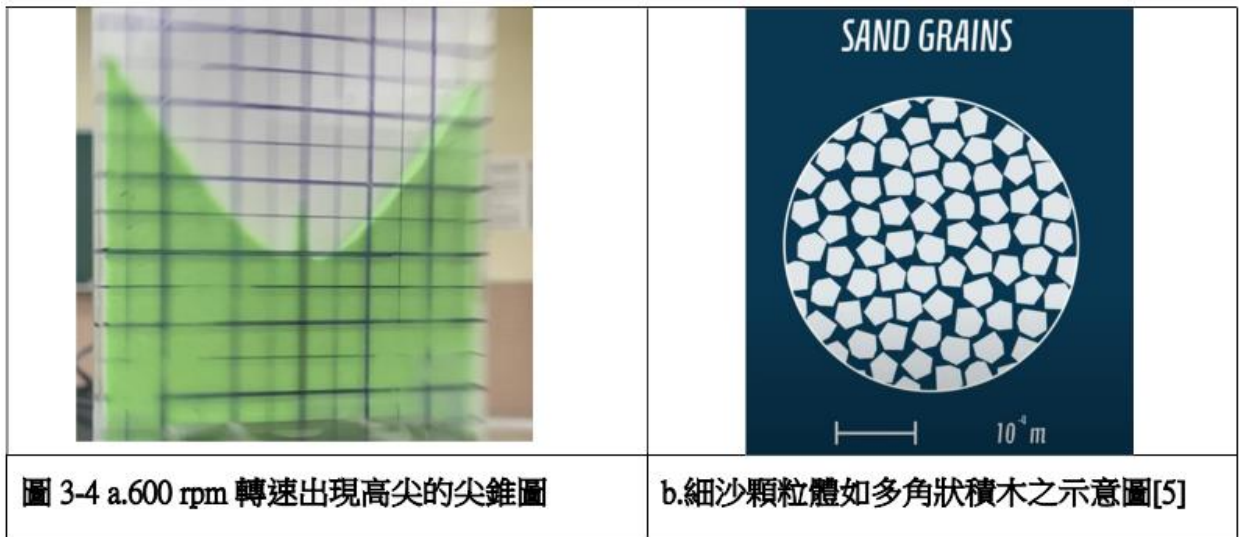
由表 3-3 可看出以準靜態休止角，(或靜摩擦係數)去回推線性堆積區之斜率，與實驗值都有百分之十左右的誤差，推測原因有 2 種：(1)細沙靜摩擦係數 $\mu$ 非定值(由圖 3-3 也可看出)，故原理推導中直接以 $\mu$ 為定值做積分得出的解析解會有偏差；(2)亦可能是轉動達穩定時細沙所受之靜摩擦力非最大，不可直接套用最大靜摩擦力關係加以運算導致，此部分未來仍須更多探討。

參考(2-7)式，液體轉動之拋物線軌跡  $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H - \frac{\omega^2 R^2}{6g}$ ，當轉速 $\omega$ 越快

時，液面呈現之拋物線曲率 $\frac{\omega^2}{2g}$ 越高。但二維顆粒體在轉動下形成的線性堆積區，其對應之直線斜率雖會隨轉速增加而變大，但在轉速超過 400 rpm 時，線性堆積區之斜率卻逐漸趨向一定值，和液體轉速越快，液面分布越陡峭之表現截然不同。

## (2) 中央尖錐區

由圖 3-2 可看出，細沙在由靜止加速至高轉速達穩定堆積時，中央形成突起之尖錐區，大致上是轉速越高，尖頂的  $z$  位置越低，且自由面越凹陷，此點和液面轉動有些類似，轉速越高液面凹陷越劇烈。但極少數會呈現  $z$  位置相當高的尖頂(如圖 3-4a 所示)，因高轉速下強離心力的影響讓靠近轉軸的細沙較無法維持在原處不移動，故轉速越高通常尖錐區頂端的  $z$  位置越低。高轉速下出現高  $z$  位置的尖錐區頂端，是因細沙為不規則形狀類似多角狀的積木(如圖 3-4b 所示)，只要轉動期間彼此勾連形成穩定結構，就可以形成又高又尖的尖錐區分布，只是此種機率小。另中央尖錐區因範圍小且影片截圖之解析度不夠清晰，無法仔細分析其細部的準靜態休止角  $\alpha(r)$ ，故在此未加以探討。



## 2、 塑膠珠顆粒體

如同細沙顆粒體，3mm 與 4mm 的塑膠珠由靜止加速至高轉速(>300 rpm)也出現中央尖錐區分布，且轉速越高，塑膠珠堆積的自由面越凹陷(如圖 3-5)，與細沙類似。圖 3-6 為 3mm 與 4mm 的塑膠珠在 300 rpm、400 rpm、500 rpm 及 600 rpm 四種轉速下穩定堆積的自由面分布。比較 3mm 與 4mm 的塑膠珠轉動穩定之分布可看出，當轉速為 600 rpm，4mm 的塑膠珠呈現的分布較不規則對稱，這是因為 4mm 的塑膠珠在厚度 10 mm 的容器中容易卡住，造成轉動時的顆粒體無法順暢移動，所以呈現的自由面分布較不規則。

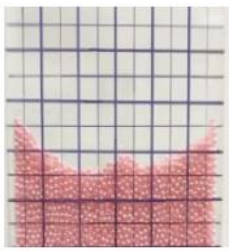
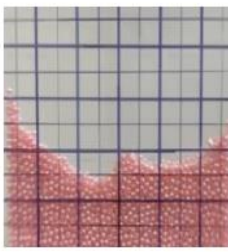
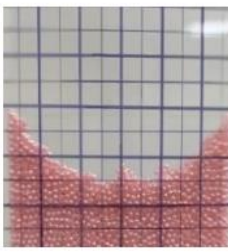

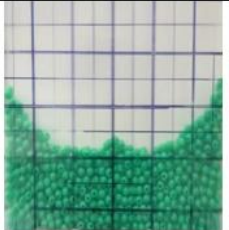
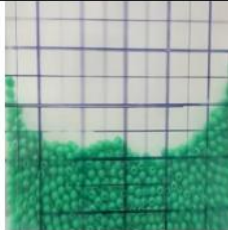
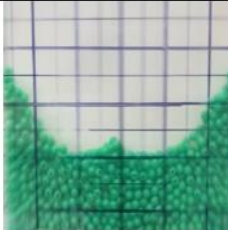
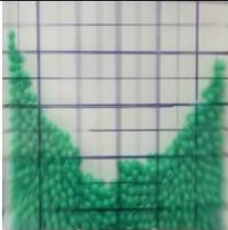
3mm 塑膠珠				
4mm 塑膠珠				
轉速 (r.p.m)	300	400	500	600

圖 3-5 塑膠珠(3 mm 及 4mm)在由靜止加速至 4 種不同轉速達穩定堆積之分布圖

### 3mm 塑膠珠在四種轉速下的自由面分布

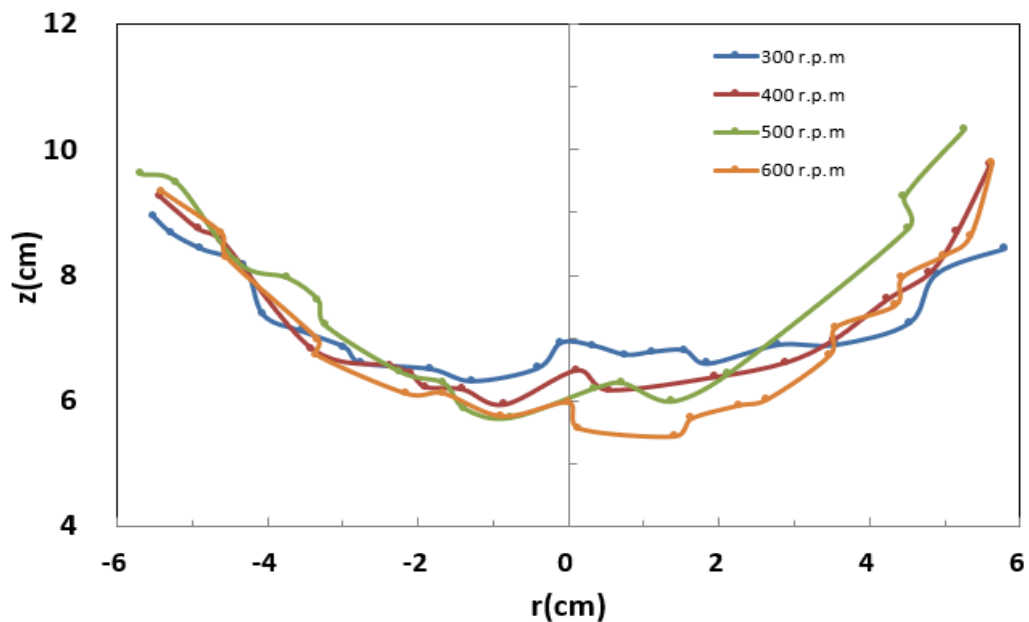


圖 3-6 塑膠珠(3 mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

比較圖 3-2 與圖 3-6，可看出 3mm 塑膠珠轉動後的分布與細沙類似，但自由面分布沒有像細沙這麼對稱平滑，因為塑膠珠的粒徑較細沙大出甚多，所以個別顆粒體的行為會益發凸顯，造成線性堆積區變得較不明顯，在此就不對塑膠珠之線性堆積區做斜率討論。4mm 的塑膠珠，因轉動時容易在容器內阻塞卡住，影響自由面分布，在此不特別做分析了。

### 3、鋼珠顆粒體

因鋼珠質量較大，轉動時怕會破壞實驗裝置，且轉動之自由面分布主要由上層的顆粒體決定，故我們先使用 3mm 塑膠珠堆積 3 公分高度打底便於拍照，再分別堆積 4 cm 高的 3mm 鋼珠與 4mm 鋼珠，在 4 種不同轉速拍攝其堆積情形，結果如圖 3-7 所示，並將 4 種轉速下 2 種粒徑(3mm、4mm)的鋼珠堆積形成之自由面分布，分別做成圖 3-8 及圖 3-9。

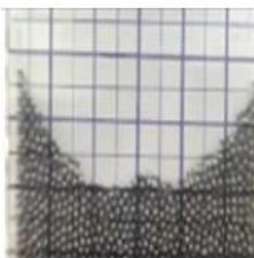

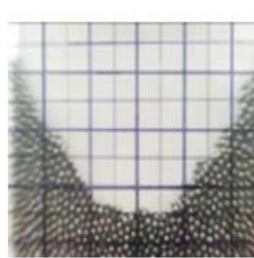
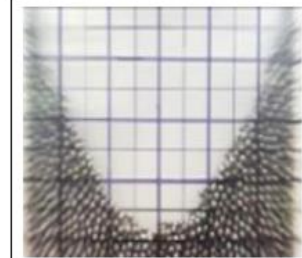


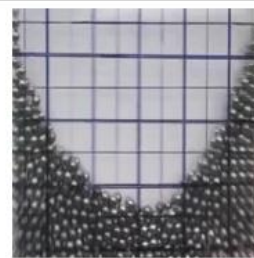
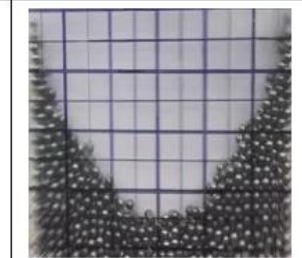
3mm 鋼珠				
4mm 鋼珠				
轉速 (r.p.m)	300	400	500	600

圖 3-7 鋼珠(3mm、4mm)在 4 種不同轉速下穩定堆積之分布照片

3mm鋼珠在四種轉速下的自由面分布

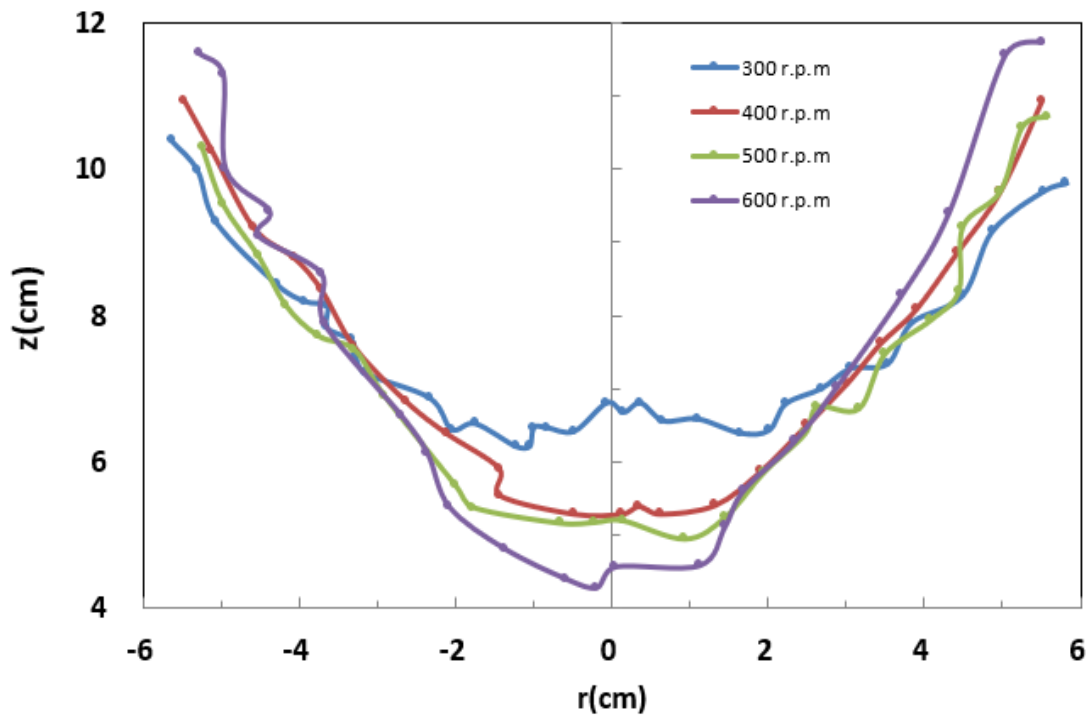


圖 3-8 鋼珠(3mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

4mm鋼珠在四種轉速下的自由面分布

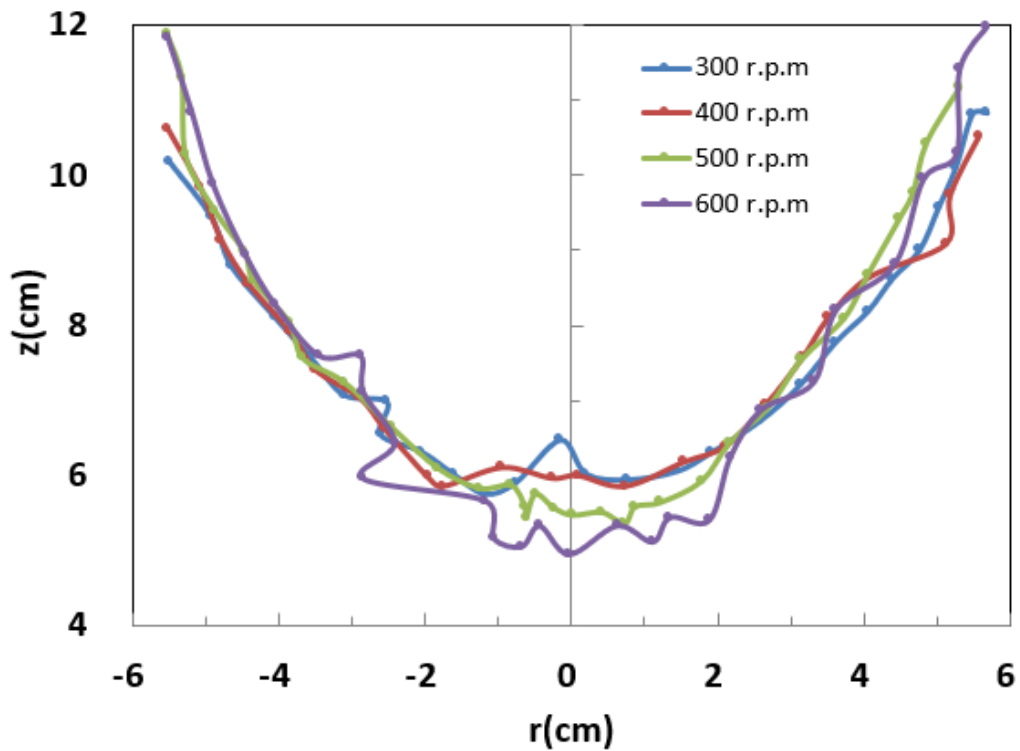


圖 3-9 鋼珠(4mm)在 4 種不同轉速下堆積之自由面分布圖

由圖 3-7、圖 3-8 可看出 3mm 鋼珠在 300 rpm 轉速與塑膠珠類似會出現中央尖錐區，兩側為近似線性堆積。但在 400 rpm 與 500 rpm 轉速中央尖錐區消失，形成一平坦底部，兩側由線性堆積逐漸轉變為拋物線形式；在 600 rpm 轉速之堆積自由面呈現近似拋物線的分布，這點和塑膠珠的轉動堆積形式非常不同。因鋼珠密度比塑膠珠大，當處在相同轉速下，鋼珠往兩側運動的慣性(或離心力)會較大，所以才會造成顆粒往兩側甩的現象更為明顯。而塑膠珠在相同轉速下，因慣性較小，所以在被往兩側甩的時候，更易因顆粒之間摩擦力影響，造成動量減小，尤其在中間轉軸的位置離心力又更小，更不容易往外移動，造成中間產生小尖錐。

顆粒間的摩擦力越大，尖錐區就會越明顯。所以像鋼珠的摩擦力是較小的，隨著顆粒離轉軸越遠，受到的離心力就會越大，顆粒體受到的合力就會導致其越容易沿著自由表面移動，而形成越大曲率的拋物線型。因此當轉速、顆粒體粒徑均相等時，密度越大的顆粒受到的離心力也越大，所以相對而言就越易形成大曲率的拋物線型表面。

由圖 3-7、圖 3-9 可看出 4mm 鋼珠在轉速 300 rpm、400 rpm 也會出現中央尖錐區，兩側為近似線性堆積，但在轉速超過 500 rpm 後，中央尖錐區消失，逐漸形成一平坦底部。另 4mm 鋼珠在轉速 600 rpm 之分布與 3mm 鋼珠在轉速 500 rpm 之分布非常類似。推論低摩擦係數之鋼珠，質量較大者需對應更高轉速才能讓底部的尖錐區消失轉為平坦的底部甚至形成類似拋物線之自由表面。

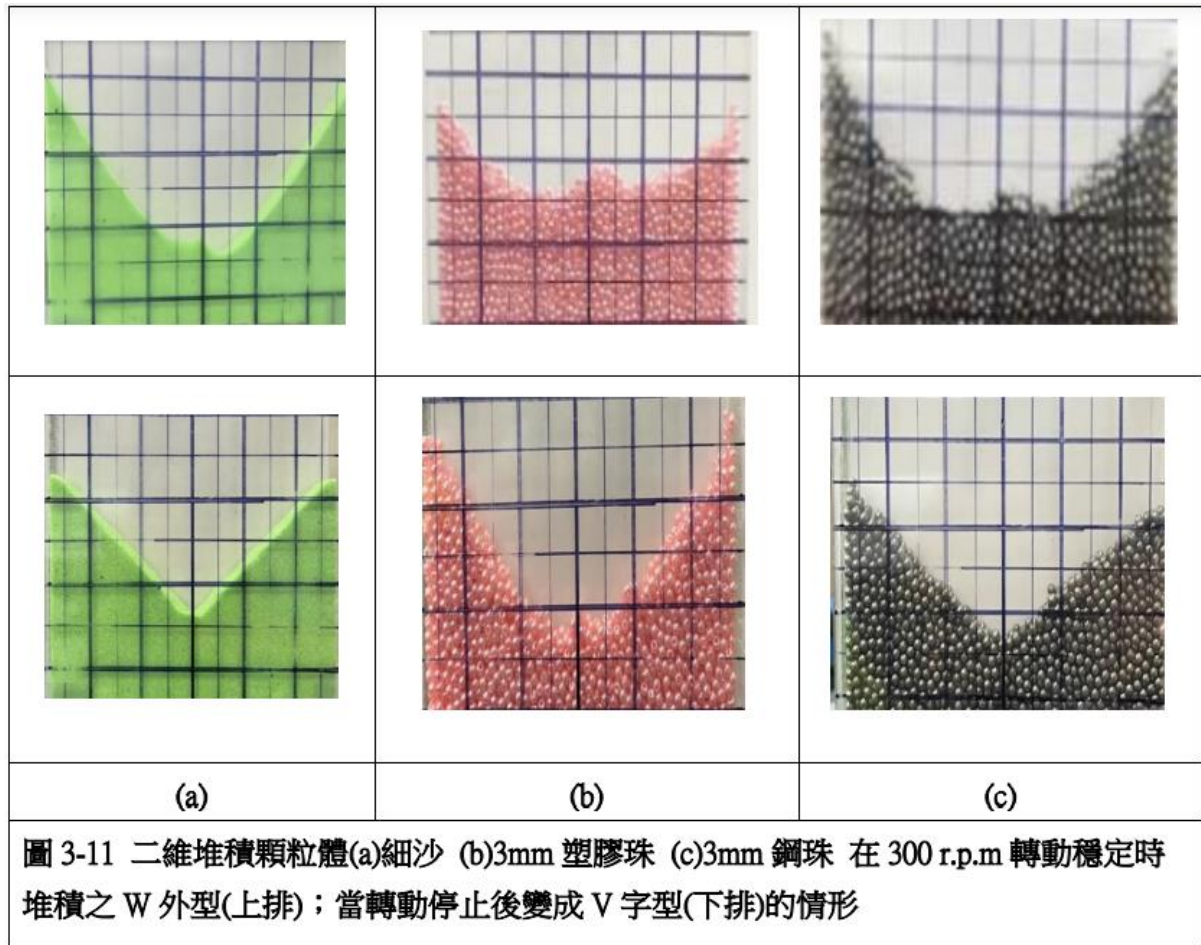
相較於 3mm 的鋼珠顆粒，4mm 的鋼珠顆粒在相同轉速下，自由面對應的拋物線曲率較小。這可以解釋為較小尺寸的顆粒擁有較大的流體化能力，因此更容易堆積出拋物線自由面。

另外，雖然質量大的顆粒雖然要使它從靜止狀態下產生運動需要較大驅動力，但因旋轉系統持續給予鋼珠離心力，只要使鋼珠從靜止轉變成往兩側運動的驅動力是足夠的，一旦鋼珠開始運動外甩後，單靠顆粒間的摩擦力使它在往兩側運動減速至相對靜止的距離會拉長（因鋼珠慣性大），所以造成大部分鋼珠都往兩側靠，近轉軸處鋼珠數減少而下凹形成一近似平坦的底部。



#### 4、 細沙、塑膠珠及鋼珠 3 種顆粒體之中央尖錐

二維堆積顆粒體在轉動過程中，如同液體轉動一樣，有想要形成拋物面的趨勢。但是因為顆粒體間彼此有摩擦力的存在，導致顆粒體在轉動後堆積成 W 的形狀。但中間尖銳的突起為一不穩定平衡狀態。當轉動停止後，容器受到一輕微擾動，中間凸起部分立刻塌陷，轉變為 V 字的形狀(如圖 3-11 系列所示)，最後形成 V 字型就是顆粒體受到摩擦力、正向力與重力的達到靜力平衡的結果。

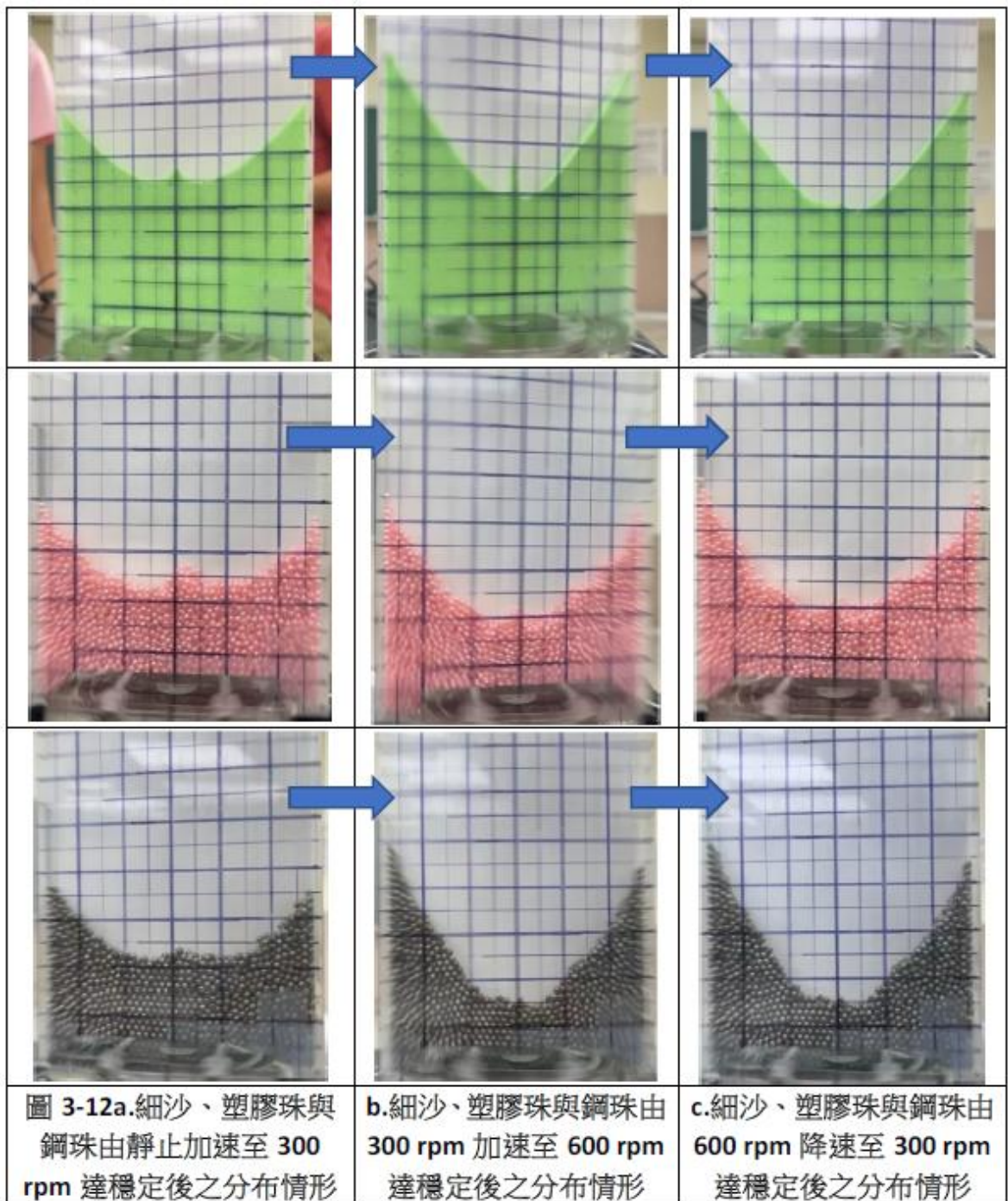


小結論：綜合上面細沙、塑膠珠與鋼珠的探討，可以歸納出近 2 維堆積顆粒體由靜止加速轉動並達穩定時，其堆積之自由面分布會有下列數種情形：

- (1) 摩擦係數較高者(細沙、塑膠珠)：顆粒體受摩擦力影響程度大於離心力，在轉軸附近容易形成中央尖錐區，靠近器壁兩側形成線性堆積區，而當轉速高出某臨界值後，因顆粒體已達最密堆積，堆積表面不太會隨轉速增加而改變。
- (2) 摩擦係數低者(鋼珠)：顆粒體受離心力影響高出摩擦力時，且因鋼珠慣性大，在轉軸附近的鋼珠易往兩側運動，形成一平坦底部；靠近器壁兩側之堆積區會隨轉速增加，逐漸由線性演化為拋物線形式，此時趨向液體表現。

### (三)、轉速變化過程對顆粒體堆積的自由面影響

為瞭解歷史效應對顆粒體轉動堆積帶來的影響，使用細沙、塑膠珠與鋼珠 3 種顆粒體，在 3 秒內由靜止加速至 300 rpm 達穩定；接著再由 300 rpm 逐漸加速至 600 rpm 達穩定後；最後再由 600 rpm 在 3 秒內逐漸減速至 300 rpm 達穩定後分別拍攝相關照片，作成圖 3-12 系列。結果發現當低轉速 300 rpm 增為高轉速 600 rpm 時，3 種顆粒體均可往上運動堆積形成斜率較陡的自由面分布，此時顆粒體的行為較接近可流動的液體；但是由高轉速 600 rpm 降為低轉速 300 rpm 時，3 種顆粒體均大致保持 600 rpm 的分布狀態，無法回到低轉速



速 300 rpm 時的狀態分布，此時顆粒體的行為較接近不能改變外型的固體。

由圖 3-12 可看出顆粒體的堆積現象是一種不可逆的過程，轉動過程中顆粒體的堆積現象與其所經歷的過程密切相關，不具可再現性的特徵。這是因為前述理論探討中的歷史效應所致，與磁滯曲線的現象類似。

#### (四)、不同顆粒體混合後於轉動穩定之自由面分析

##### 1. 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠圓珠

將數量相同(各約 1000 顆)的 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後，以 4 種不同轉速(300 rpm、400 rpm、500 rpm 與 600 rpm) 分別拍攝其堆積情形，結果如圖 3-13 所示。實驗中發現要讓塑膠珠與鋼珠均勻混合非常困難，只能盡量滿足。而 4mm 之塑膠珠因容易卡在容器內，故未做 4mm 鋼珠與 4mm 塑膠珠混合之討論。

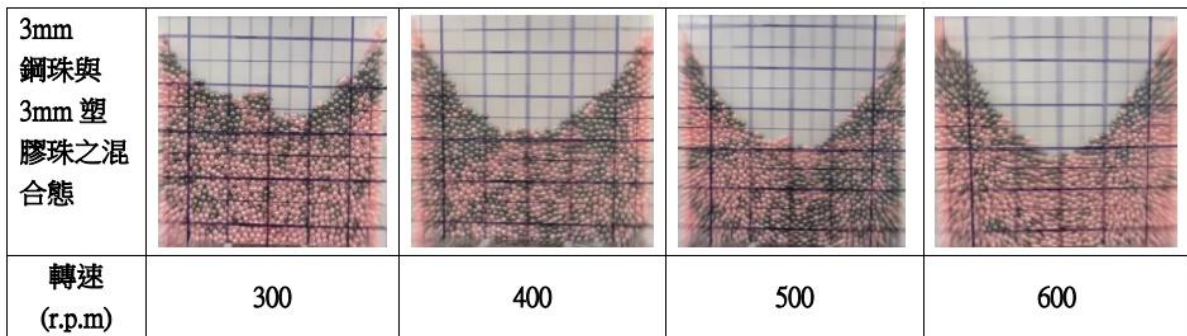


圖 3-13 相同數量之 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後在 4 種不同轉速下堆積分布照片

在此以 300 rpm、400 rpm 500 rpm 與 600 rpm 4 種轉速下比較 3 mm 鋼珠、3 mm 塑膠珠與等量混合下的自由面分布，做成圖 3-14、圖 3-15、圖 3-16 與圖 3-17。

由圖 3-6、圖 3-9 與圖 3-12 可看出 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後的自由面分布同時受到塑膠珠與鋼珠的綜合影響，在 600 rpm 轉速下，純塑膠珠會存在中央尖錐區(圖 3-6)，純鋼珠(圖 3-8)為近似拋物線，但混合態(圖 3-12)的中央尖錐區完全消失，而自由面兩側為近似線性堆積。

由圖 3-14、圖 3-15、圖 3-16 與圖 3-17 之比較可看出，轉速 300 rpm 時，3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與混合態的自由面分布較不相關；400 rpm 混合態自由面大致介於 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠之間。而轉速在 400 rpm -600 rpm，轉速固定下，大致上 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與混合態的自由面凹陷度與兩側堆積斜率為：鋼珠>混合態>塑膠珠。高轉速(500 rpm、600 rpm)下，混合態與鋼珠的自由面幾乎重合，代表高轉速下運動慣性大且摩擦係數小的顆粒體決定了混合態顆粒體堆積的自由面分布。

300r.p.m 下3mm塑膠珠、3mm鋼珠與混合後轉動分布

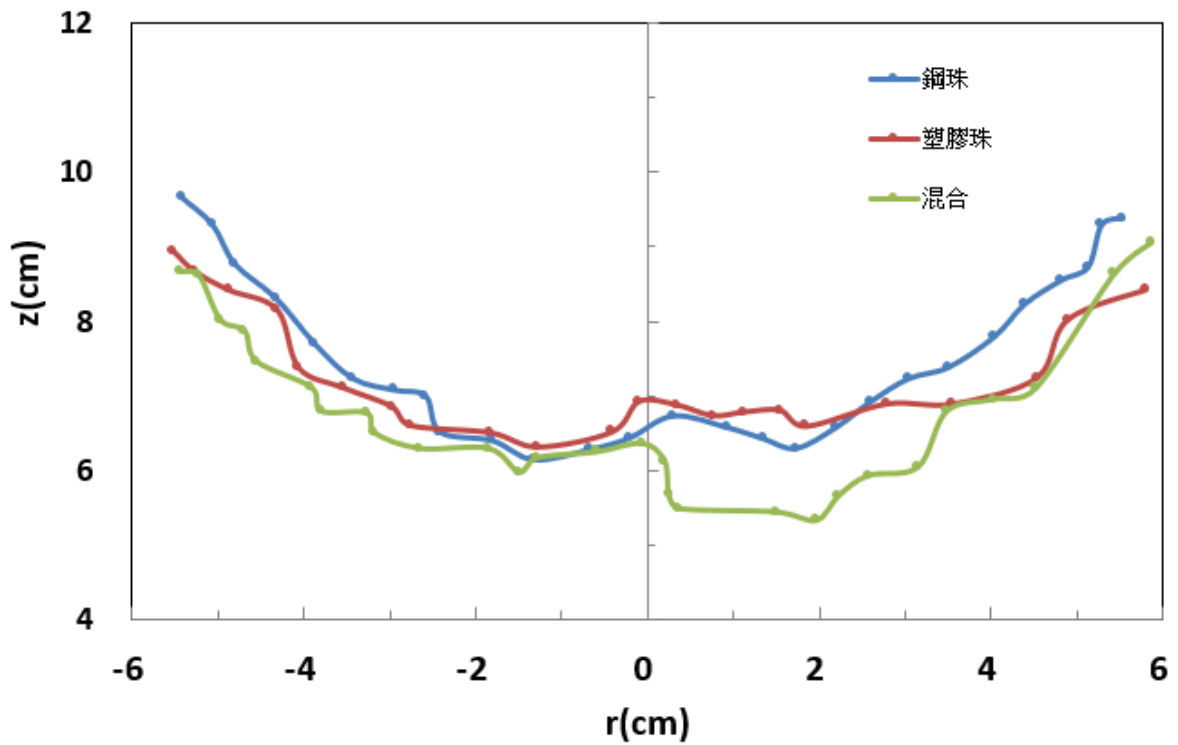


圖 3-14 轉速 300 rpm 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

400 r.p.m 下 3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後之轉動分布

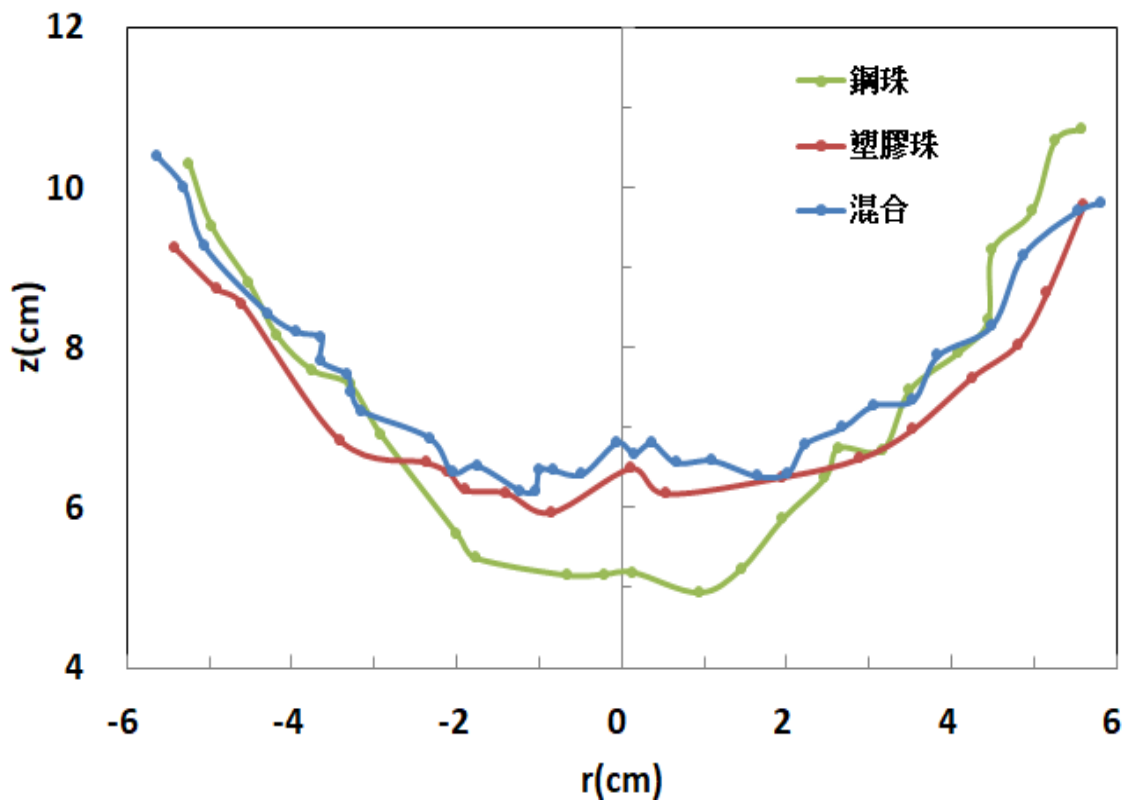


圖 3-15 轉速 400 rpm 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

500r.p.m 下3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後轉動分布

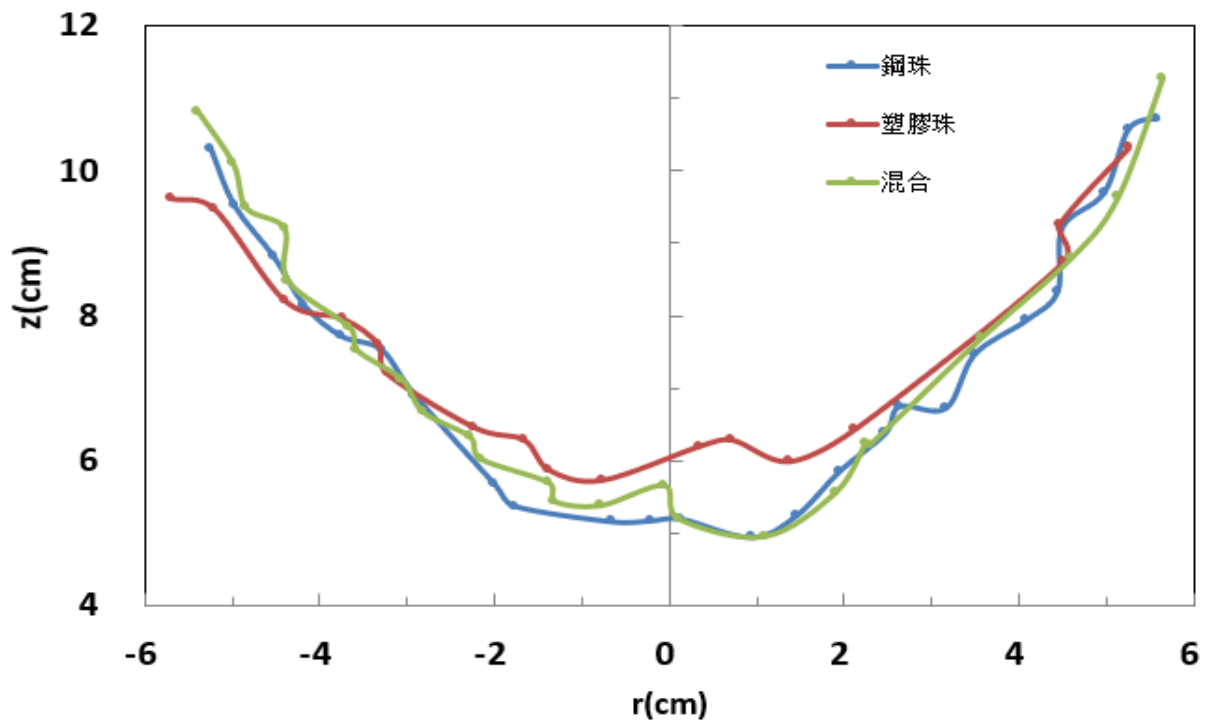


圖 3-16 轉速 500 rpm 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

600r.p.m 下3mm 塑膠珠、3mm 鋼珠與混合後轉動分布

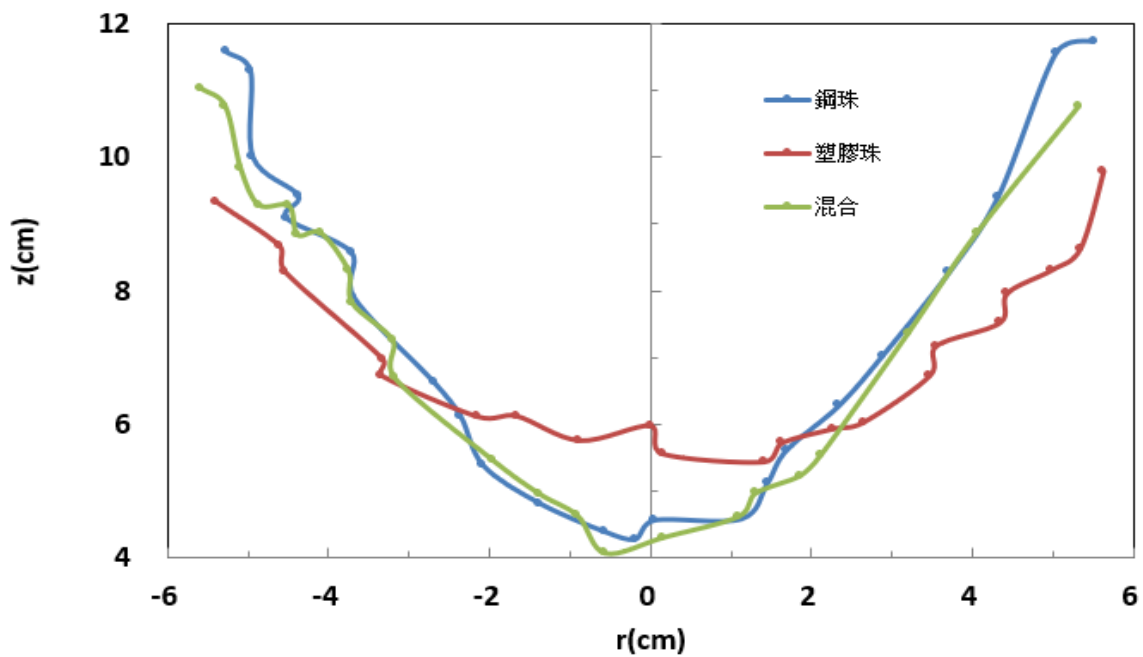
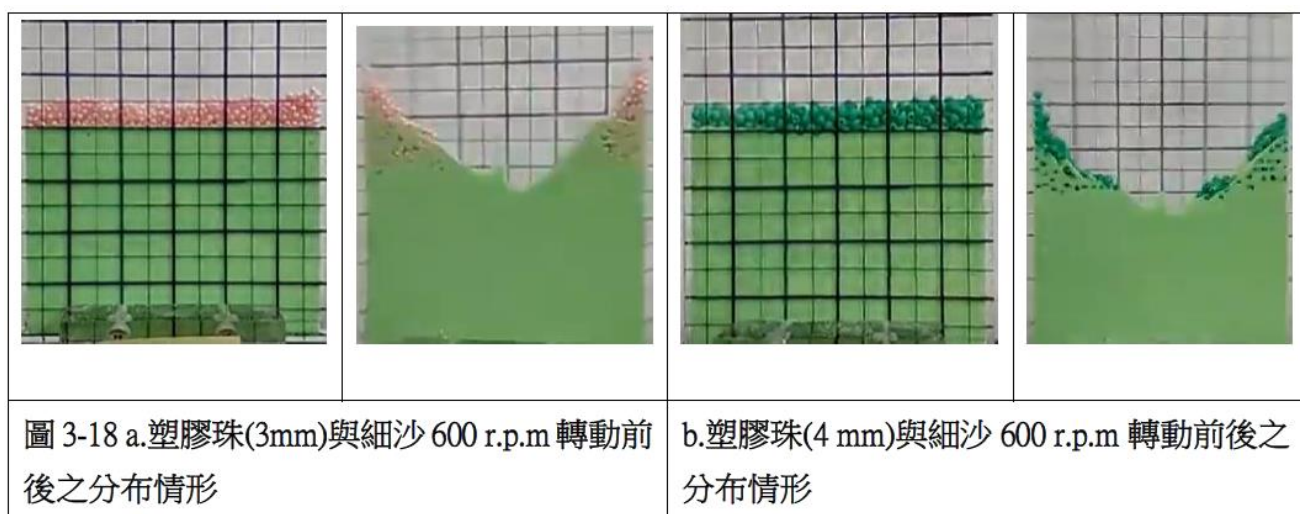


圖 3-17 轉速 600 rpm 下 3mm 鋼珠、3mm 塑膠珠與兩者等量混合下的自由面分布圖

## 2. 細沙與塑膠珠

因為看到電視上製作食品加工製作粉圓，一般都是利用重力與鉛直方向的滾動攪拌，所以發想是否可利用本實驗的高速轉動方式，將細微的粉末混合到顆粒體周圍，達到類似的效果。下面圖 3-18a 與圖 3-18b 為 3mm 塑膠珠與 4mm 塑膠珠分別堆放在細沙表面，在轉動後與細沙混合的情形。因塑膠珠密度小於細沙，要利用重力或鉛直振動將塑膠珠混入細沙中並不容易。由下圖可看出以本實驗高速轉動方式似乎可將細沙較為均勻的分散在塑膠珠附近，達到預期效果。此種轉動方式未來似乎可以應用在食品加工或製藥技術上。



## 四、結論與應用

根據以上分析討論，在此做出下列數點結論：

(一)扁平長方容器內之顆粒體高速轉動時，其自由面有要成為拋物線的趨勢，但因有摩擦力的存在導致顆粒體易出現下列之分布情形：

- 1、細沙顆粒體：中轉速(200 rpm)下因離心力差異，由內而外形成平坦區、凹陷區以及線性堆積區之分布；高轉速(>300 rpm)下由外而內會形成線性堆積區、中央尖錐區的堆積分布。由靜止加速至轉動穩定時，轉速越快通常堆積之自由面越凹陷，中央尖錐區面積越小。兩側線性堆積區斜率隨轉速提升而增加，但轉速超過 400 rpm 後，斜率趨向一定值。
- 2、塑膠珠顆粒體：轉動堆積之自由面與細沙類似，但不像細沙對稱與平滑。當轉速超過 500 rpm，因顆粒體已達最密堆積，塑膠珠的堆積分布較不隨轉速改變。
- 3、鋼珠於中轉速下由外而內也會形成線性堆積區、中央尖錐區的堆積分布；但較高轉速下因鋼珠摩擦力小且運動慣性大，轉軸附近的鋼珠大都往兩側運動造成

轉軸附近形成平坦的底部。另兩側的線性堆積區隨轉速增加逐漸演變成拋物線分布。尺寸較小的鋼珠流體化的能力較強，轉速較低時即能形成近似拋物線之自由面。

4、近二維堆積顆粒體當轉動過程達穩定後，其自由面分布會受經過的歷程所影響，不具可再現性。

(二)相同數量的 3mm 鋼珠與 3mm 塑膠珠混合後以高速(>500 rpm)轉動，其堆積分布與相同轉速下的鋼珠一致，代表混合態高速轉動後穩定堆積的自由面分布是由質量大的顆粒體所決定。

(三)本實驗未來可推廣至食品加工或製藥之應用。

## 五、參考文獻

- (一)Wuyi Wan, Investigation on the attenuation of a rotating liquid motion in a cylinder with boundary resistance.2022.5.5 取自：  
[https://www.researchgate.net/publication/289217208\\_Investigation\\_on\\_the\\_attenuation\\_of\\_a\\_rotating\\_liquid\\_motion\\_in\\_a\\_cylinder\\_with\\_boundary\\_resistance](https://www.researchgate.net/publication/289217208_Investigation_on_the_attenuation_of_a_rotating_liquid_motion_in_a_cylinder_with_boundary_resistance)
- (二)沈立宗，鄒仕豪，蕭述三 (2016)，粉顆粒體偏析與混合現象之研究發展，化工，42 頁，第 63 卷第 2 期。2022.4.20 取自：  
[http://www.twiche.org.tw/ezfiles/0/1000/attach/89/pta\\_687\\_4196094\\_71246.pdf](http://www.twiche.org.tw/ezfiles/0/1000/attach/89/pta_687_4196094_71246.pdf)
- (三)蔡日強(2022)，電影《沙丘》的沙子是流體還是固體？談談顆粒流的物理學，中央研究院-研之有物。2022.8.01 取自：<https://research.sinica.edu.tw/granular-flow-jih-chiang-tsai/>
- (四)Terunori Irie, Ryusei Yamaguchi, Sei-ichiro Watanabe, and Hiroaki Katsuragi(2021), Deformation of a rotated granular pile governed by body-force-dependent friction, PHYSICAL REVIEW E 104, 064902
- (五)Youtube 影片，The puzzling physics of sand, The Lutetium Project, 2021.10.12 取自：  
[https://www.youtube.com/watch?v=iml6D\\_Uvz0Q](https://www.youtube.com/watch?v=iml6D_Uvz0Q)

## 【評語】 160022

此作品考慮顆粒種類、容器旋轉速率，探討顆粒在二維旋轉容器內所形成的幾何型貌，指出液體與固體顆粒產生的不同結果，能以簡易理論描述數據，具有科學精神。建議加強數據的量化分析，可讓作品更豐富完整。