

2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160019

參展科別 物理與天文學

作品名稱 冰棒棍骨牌模型建立與運動分析

得獎獎項

就讀學校 臺北市立永春高級中學

指導教師 陳禹潔

作者姓名 何冠霖、張宸豪

關鍵詞 眼鏡蛇波、冰棒棍骨牌

作者簡介



大家好，我們是張宸豪與何冠霖，目前就讀於臺北市立永春高中數理資優班。

高中在數理資優班接觸了專題研究，也開始著手研究這個題目。我們在研究中，不僅學到了學術上的專業知識，也能精進自己在製作報告與上台發表的能力。這個研究一開始在排列冰棒棍骨牌時就遇到了很大的問題，可能是冰棒棍會承受不住而斷裂，可能是在一小小的失誤就必須從頭來過。「冰棒棍骨牌」一直是大家在玩樂之餘的消遣，而其中背後蘊含了許多的物理現象卻不為人知，因此我們才著手研究其中的奧秘。

雖然看上去，骨牌瓦解就只是幾秒的事情，但當我們使用慢動作相機攝時，就會發現其中有許多的物理以及數學知識等著我們去解開。

Abstract

This study aims to track the trajectory of popsicle sticks when exploding, and analyze its physical principle. First, we discuss the basic properties of popsicle sticks, and record the film of its exploding to analyze the principles of the cobra wave. During the process we also found that different sequences initiate cobra waves or C waves, and that when the cobra waves end, its wave crest rotates, which leads us to start to study the principle behind this phenomenon. We used the Tracker program to follow up the trajectory when the popsicle sticks explode. We then found that most of the popsicle sticks have the same functional relation, and set up a model to study its characteristics.

This study has a preliminary outcome. We calculated the Young's constant of the popsicle stick, and came up with a fitting of the waves of it. We also observed different perspectives of an individual popsicle stick, analyzing its overall received force along with motion. On the basis of our observation, we saw a precession occur, and made further discussions into it.

In the future, we wish to combine the Young's constant, fitting waves of the popsicle sticks and the received force of it to establish a physical module of popsicle waves, and study its rotating transition mode. Use it for engineering.

摘要

本研究主要研究冰棒棍骨牌在崩解時波峰的軌跡，並且逐步分析物理原理。首先，討論冰棒棍的基本性質，接著拍攝崩解時的影片，並分析產生眼鏡蛇波的原理，過程中發現了不同的排列順序會分別產生眼鏡蛇波或C波，以及當以眼鏡蛇波結尾時，波峰都會有一個旋轉的現象我們使用了 Tracker 程式來追蹤冰棒棍骨牌崩解時的波峰軌跡，且發現大部分冰棒棍軌跡都呈現相同的函數關係，並建立模型來研究其性質。

本研究已有初步的結果，我們計算出了冰棒棍的楊氏係數，並且做出了冰棒棍波形的擬合。另外也從不同觀察角度觀察出冰棒棍的運動情形，分析出單一冰棒棍的整體受力與運動情形。根據單一冰棒棍的轉動狀況，觀察出類似於進動現象，並對此深入討論。

未來我們希望能夠結合楊氏係數、冰棒棍波形疊合以及冰棒棍受力情形來建立專屬於冰棒棍波的物理模型，並研究其轉動互換模式。將其利用在工程學上。

壹、研究動機

在一次的骨牌遊戲中，我們思考到，既然只需要碰觸第一塊積木，就能使整體瓦解，那能不能不使用積木，但也能達到骨牌一樣的效果呢？我們發現將冰棒棍以十字交叉的方式排列，就能和骨牌一樣，只要微微碰觸到一根，其整體結構將整個瓦解，達到骨牌的效果，但這冰棒棍骨牌並不是在最後倒下時排出特殊的圖案，而是在整體結構瓦解時，會產生一瞬的特殊波形，為了解其為何會產生這個波形的原因，所以我們決定著手研究。

貳、研究目的

- 一、計算冰棒棍的楊氏係數與推算能量大小。
- 二、進行冰棒棍行進時的波形函數疊合及模型建立。
- 三、分析冰棒棍行進的受力狀況及運動情形。

參、研究設備及器材

	器材名稱	數量
1	Excel 程式	1 套
2	Photoshop 程式	1 套
3	Tracker 程式	1 套
4	冰棒棍	數根
5	攝影器材	1 臺
6	尺	1 隻
7	砝碼 (1 公斤)	1 個
8	量角器	1 個
9	量筒	1 個
10	電子秤	1 臺
11	游標卡尺	1 隻
12	空白布幕	2 片

肆、研究過程及方法

一、實驗原理：

先將數根冰棒棍以雙十字穿插交疊，至實驗所需之長度，並以一根冰棒棍固定起始端作為啟動棒，最後將尾端固定。在交疊的過程中，冰棒棍會受到前後根冰棒棍的擠壓而變形彎曲，累積彈力位能（圖 2），當抽掉啟動棒，破壞整體的靜力平衡，將累積的彈力位能轉換成重力位能及動能，使整體結構由抽出的冰棒棍往兩邊崩解，崩解的軌跡會因排列時擺放的先後順序而產生 C 波或眼鏡蛇波。在眼鏡蛇波的情況中，冰棒棍會向下被噴出，這提供的其餘沒崩解的結構擁有上升的推力，隨著冰棒棍的彈出，我們可以觀察其一瞬間出現的冰棒棍波，並且尋找函數試著將其與冰棒棍波進行疊合，建立專屬冰棒棍波的物理模型。

二、實驗步驟：

（一）實驗一：測量冰棒棍的楊氏係數以及計算冰棒棍骨牌所儲存的位能以及動能大小。

1. 測量多根冰棒棍的長、寬、厚度、體積等基本材料數值。
2. 實驗裝置如圖 1。
3. 帶入公式計算。

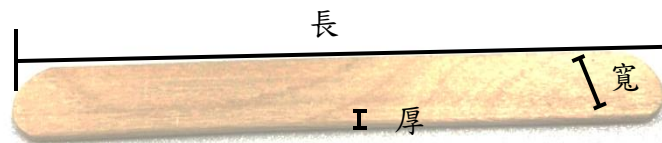


圖 1：冰棒棍圖（資料來源：研究者自製）

（二）實驗二：進行冰棒棍行進時的波形函數疊合。

1. 將一根冰棒棍作為起始啟動棒，冰棒棍以十字交叉的方式排列，將冰棒棍的尾與另一根冰棒棍的頭交疊。（如圖 2）
2. 啟動棒抽起，使冰棒棍骨牌開始瓦解、行進。
3. 利用慢動作相機拍攝將影片拆解成許多張照片，再利用軟體 Photoshop 進行照片疊合。
4. 尋找函數與其波形疊合並且不斷調整函數使其越來越相近。
5. 探討數據並分析。

(三) 實驗三：分析冰棒棍行進的受力狀況及運動情形。

1. 將一根冰棒棍作為啟動棒，冰棒棍以十字交叉的方式排列，將冰棒棍的尾與另一根冰棒棍的頭交疊。(如圖 2)
2. 將啟動棒抽起，使冰棒棍骨牌開始瓦解、行進。
3. 利用慢動作相機拍攝。
4. 觀察單一根並分析其運動情形。
5. 進行數據分析與討論。

三、實驗裝置：

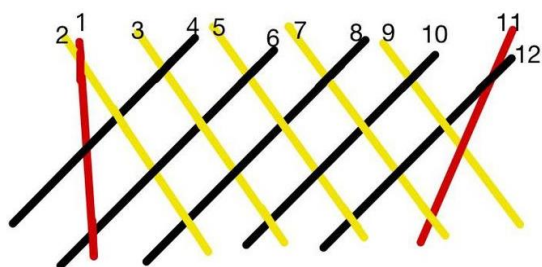


圖 2：冰棒棍排放（資料來源：研究者自製）

伍、研究結果

一、文獻探討：

(一) 眼鏡蛇波

依據 Jean-Philippe Boucher, Christophe Clanet、David Quéré、Frédéric Chevy (2017) 《*Physical Review Letters*》雜誌上的論文中，描述了他們用冰棒棍進行的一系列實驗，他們發現，眼鏡蛇波是由冰棒棍排列次穩太柵欄狀爆裂所引起的，將冰棒棍的結構破壞，使存在冰棒棍中的彈性位量釋放，使冰棒棍彈起(如圖 2)。

二、實驗數據：

(一) 實驗一：測量冰棒棍之楊氏係數

計算冰棒棍的楊氏係數公式為： $E = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot a \cdot b^3 \cdot h}$ (E 為楊氏係數， F 為外力大小， a 為寬度， b 為厚度， l 為冰棒棍長度， h 為形變大小)

冰棒棍的基本材料數值。

表 1：冰棒棍的長、寬、高 (資料來源：研究者自製)

冰棒棍編號	長 l (m)	寬 a (m)	厚 b (m)
1	1.498×10^{-1}	1.770×10^{-2}	2.10×10^{-3}
2	1.500×10^{-1}	1.760×10^{-2}	2.10×10^{-3}
3	1.503×10^{-1}	1.770×10^{-2}	2.00×10^{-3}
4	1.500×10^{-1}	1.700×10^{-2}	2.20×10^{-3}
5	1.501×10^{-1}	1.740×10^{-2}	2.40×10^{-3}
6	1.499×10^{-1}	1.720×10^{-2}	2.20×10^{-3}
7	1.495×10^{-1}	1.730×10^{-2}	2.20×10^{-3}
8	1.506×10^{-1}	1.720×10^{-2}	2.10×10^{-3}
9	1.503×10^{-1}	1.750×10^{-2}	2.10×10^{-3}
10	1.505×10^{-1}	1.740×10^{-2}	2.17×10^{-3}
平均	1.501×10^{-1}	1.74×10^{-2}	2.16×10^{-3}
標準不確定度	1.000×10^{-4}	7.000×10^{-5}	3.48×10^{-5}

利用量筒與電子秤測量出冰棒棍的體積與質量。

表 2：冰棒棍的體積、質量（資料來源：研究者自製）

冰棒棍編號	體積 (mm^3)	質量 (kg)
1	2.60×10^{-6}	3.50×10^{-3}
2	2.75×10^{-6}	4.00×10^{-3}
3	2.75×10^{-6}	3.70×10^{-3}
4	2.60×10^{-6}	3.80×10^{-3}
5	2.80×10^{-6}	3.70×10^{-3}
6	2.75×10^{-6}	3.60×10^{-3}
7	2.75×10^{-6}	3.70×10^{-3}
8	2.75×10^{-6}	3.70×10^{-3}
9	2.70×10^{-6}	3.60×10^{-3}
10	2.70×10^{-6}	3.70×10^{-3}
平均	2.72×10^{-6}	3.70×10^{-3}
標準不確定度	2.11×10^{-8}	4.44×10^{-5}

其中形變量的測量是藉由將冰棒棍兩端固定，在中間連接一細線，另一端連接彈簧秤，接著拉動彈簧秤至 1 公斤重，觀察冰棒棍的形變量。

表 3：冰棒棍形變及外力（資料來源：研究者自製）

冰棒棍編號	形變 h (m)	外力 F (N)
1	6.05×10^{-4}	9.8
2	7.50×10^{-4}	9.8
3	6.50×10^{-4}	9.8
4	5.00×10^{-4}	9.8
5	4.00×10^{-4}	9.8
6	4.00×10^{-4}	9.8
7	5.00×10^{-4}	9.8
8	7.00×10^{-4}	9.8
9	6.00×10^{-4}	9.8
10	5.50×10^{-4}	9.8
平均	5.66×10^{-4}	9.8
標準不確定度	3.62×10^{-5}	0

利用上述數據計算冰棒棍的楊氏係數。 $E = \frac{F \cdot l^3}{4 \cdot a \cdot b^3 \cdot h}$

表 4：冰棒棍的楊氏係數（資料來源：研究者自製）

冰棒棍編號	(N/m^2)
1	7.73×10^{10}
2	6.76×10^{10}
3	9.04×10^{10}
4	9.14×10^{10}
5	8.61×10^{10}
6	1.12×10^{11}
7	7.78×10^{10}
8	6.53×10^{10}
9	8.56×10^{10}
10	9.42×10^{10}
平均	8.48×10^{10}
標準不確定度	4.15×10^{10}

接著我們利用上面所有數據的平均帶入公式 $E_{el} = \frac{18Eab^5}{l^3}$ ，計算彈力位能。

表 5：冰棒棍的各數值平均與能量（資料來源：研究者自製）

楊氏係數 E	寬 a (m)	厚 b (m)	長 l (m)
8.484×10^{10}	1.74×10^{-2}	2.16×10^{-3}	1.501×10^{-1}
儲存能量 (J)			
3.81×10^{-1}			

(二) 實驗二：進行冰棒棍行進時的波形函數疊合。

我們取不同根數冰棒棍疊合圖中清楚的幾處波形進行函數的擬合，藉由不斷調整係數將其圖形看起來較接近，最後利用相關係數 R 的計算驗證其相似程度。

1. 對 40 根冰棒棍的波形進行疊合。



圖 3：40 根冰棒棍疊合圖（資料來源：研究者自製）

(1) A 處波形與擬合函數關係圖

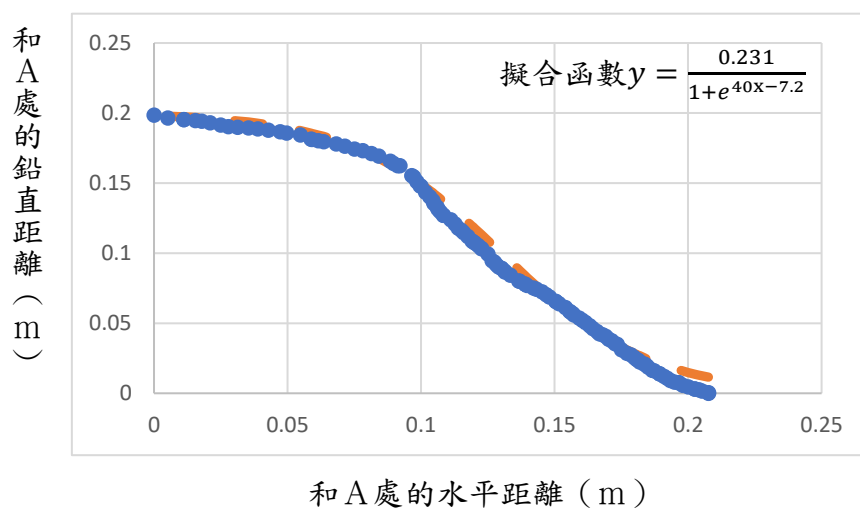


圖 4：40 根冰棒棍 A 處波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99647$$

(2) B 處波形與擬合函數關係圖

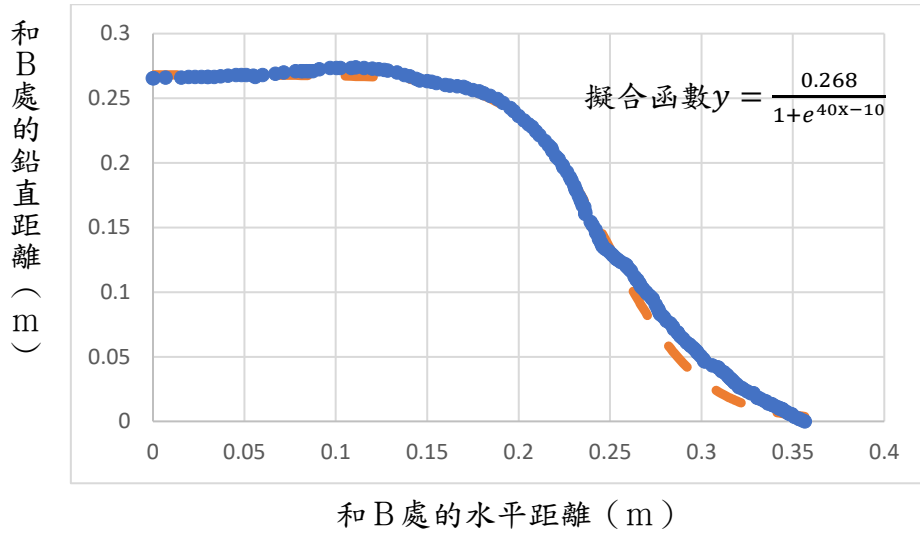


圖 5：40 根冰棒棍 B 處波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99745$$

(3) C 處波形與擬合函數關係圖

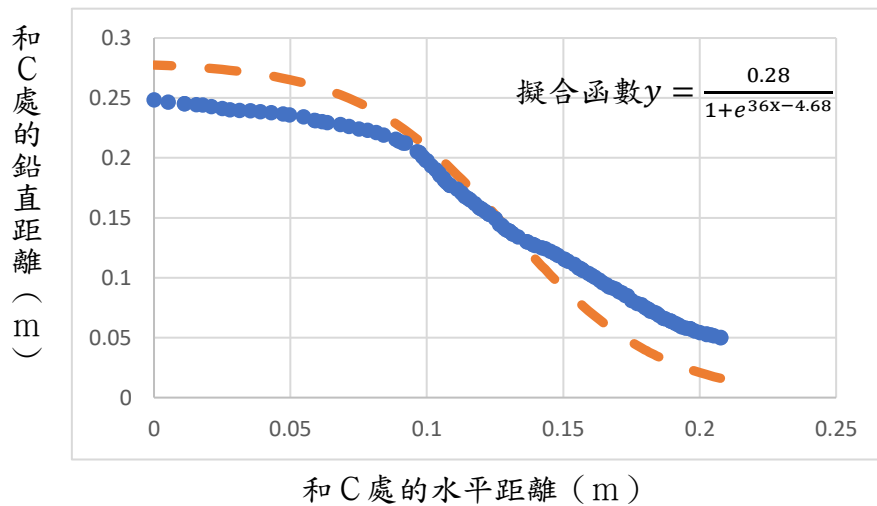


圖 6：40 根冰棒棍 C 處波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99748$$

1. 對 50 根冰棒棍的波形進行疊合。



圖 7：50 根冰棒棍疊合圖（資料來源：研究者自製）

(1) A 處波形與擬合函數關係圖

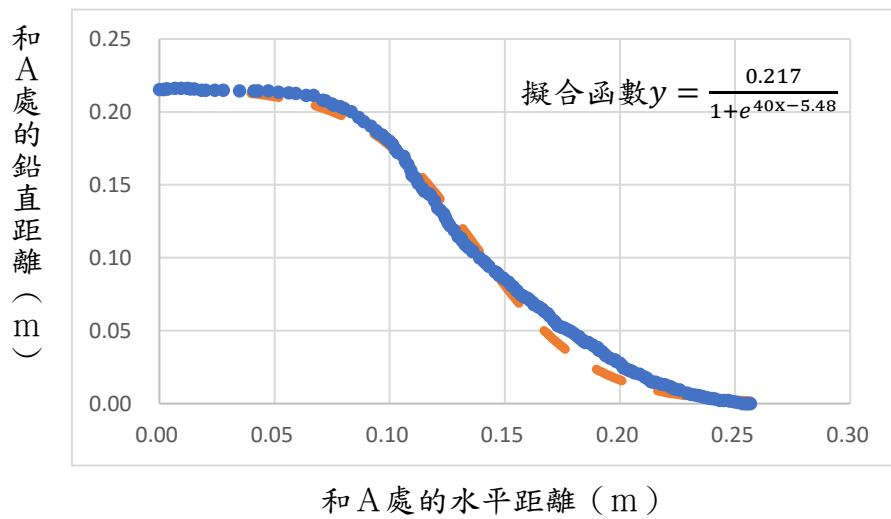


圖 8：50 根冰棒棍 A 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99646$$

(2) B 處波形與擬合函數關係圖

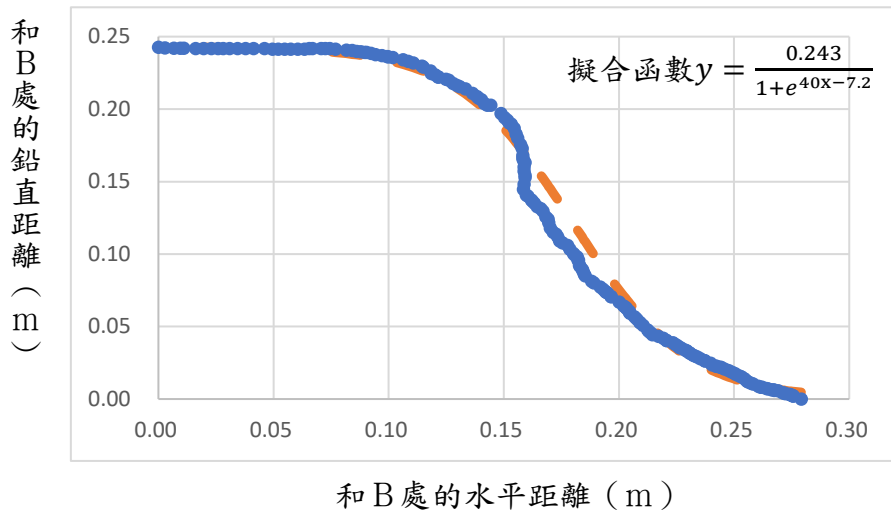


圖 9：50 根冰棒棍 B 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99361$$

(3) C 處波形與擬合函數關係圖

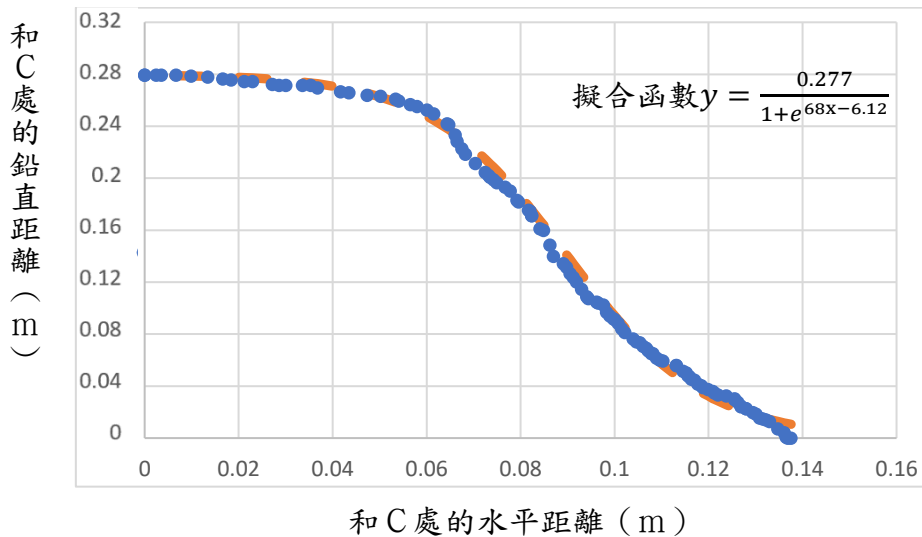


圖 10：50 根冰棒棍 B 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99845$$

1. 對 60 根冰棒棍的波形進行疊合。



圖 11：60 根冰棒棍疊合圖（資料來源：研究者自製）

(1) A 處波形與擬合函數關係圖

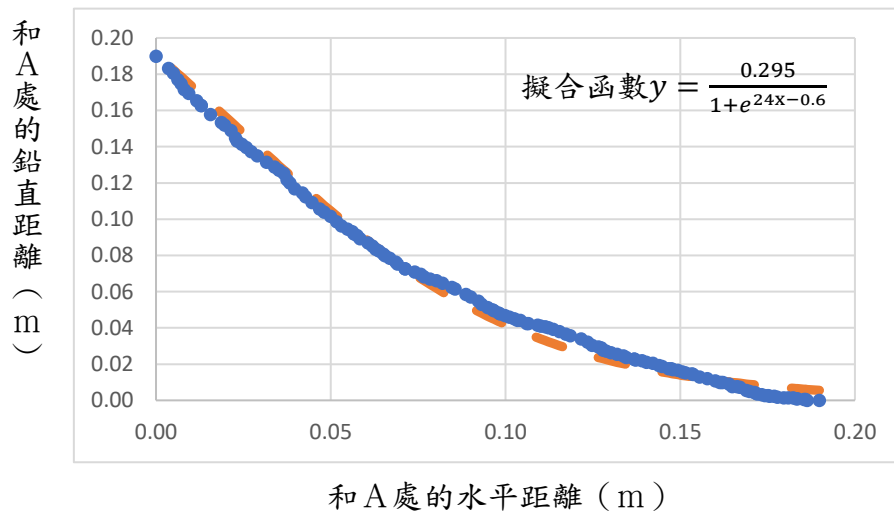


圖 12：60 根冰棒棍 A 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99709$$

(2) B 處波形與擬合函數關係圖

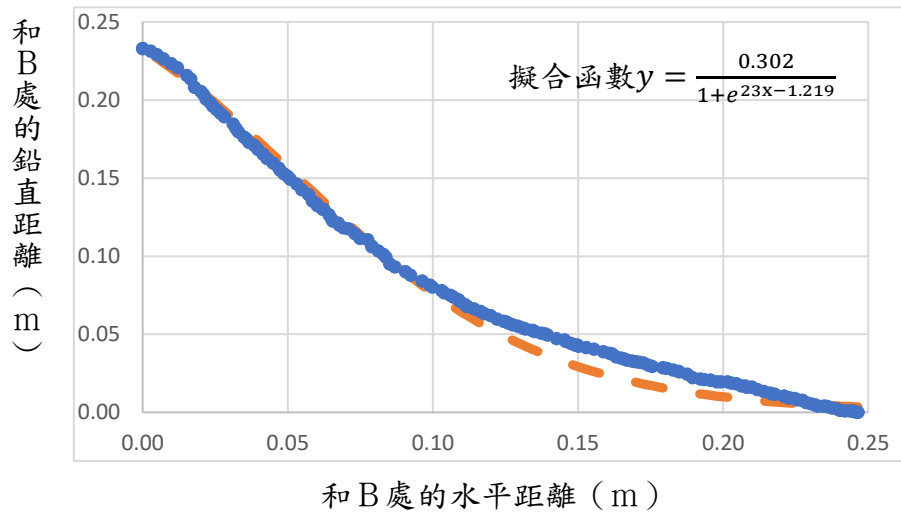


圖 13：60 根冰棒棍 B 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99692$$

(3) C 處波形與擬合函數關係圖

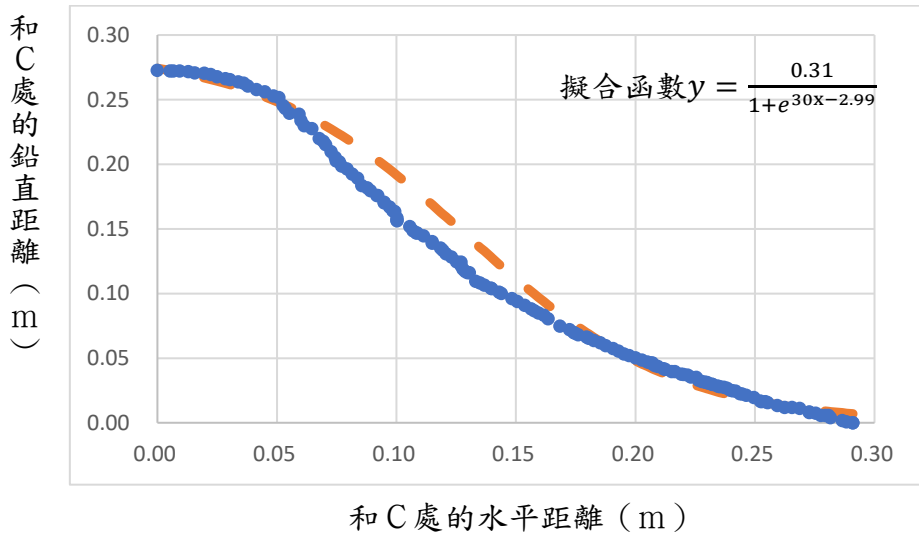


圖 14：60 根冰棒棍 C 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.99020$$

(4) D 處波形與擬合函數關係圖

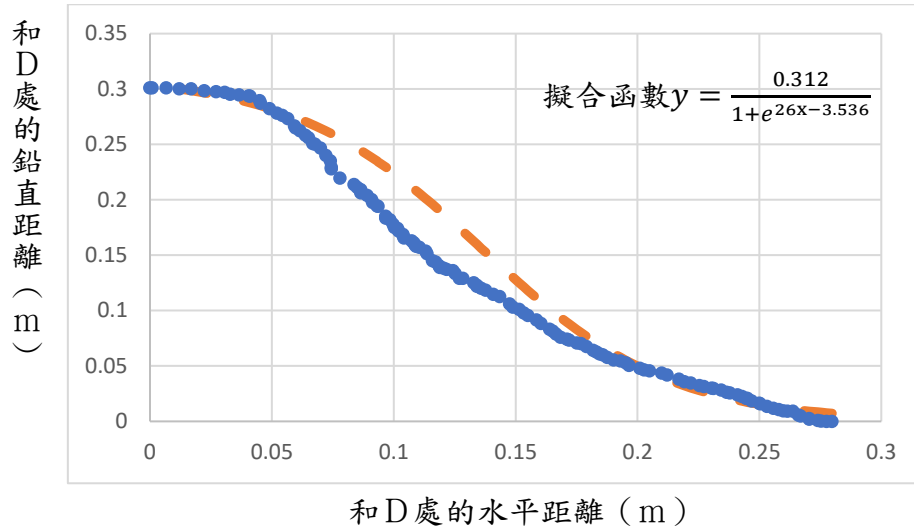


圖 15：60 根冰棒棍 D 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.98220$$

(5) E 處波形與擬合函數關係圖

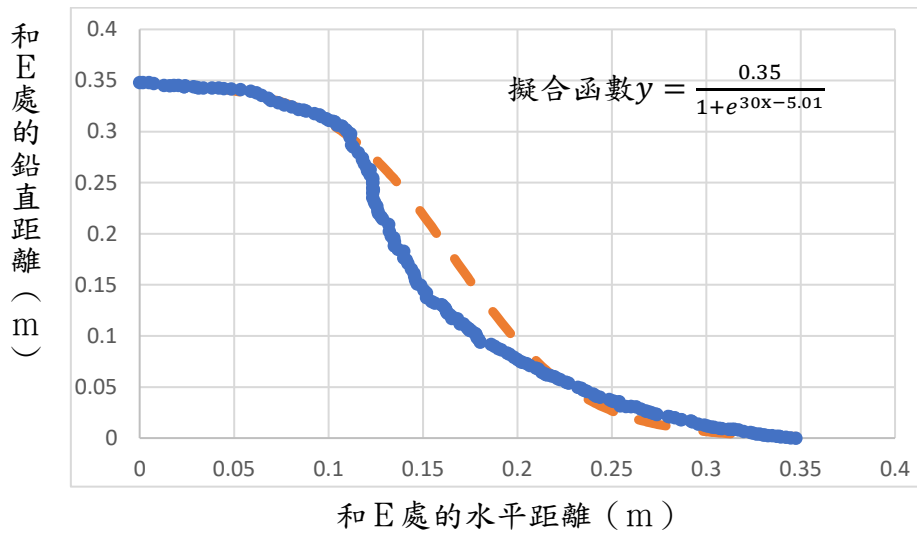


圖 16：60 根冰棒棍 E 波形疊合圖（資料來源：研究者自製）

$$\text{相關係數 } R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - \bar{y})^2}} = 0.97643$$

2. 結論：

(1) 數據分析

表 6：冰棒棍骨牌各位置波形函數的分子係數（資料來源：研究者自製）

冰棒棍根數 \ 位置	40 根	50 根	60 根
A	0.231	0.217	0.295
B	0.268	0.243	0.302
C	0.280	0.277	0.310

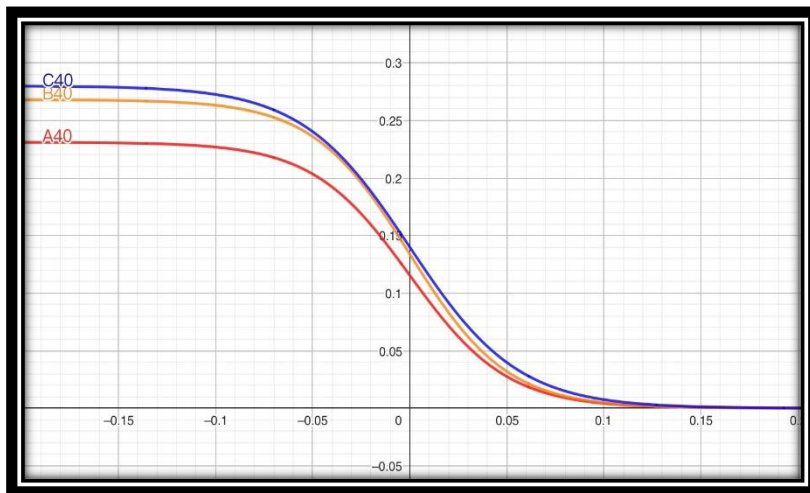


圖 17：40 根冰棒棍不同位置的波形圖

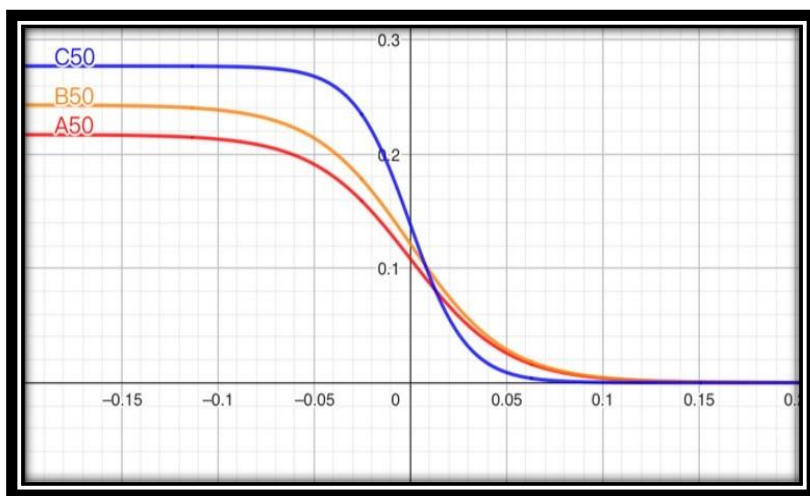


圖 18：50 根冰棒棍不同位置的波形圖

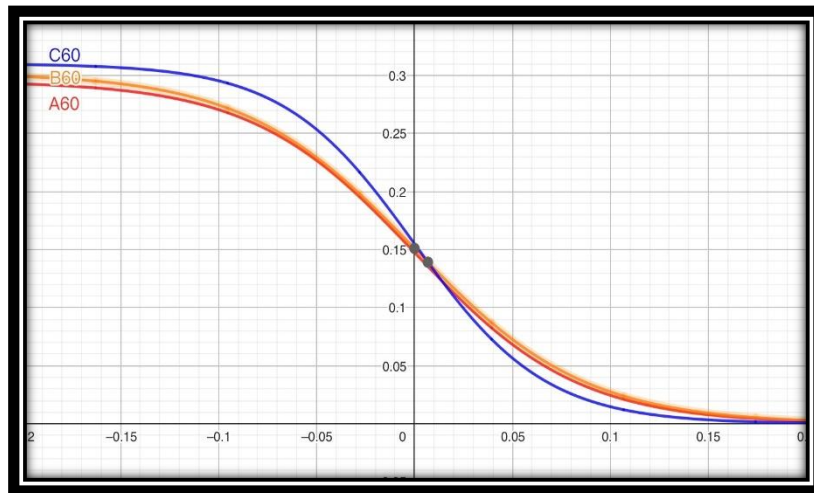


圖 19：60 根冰棒棍不同位置的波形圖

(2) 討論：

A. 從表 6 中我們發現從 A 位置的波形係數行進到 B 位置時，疊合波形的係數變大了，而當繼續行進到 C 位置時疊合波形的係數再次變大了。推測冰棒棍骨牌的崩解高度會依波形行進的位置依序增加。一開始排列時，當根數增加在排列上會明顯感受到冰棒棍間越緊繃，因此預期排列時會依序使其累積的彈力位能增加，而使得彈開後崩解高度增加。此部分與預期結果相符。

B. 由（圖 17）（圖 18）（圖 19）中，C 位置的波形高於 B 位置的波形，也高於 A 位置的波形，而這樣的結果顯示了隨著冰棒棍的崩解，波形也會隨之升高。而表 6 中各位置波形函數的分子係數同樣也隨著冰棒棍的崩解，其係數不斷增加，於是波形高度會與波形函數的分子係數呈正相關。

實驗三：分析冰棒棍行進的受力狀況及運動情形。

1. 進動介紹：進動隸屬於轉動，是一物體高速繞行自轉軸旋轉，同時又繞行另一自轉中心旋轉，如陀螺儀一般，又稱為旋進。
2. 討論
 - (1) 俯視觀點

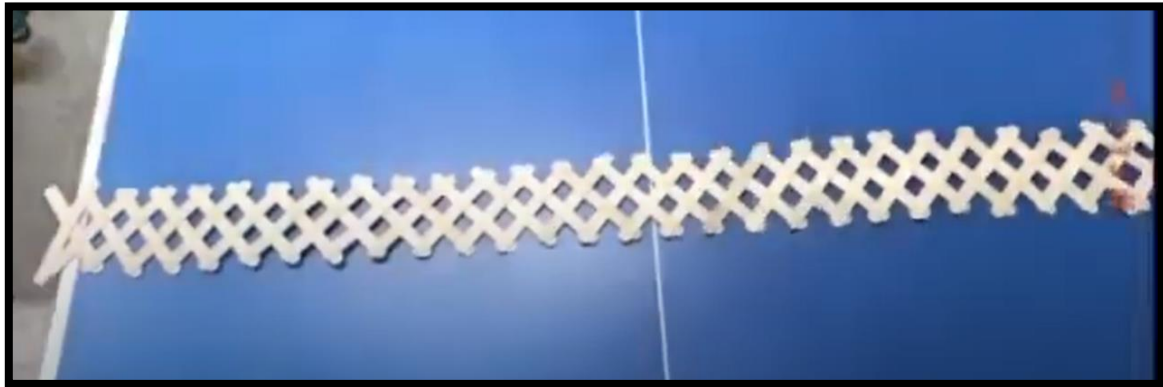


圖 20：結構俯視圖（資料來源：研究者自製）

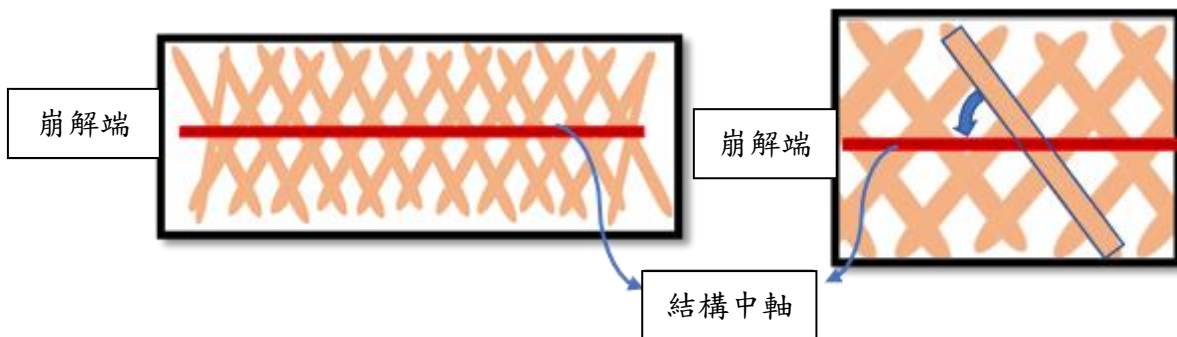


圖 21：結構俯視放大圖（資料來源：研究者自製）

- A. 結構中軸：是位於整段結構長端之中軸。
- B. 從俯視圖來看，單看一根冰棒棍崩解的情形時，每根冰棒棍較靠近崩解端的一端會向著結構中軸旋出整體結構。
- C. 觀察同一冰棒棍，由於前面的冰棒棍已旋出，而後方的冰棒棍的位能又會

轉換成動能向前推進，導致冰棒棍有一個向前的運動方向；排列的結構上下交織，並且冰棒棍與冰棒棍之間擁有夾角關係，導致冰棒棍獲得了旋轉的能量。冰棒棍有了向前的運動以及旋轉的作用力，才導致了水平旋轉。此時冰棒棍受力如下。

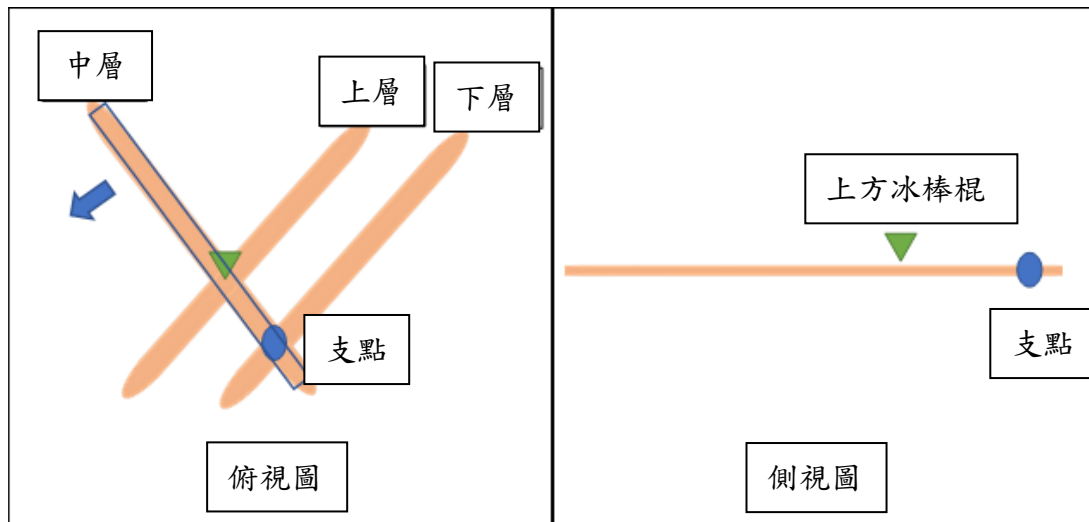


圖 22：冰棒棍俯視及側視圖（資料來源：研究者自製）

(2) 正視觀點

A. 從正視圖來看，冰棒棍脫離整體結構時，冰棒棍因受到擠壓，導致冰棒會遠離結構中軸旋轉，使得冰棒棍被甩出整體結構。



圖 23：結構正視圖（資料來源：研究者自製）

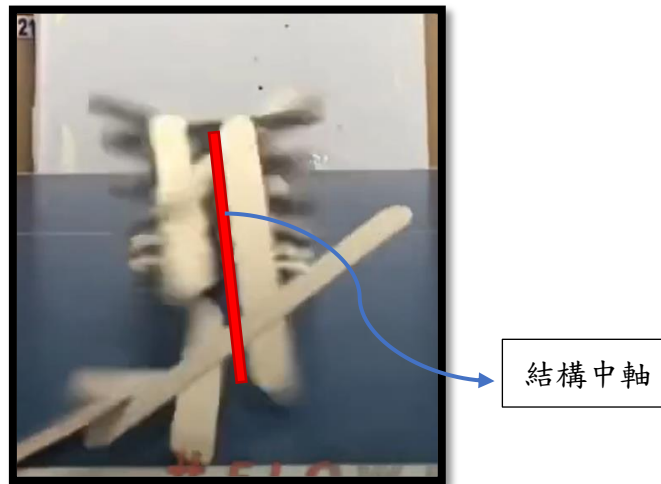


圖 24：結構正視放大圖（資料來源：研究者自製）

B.綠色施力點並不在冰棒棍的自轉軸上，而這個偏差就會導致冰棒棍逆時針旋轉，也就朝向結構中軸旋轉。在射出的冰棒棍中，每根冰棒棍都會向結構中軸翻轉，並且擁有一條位於冰棒棍長端的自轉軸。

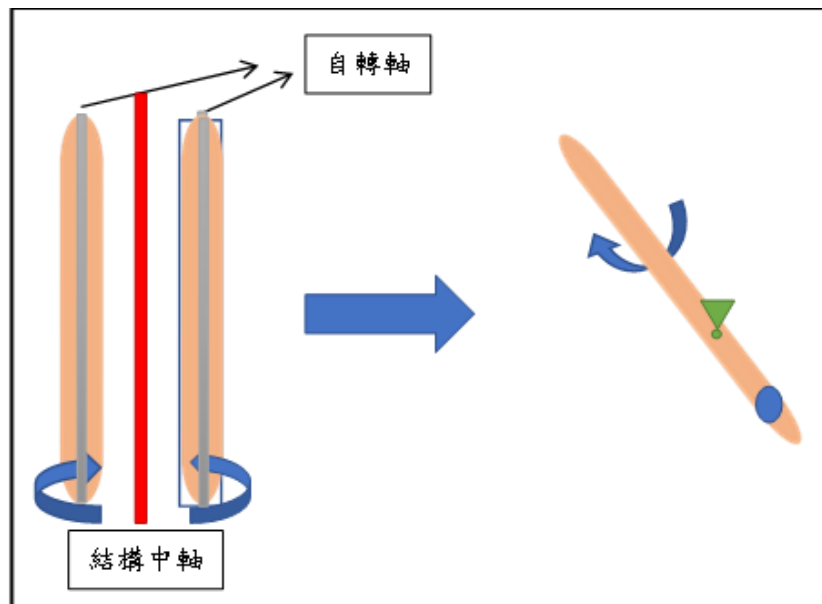


圖 25：單根冰棒棍俯視圖（資料來源：研究者自製）

(3) 側視觀點

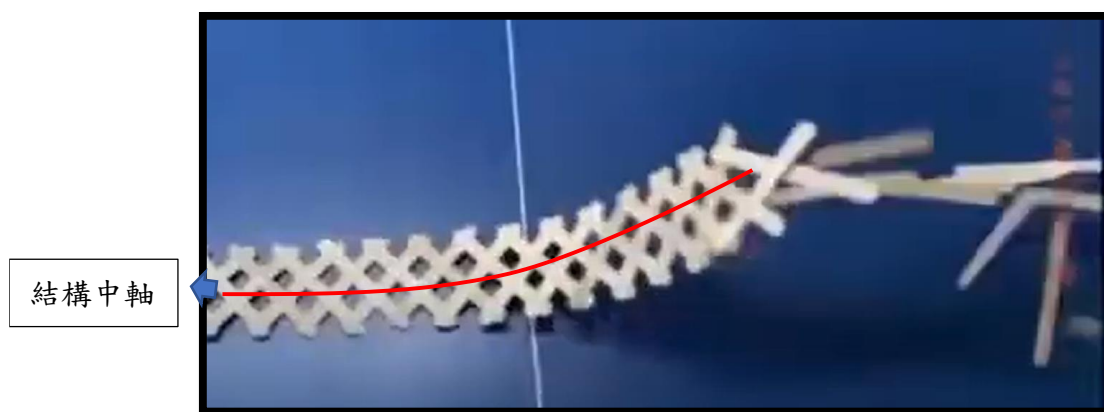


圖 26：結構俯視圖（資料來源：研究者自製）



圖 27：結構側視圖（資料來源：研究者自製）

當我們從側面觀察冰棒棍時，冰棒棍射出時的受力情形如下。

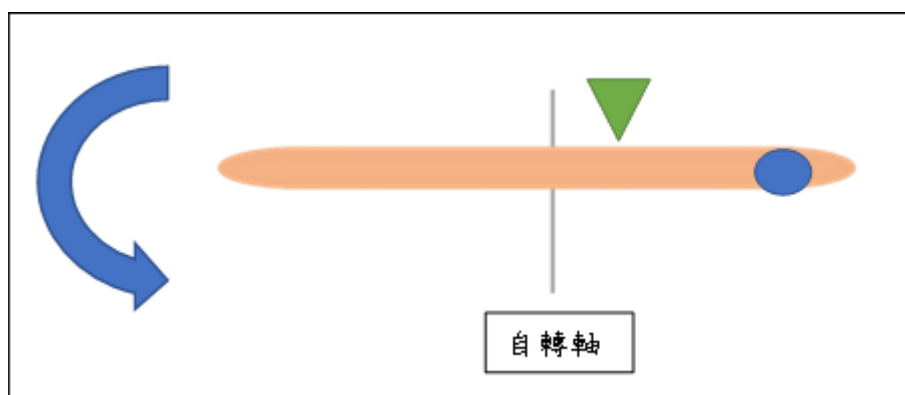


圖 28：單根冰棒棍側視圖（資料來源：研究者自製）

A.箭頭都是其他冰棒棍所造成的推力，導致冰棒棍會擁有一條寬的自轉軸，並且朝向崩解端旋轉，而我們觀察到冰棒棍剛被射出時，冰棒棍不是繞著中軸旋轉，而隨著時間的推移，轉動逐漸穩定，最後冰棒棍將有一條短端的自轉軸，也是此冰棒棍的對稱軸。

3. 尋找冰棒棍公轉軸

在側視的視角，追蹤同一影片不同位置的冰棒棍飛行軌跡追蹤，發現軌跡類似於二次函數，再利用橢圓進行擬合，藉由不斷調整係數將其圖形看起來較接近，最後利用相關係數 R 的計算驗證其相似程度。接著利用橢圓的半短軸及半長軸，尋找出橢圓的中心，最後利用橢圓的離心率尋找冰棒棍的公轉軸。

(1) 二次函數與橢圓的擬合

與桌面鉛直距離 (m)

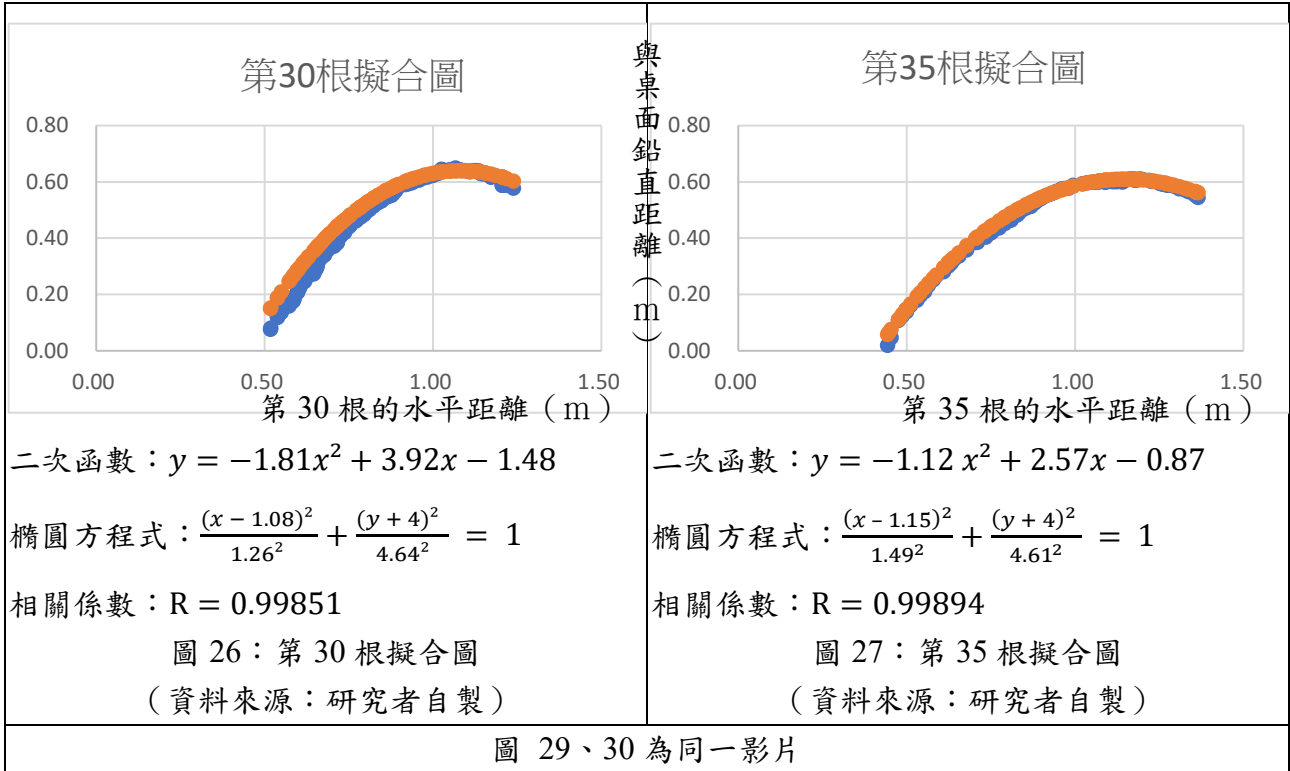


圖 29、30 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

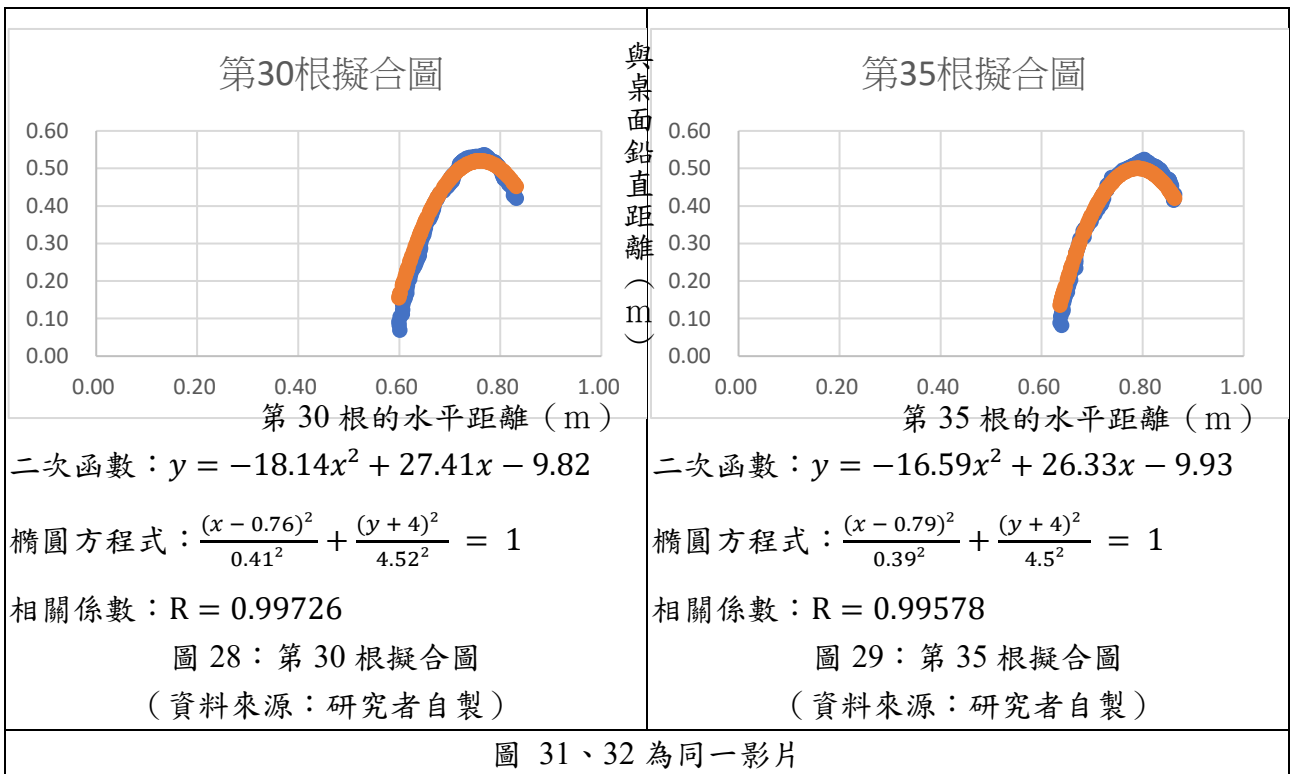
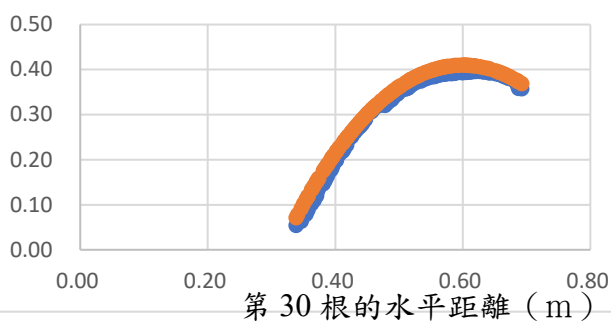


圖 31、32 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第30根擬合圖



二次函數： $y = -5.15x^2 + 6.19x - 1.45$

橢圓方程式： $\frac{(x-0.6)^2}{0.68^2} + \frac{(y+4)^2}{4.41^2} = 1$

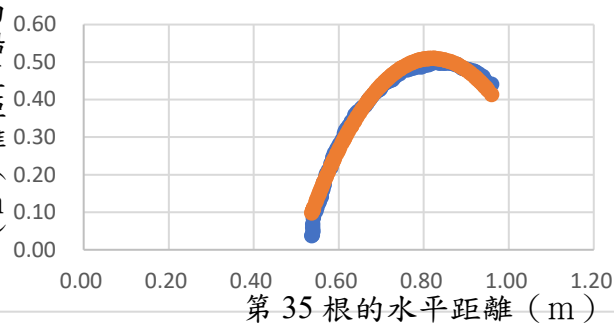
相關係數： $R = 0.99835$

圖 30：第 30 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第35根擬合圖



二次函數： $y = -5.05x^2 + 8.32x - 2.92$

橢圓方程式： $\frac{(x-0.82)^2}{0.68^2} + \frac{(y+4)^2}{4.51^2} = 1$

相關係數： $R = 0.99393$

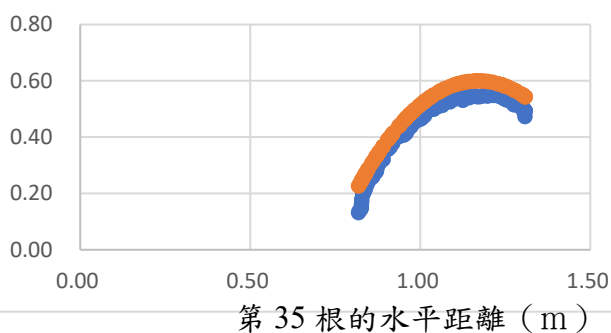
圖 31：第 35 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

圖 33、34 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第35根擬合圖



二次函數： $y = -3.22x^2 + 7.55x - 3.81$

橢圓方程式： $\frac{(x-1.17)^2}{0.98^2} + \frac{(y+5)^2}{5.6^2} = 1$

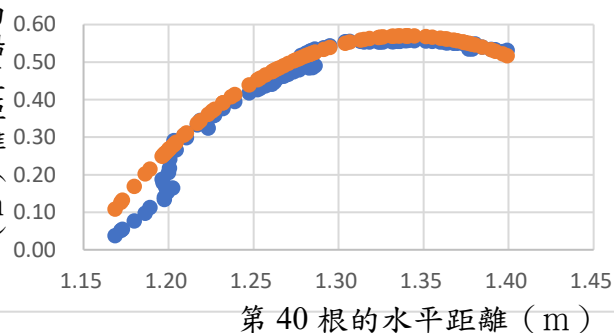
相關係數： $R = 0.99519$

圖 32：第 35 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -18.31x^2 + 49.03x - 32.27$

橢圓方程式： $\frac{(x-1.34)^2}{0.43^2} + \frac{(y+5)^2}{5.57^2} = 1$

相關係數： $R = 0.98915$

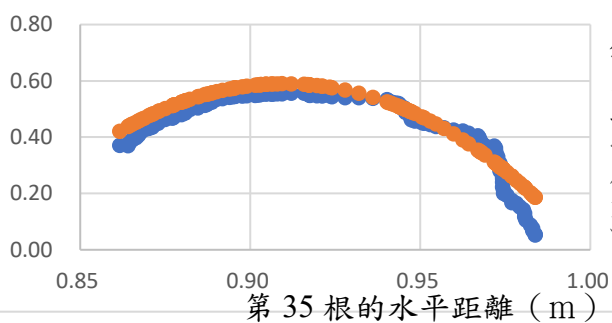
圖 33：第 40 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

圖 35、36 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第35根擬合圖



二次函數： $y = -87.05x^2 + 158.94x - 71.98$

橢圓方程式： $\frac{(x - 0.91)^2}{0.18^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.59^2} = 1$

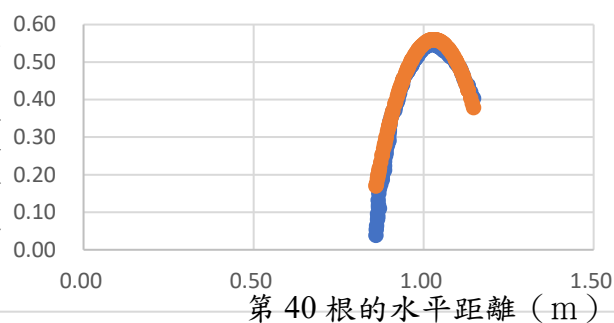
相關係數： $R = 0.96380$

圖 34：第 35 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -15.1x^2 + 31.2x - 15.56$

橢圓方程式： $\frac{(x - 1.03)^2}{0.42^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.56^2} = 1$

相關係數： $R = 0.99041$

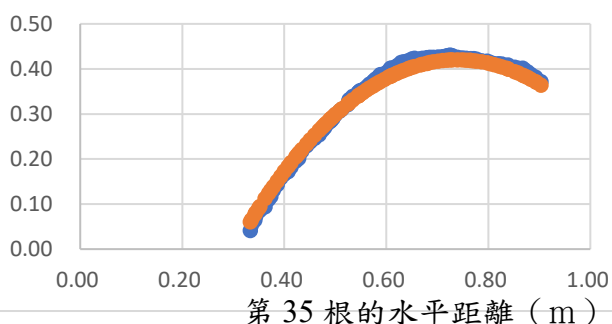
圖 35：第 40 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

圖 37、38 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第35根擬合圖



二次函數： $y = -2.36x^2 + 3.48x - 0.85$

橢圓方程式： $\frac{(x - 0.74)^2}{1.03^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.42^2} = 1$

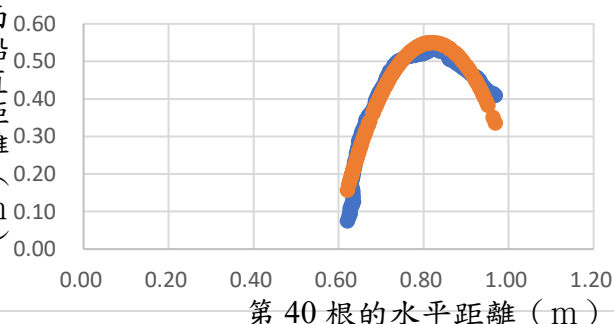
相關係數： $R = 0.99898$

圖 36：第 35 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -9.85x^2 + 16.2x - 6.11$

橢圓方程式： $\frac{(x - 0.82)^2}{0.49^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.55^2} = 1$

相關係數： $R = 0.97563$

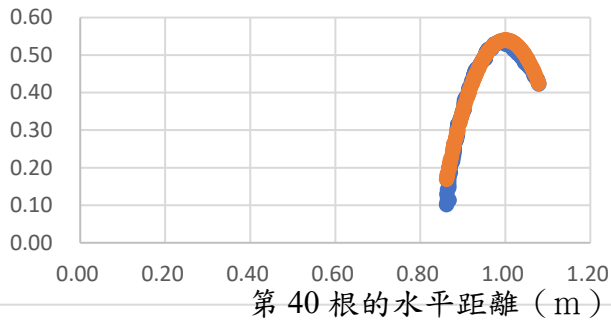
圖 37：第 40 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

圖 39、40 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -21.96x^2 + 43.74x - 21.24$

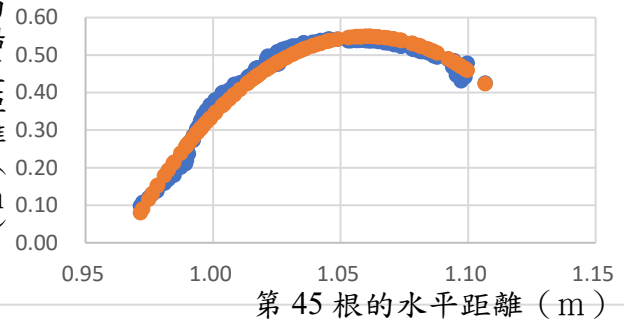
橢圓方程式： $\frac{(x-1)^2}{0.35^2} + \frac{(y+4)^2}{4.54^2} = 1$

相關係數： $R = 0.99223$

圖 38：第 40 根擬合圖
(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第45根擬合圖



二次函數： $y = -64.59x^2 + 136.54x - 71.6$

橢圓方程式： $\frac{(x-1.06)^2}{0.2^2} + \frac{(y+4)^2}{4.55^2} = 1$

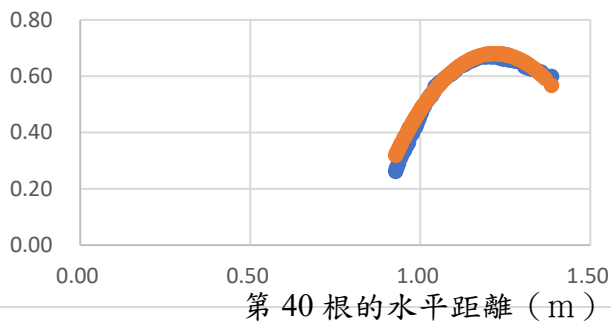
相關係數： $R = 0.98817$

圖 39：第 45 根擬合圖
(資料來源：研究者自製)

圖 41、42 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -4.73x^2 + 11.53x - 6.34$

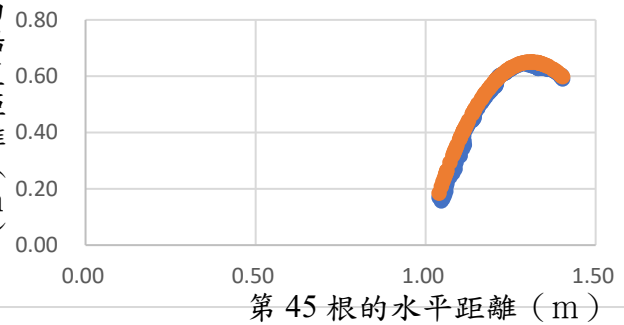
橢圓方程式： $\frac{(x-1.22)^2}{0.76^2} + \frac{(y+4)^2}{4.68^2} = 1$

相關係數： $R = 0.99523$

圖 40：第 40 根擬合圖
(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第45根擬合圖



二次函數： $y = -7.22x^2 + 18.88x - 11.69$

橢圓方程式： $\frac{(x-1.31)^2}{0.62^2} + \frac{(y+4)^2}{4.65^2} = 1$

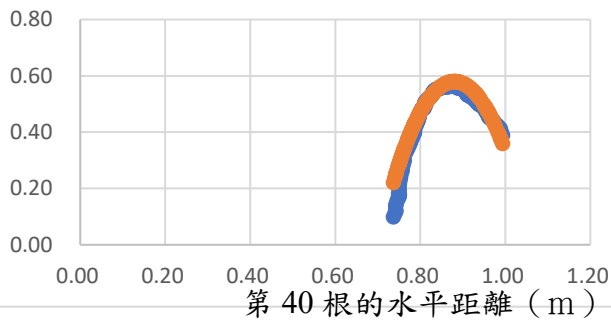
相關係數： $R = 0.99734$

圖 41：第 45 根擬合圖
(資料來源：研究者自製)

圖 43、44 為同一影片

與桌面鉛直距離 (m)

第40根擬合圖



二次函數： $y = -19.96x^2 + 35.26x - 14.98$

橢圓方程式： $\frac{(x - 0.88)^2}{0.37^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.56^2} = 1$

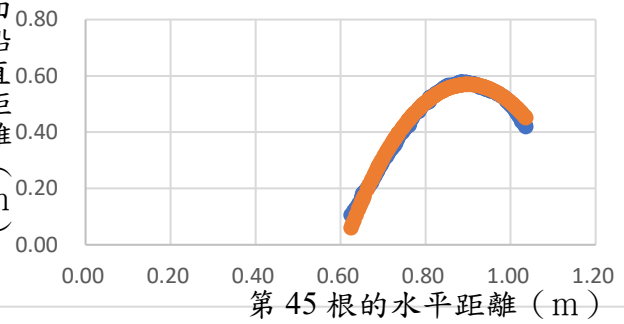
相關係數： $R = 0.98118$

圖 42：第 40 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

與桌面鉛直距離 (m)

第45根擬合圖



二次函數： $y = -6.744x^2 + 12.09x - 4.85$

橢圓方程式： $\frac{(x - 0.9)^2}{0.6^2} + \frac{(y + 4)^2}{4.57^2} = 1$

相關係數： $R = 0.99566$

圖 43：第 45 根擬合圖

(資料來源：研究者自製)

圖 45、46 為同一影片

我們為了驗證同一影片中的兩橢圓擁有相同的橢圓軌道，因此利用橢圓的離心率來驗證。

表 7：橢圓的離心率（資料來源：研究者自製）

橢圓位置 影片基準根數	第一橢圓	第二橢圓
30	0.481	0.472
30	0.493	0.497
30	0.494	0.494
35	0.492	0.498
35	0.499	0.497
35	0.486	0.496
40	0.499	0.498
40	0.493	0.496
40	0.498	0.495

根據數據可得同一組不同根的運動軌跡皆為離心率差不多的橢圓軌道，因此似乎在同一組內有個公轉軌道，但依循不同根而做橢圓圓心的平移。

其自轉，根據一開始累積的的起始位置彈力位能為（表 5）所示，接著利用單一根的運動軌跡找到其移動動能與重力位能和為（表 8）所示，這兩者間相差的量值猜測為轉動動能，未來將以這個為目標繼續研究。

表 8：單一一根冰棒棍儲存的力學能（資料來源：研究者自製）

冰棒棍根數	力學能 (J)
30	1.53×10^{-1}
35	1.81×10^{-1}
40	1.69×10^{-1}

4. 結論：

A. 受到俯視視角下的冰棒棍受力情況，使得冰棒棍會水平向外旋轉，當脫離整體結構的同時，冰棒棍會因後方冰棒棍的擠壓加上旋轉，而被向外甩出。

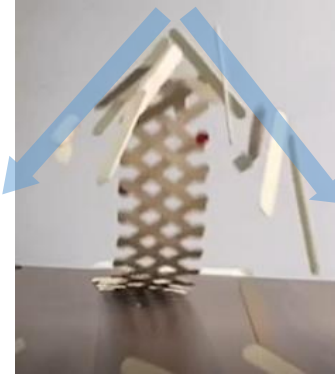


圖 47：冰棒棍運動正視圖（資料來源：研究者自製）

B. 正視視角下，冰棒棍在空中運動會繞行一條隱藏的公轉軸，而我們透過不同位置的擬合，得出了同一匹冰棒棍會擁有相同的公轉軌道，但其公轉軸會隨著冰棒棍的崩解的起始位置而水平平移。



圖 48：單根冰棒棍正視圖（資料來源：研究者自製）

伍、討論

- 一、從冰棒棍的函數疊合中我們發現從 A 位置的波形行進到 B 位置時，疊合波形的係數變大，隨著波形更往前至 C 位置時分子係數也隨之增加。推測冰棒棍骨牌的崩解高度會依波形行進的位置往前，而使分子係數增加。
- 二、綜合以上分析，冰棒棍在空中運動時並不會有外力介入，使冰棒棍都處於自由力矩的狀態下，而每根冰棒棍都擁有兩條自轉軸，一條位於長端的對稱軸，另一條位於短端的對稱軸，並且兩條對稱軸互相垂直，這符合進動自轉物體除了繞其本身的自轉軸旋轉之外，自轉軸又繞著另一鉛直軸旋轉的現象，又可稱為「旋進」。
- 三、推測同一運動中不同根冰棒棍的公轉中心會偏移是因為初始冰棒棍起點不同。為了比較任兩根冰棒棍間初始位置差與運動中公轉中心的位置差之間的關係，必須更優化影片品質。猜測兩者之間應該呈現正相關，運動過程中可能會因為冰棒棍間的摩擦力而產生誤差。
- 四、未來會藉由正視以及俯視的角度進行觀察與分析，利用正視結合已經製作的測視觀點，擬合出橢圓體，尋找橢圓體中心，製作三維空間裡的冰棒棍公轉軸。
- 五、在釋放冰棒棍骨牌時，其中在排列時所累計的彈力位能會轉換為重力位能與其他移動動能。而比較了利用公式所計算的彈力位能（表 5）與利用單一根冰棒棍的運動軌跡所計算出的力學能（表 7）所相差的量值，推測其中的差值轉換為使冰棒棍轉動的轉動動能。為了驗證必須計算冰棒棍的轉動動能的量值是否符合其中的差值，預計先使用轉動動能公式 $E = I\omega^2$ （ I 為轉動慣量， ω 為角速度）計算，先藉由分析影片得出冰棒棍在空中旋轉時的角速度 ω ，並可以觀察當冰棒棍在空中時角速度是否維持定值，若不維持定值的話，可能過程中阻力跟重力產生力矩使其不守恆，也能利用此結果得到阻力的量值。進而將誤差討論進去我們的模型內。

陸、結論

- 一、藉由觀察冰棒棍的形變量，進而推導出楊氏係數，在往後的研究中能夠計算每支冰棒棍所受的受力量值，並推算出整體結構所處存的位能大小。
- 二、我們推測 40 根冰棒棍時，因為根數較少所以在 A 位置時的能量存取長度與未存取的長度比值較 50 根冰棒棍時。符合原先預期，因為根數的增加，較少根數冰棒棍的能量儲存位置較較多根冰棒棍根數的大，因此可以擁有較大的彈力位能轉換成重力位能的預測。
- 三、當冰棒棍的係數變化量由 40 根開始依冰棒棍數量增加而使得兩個位置間的係數增加，也與我們推測的能量分佈相關，且能透過函數的關係也驗證了推測。
- 四、在進行分析冰棒棍行進的受力狀況及運動情形時，觀察到每支離開整體結構的冰棒棍都會旋轉甚至翻轉的現象，發現冰棒棍於空中旋轉時符合進動條件，分析了正視、側視、俯視觀點觀察之後，並繪製圖片提出作討論，最後得出，冰棒棍在空中運動時並不會有外力介入，使冰棒棍都處於自由力矩的狀態下，而每根冰棒棍都擁有兩條自轉軸，一條位於長端的對稱軸，另一條位於短端的對稱軸，冰棒棍在水平旋轉的同時也會鉛直旋轉。
- 五、在分析冰棒棍的運動情形中，對冰棒棍的飛行軌跡，使用橢圓方程式找到冰棒棍飛行的公轉中心及軌道，發現其有進動現象，且發現同一運動中不同根冰棒棍會以相同公轉軌道但圓心依著冰棒棍排列時的相對位置平移。
- 六、在未來的研究中，想透過用冰棒棍的楊氏係數以及波形的行進的特性，測量出冰棒棍彈跳時所需要用到的能量。以及利用我們所製作的冰棒棍波形疊合圖片，建構一專屬於此冰棒棍骨牌的物理模型。
- 七、未來將設計一模型模擬冰棒棍運動，藉此研究單一根冰棒棍的運動模式與進動間的關係。因為就我們對單一冰棒棍的觀察，發現冰棒棍於空中旋轉時符合進動條件，冰棒棍在彈出時，獲得了垂直且同為對稱軸的兩條自轉軸，導致冰棒棍既自身旋轉又翻轉，藉此討論是否能利用冰棒棍取代或是活化陀螺儀的應用。
- 八、未來希望能利用上述所提及，製作一專屬於冰棒棍骨牌的物理模型，並且透過其冰棒棍的基礎數值便可以推算出冰棒棍在骨牌上的受力運動情形，可以利用電腦程式輕鬆模擬出理想狀態，不用再利用排列冰棒棍骨牌觀察現象。

柒、參考資料及其他

一、sherrycayheyhey (年份不詳)。Cobra Weave Exploding Stick Bomb。

2021年2月10日，取自 <https://www.instructables.com/Cobra-Weave-Exploding-Stick-Bomb/>

二、Jean-Philippe Boucher ,& Christophe Clanet ,&DavidQuéré,&FrédéricChevy。(2017)

Popsicle-Stick Cobra Wave.2020年2月2日，取自

<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.119.084301> 註[1]

三、作者不詳 (年份不詳)。進動。2022年2月17日，取自

<https://www.newton.com.tw/wiki/%E9%80%B2%E5%8B%95#%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E4%BB%8B%E7%B4%B9>

四、Athanasios Papastathopoulos-Katsaros ,& Savvas Sardelis。(2017)

A physical model for the popsicle stick cobra.

五、戴明鳳。(2008) 轉動慣量與圓周運動。2021年9月23日，取自

<http://www.phys.nthu.edu.tw/~gplab/file/rotation/26-2-970222-.pdf>

【評語】 160019

本實驗作品主要探討眾多根冰棒棍連結然後釋放的彈跳運動，相當新穎的研究課題。大部分的工作在探討產生的波形。本作品在實驗設計、量測及影像分析等工作皆相當仔細。如果在數據分析上能引進更多物理來探討產生波形的主要機制會更完整。