

# 2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 160008

參展科別 物理與天文學

作品名稱 液滴懸浮於移動表面現象之探討

得獎獎項 三等獎

就讀學校 國立新竹科學園區實驗高級中等學校

指導教師 洪在明

作者姓名 胡婷芳、謝承翰

關鍵詞 流體力學、液滴懸浮、空氣墊

## 作者簡介



我們是胡婷芳和謝承翰，來自國立新竹科學園區實驗高級中等學校的高三科學班。

還記得一年前報名科展時完全是志在參加，沒想到在校內、北二區科展陸續拿到特優的佳績後，我們最初的一時興起慢慢演變成要代表台灣出賽國際科展的大夢。而我們的努力也很幸運的受到了肯定，拿到國際科展的門票。

非常感謝一路上支持我們的洪在明教授、在遇上瓶頸時拉我們一把的陳中皓和蔣宗儒學長，我們還有很多需要進步的地方，謝謝一路上幫助我們的人。

## 摘要

液體無固定形狀且往下流。我們偶然得知液滴能在移動表面上維持球型並懸浮數分鐘<sup>[1]</sup>，故設計實驗探討物理機制。設計出能高速旋轉且維持穩定的滾筒，是首要克服的關鍵；而為了解液滴轉動行為，我們學會操作粒子圖像測速法。此研究控制參數包括滾筒轉速、液滴半徑及種類，除了指出過去文獻未討論的重要細節，並嘗試建立解釋此運動行為的物理模型及推導方程式，得到簡單的解析解和物理圖像。

實驗上，相較在靜止液面只懸浮 0.27 秒，矽油滴在穩定移動表面可懸浮數分鐘，此可用文獻<sup>[2,3]</sup>中的「空氣墊現象」解釋。移動表面上穩定懸浮的液滴，傾斜角 $\theta$ 與滾筒切線速度 $v$ 及液滴半徑 $r$ 的-2 次方呈正比，實驗數據與我們的預測皆相符。液體種類影響懸浮的最低轉速，液滴受的交互作用力也因液體種類而異。未來將分析液滴晃動程度、可保持懸浮的速度區間與液滴半徑之關係。

## Abstract

Experience dictates that liquid flows go downward and are without specific shapes. However, we found that liquid droplets can float on a moving surface for minutes, while retaining a circular shape without any external support<sup>[1]</sup>. To investigate this phenomenon, we took laborious steps to design a cylinder that can remain stable under fast rotation. This technical obstacle has to be overcome first; otherwise the vibrations of cylinder may throw doubts on the credibility of our data. Another novel technique that we learned and employed is the Particle Image Velocimetry that enables us to determine whether the levitated droplet was rotating and what the direction and of its angular momentum is. Aside from testing the effects of droplet radius, composition of liquid, and spinning speed of the cylinders, we propose a theoretical model that enables us to obtain analytic solutions that match the empirical observations well.

As opposed to about 0.27 seconds when falling on a steady liquid surface, we found that a silicon oil droplet can float in mid-air for minutes on the inner surface of a spinning cylinder, which phenomenon was ascribed to the formation of air cushion in the literature <sup>[2, 3]</sup>. Our theory predicts that the tilted angle of the floating droplets is proportional to the tangent velocity of the cylinder, but inversely proportional to the square of the droplet radius. Both predictions are vindicated by experiment results. The composition of the droplet also affects the minimum velocity it needs to float and the forces experienced by the droplet. Future work should clarify the effect of composition of droplet and why it is important for the minimum velocity to float and the forces experienced by the droplet. How does the actual shaking, i.e., the variation of tilt angle, of the droplet depend on the other variables can also be potentially important.

# 壹、前言

## 一、研究動機

生活經驗告訴我們重物會下落、液體無固定形狀。而一液滴懸浮於同物質表面的現象在前人的實驗中明顯只能維持一瞬，要使上下液體保持溫差或帶電才能勉強增加懸浮時間。然而，我們卻偶然在課外學術影片中看到<sup>[1]</sup>，只要讓液滴底部的表面維持移動，表面上的液體便能夠在一定的速度下懸浮長達數分鐘、並在無外壁支撐下維持穩定球型。這引起了我們的好奇心，使我們想深入研究並探討這個現象所蘊含的物理意義。

## 二、研究目的

- (一) 比較矽油滴在靜止表面及移動表面上懸浮的現象。
- (二) 探討滾筒轉速及液滴大小對液滴傾斜角之影響。
- (三) 探討不同液體種類對液滴懸浮現象的影響。
- (四) 分析數據以得到液滴受的交互作用力（下文稱之為變力 $F_3$ ）的特徵。
- (五) 利用粒子圖像測速法 PIV 觀察矽油滴內部流場。
- (六) 嘗試以一方程式描述液滴懸浮於移動表面之運動行為。

## 三、文獻回顧

首先回顧以下 3 項與本研究相關的已知理論，包含空氣墊 air cushion、Stokes' law 及粒子圖像測速法 Particle Image Velocimetry，以作為後續理論推導、實驗方法的基礎。

### (一) 液滴懸浮與空氣墊 air cushion 的關係

空氣墊是一種流體現象。當液滴下方的空氣層被排開時，上下液體便會融合為一。反之，穩定存在的空氣層則可以防止液滴接觸下方表面，比方說萊頓弗羅斯特現象 Leidenfrost effect<sup>[4]</sup>（圖 1）便是一例，通過水蒸氣流讓水滴保持在高處。這種被穩定補充以支撐液滴懸浮的薄空氣層，稱為「空氣墊 air cushion」。

本實驗中的懸浮液滴型態如圖 2 所示，液滴下方亦有空氣墊存在。已有論文<sup>[2,3]</sup>證實可經由將相機置於液滴底部，利用液滴表面與滾筒之間干涉條紋變化，觀察到移動表面與液滴中間存在空氣墊。此觀測結果亦可用來分析液滴底部空氣分布狀況，了解其氣流的流動。

本實驗則將液滴底部空氣統稱為使其懸浮的「空氣墊」，此空氣墊補充方式（圖 2）與萊頓弗羅斯特現象 Leidenfrost effect 不一樣。液滴落下時，液滴表面會變形並壓住一層薄空氣層，亦即前述的「空氣墊」，且液滴下方的表面持續移動，帶動空氣流使空氣墊能被穩定補充，支撐液滴長時間懸浮。



圖 1、萊頓弗羅斯特現象 Leidenfrost effect 的液滴型態



圖 2、本實驗移動液面的液滴型態

## (二) Stokes' law<sup>[5]</sup>

在流體流是層流的情況下，球形物體在此流體中運動所受到的阻力，等於該球形物體的半徑 $r$ 、速度 $v$ 、流體的黏滯係數 $\mu$ 與 $6\pi$ 的乘積，即：

$$F = 6\pi r v \mu \quad (1-1)$$

本實驗中的液滴半徑在 0.1~3mm 間、形狀趨近於球形，且本實驗中的空氣流速、流場穩定，因此在本實驗中可將其視為層流。因此本實驗阻力適用於 Stokes' law。

## (三) 粒子圖像測速法 Particle Image Velocimetry<sup>[6]</sup>

簡稱 PIV。通過測量示蹤粒子在已知很短時間間隔內的位移，來間接地測量流場的瞬態速度分佈。本實驗中使用的示蹤粒子為二氧化鈦粉末，將適量二氧化鈦粉末與矽油混合，滴上滾筒進行懸浮，用雷射光由下往上直接照射懸浮的液滴，使液滴中示蹤粒子形成移動亮點，由高速攝影機水平拍攝，再以 PIVLab 分析液滴內部流場的瞬態速度分佈。為了有足夠的解析度，PIV 實驗中將攝影機鏡頭換成了顯微鏡鏡頭。



圖 3、本實驗中，顯微鏡鏡頭下的矽油滴，PIV 分析

## 貳、 研究設備及器材




### 一、實驗耗材


液體種類	密度	表面張力係數	運動黏滯係數
矽油	$968 \text{ kg/m}^3$	$21 \text{ dyn/cm}$	50 cSt
純水	$1000 \text{ kg/m}^3$	$72 \text{ dyn/cm}$	$1.01 \times 10^{-2} \text{ cSt}$
純甘油	$1260 \text{ kg/m}^3$	$61.9 \text{ dyn/cm}$	950 cSt




註 1：cSt，即 centi-stoke，為運動黏滯係數的單位， $1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

註 2： $\text{dyn/cm}$ ，即 dyne per centimeter，為表面張力係數的單位， $1 \text{ dyn/cm} = 10^{-3} \text{ N/m}$ 。



### 二、硬體設備

名稱	用途	圖示
20 伏特電源供應器	供給馬達電力	
直流馬達 外徑 33 mm DC 6V - 24V 高扭力直流減速馬達 型號：HN35GM-HN330	帶動壓克力滾筒旋轉 可使用的穩定轉速介於 $1.2 \sim 5.3 \text{ rad/s}$	
Parvalux Electric Motors 直流馬達	帶動壓克力滾筒旋轉 可使用的穩定轉速介於 $22.5 \sim 79.7 \text{ rad/s}$	
壓克力滾筒 內半徑 4.5 cm 外半徑 5.0 cm 深度 5.0 cm	提供液滴穩定移動之平面	
針筒及 編號 16 注射針頭	擠出半徑介於 $0.1 \sim 3 \text{ mm}$ 之液滴	

<p>Phantom Camera 高速攝影機</p>	<p>紀錄液滴之運動情形</p>	
---------------------------------	------------------	---

名稱	用途	圖示
<p>顯微鏡頭</p>	<p>搭配高速攝影機，在 PIV 實驗中拍攝液滴內的示蹤粒子</p>	
<p>新廣鈦 白光光源</p>	<p>照射液滴， 利於高速攝影機拍攝</p>	
<p>雷射光源 LASER-10A DPSS LASER DRIVER</p>	<p>照射懸浮的液滴，使液滴內的示蹤粒子形成移動亮點，以利於進行 PIV 分析</p>	

### 三、分析軟體

名稱	用途	圖示
<p>Phantom Camera Control 3.6 簡稱 PCC3.6</p>	<p>高速攝影機的搭配軟體，用以觀察液滴運動情形，並記錄液滴的大小、座標及傾斜角（即液滴位置，其定義見第 7 頁）</p>	
<p>PIVlab - Digital Particle Image Velocimetry Tool for MATLAB</p>	<p>分析液滴內部示蹤粒子的流動</p>	



## 參、研究過程與方法

### 一、研究架構

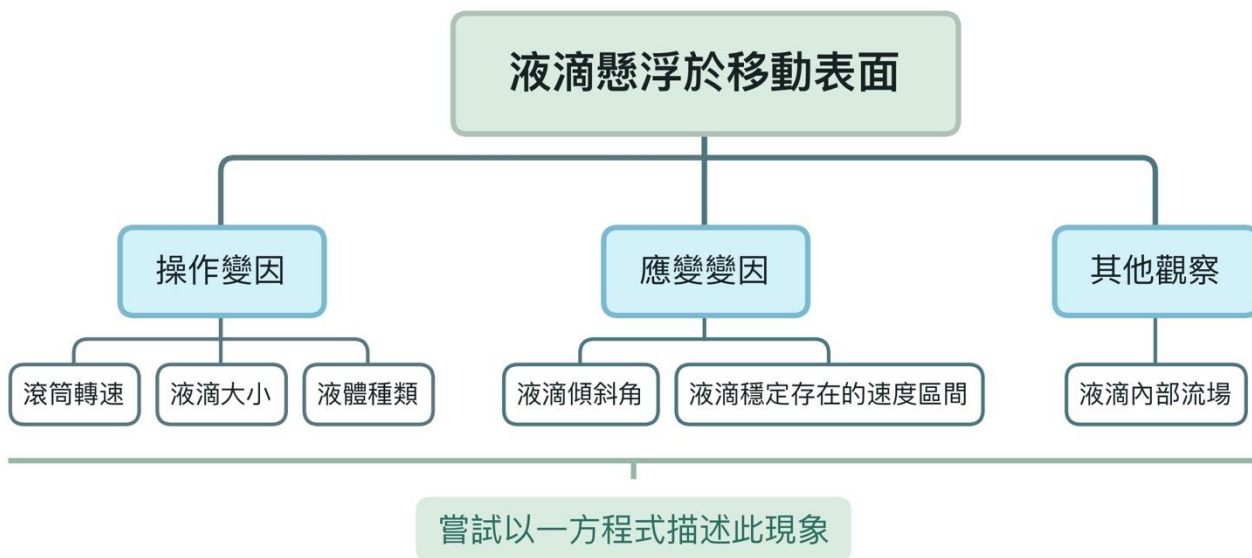


圖 4、研究架構

### 二、研究流程圖

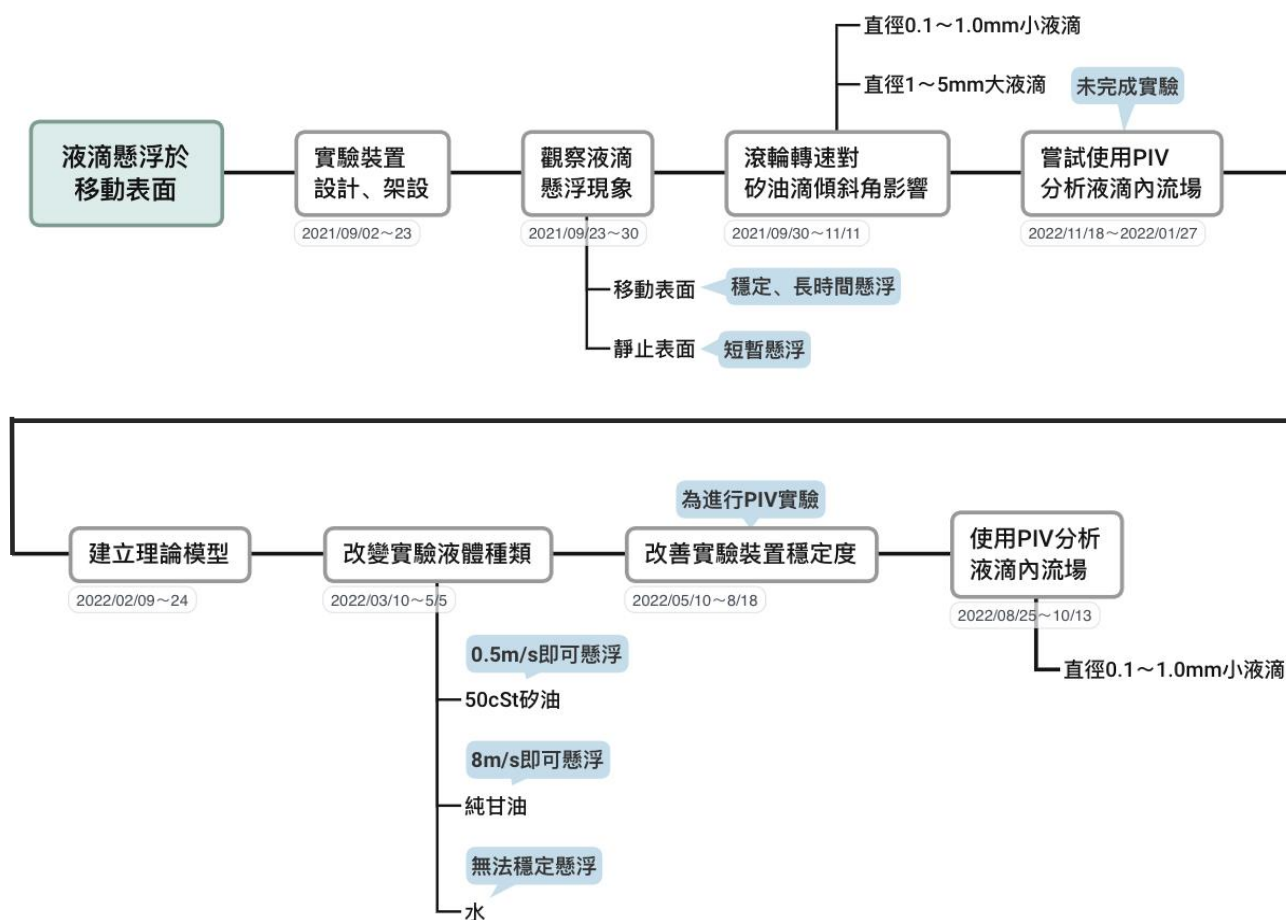


圖 5、研究流程圖



### 三、名詞定義

#### (一) 液滴懸浮

可輕易以肉眼辨識出一液滴維持球狀而未攤平，則稱此液滴懸浮。

#### (二) 液滴塌陷

滾筒轉速過慢而不足以支撐液滴懸浮時，液體無法維持圓球狀而攤平之現象。

#### (三) 液滴半徑

液滴長軸長與短軸長相乘後開根號再除以二。長軸與短軸長取法如圖 6 所示。



圖 6、液滴長軸與短軸示意圖

#### (四) 變力 $F_3$

前文提及的「液滴受的交互作用力」，在本實驗中將其定義為液體表面與滾筒壁面間空氣墊摩擦的交互作用力，作用在滾筒切線方向。

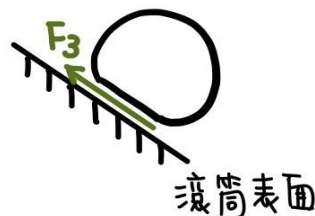


圖 7、變力 $F_3$ 示意圖

#### (五) 液滴傾斜角 $\theta$

液滴中心位置及滾筒圓心連線與鉛直軸的夾角，如圖 8 所示。

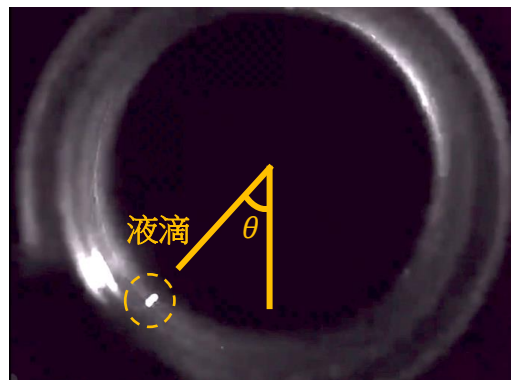


圖 8、液滴傾斜角 $\theta$ 示意圖

#### (六) 最低滾筒切線轉速 $v_1$

實驗中將滾筒轉速降低，於液滴塌陷前，記錄到之最低滾筒切線轉速。

#### 四、數據取得、計算

##### (一) 座標定位

1. 調整腳架使攝影機鏡頭保持水平，則 PCC3.6 介面上  $x,y$  軸即為水平與鉛直軸。
2. 使用高速攝影機搭配 PCC3.6 拍攝畫面。
3. 在 PCC3.6 軟體介面上，將游標移至目標物上，紀錄此時游標座標  $x,y$  值，即可獲得目標物座標值。

##### (二) 滾筒圓心座標

1. 因鏡頭不會完整拍攝整個滾筒，若滾筒圓心不在視窗內，無法直接取得滾筒圓心座標，可取三點滾筒壁座標  $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$ ，利用三角形求外心座標公式計算出滾筒圓心座標，公式如下：

$$O(x_0, y_0) = \left( \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 + y_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 + y_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 + y_3^2 & 1 \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \right) \quad (2-1)$$

##### (三) PCC3.6 座標距離換算毫米

1. 取一點滾筒壁座標  $P(x, y)$ ，計算  $P$  點與滾筒圓心座標  $O(x_0, y_0)$  之距離。
2. 利用滾筒實際半徑 45 毫米作為比例尺，即可將 PCC3.6 上任意的座標距離

$\Delta L_{\text{PCC 座標}}$  換算成公制單位  $\Delta L$ ，公式如下：

$$\Delta L = \Delta L_{\text{PCC 座標}} \times \frac{45}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \quad (\text{單位：mm}) \quad (2-2)$$

##### (四) 液滴半徑

1. 分別座標定位液滴長軸兩端點和短軸兩端點。
2. 利用定義公式計算出液滴半徑：

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\text{長軸長} \times \text{短軸長}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{\Delta x_{\text{長軸}}^2 + \Delta y_{\text{長軸}}^2} \times \sqrt{\Delta x_{\text{短軸}}^2 + \Delta y_{\text{短軸}}^2}} \quad (2-3)$$

其中  $\Delta x_{\text{長軸}}$  為液滴長軸兩端點  $x$  座標相減，後三項以此類推。

3. 將液滴半徑單位換算成毫米。

(五) 液滴傾斜角

1. 座標定位液滴中心（液滴長軸與短軸交點） $D(x,y)$ ，若液滴在晃動，則記錄上下最大晃動位置的中點。
2. 利用滾筒圓心座標 $O(x_0,y_0)$ 及液滴中心座標 $D(x,y)$ 計算液滴傾斜角：

$$\theta = \tan^{-1}\left(\left|\frac{x - x_0}{y - y_0}\right|\right) \quad (2-4)$$

五、實驗方法

(一) 生成液滴

1. 將實驗儀器裝設如圖 9。
2. 在不接觸滾筒的情況下，於其周圍圍上一圈保鮮膜，並以鐵絲固定，以防止後續實驗時液滴噴濺。另外，周圍儀器（如攝影鏡頭）也須包上保鮮膜。
3. 電源供應器輸出一適當高電壓值，使滾筒以穩定轉速轉動。
4. 使用注射針頭在滾筒面上擠一層薄矽油，以潤滑滾筒表面。
5. 使用編號 16 注射針頭擠出一半徑介於 0.1~3.0 毫米之液滴於轉動之滾筒上。
6. 將高速攝影機對焦於液滴上，記錄並計算滾筒圓心座標和液滴半徑。

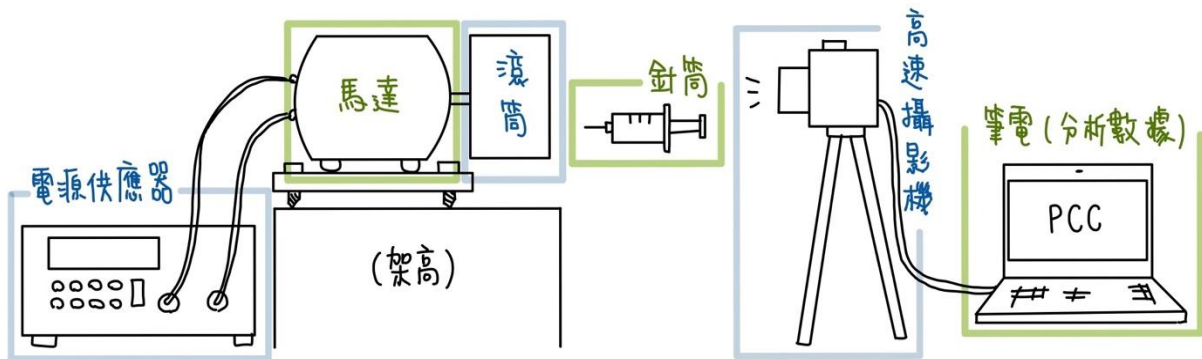


圖 9、實驗儀器裝置示意圖

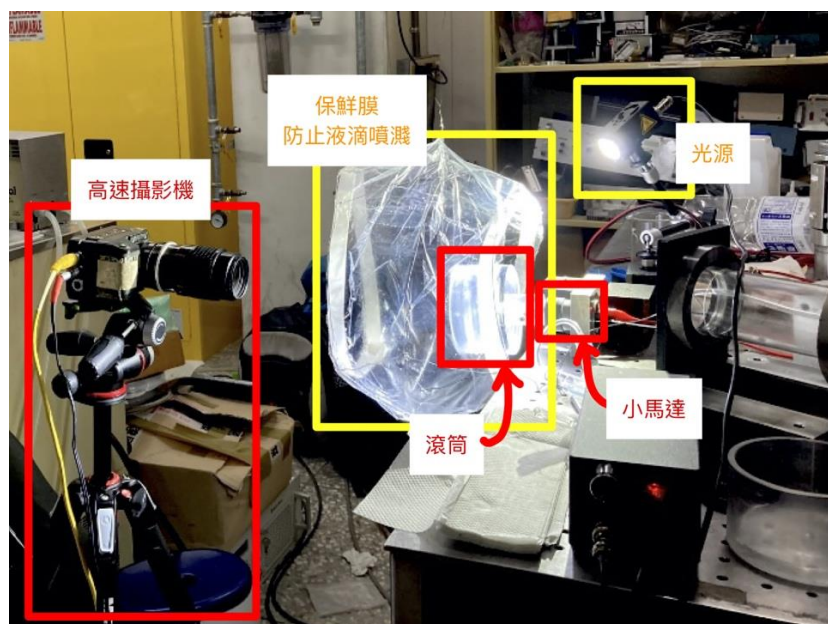


圖 10、實驗儀器裝置圖

- (二) 改變滾筒轉速並記錄液滴位置及傾斜角
1. 承上實驗，錄影紀錄液滴運動情形，由公式計算液滴傾斜角並紀錄此時電壓。
  2. 將電壓減少 0.1 伏特。
  3. 重複步驟 1.和 2.直到液滴塌陷。
- (三) 作圖分析
1. 重複步驟（一）、（二），生成多個液滴，並將液滴傾斜角對滾筒轉速做圖。
- (四) 利用 PIV 觀察液滴內部流場
1. 將實驗儀器裝設如圖 11。
  2. 依實驗方法（一）2.~4. 準備實驗環境（雷射也需包上保鮮膜）。
  3. 將適量示蹤粒子（二氧化鈦粉末）與矽油混合，裝入針筒。
  4. 將矽油與二氧化鈦的混合物滴於滾動的滾筒上生成液滴。
  5. 調整滾筒下方雷射光的位置，由下往上照射對準液滴，並調整雷射光亮度，使示蹤粒子（二氧化鈦粉末）發亮。
  6. 將連接顯微鏡頭的高速攝影機對焦於液滴上，錄下影片。
  7. 以 PIVLab 分析步驟 6. 得到的影片，觀察液滴內部流場。

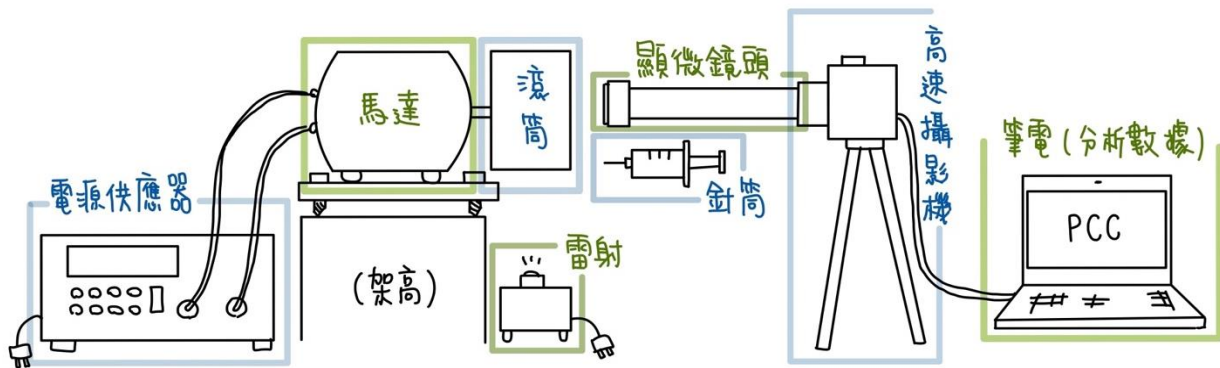


圖 11、PIV 實驗儀器裝置示意圖

## 六、理論探討

### (一) 系統中液滴受力情形

如圖 12 所示，考慮圓球形液滴（圖 13）懸浮於一以切線速度 $v$ 穩定轉動之滾筒上，其中液滴質量 $m$ 、密度 $\rho$ 、半徑 $r$ 、液滴傾斜角 $\theta$ 、表面張力係數為 $\gamma$ ，空氣黏滯係數 $\mu$ ，重力加速度為 $g$ 。

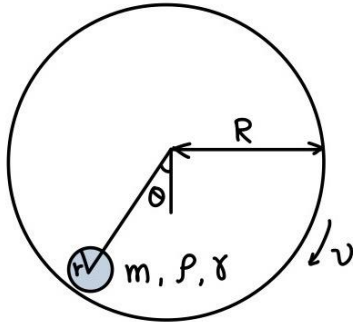


圖 12、實驗裝置示意圖（未按實際比例繪製）



圖 13、實驗中液滴近似圓球形

考慮系統中液滴受到重力 $F_1$ （式 3-1）、拖拽力 drag force  $F_2$ （式 3-2）、變力 $F_3$ （式 3-3）及空氣墊施給液滴的正向力 $F_4$ （式 3-4）作用，如圖 14 所示。

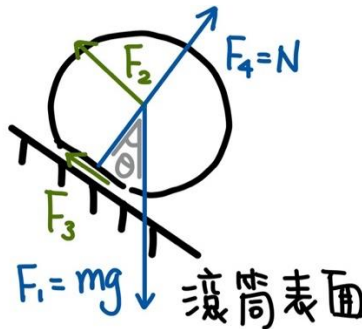


圖 14、液滴受力示意圖

重力：

$$F_1 = mg \quad (3-1)$$

根據 Stokes' law，可列出接近球型之液滴在空氣中所受的拖拽力 drag force：

$$F_2 = 6\pi r v \mu \quad (3-2)$$

針對變力 $F_3$ （液滴受的交互作用力），假設本實驗中變力 $F_3$ 僅與實驗中變因：滾筒切線轉速 $v$ 、液滴半徑 $r$ 、液滴傾斜角 $\theta$ 相關。若確定滾筒切線轉速 $v$ 和液滴半徑 $r$ ，則液滴傾斜角 $\theta$ 能夠被唯一決定，亦即液滴傾斜角 $\theta$ 可以用  $v, r$  表示。因此可假設變力 $F_3$ 為一  $v, r$  相關函數，須由實驗數據推得：

$$F_3 = f(v, r) \quad (3-3)$$

空氣墊施給液滴的正向力：

$$F_4 = N \quad (3-4)$$

(二) 液滴傾斜角 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 、液滴半徑 $r$ 之關係式

先前提及：若確定滾筒切線轉速 $v$ 和液滴半徑 $r$ ，則液滴傾斜角 $\theta$ 能夠被唯一決定，故此處嘗試以一方程式說明液滴傾斜角 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 、液滴半徑 $r$ 之關係。

由圖 14 力圖分析，可列出液滴在滾筒切線方向上的力平衡：

$$F_1 \sin \theta = F_2 + F_3 \quad (4-1)$$

將式 (3-1)、(3-2) 及式 (3-3) 代入式 (4-1)，可得：

$$\begin{aligned} mg \sin \theta &= 6\pi r v \mu + f(v, r) \\ \Rightarrow \sin \theta &= \frac{6\pi r v \mu}{mg} + \frac{f(v, r)}{mg} \end{aligned} \quad (4-2)$$

將  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  代入式 (4-1)：

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{6\pi r v \mu}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g} + \frac{f(v, r)}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g} \\ &= \frac{3 \times 6v\mu}{4r^2 \rho g} + \frac{3f(v, r)}{4\pi r^3 \rho g} \\ &= \frac{18\mu}{4\rho g} \times \frac{v}{r^2} + \frac{3}{4\pi\rho g} \times \frac{f(v, r)}{r^3} \end{aligned} \quad (4-3)$$

$$\Rightarrow \sin \theta = C_1 \cdot \frac{v}{r^2} + C_2 \cdot \frac{f(v, r)}{r^3} \quad (4-4)$$

其中  $C_1 = \frac{18\mu}{4\rho g}$ ， $C_2 = \frac{3}{4\pi\rho g}$ 。液體密度 $\rho$ 、液滴半徑 $r$ 、滾筒切線速度 $v$ 、液滴傾斜角 $\theta$ ，空氣黏滯係數 $\mu$ ，重力加速度 $g$ 。

由式 (4-4) 可知：將  $\sin\theta$  對  $\frac{v}{r^2}$  做圖，可分析出  $f(v, r)$  與  $r$  的關係式。



## 肆、研究結果

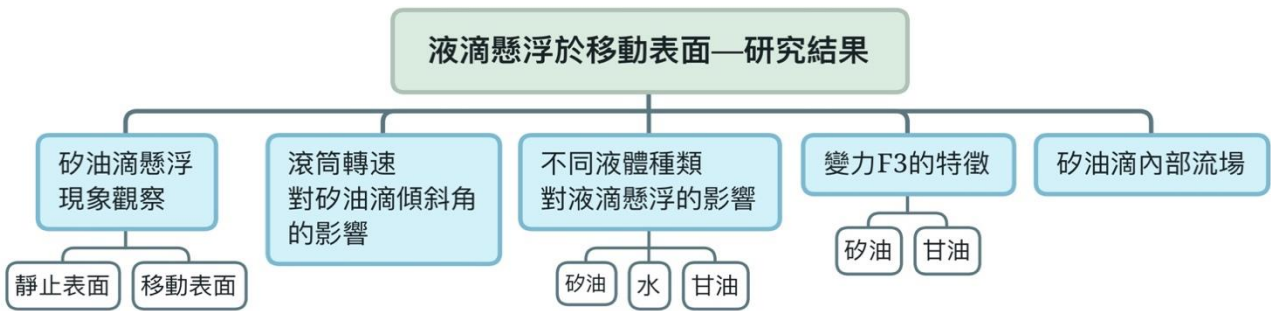


圖 15、研究結果架構圖

### 一、矽油滴在靜止表面及移動表面懸浮之現象觀察

#### (一) 靜止的表面

如圖 16~圖 20 所示，矽油滴在靜止的表面亦會短暫懸浮約 0.27 秒。

此現象符合「空氣墊理論」：矽油滴落下時，表面變形並壓住下方空氣墊，此空氣墊支撐矽油滴懸浮。但因為無穩定補充空氣來源，在約 0.27 秒後空氣層因上方矽油滴擠壓消散，致使矽油滴大面積接觸下方矽油液面，受同物質內部作用力下拉而塌陷。（矽油滴半徑約 0.30 mm）

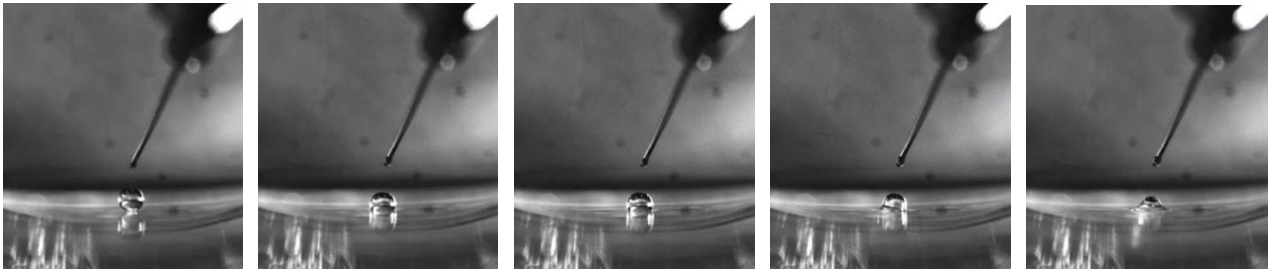


圖 16、t=0 s

圖 17、t=0.10 s

圖 18、t=0.20 s

圖 19、t=0.27 s

圖 20、t=0.30 s

#### (二) 移動的表面

如圖 21~圖 25 所示，矽油液滴在移動的表面會長時間懸浮不塌陷。

根據「空氣墊理論」：當矽油滴落下時，矽油滴表面變形並壓住下方一層薄空氣層，此空氣層支持矽油滴懸浮。且因下方表面移動，帶動空氣流動，使空氣墊有穩定補充來源，能夠長時間支撐矽油滴懸浮，區間約在數十秒至數分鐘。

另外矽油滴滴在剛接觸到滾筒表面時，會因變力 $F_3$ 作用而拉長成長條水滴型（圖 22、22），穩定後呈圓球狀（圖 25）。（矽油滴滴半徑約 0.30mm）

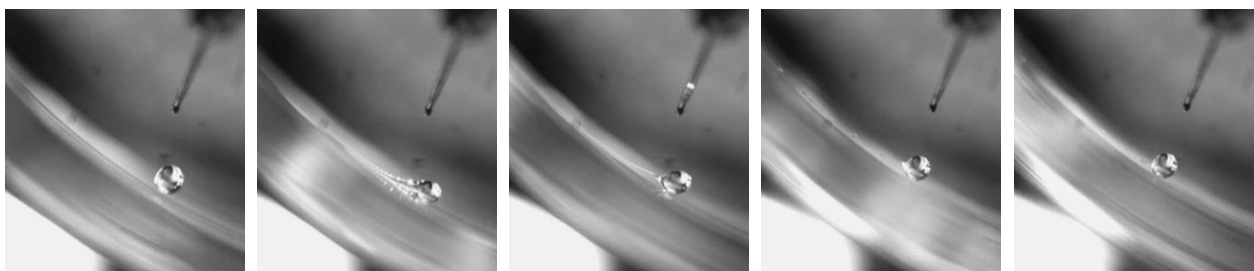


圖 21、t=0 s

圖 22、t=0.10 s

圖 23、t=0.20 s

圖 24、t=0.27 s

圖 25、t=0.30 s



## 二、滾筒轉速對矽油滴傾斜角的影響

這部分將討論實驗中兩個主要變因：滾筒的切線速度 $v$ 和矽油滴傾斜角 $\theta$ 的關係。

如圖 26 和圖 27 所示，在矽油滴半徑 $r$ 皆為 2.33 mm，但滾筒轉速不同的條件下，圖 27 矽油滴的傾斜角明顯大於圖 26。滾筒的切線轉速 $v$ 越大，矽油滴的位置就會越高，即傾斜角 $\theta$ 越大。

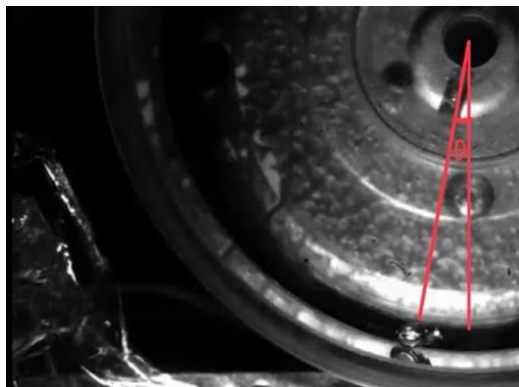


圖 26、 $v = 7.16 \text{ m/s}$

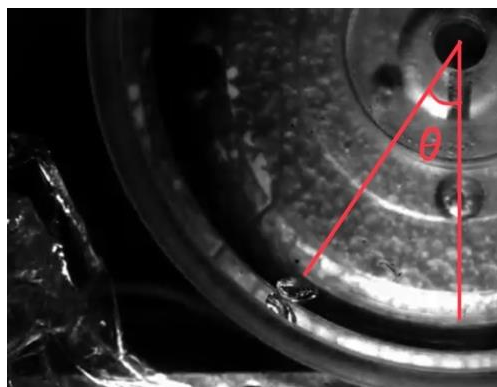


圖 27、 $v = 10.86 \text{ m/s}$

如圖 28 所示，在滾筒切線轉速 $v$ 皆為 0.72 m/s，但液滴半徑不同的條件下，小液滴的傾斜角明顯大於大液滴。液滴半徑 $r$ 越大，矽油滴的位置就會越低，即傾斜角 $\theta$ 越小；反之亦然。

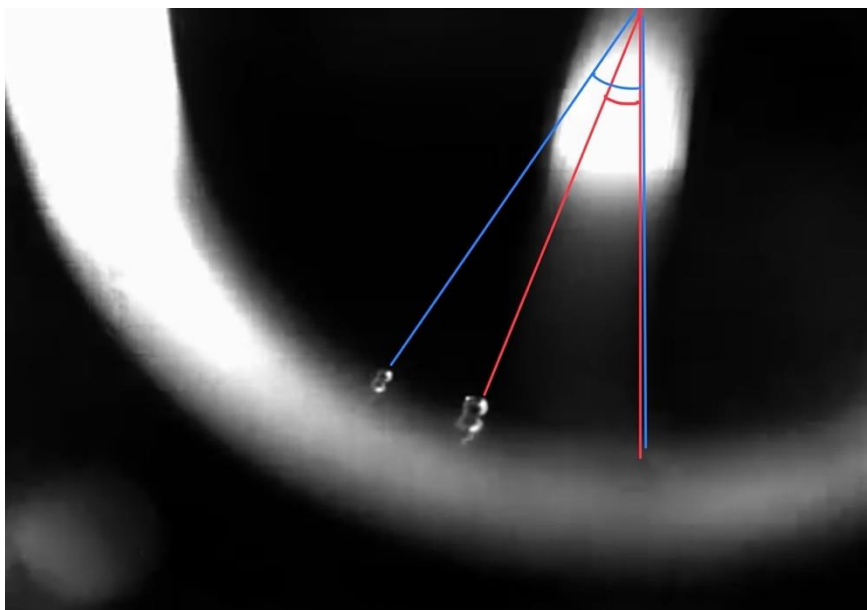


圖 28、小液滴半徑 $r$ 約 0.2 mm；大液滴的半徑 $r$ 約 0.4 mm

圖 29 為在固定液體為矽油、16 號針頭的情形下，所生成矽油滴傾斜角度 $\theta$  與滾筒轉速 $v$ 之關係散佈圖，同半徑的矽油滴（同一顆矽油滴）稱為同組數據，使用同一顏色標記數據點。

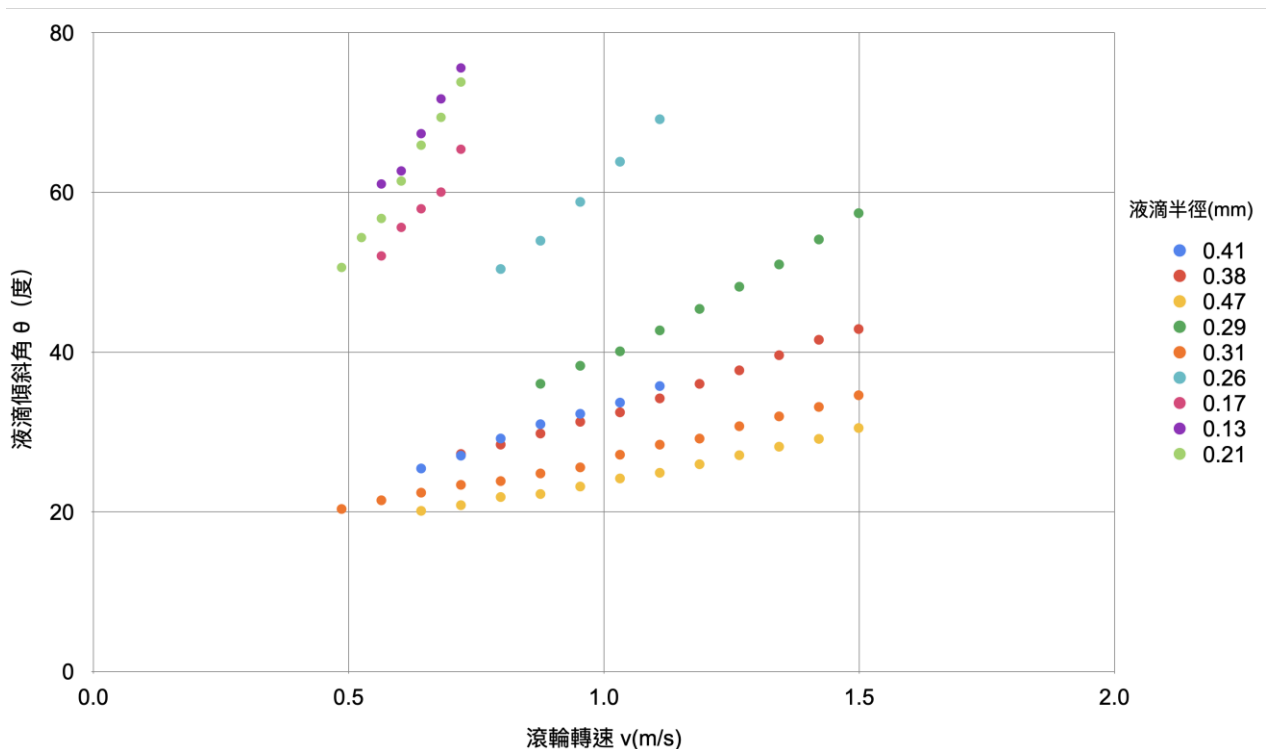


圖 29、矽油滴傾斜角度 $\theta$  與滾筒轉速 $v$ 之關係

圖 29 中可發現以下特徵：

1. 固定矽油滴半徑 $r$ ，矽油滴傾斜角 $\theta$ 與滾筒的切線速度 $v$ 呈正相關，同組數據成單調遞增、圖形凹向上。
2. 矽油滴半徑越小，數據組的斜率會越大。
3. 綠色及橘色數據點所能到達最左側的位置為滾筒切線速度  $0.486 \text{ m/s}$ ，代表滾筒切線速度  $0.486 \text{ m/s}$  即可支撐半徑  $0.21 \sim 0.31 \text{ mm}$  的矽油滴懸浮。

根據理論推導式(4-4)的預測， $\sin \theta$  應與  $\frac{v}{r^2}$  成正比，此處將矽油滴傾斜角正弦值  $\sin \theta$

與  $\frac{v}{r^2}$  做圖，如圖 30 所示，同一條趨勢線所連接的為相同矽油滴半徑  $r$  的數據：

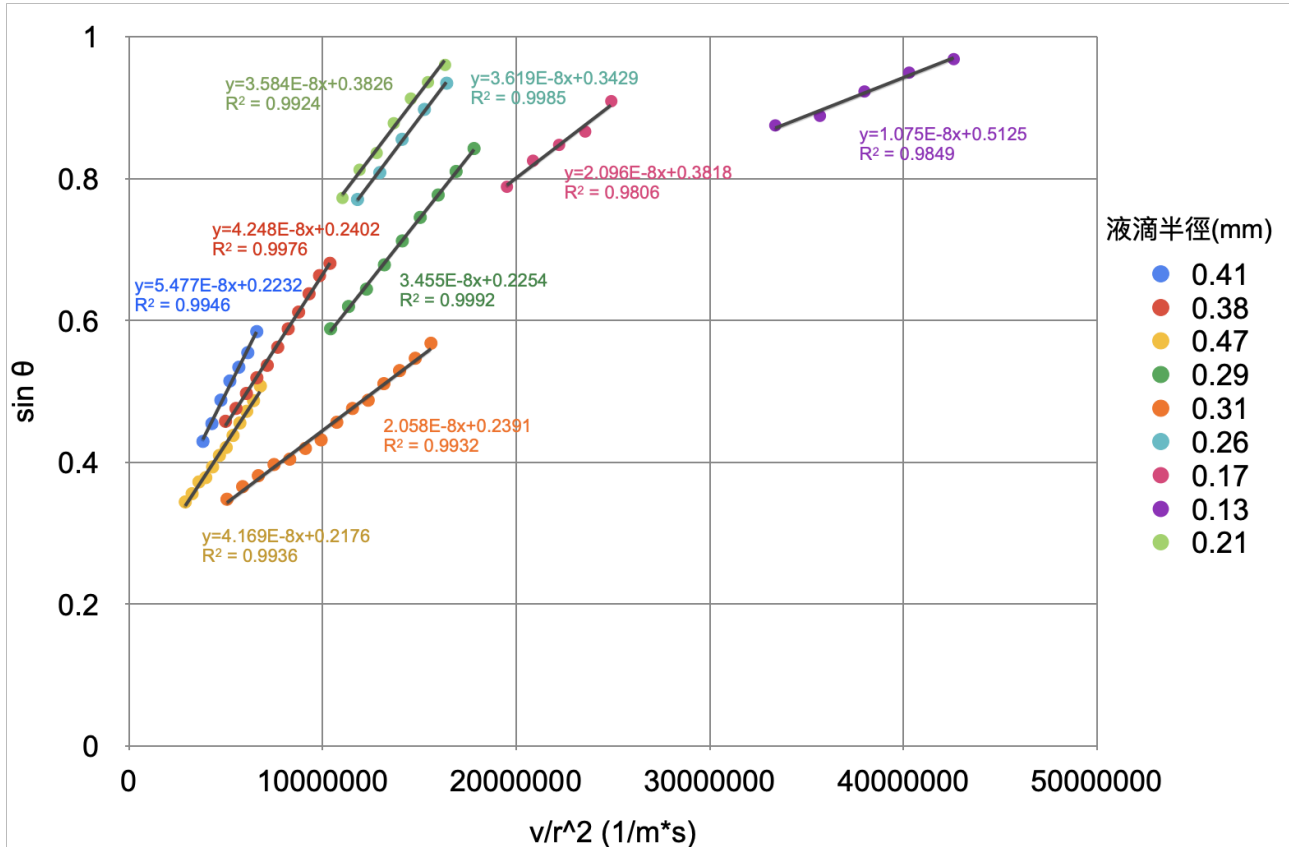


圖 30、 $\sin \theta$  與  $\frac{v}{r^2}$  之關係圖

圖 30 中可發現這 9 組數據都呈現線性關係，相關係數  $R^2$  皆高達 0.980 以上，符合理論預測。

根據理論推導，以矽油作為實驗液體時， $\sin \theta$  對  $\frac{v}{r^2}$  做圖理論斜率  $C_{1, \text{矽油}}$  計算如下：

$$C_{1, \text{矽油}} = \frac{18\mu}{4\rho g} = \frac{18 \times 1.0 \times 10^{-3}}{4 \times 968 \times 9.81} \approx 4.74 \times 10^{-7} (m \cdot s)$$

其中空氣黏滯係數  $\mu$ 、液體密度  $\rho$ 、重力加速度為  $g$ 。

圖 30 中 9 組數據線的斜率皆介於  $1.075 \times 10^{-8} \sim 5.477 \times 10^{-8} (m \cdot s)$ ，略低於理論斜率  $C_{1, \text{矽油}}$ ，但與理論斜率  $C_{1, \text{矽油}}$  在同一數量級，符合理論預測。

### 三、不同液體種類對液滴懸浮現象的影響

#### (一) 以水代替矽油作為實驗液體

若將實驗中的矽油替換為水，無論是在光滑、塗上一層水或矽油或防水塗層的滾筒上，皆無法形成懸浮的液滴。

推測是因為實驗假設液滴懸浮的前提為「液滴與滾筒表面之間須有空氣墊支撐」，即由滾筒帶入的空氣量需大於等於受液滴表面張力擠壓所排出的空氣量：

$$\rho v^2 \geq \gamma \cdot \frac{1}{r} \quad (5-1)$$

其中液體密度 $\rho$ 、滾筒切線速度 $v$ 、表面張力係數為 $\gamma$ 、液滴半徑 $r$ 。  
移項後得：

$$v \geq \sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}} \quad (5-2)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho r}} \quad (5-3)$$

$v_1$  為滾筒最低切線轉速。

根據式 (5-3)，推測因為水的表面張力 ( $72 \text{ dyn/cm}$ ) 約為矽油 ( $21 \text{ dyn/cm}$ ) 的三倍，使得  $v_1$  超出本實驗設計可量測之範圍，故無法形成穩定懸浮之水滴。亦即空氣墊的形成需要液滴底部產生形變，以持續補充、儲存空氣作為支撐，而過大的表面張力易使此一現象不易形成，故無法以本次實驗裝置觀測到懸浮的水滴。

#### (二) 以甘油代替矽油作為實驗液體

本實驗認為表面張力是影響液滴懸浮與否的主要因素，且已知表面張力係數為  $21 \text{ dyn/cm}$  的矽油能夠穩定懸浮、表面張力係數為  $72 \text{ dyn/cm}$  的水無法懸浮，故選用表面張力係數略小於水 ( $61.9 \text{ dyn/cm}$ )，且與水可以任意比例互溶，方便取得、處理的甘油進行接續實驗。將甘油依據與前述矽油相同的數據處理步驟分析。

圖 31 為在固定液體為純甘油、16 號針頭的情形下，所生成甘油滴傾斜角度 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 之關係散佈圖，同半徑的甘油滴（同一顆甘油滴）稱為同組數據，使用同一顏色標記數據點。

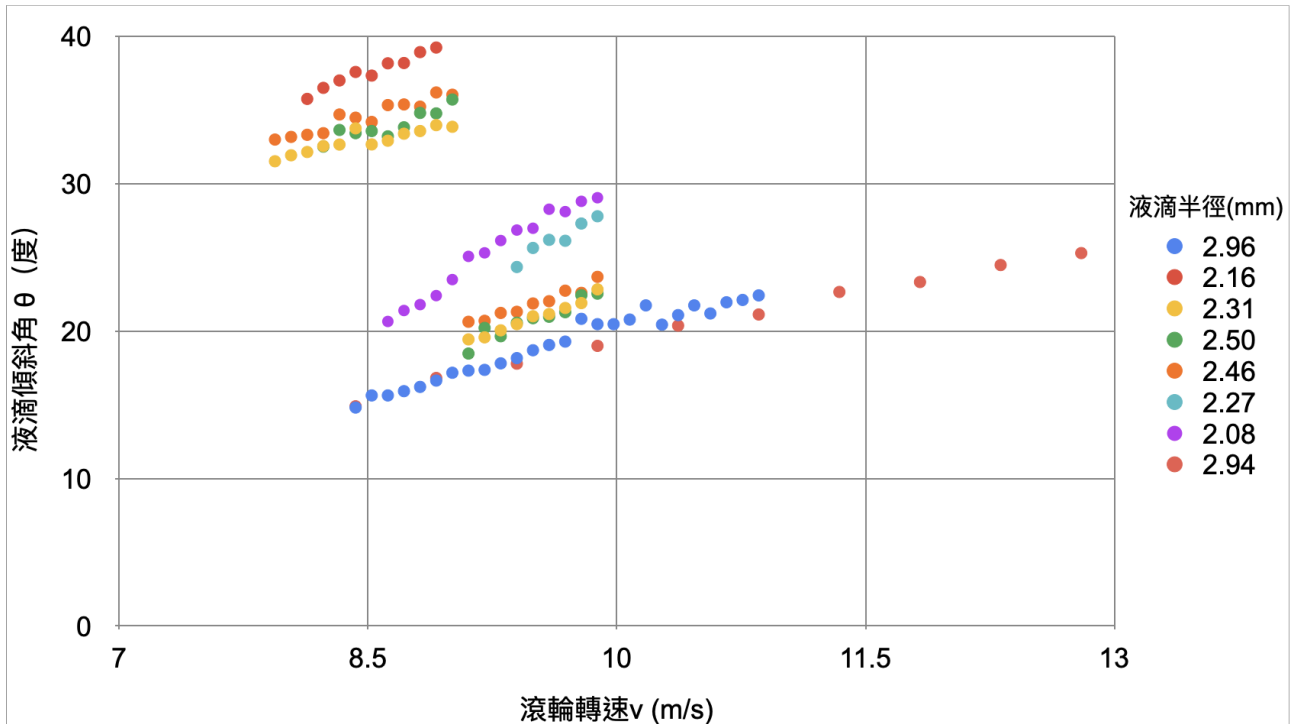


圖 31、甘油滴傾斜角 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 之關係

甘油因為黏度較高，在滴落表面的過程中，不易因碰撞分裂成更小的甘油滴，因此圖 31 甘油實驗數據中僅出現半徑大於 2 mm 的甘油滴數據。

圖 31 中可發現以下特徵：

1. 固定甘油滴半徑 $r$ ，甘油滴傾斜角 $\theta$ 與滾筒的切線速度 $v$ 呈正相關。
2. 橘色及黃色數據點所能到達最左側的位置約為滾筒切線速度 7.939 m/s。滾筒切線速度約 7.939 m/s 才可支撐半徑 2.16~2.46 mm 的甘油滴懸浮。

根據理論推導式(4-4)的預測， $\sin \theta$  應與  $\frac{v}{r^2}$  成正比，因此此處將甘油滴傾斜角正弦

值  $\sin \theta$  對  $\frac{v}{r^2}$  做圖，如圖 32 所示，同一條趨勢線所連接的為相同甘油滴半徑  $r$  的數據：

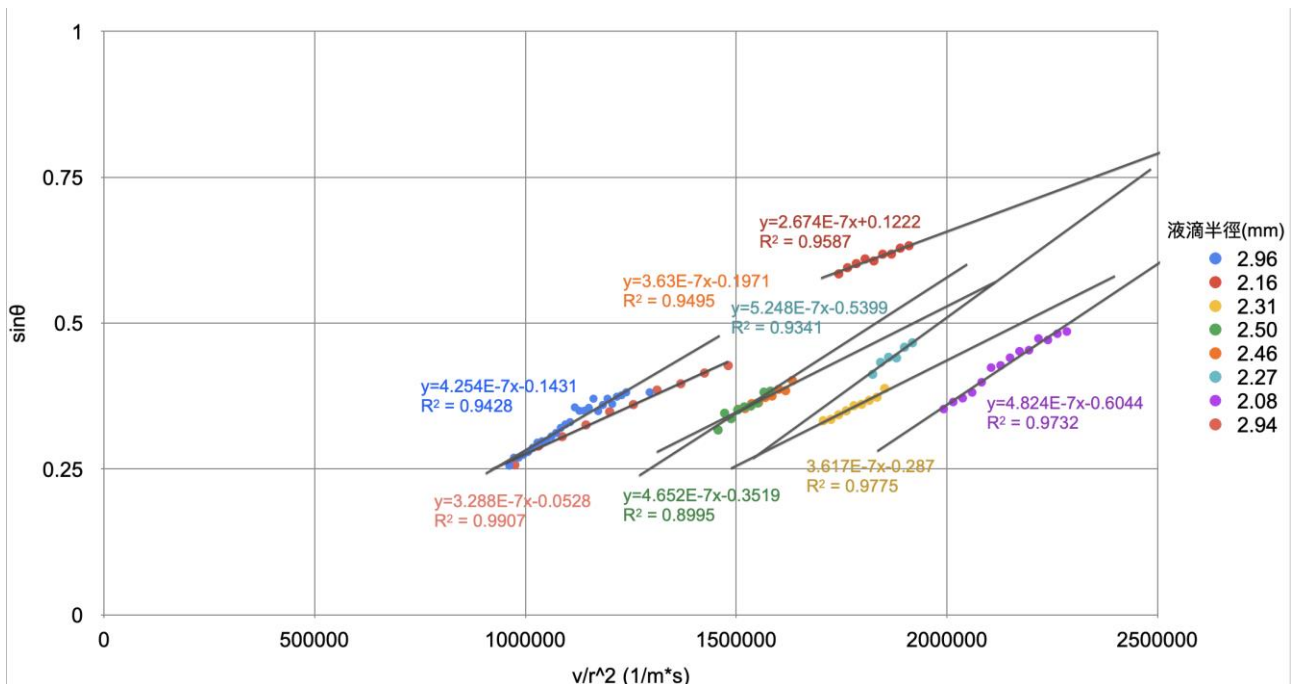


圖 32、 $\sin \theta$  與  $\frac{v}{r^2}$  之關係圖

圖 32 中可發現這 8 組數據都呈現線性關係，相關係數  $R^2$  皆高於 0.8995，符合理論預測。

根據理論推導，以甘油作為實驗液體時， $\sin \theta$  對  $\frac{v}{r^2}$  做圖理論斜率  $C_{1,甘油}$  計算如下：

$$C_{1,甘油} = \frac{18\mu}{4\rho g} = \frac{18 \times 1.0 \times 10^{-3}}{4 \times 1260 \times 9.81} \approx 3.64 \times 10^{-7} (m \cdot s)$$

圖 32 中 8 組數據線的斜率介於  $2.674 \times 10^{-7} \sim 5.248 \times 10^{-7} (m \cdot s)$ ，與理論斜率  $C_{1,甘油}$  在同一數量級，符合理論預測。

#### 四、變力 $F_3$ 的特徵

(一) 以矽油作為實驗液體

由理論探討的式 4-4，可知圖 30 中，各組數據趨勢線y軸截距即為 $C_2 \cdot f(v, r)/r^3$ ，可從中分析出變力 $F_3 = f(v, r)$ 的特徵。

若選取圖 30 中任一條趨勢線觀察，可發現隨著轉速 $v$ 增加， $\sin \theta$  對  $\frac{v}{r^2}$  做圖，其趨勢線呈現線性關係，亦即當矽油滴半徑 $r$ 固定時， $\sin \theta$  可近似為轉速 $v$ 的一次函數。在式 (4-4) 中， $C_1 \cdot \frac{v}{r^2}$  項為 $v$ 的一次項，故 $C_2 \cdot f(v, r)/r^3$  項可視為與 $v$ 無關的常數項。因此將  $f(v, r)$  近似成僅與 $r$ 相關的函數: 變力 $F_3 = f(r) = k \cdot r^\alpha$ 。

因為想要得知變力 $F_3$ 與矽油滴半徑 $r$ 的關係，故列出圖 30 中各個矽油滴半徑與其數據組趨勢線與y軸的截距之對應表：

表 1、矽油滴半徑 $r$ 與y軸截距、變力 $F_3$ 對應表

矽油滴半徑 $r$ (mm)	0.41	0.38	0.47	0.29	0.31	0.26	0.17	0.13	0.21
趨勢線y軸截距	0.223	0.240	0.218	0.225	0.239	0.343	0.382	0.513	0.383
變力 $F_3$ 的整數倍 $C_2 \cdot f(v, r)$ ( $kg/m \cdot s^2$ )	$1.54 \times 10^{-11}$	$1.32 \times 10^{-11}$	$2.26 \times 10^{-11}$	$5.50 \times 10^{-12}$	$7.12 \times 10^{-12}$	$6.03 \times 10^{-12}$	$1.88 \times 10^{-12}$	$1.16 \times 10^{-12}$	$3.54 \times 10^{-12}$

若取 $\log(r)$ 和 $\log(C_2 \cdot F_3)$ 做圖，則其趨勢線斜率即為 $r$  之指數部分 $\alpha$ ，其趨勢線與y軸之截距為 $r$ 的係數 $C_2 \cdot k$ 。

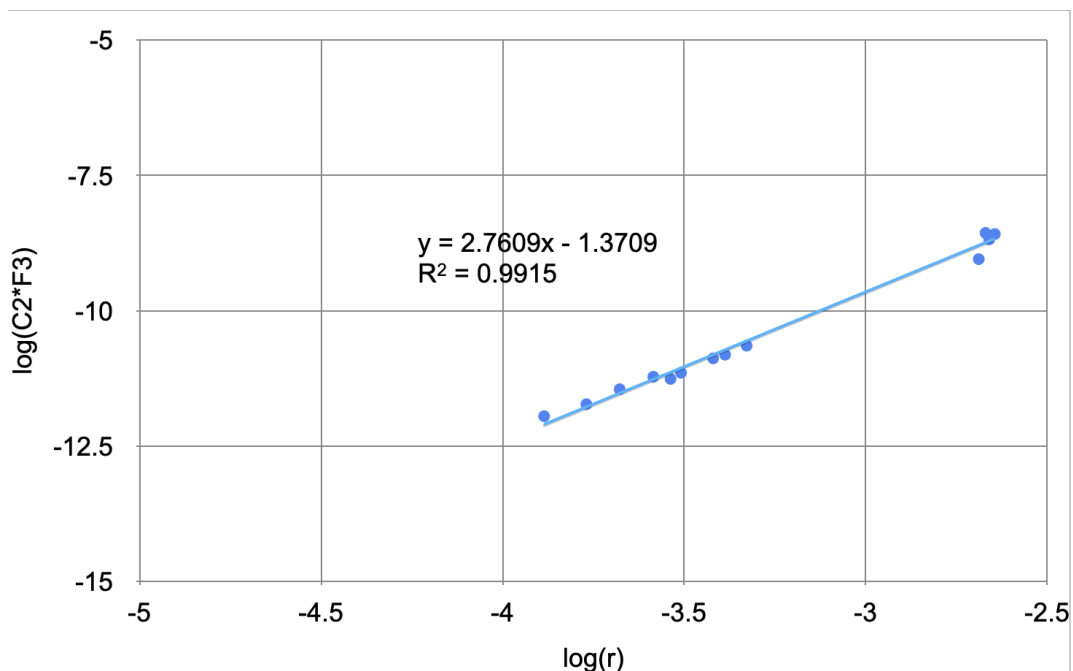


圖 33、矽油 $\log(C_2 \cdot F_3)$ 與 $\log(r)$ 之關係圖

由圖 33 可推知矽油的變力 $F_3$ 約與 $r^{2.8}$ 呈正比關係，其相關係數 $R^2 = 0.9915$ 。



(二) 甘油作為實驗液體

由先前的實驗可知，以甘油作為實驗液體時，同樣符合式(4-4)的理論預測，故可比照前述矽油變力 $F_3$ 的分析步驟，令甘油變力 $F_3 = f(r) = k \cdot r^\alpha$ 。

列出圖 32 中各個甘油滴半徑與其數據組趨勢線與y軸的截距之對應表：

表 2、甘油滴半徑與y軸截距、變力 $F_3$ 對應表

甘油滴半徑 $r$ (mm)	2.96	2.16	2.31	2.50	2.46	2.27	2.08
趨勢線y軸截距	-0.173	0.122	-0.287	-0.352	-0.197	-0.540	-0.604
變力 $F_3$ 的整數倍	-4.49	1.23	-3.54	-5.50	-2.93	-6.32	-5.44
$C_2 \cdot f(v, r)$ ( $kg/m \cdot s^2$ )	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$	$\times 10^{-9}$

取 $\log(r)$ 和 $\log(C_2 \cdot F_3)$ 做圖，則其趨勢線斜率即為 $r$ 之指數部分 $\alpha$ ，其趨勢線與y軸之截距為 $r$ 的係數 $C_2 \cdot k$ 。

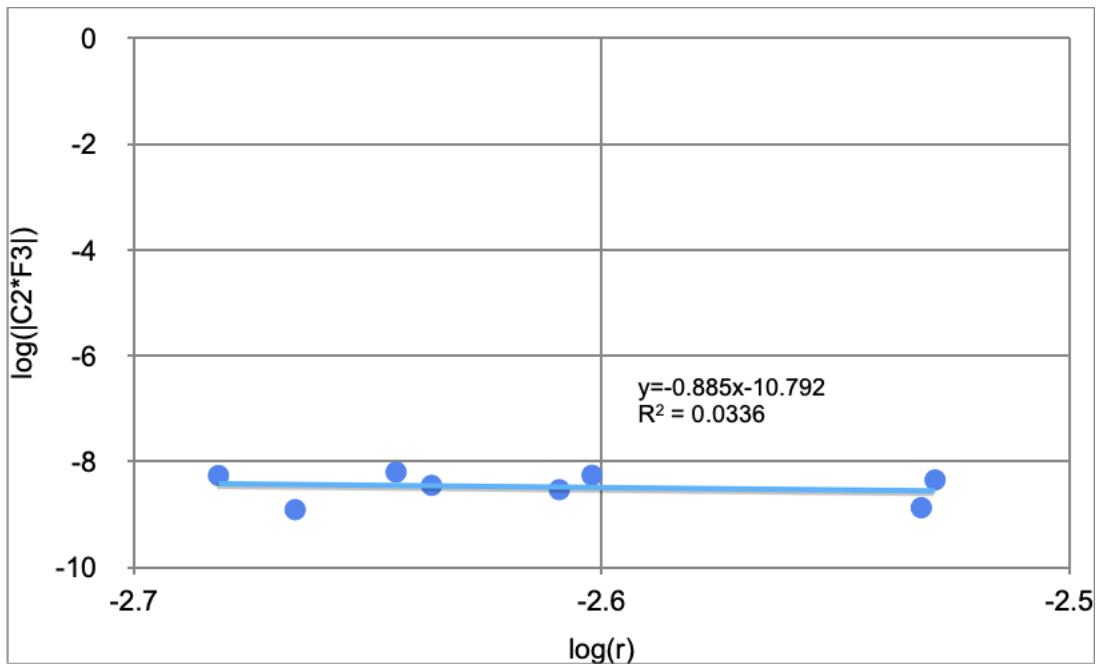


圖 34、甘油 $\log(C_2 \cdot F_3)$ 與 $\log(r)$ 之關係圖

圖 34 中趨勢線呈現近乎水平，其相關係數 $R^2 = 0.0336$ ， $\log(C_2 \cdot F_3)$ 與 $\log(r)$ 幾乎無相關。

故可知以甘油進行實驗時，其變力 $F_3$ 與甘油滴半徑 $r$ 無關。相較於以矽油進行實驗得到的 $F_3 \propto r^{2.8}$ ，變力 $F_3$ 會隨液體種類不同而改變。

## 五、矽油滴內部流場觀察

圖 35~圖 44 為矽油滴懸浮在切線轉速為  $0.60\text{m/s}$ 、逆時針穩定旋轉之滾筒上，以高速攝影機（每秒 1900 幀）搭配顯微鏡頭所拍攝的連續 10 幀影像，每張間隔約  $0.526\text{ms}$ 。其中液滴半徑約為  $0.2\text{mm}$ 。

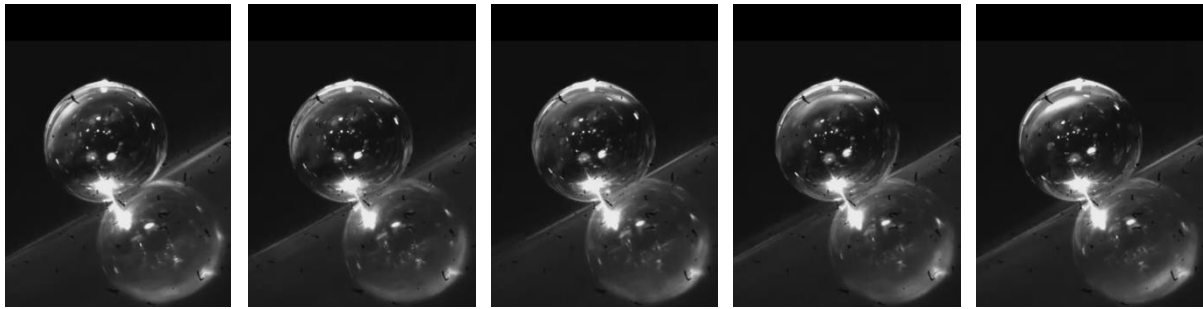


圖 35、 $t=0\text{ms}$

圖 36、 $t=0.53\text{ms}$

圖 37、 $t=1.05\text{ms}$

圖 38、 $t=1.58\text{ms}$

圖 39、 $t=2.11\text{ms}$

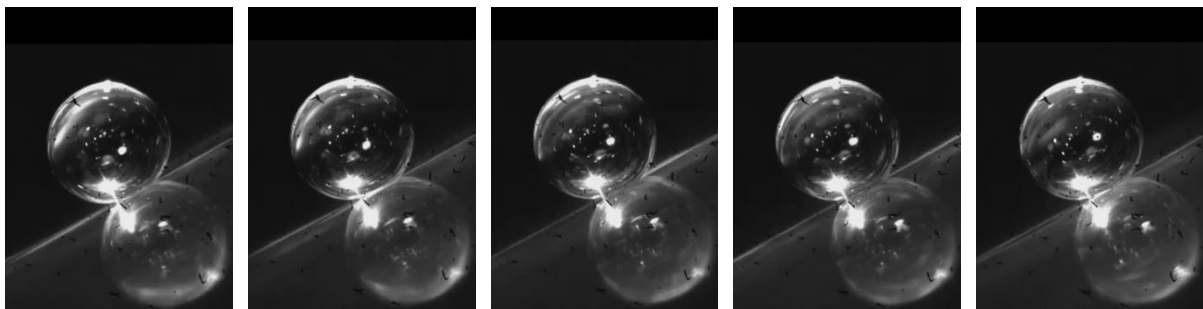


圖 40、 $t=2.63\text{ms}$

圖 41、 $t=3.16\text{ms}$

圖 42、 $t=3.69\text{ms}$

圖 43、 $t=4.21\text{ms}$

圖 44、 $t=4.74\text{ms}$

圖 35~圖 44 中，難以以肉眼判斷液滴內部示蹤粒子（圖中液滴內部白色光點，為二氧化鈦粉末）之移動方向，因此在本實驗中使用 PIVlab 分析影像，得到圖 45。

圖 45 中紅色叉叉為不分析區域，分析區域以綠色箭頭呈現液滴內部示蹤粒子在兩幀間隔影格中平均位移，及瞬時速度，綠色箭頭方向即為位移方向，且箭頭越長代表速度越快。由圖 45 可發現液滴內部為逆時針轉，與滾筒轉動方向同向。另外，可發現液滴的轉動中心偏左、轉動中心右側瞬時速度較左側快，推測為液滴右側受滾筒作用而轉速較快造成。

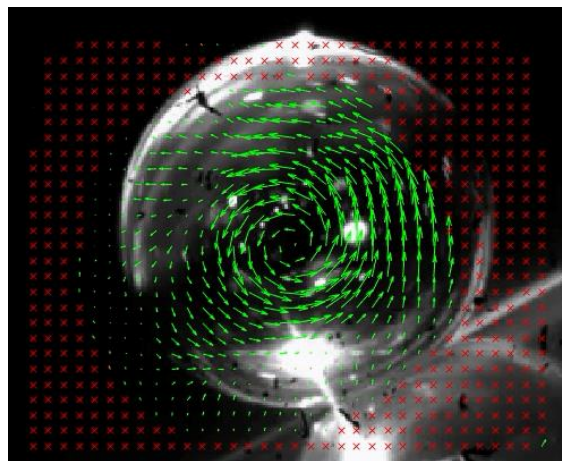


圖 45、PIV 分析液滴內部流場的瞬態速度分佈

## 伍、 討論

此處分成 6 個主題來討論，分別是：實驗結果與理論模型之比較、環境對於實驗造成的影響、液滴平衡時的些微晃動探討、以不同液體進行實驗的差別、甘油與水以不同比例混合進行實驗、捨棄的內容與失敗實驗。

### 一、實驗結果與理論模型之比較

式 (4-4) 中有  $\sin\theta$  與  $\frac{v}{r^2}$  的關係，可以推測將半徑  $r$  固定，考慮  $\theta$  與  $v$  的關係時，圖形會成單調遞增，且半徑  $r$  增加時，趨勢線圖形有趨緩且右移的關係（液滴半徑愈大則達到同樣傾斜角所需轉速愈大），與觀測到的結果（圖 29 矽油實驗結果、圖 31 甘油實驗結果）趨勢相符。

### 二、環境對於實驗造成的影響

本實驗溫度控制在  $25 \pm 1^\circ\text{C}$ ，相對濕度控制在  $65 \pm 5\%$ 。另外，液滴在實驗進行中受潮及蒸發造成液滴大小變化的影響，考量到滾筒本身帶走液滴表面的矽油含量的影響應較為顯著，因此僅觀測液滴大小於實驗中的變化，將液滴大小明顯變化的實驗數據分組討論。

### 三、液滴平衡時的些微晃動探討

在實驗中發現當液滴半徑  $r$ 、滾筒轉速  $v$  不變時，液滴傾斜角  $\theta$  會有一小幅度晃動，如圖 46、圖 47 所示。且給定的轉速  $v$  愈大時，觀察到液滴在傾斜角  $\theta_0$  附近晃動幅度  $\Delta\theta$  越大：



圖 46、液滴晃動幅度高點  $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$

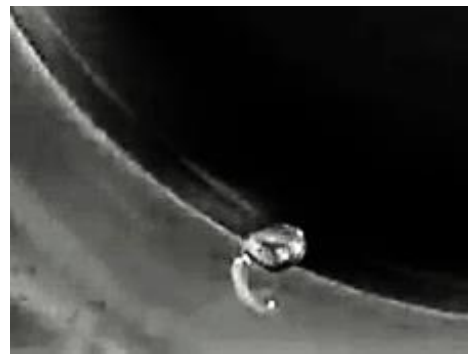


圖 47、液滴晃動幅度低點  $\theta = \theta_0 - \Delta\theta$

經由以下的推導，可以預測當  $v$  加快時， $\Delta\theta$  會增大，這和實驗結果吻合。推導過程如下：

由圖 14 力圖分析可列出液滴在滾筒切線方向上運動方程式：

$$mR \frac{d^2\theta}{dt^2} = 6\pi r v \mu + F_3 - mg \sin\theta \quad (6-1)$$

其中定義  $\theta$ 、作用力在滾筒切線方向順時針為正，液滴質量為  $m$ 、半徑  $r$ ，液滴傾斜角  $\theta$ ，液滴到滾筒中心的距離為  $R$ ，滾筒切線轉速  $v$ 、空氣黏滯係數  $\mu$ ，重力加速度為  $g$ 。

將(6-1)等式兩邊乘上 $R \frac{d\theta}{dt}$ ，再對 $t$ 積分，移項後得式(6-2)：

$$\frac{mR^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - (6\pi r v \mu + F_3 \theta + mg \cos \theta) R = E \quad (6-2)$$

(6-2)等式中 $\frac{mR^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$ 為液滴質心動能。以滾筒圓心為重力位能零位面，則 $-mg R \cos \theta$ 為液滴重力位能 $V(\theta)$ 。

因液滴半徑 $r$ 、滾筒轉速 $v$ 不變，故 $6\pi r v \mu$ 、 $F_3(v, r)$ 的方向、大小皆固定，與 $\theta$ 無關。

若將液滴沿著滾筒切線方向從 $\theta_a$ 移動到 $\theta_b$  ( $\theta_b > \theta_a$ )，位移與受力方向平行， $6\pi r v \mu$ 及 $F_3(v, r)$ 對液滴做的功為：

$$\int_{\theta_a}^{\theta_b} (6\pi r v \mu + F_3) R d\theta(t) = (6\pi r v \mu + F_3) R (\theta_b - \theta_a) \quad (6-3)$$

若將液滴沿著滾筒切線方向從 $\theta_b$ 移動到 $\theta_a$ ， $6\pi r v \mu$ 及 $F_3(v, r)$ 對液滴做的功為：

$$\int_{\theta_b}^{\theta_a} (6\pi r v \mu + F_3) R d\theta(t) = (6\pi r v \mu + F_3) R (\theta_a - \theta_b) \quad (6-4)$$

將(6-3)、(6-4)相加：

$$\oint (6\pi r v \mu + F_3) R d\theta(t) = 0 \quad (6-5)$$

由式(6-5)可知在液滴半徑 $r$ 、滾筒轉速 $v$ 不變時，液滴經由一次晃動後回到原傾斜角時， $6\pi r v \mu$ 、 $F_3(v, r)$ 對液滴所作的總功為零，亦即 $6\pi r v \mu$ 、 $F_3(v, r)$ 做功可被液滴以類似位能的方式儲存。

因此式(6-2)中， $-(6\pi r v \mu + F_3 \theta) R$ 為一種液滴帶有的能量，積分常數 $E$ 即為液滴總能量。式(6-2)為能量守恆式。

若將能量 $E_\theta \equiv -(6\pi r v \mu + F_3 \theta + mg \cos \theta) R$ 對 $\theta$ 做圖，可發現當 $\theta$ 增加時，能量 $E_\theta$ 先往下掉，在 $\theta_0 = \sin^{-1}[(6\pi r v \mu + F_3)/mg]$ 觸谷反彈，與式(4-3)所預測的液滴傾斜角平衡點相符。如果液滴固定在 $\theta_0$ 不動，則動能等於零，對應的液滴總能量為：

$$E_0 = -(6\pi r v \mu + F_3 \theta_0 + mg \cos \theta_0) R \quad (6-6)$$

轉速 $v$ 和液滴半徑 $r$ 一旦給定，液滴傾斜角平衡點 $\theta_0$ 便固定了。接著只要知道液滴總能量 $E$ 比 $E_0$ 大多少，便可以從 $E_\theta$ 知道液滴會在那兩個角度間震盪。

假設每一次調快滾筒轉速 $v$ 時，滾筒額外注入液滴的能量 $\Delta E \equiv E - E_0$ 是定值， $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ，當 $\theta = \theta_{1,2}$ 時，動能 $T = 0$ ，故其中 $\theta_{1,2}$ 由式(6-7)決定。

$$E + (6\pi r v \mu \theta_{1,2} + F_3 \theta_{1,2} + mg \cos \theta_{1,2}) R = 0 \quad (6-7)$$

令 $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ ，其中 $\Delta\theta \ll \theta_0$ ，假設 $(\Delta\theta)^2$ 和 $\Delta E$ 在同一個數量級，故將式（6-7）泰勒展開，第三階及以後的項都可以省略，得：

$$\begin{aligned} E + (6\pi r v \mu \theta + F_3 \theta + mg \cos \theta)R &= 0 \\ \approx E_0 + \Delta E + (6\pi r v \mu \theta_0 + F_3 \theta_0 + mg \cos \theta_0)R & \quad (6-8) \\ + (6\pi r v \mu + F_3 - mg \sin \theta_0)R \Delta\theta + \frac{1}{2}(-mg \cos \theta_0)R(\Delta\theta)^2 & \end{aligned}$$

已知液滴位於平衡點 $\theta = \theta_0$ 時， $F(\theta_0) = -\nabla E_{\theta} = 6\pi r v \mu + F_3 - mg \sin \theta_0 = 0$ 。並利用式（6-6），可將式（6-8）化簡為：

$$\Delta E - \frac{1}{2} mg \cos \theta_0 R (\Delta\theta)^2 = 0 \quad (6-9)$$

整理後得：

$$(\Delta\theta)^2 = \frac{2\Delta E}{mgR \cos \theta_0} = \frac{2\Delta E}{mgR \sqrt{1 - [(6\pi r v \mu + F_3)/mg]^2}} \quad (6-10)$$

此結果預測當 $v$ 加快時， $\Delta\theta$ 會增大，這和實驗結果吻合。

#### 四、以不同液體進行實驗的差別

實驗中選用表面張力、黏滯力不同的矽油、甘油及水進行實驗。其中矽油表面張力係數低（ $21 \text{ dyn/cm}$ ），在本實驗中能懸浮的速度區間最廣，從最低  $0.486 \text{ m/s}$  到最高  $9.884 \text{ m/s}$ 。甘油雖有較高的表面張力（ $61.9 \text{ dyn/cm}$ ）仍能懸浮於滾筒表面，其液滴懸浮需要的速度較高，懸浮區間為  $7.939 \text{ m/s} \sim 12.800 \text{ m/s}$ 。表面張力最高（ $72 \text{ dyn/cm}$ ）的水則是無法形成懸浮的液滴。

實驗結果發現 $\sin \theta$ 與 $v/r^2$ 的關係圖（圖 30、圖 32）中矽油趨勢線的相關係數大於甘油，推測是因為矽油在滴落表面的過程中，碰撞會分裂成更小的矽油滴以幫助穩定，這不僅使矽油滴可以在更低的轉速下懸浮，也會使矽油滴半徑、傾斜角的測量更為精確；另一方面，甘油則因為黏度較高（ $950 \text{ cSt}$ ），雖因此克服高表面張力容易快速分裂並接觸滾筒表面塌陷的缺點，但其不易分裂也造成甘油滴較大，容易形變成橢球型，造成量測時的半徑與實際應代入計算的半徑有些微差距、液滴傾斜角的測量也較為困難。

另外，實驗結果發現矽油的變力 $F_3$ 與半徑的 2.8 次方成正比，而甘油的變力 $F_3$ 卻與其半徑無關。推測是因為不同液體特性（表面張力、黏滯度），使液滴形變（接近正圓或橢圓）程度不同，進而影響液滴和滾筒壁面間的接觸面積不同，造成作用在液滴和滾筒壁面之間的變力 $F_3$ 不同。此假說是否確，須進一步進行實驗，測量不同液滴種類與 $F_3$ 的關聯性才能得知。

## 五、甘油與水以不同比例混合進行實驗

實驗中嘗試將甘油與水以 1:1 比例混合，觀察黏度較高的甘油是否有助於水的懸浮，但實驗發現其滴於滾筒上雖能懸浮，但液滴易發生形變、分裂，存活時間十分短暫，無法獲得足夠數據做分析，因此「甘油滴」實驗數據皆是以純甘油（950 cSt）進行實驗量測的。



圖 48、甘油與水 1:1 混合：液滴易發生形變，無法穩定懸浮

## 六、捨棄的內容與失敗實驗

### (一) 半徑大於 1 mm 的大矽油滴

實驗中編號 16 針頭能滴出半徑大於 1 mm 的矽油滴，但在本實驗中大矽油滴容易隨著旋轉及摩擦漸漸變小，能從圖 49 中看到，大矽油滴因為液滴半徑不固定，造成做圖曲線呈現鋸齒狀，因此矽油實驗數據中只將較為穩定的小矽油滴視為有效數據。

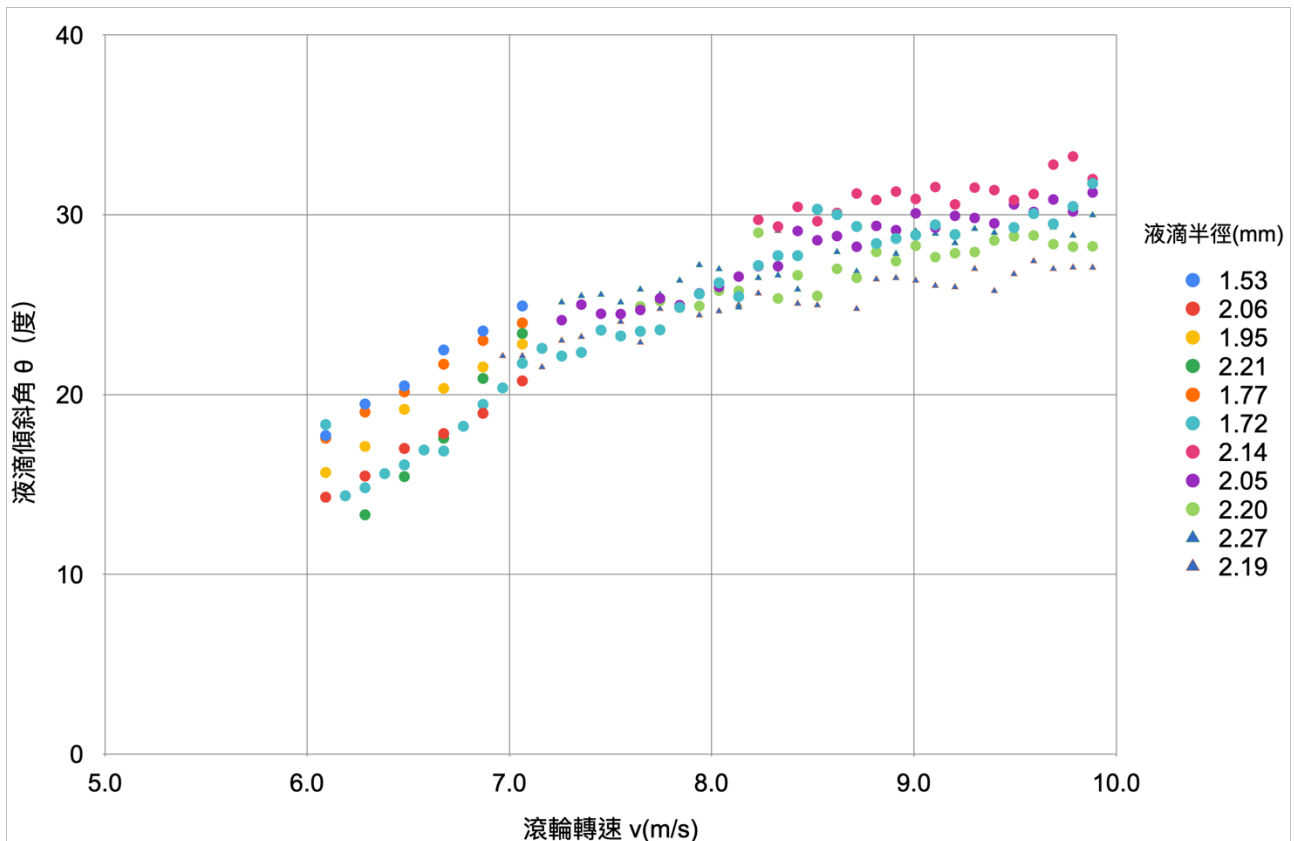


圖 49、矽油大液滴傾斜角度 $\theta$  與滾筒轉速 $v$ 之關係

## (二) 半徑大於 1 mm 的大矽油滴、甘油滴進行 PIV 實驗

實驗中嘗試過以半徑大於 1 mm 的大矽油滴進行 PIV 實驗，卻觀察到原先穩定懸浮的矽油滴在照射到雷射光後開始劇烈晃動，而無法分析矽油滴內部流場。推測是因矽油滴半徑大於雷射光束半徑，使矽油滴受到的雷射光壓不均勻而不易平衡。

另外，本實驗也嘗試過更換實驗液體為甘油進行 PIV 實驗，卻因甘油滴難以分裂形成小液滴的特性，同樣遇到大液滴受到的雷射光壓不均勻而不易平衡的問題，未來將嘗試增加雷射光束半徑以解決此困境。

## 陸、 結論

- 一、矽油滴在靜止的表面亦會短暫懸浮約 0.27 秒。在移動的表面上則能穩定懸浮數十秒至數分鐘。
- 二、不論是矽油滴或甘油滴：
  - (一) 若固定液滴半徑  $r$ ，液滴傾斜角  $\theta$  與滾筒的切線速度  $v$  呈正相關。且在同一切線速度  $v$  下，液滴半徑  $r$  越小，液滴傾斜角  $\theta$  越大。
  - (二) 液滴傾斜角正弦值  $\sin\theta$  與滾筒切線速度  $v$  乘液滴半徑  $r$  的  $-2$  次方成正比，與預測相符。
- 三、矽油在本實驗中所能懸浮的速度區間最廣。甘油因為表面張力較大，懸浮所需要的最低速度比矽油高。水在本實驗中無法懸浮。
- 四、由實驗結果推知矽油滴的變力  $F_3$  約與  $r^{2.8}$  成正比關係，而甘油滴的變力  $F_3$  與液滴半徑  $r$  無關，變力  $F_3$  會隨液體種類不同而改變。
- 五、PIV 分析發現液滴轉動方向與滾筒帶動方向相同。
- 六、綜合結論二～四，可以下列方程式描述液滴懸浮於移動表面之運動行為：

$$\sin \theta = C_1 \cdot \frac{v}{r^2} + C_2 \cdot \frac{F_3}{r^3}$$

其中  $C_1 = \frac{18\mu}{4\rho g}$ ， $C_2 = \frac{3}{4\pi\rho g}$ 。液體密度  $\rho$ 、液滴半徑  $r$ 、滾筒切線速度  $v$ 、液滴傾斜角  $\theta$ ，空氣黏滯係數  $\mu$ ，重力加速度  $g$ ，液滴受的交互作用力  $F_3$ 。



## 柒、 未來展望

- 一、實驗觀察液滴傾斜角晃動幅度  $\Delta\theta$  與液滴半徑  $r$  及滾筒切線轉速  $v$  之關係，驗證式 (6-10)，以進一步探討液滴懸浮現象發生不穩定的條件。
- 二、實驗量測液滴所能達到的最高及最低滾筒切線轉速，並建立理論模型探討液滴穩定懸浮的速度區間與液滴半徑之關係。
- 三、藉由調整實驗條件使各種液體的液滴皆能懸浮。
- 四、以更多種類的液體進行實驗，尋找變力  $F_3$  與液體特性之間的關聯。
- 五、增加雷射光束半徑以解決液滴受到的雷射光壓不均勻而不易平衡之問題，並探討液滴半徑、液體種類與液滴內部流場之關係。
- 六、利用紋影法觀測系統中空氣的流場，並探討空氣流場與空氣墊、液滴存活與否的關係。
- 七、藉由液滴底部的光干涉現象，觀測液滴下空氣墊的厚度變化，以檢視空氣墊厚度與液滴形變、運動及穩定性的關係。

## 捌、 參考資料

1. [online]. Yoshiyuki Tagawa, 16 October 2014. Available from: <https://www.youtube.com/watch?v=Btr4kLmqNaw>
2. Erina Sawaguchi, Ayumi Matsuda, Kai Hama, Masafumi Saito and Yoshiyuki Tagawa. Cambridge University Press (08 January 2019). Droplet levitation over a moving wall with a steady air film
3. Henri Lhuissier<sup>1</sup>, Yoshiyuki Tagawa<sup>1,2,†</sup>, Tuan Tran<sup>1</sup> and Chao Sun. Tokyo University of Agriculture and Technology (25 September 2013). Levitation of a drop over a moving surface
4. Walker, Jearl. "Boiling and the Leidenfrost effect." Fundamentals of physics (2010): E10-1.
5. FOWLER, Michael. Dropping the ball (slowly). Stokes' Law [online]. 12 June 2006. [Accessed 15 June 2022]. Available from: [https://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/Stokes\\_Law.htm](https://galileo.phys.virginia.edu/classes/152.mf1i.spring02/Stokes_Law.htm)
6. High View Innovation. 三維粒子成像測速 (3D PIV) 流場模擬分析. [online]. [Accessed 11 June 2022]. Available from: <http://www.hvi-global.com/PIV.htm>

## 玖、 附錄

### 一、 電源供應器輸出電壓與 DC 6V - 24V 高扭力直流減速馬達（小馬達）轉速換算

在滾筒上作記號，利用高速攝影機搭配 PCC3.6 拍攝記號旋轉一圈，計算在小馬達旋轉一週期內，高速攝影機所拍攝的影格數，除以高速攝影機每秒所拍攝的影格數，即可得到小馬達轉速。

表 3、小馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓換算

電壓 (V)	小馬達轉速 (圈/s)	滾筒切線速度 (m/s)
5.000	1.165	0.329
6.000	1.508	0.426
7.000	1.757	0.497
8.000	2.021	0.571
9.000	2.272	0.642
10.000	2.518	0.712
11.000	2.767	0.782
12.000	3.027	0.856
13.000	3.347	0.946
14.000	3.589	1.015
15.000	3.902	1.103
16.000	4.224	1.194
17.000	4.521	1.278
18.000	4.788	1.354
19.000	5.040	1.425
20.000	5.310	1.501

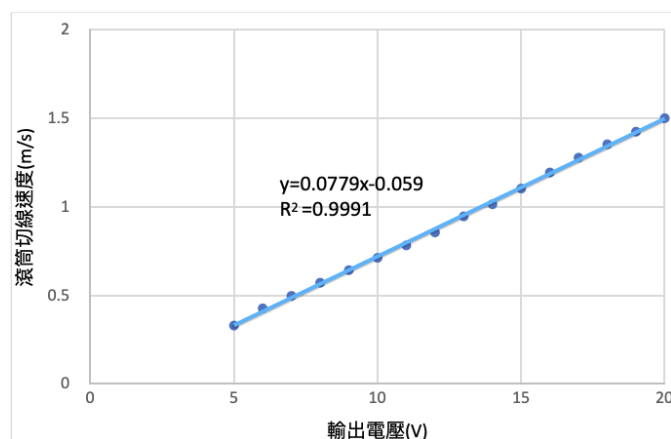


圖 50、小馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓關係圖

根據圖 50 中趨勢線方程式換算電源供應器輸出電壓 ( $V$ ) 與小馬達帶動滾筒切線速度 ( $v$ ) 之間的關係：

$$v = 0.0779 \times V - 0.059 \quad (m/s) \quad (7-1)$$

二、電源供應器輸出電壓與 Parvalux Electric Motors 馬達（大馬達）轉速換算  
大馬達轉速測量方式與小馬達轉速相同。

表 4、大馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓換算

電壓 (V)	大馬達轉速 (圈/s)	滾筒切線速度 (m/s)
2.000	10.91	3.086
2.100	14.21	4.017
2.200	15.66	4.429
2.300	16.69	4.72
2.400	17.65	4.991
2.500	18.47	5.223
2.600	19.48	5.508
2.700	19.7	5.570
2.800	20.29	5.738
2.900	20.95	5.922
3.000	22.08	6.244
3.500	23.15	6.545
4.000	24.63	6.964
4.500	26.36	7.454
5.000	28.04	7.927
5.500	29.53	8.349
6.000	31.38	8.873
6.500	33.11	9.362
7.000	35.13	9.932
7.500	36.86	10.421

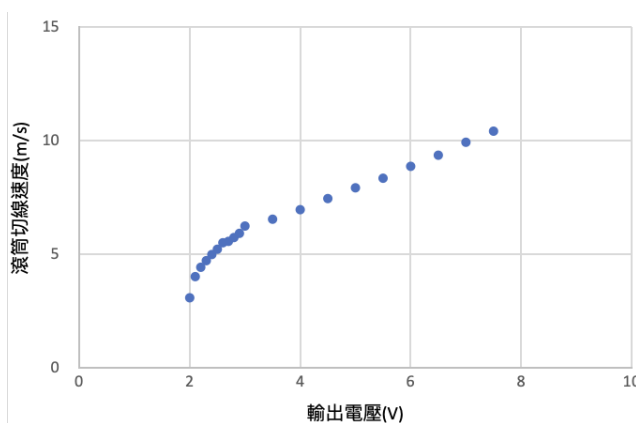


圖 51、大馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓關係圖 1

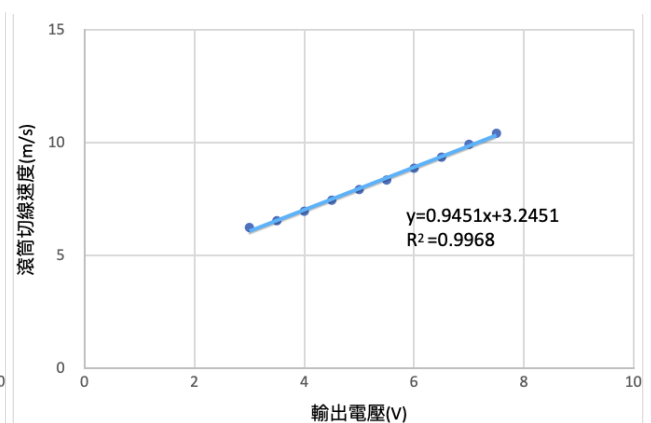


圖 52、大馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓關係圖 2

圖 51 中可發現，大馬達帶動滾筒切線速度與輸出電壓在電壓小於 3 伏特時，不為線性關係，故在使用大馬達進行實驗時，只採用輸出電壓在電壓大於 3 伏特的數據。

刪去圖 51 中電壓小於 3 伏特的數據點，繪製趨勢線，得到圖 52。根據圖 52 中趨勢線方程式換算電源供應器輸出電壓（ $V$ ）與大馬達帶動滾筒切線速度（ $v$ ）之間的關係：

$$v = 0.9451 \times V + 3.2451 \quad (m/s) \quad (7-2)$$

### 三、矽油滴傾斜角度 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 之關係

表 5、矽油滴傾斜角度 $\theta$ 與滾筒轉速 $v$ 之關係

電壓 (V)	轉速 (m/s)	矽油滴半徑 (mm)								
		0.41	0.38	0.47	0.29	0.31	0.26	0.17	0.13	0.21
		矽油滴傾斜角度 $\theta$ (度)								
20.000	1.499		42.9	30.5	57.4	34.6				
19.000	1.421		41.6	29.1	54.1	33.1				
18.000	1.343		39.6	28.2	51.0	32.0				
17.000	1.265		37.7	27.1	48.2	30.7				
16.000	1.187		36.0	26.0	45.4	29.2				
15.000	1.110	35.8	34.2	24.9	42.7	28.4	69.2			
14.000	1.032	33.7	32.5	24.2	40.1	27.2	63.9			
13.000	0.954	32.3	31.3	23.2	38.3	25.6	58.8			
12.000	0.876	31.0	29.8	22.2	36.0	24.8	54.0			
11.000	0.798	29.2	28.4	21.9		23.9	50.4			
10.000	0.720	27.0	27.3	20.8		23.4		65.4	75.6	73.8
9.500	0.681							60.0	71.7	69.4
9.000	0.642	25.4		20.1		22.4		58.0	67.4	65.9
8.500	0.603							55.6	62.7	61.4
8.000	0.564					21.5		52.1	61.1	56.7
7.500	0.525									54.4
7.000	0.486					20.4				50.6

四、甘油滴傾斜角度 $\theta$  與滾筒轉速 $v$ 之關係

表 5、甘油滴傾斜角度 $\theta$  與滾筒轉速 $v$ 之關係

電壓 (V)	轉速 (m/s)	甘油滴半徑 (mm)						
		2.96	2.16	2.31	2.50	2.46	2.27	2.08
		甘油滴傾斜角度 $\theta$ (度)						
8.000	10.86	22.4						
7.900	10.76	22.1						
7.800	10.66	22.0						
7.700	10.56	21.2						
7.600	10.47	21.7						
7.500	10.37	21.1						
7.400	10.27	20.4						
7.300	10.18	21.7						
7.200	10.08	20.8						
7.100	9.981	20.5						
7.000	9.884	20.5		22.8	22.5	23.7	27.8	29.1
6.900	9.786	20.8		21.9	22.4	22.6	27.3	28.8
6.800	9.689	19.3		21.6	21.3	22.7	26.1	28.1
6.700	9.592	19.1		21.2	21.1	22.0	26.2	28.3
6.600	9.495	18.7		21.0	20.9	21.9	25.6	27.0
6.500	9.397	18.2		20.5	20.6	21.3	24.4	26.9
6.400	9.300	17.8		20.1	19.7	21.2		26.1
6.300	9.203	17.4		19.6	20.2	20.7		25.3
6.200	9.106	17.3		19.4	18.5	20.6		25.1
6.100	9.008	17.2		33.9	35.7	36.0		23.5
6.000	8.911	16.6	39.2	34.0	34.8	36.2		22.4
5.900	8.814	16.2	38.9	33.6	34.8	35.2		21.8
5.800	8.717	16.0	38.2	33.4	33.8	35.4		21.4
5.700	8.620	15.6	38.2	32.9	33.2	35.3		20.7
5.600	8.522	15.6	37.3	32.7	33.6	34.2		
5.500	8.425	14.8	37.6	33.8	33.4	34.5		
5.400	8.328		37.0	32.7	33.7	34.7		
5.300	8.231		36.5	32.6	32.5	33.4		
5.200	8.133		35.8	32.2		33.3		
5.100	8.036			32.0		33.2		
5.000	7.939			31.5		33.0		



## 【評語】 160008

本實驗作品主要探討矽油滴在穩定移動的表面能(特別是滾筒表)懸浮與傾斜角、切線速度 $v$ 及液滴半徑的關係。本作品在實驗設計、量測及影像分析，計算滾動速率與液滴傾斜角關係等工作皆相當仔細。有些假設應該可以用實驗驗證一下，如果在數據分析上能把誤差也考慮進去，可能會更好。