2023 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010047**

參展科別　**數學**

作品名稱　**Frieze Patterns、Farey Sequence 關聯性探討與具 1-鋸齒或 0-鋸齒 Frieze Patterns 之研究**

得獎獎項　**三等獎**

就讀學校　臺北市立建國高級中學

國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導教師　陳珮如、洪允東

作者姓名　彭可翰、洪蘊慈

關鍵詞　Frieze Pattern、法里數列、三角剖分

作者簡介

我是彭可翰，就讀建國中學 127 科學班。我喜歡探索宇宙的真理，無論是透過科學、數學還是哲學等各式各樣的方式。數學研究雖然常遇到瓶頸，但是想通後會帶來無比的成就感，我也樂在其中。

我是洪蘊慈，就讀師大附中高一，我喜歡化學實驗、拉小提琴和思考各種問題，在高一開始做科展，學會合作與討論，還有很多學校學不到的課外知識。這次科展也讓我對數學愈來愈有興趣。

摘要

在這篇作品中，我們研究 frieze patterns 的性質並探討其與法里數列（Farey sequence）的關係。本作品成功造出包含 *n* 階法里數列的 frieze patterns，並探討其對應三角剖分之雙重 0 轉換圖與法里數列的關聯性，我們也找出具 1-鋸齒 frieze pattern 的充要條件及其幾何意義。在最後，我們作了一些 additive frieze patterns 相關性質的研究，並找出 additive frieze pattern 具 0-鋸齒的充要條件，也進一步探討 additive frieze patterns 所有可能的對稱變換。

Abstract

In this thesis, we studied the properties of frieze patterns and discussed their relation to the Farey sequence. This work successfully created frieze patterns containing n*th*-order Farey sequence and discussed the correlation between the double 0 transition diagram of the corresponding triangulation and the Farey sequence. We also found out the necessary and sufficient conditions for the 1-zigzag frieze pattern as well as its geometric interpretation. In the end, we did some research on the related properties of additive frieze patterns, and found out the necessary and sufficient conditions for the 0-zigzag frieze pattern. Furthermore, we explored all possible symmetric transformations of additive frieze patterns.

壹、 前言

一、研究動機

在某次上課時，老師提出一個由正整數構成具有特殊性質的梯形網狀結構（如圖 1），並請我們觀察：這些鄰近的數字之間有什麼關係？此結構有什麼規律？具有哪些對稱性？

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5

2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4

3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3

1 5 2 2 5 1 4 4 1 5

2 3 1 3 2 1 5 1 2

1 1 1 1 1 1 1 1

圖 1：原始問題（[7] , p 44）

我們花了將近一小時，找到了大約 7 個性質，但大多集中在數字的對稱關係：圖形最中央的 2 為旋轉中心（所有數字繞中心轉 180 度後數字分佈與原圖相同）、最左方前六列邊長為六個數的倒立三角形與最右方同大小的倒三角形全等，正中間後六列邊長為六個數的正立三角形可由左右兩三角形之一的水平鏡射得到）、連續若干個數的數字和相等（例如：正中央直行 222 除外，每一列的左三數和與右三數和均相等）、每一列都有至少兩個迴文數（例如：第二列有迴文數 132151231 及 512313215，第三列有 25144152 及 41522514，第四列有 3332333 及 3233323，…）等。

但我們卻沒看出最關鍵之處——網狀結構中任一組菱形結構（上下左右）四個數字的關係：(左)(右) − (上)(下) = 1，任一橫列每八個數字一循環，以及第二列前八個數字可由八邊形的任意一組三角剖分（即任意作八邊形內部的五條互不交叉的對角線，將八邊形分成六個三角形）中，從任一頂點開始，依逆（或順）時針序每個頂點的三角形數所決定。當時聽到這些性質就覺得這實在太神奇了！幾何、數字與對稱結構竟如此巧妙地結合在一起，引發了我們高度的興趣，也開啟了此篇的研究。

貳、 研究方法或過程

一、文獻探討

我們先閱讀在科展群傑廳中找到兩篇與 frieze patterns 相關的研究報告書（高佳晏 [1], [2]），雖是中文，但由於內容過於豐富（兩篇加起來超過百頁）且符號設定及寫法上相對而言不易閱讀，所以在略知她的研究內容後，我們決定直接念原文論文，開始仔細研讀、探討兩篇 Conway 與 Coxeter 合著的論文（Conway, Coxeter [3], [4]），學習並理解一些與 frieze patterns 相關的重要性質。

二、研究過程

(一) frieze pattern 的性質：

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

4 1 3 2 1 4 2 1 4 1 3 2 1 4 2 1

3 2 5 1 3 7 1 3 3 2 5 1 3 7 1 3

5 3 2 2 5 3 2 2 5 3 2 2 5 3 2 2

7 1 3 3 2 5 1 3 7 1 3 3 2 5 1 3

2 1 4 1 3 2 1 4 2 1 4 1 3 2 1 4

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

圖 2：一個典型的整數 frieze pattern 的例子

圖 2 是一個典型的整數 frieze pattern 的例子，除了第一列及最後一列都是數字 1 外，在 frieze pattern 中任一菱形結構的四個數 $\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}$ 必滿足關係：$ad-bc=1$，我們將此關係稱為**「么模法則」（unimodular rule）**，因為此法則等價於二階行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1$，故稱之為么模（unimodular）。

除了上述的首末兩列數字皆為 1 且任一組菱形四數須滿足「么模法則」外，圖 2 的 frieze pattern 還具備一個特殊性質，其第二列的數字必與某個多邊形的三角剖分有對應關係。

以圖 2 的 frieze pattern 為例，其對應的就是圖 3 的八邊形的三角剖分，我們標上每個頂點的三角形個數。可以發現，在圖 3 中從上方數字 4 開始依逆時針序所成的數列 <4, 1, 3, 2, 1, 4, 2, 1>，即圖 2 第二列的前八個數。

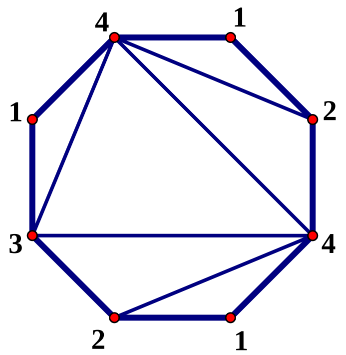


圖 3：一個八邊形的三角剖分 <4, 1, 3, 2, 1, 4, 2, 1>

所以欲造出第一列及最後一列都是 1 的 frieze pattern，先把第一列都填入數字 1，再把第二列填入一個多邊形的三角剖分數列，最後依照前面提到的「么模法則」，就可以造出整個 frieze pattern。另外，此 frieze pattern 的列數恰為多邊形的邊數減 1。

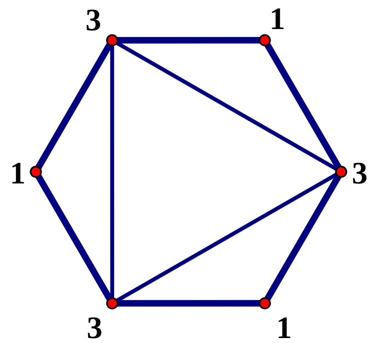


圖 4：一個六邊形的三角剖分 <3, 1, 3, 1, 3, 1>

如圖 4，給定一個六邊形的三角剖分 <3, 1, 3, 1, 3, 1>，則圖 4 理應可造出一個列數為 5 的 frieze pattern，結果如圖 5。

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

圖 5：依圖 4 的三角剖分所造出的 frieze pattern

除此之外，frieze patterns 的每一斜行（左上的 1 到右下的 1）也與多邊形的三角剖分有關。一樣以圖 2 的 frieze pattern 對應圖 3 的八邊形三角剖分為例：我們把圖 3 對應的八邊形三角剖分的數字全部擦掉，並取一頂點填上數字 0，其相鄰的兩頂點填上數字 1，如圖 6 中的紅色數字。接著剩餘的三角形若已有兩個頂點有數字，則其第三個頂點填入這兩個數字的和。當八個頂點數字都填完後，從 0（不含 0）開始依逆時針序所成的數列，如圖 6 左圖中的 <1, 1, 2, 3, 1, 1, 1>，就是圖 2 中 frieze pattern 的第二斜行，起始數字 0 旁的兩個 1，其實就是斜行中第一列及最後一列的 1。接下來每次都將數字 0

放置於逆時針方向的下一個頂點，再依上述法則填完八個頂點的數字，同樣從 0（不含 0）開始依逆時針序所成的數列，為圖 2 的第三斜行，以下類推，可將八個斜行全數寫出來。圖 6 的左圖中把圖 3 的上方數字 4 改為 0，所以對應到的斜行就是數字 4 所在的第一斜行的下一個斜行（第二斜行）。本篇將此轉換稱為「0 轉換」，並把 0 所在的點稱為「基準」。而 0 旁邊的兩個 1，即首末兩列的數字 1。

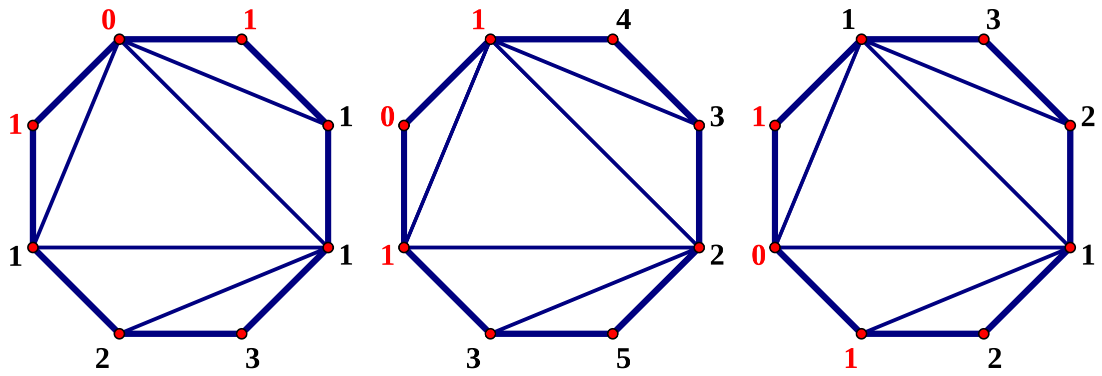


圖 6：在圖 3 的八邊形三角剖分中，從任一頂點標上 0 的數字開始起依逆時序針寫下來 7 個數字（不含 0），由左至右分別是第二、三、四斜行的數字。

我們已知：平面上圖形的全等變換有：平移（translation）、旋轉（rotation）、鏡射（reflection）這三種變換及其合成變換。進一步地，我們想問：frieze pattern 共有幾種對稱模式呢？這個問題，Conway 與 Coxeter 在 1973 年的論文 [3] 的一開始，就簡略介紹了 frieze patterns 的七種對稱型式，分別說明如下（[8]）：

1. 只有平移 (Translation only, in the horizontal direction，一般以 T 或 p1 表示)
2. 平移、滑動鏡射 (Translation and Glide reflection，一般以 TG 或 p11g 表示)
3. 平移、鉛垂鏡射 (Translation and Vertical line reflection，一般以 TV 或 p1m1 表示)
4. 平移、旋轉 180° (Translation and 180° Rotation，一般以 TR 或 p2 表示)
5. 平移、旋轉 180°、鉛垂鏡射及滑動鏡射 (Translation, 180° Rotation, Vertical line reflection, and Glide reflection，一般以 TRVG 或 p2mg 表示)
6. 水平鏡射及滑動鏡射 (Translation, Horizontal line reflection, and Glide reflection，一般以 THG 或 p11m 表示)
7. 平移、旋轉 180°、水平鏡射、鉛垂鏡射及滑動鏡射 (Translation, 180° Rotation, Horizontal line reflection, Vertical line reflection, and Glide reflection，一般以 TRHVG 或 p2mm 表示)

例如：圖 2 的 frieze pattern 具有 2 種對稱性質（平移、滑動鏡射），故為第 2 類型的 TG 對稱。而圖 5 的 frieze pattern 具有 4 種對稱性質（平移、旋轉 180 度、鉛垂對稱、滑動對稱），故為第 5 類型的 TRVG 對稱。

本文中探討的乘法 frieze patterns，數字皆為整數。若未特別言明，都依下述原則及符號設定：

1. 第一列及最後一列都由數字 1 組成。
2. frieze pattern 中，任一菱形結構的四個數必滿足「么模法則」。
3. 當 frieze pattern 的列數為 n -1 列時，
   第二列前 n 個數分別以 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 表示，
   第一斜行（左上至右下）分別為 $f_0=1,\ f_1=a_0,\ f_2, \cdots,\ f_{n-3},\ f_{n-2}=1$。

以下列出 frieze patterns 的一些重要性質：（Conway, Coxeter [3], [4]）

定理一：（[3], (28) – (29)）

任給列數為 n-1 列且首末兩列皆為數字 1 的整數 frieze pattern，其第二列前 n 個數必為 n 邊形的某一個三角剖分 $\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\rangle$。

反之，若在第一列都寫下數字 1，第二列填上 n 邊形的任一個三角剖分所成的數列 $\langle a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\rangle$，再依「么模法則」，可得第 n-1 列皆為數字 1。亦即：任一個三角剖分所成的數列恰決定唯一一個整數的 frieze pattern。

換言之，列數為 n-1 列且首末兩列皆為數字 1 的整數 frieze pattern，恰與 n 邊形的三角剖分所成的數列一一對應。

定理二：（[3], (31)）

給定 n-1 列的 frieze pattern，且第一列及第 n-1 列皆由數字 1 所組成，

則滿足此條件的 frieze pattern 共有 C_{n-2} 組，其中 $C_{n-2}=\dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$

為第 n-2 項的卡塔蘭數（Catalan Numbers）。

定理三：（[3], (24)）

在給定 frieze pattern 中任一斜行（左上到右下或右上到左下）任取連續三項 $f_{s-1},\ f_s,\ f_{s+1}$，則中間項必為上下兩項之和的因數，即 $f_s \mid (f_{s-1}+f_{s+1})$。

（見下圖 7 左方）

$$\begin{array}{ccccc} f_{s-1} & & & & \\ & f_s & & & \\ & & f_{s+1} & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & b & \\ a & & f \\ & e & & d \\ & & c & \end{array}$$

圖 7：左圖為斜行任意相鄰三數之間有因倍數關係；
右圖為兩相鄰斜行六個數之間的比例關係。

定理四：

在給定 frieze pattern 的任兩相鄰斜行（左上到右下或右上到左下）上分別取連續三項 a, e, c 及 b, f, d（即給定兩組相鄰的菱形四數，e、f 兩數視為公共邊），則必有 $\dfrac{a+c}{e}=\dfrac{b+d}{f}$ ，亦即 $\dfrac{e}{f}=\dfrac{a+c}{b+d}$ （如上圖 7 右方）。

(二) 法里數列（Farey Sequence）的定義及性質（[10], 28-36）：

1. n 階法里數列的定義：

n 階法里數列 F_n ：0 和 1 之間所有分母不大於 n 的最簡分數，由小至大排列所形成的數列，即 $F_n=\left\langle \dfrac{a}{b}(\text{in increasing order}) \,\middle|\, (0\le a\le b\le n)\wedge(b>0)\wedge\gcd(a,b)=1\right\rangle$

其項數為 $1+\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)$ ，其中 $\varphi(i)$ 為不大於 i 且與 i 互質的正整數個數。

以 6 階法里數列為例： $F_6=\left\langle \dfrac{0}{1},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\dfrac{5}{6},\dfrac{1}{1}\right\rangle$

其項數為 $1+\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(5)+\varphi(6)=1+1+1+2+2+4+2=13$ 項。

2. n 階法里數列的性質：

性質一：設 a, b, c, d 皆為非負整數且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ ，則 $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ 為 n 階法里數列任意相鄰兩項的充要條件是 $bc-ad=1$ 。

性質二：設 $\dfrac{a}{b},\dfrac{e}{f},\dfrac{c}{d}$ 為 n 階法里數列中連續三項，必有 $\dfrac{e}{f}=\dfrac{a+c}{b+d}$ 。

性質三：設設 a, b, c, d 皆為非負整數且 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ ，則 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{d}$ 。

3. 由性質二、三知，可在法里數列中定義運算⊕：$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$，以生成新的法里數列中的一項（介於原兩項之間）。

例如：若$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$為 n 階法里數列中的相鄰兩項且$b+d=n+1$，則將所有滿足前述條件的$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$加入 n 階法里數列，即得 n+1 階法里數列。

(三) 法里數列與 frieze patterns

由於 frieze patterns 中菱形四數的「么模法則」的與法里數列的「性質一」看起來十分相似，此外，前述 frieze patterns 中「定理四」的$\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$，也與法里數列「性質二」、「性質三」中的$\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b+d}$幾乎雷同，換言之 frieze patterns 與 Farey Sequence 必存在某種關聯性，等待我們深入探討。

於是我們開始作各種天馬行空的嘗試，最後我們成功地在 frieze patterns 裡面加入任意給定的 n 階法里數列（3 斜行版本），其結果如圖 8，我們給出了包含 6 階法里數列的 frieze pattern。事實上我們有用 Python 程式跑出包含 2 階到 12 階的法里數列 $F_2, F_3, \cdots, F_{11}, F_{12}$。（詳見附錄二）

以下為包含 6 階法里數列 F_6 的 frieze pattern（首列 1 上方及末列 1 下方補上 0 列）

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  6 1 2 2 3 1 3 2 1 6 1 2 2 3 1 3 2 1
   5 1 3 5 2 2 5 1 5 5 1 3 5 2 2 5 1 5
    4 1 7 3 3 3 2 4 4 4 1 7 3 3 3 2 4 4
     3 2 4 4 4 1 7 3 3 3 2 4 4 4 1 7 3 3
      5 1 5 5 1 3 5 2 2 5 1 5 5 1 3 5 2 2
       2 1 6 1 2 2 3 1 3 2 1 6 1 2 2 3 1 3
        1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
         0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

圖 8：包含 6 階法里數列 F_6 的 frieze pattern（3 斜行版本）

可以看到，在圖 8 紅色區域內以第二斜行左上到右下當分母且第三斜行由左上到右下當分子，接著第二斜行由右下到左上當分母且第一斜行右下到左上當分子，重複的$\frac{1}{2}$只計一次，可得 6 階法里數列$F_6=\left\langle\frac{0}{1},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{1}{1}\right\rangle$。

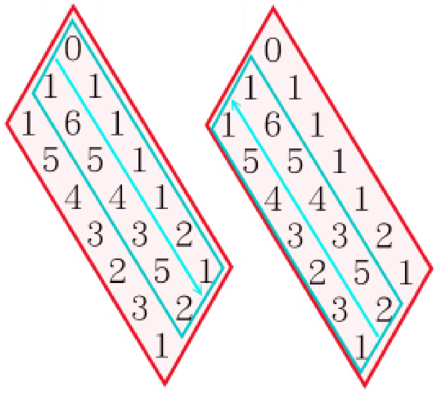


圖 9：圖 8 中紅色區域包含 6 階法里數列 F_6 之解說，將圖中的第二斜行左上到右下當分母且第三斜行由左上到右下當分子，接著第二斜行右下到左上當分母且第一斜行由右下到左上當分子，重複的 $\frac{1}{2}$ 只計一次，可得 6 階法里數列 F_6。

接著，我們畫出包含 6 階法里數列的 fireze pattern（3 斜行版本）所對應三角剖分的 0 轉換圖，如圖 10 的三個九邊形，先將居中的九邊形從上方 1 開始「逆時針」旋轉的數字（即 3 斜行之中間斜行數列 <1, 6, 5, 4, 3, 5, 2>）依序當分母，右邊九邊形對應頂點的數字（即 3 斜行之第三斜行數列 <0, 1, 1, 1, 1, 2, 1>）依序當分子，則可得到數列 $\left\langle \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2} \right\rangle$，接著再將居中的九邊形從右方 2 開始「順時針」旋轉的數字（即 3 斜行之中間斜行數列 <2, 5, 3, 4, 5, 6, 1>）當分母，以左邊九邊形對應頂點的數字（即 3 斜行之第一斜行數列 <1, 3, 2, 3, 4, 5, 1>）當分子，則可接著得到數列 $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\rangle$，合併兩數列，去掉重複的 $\frac{1}{2}$，即可得到 6 階法里數列 $F_6 = \left\langle \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\rangle$。

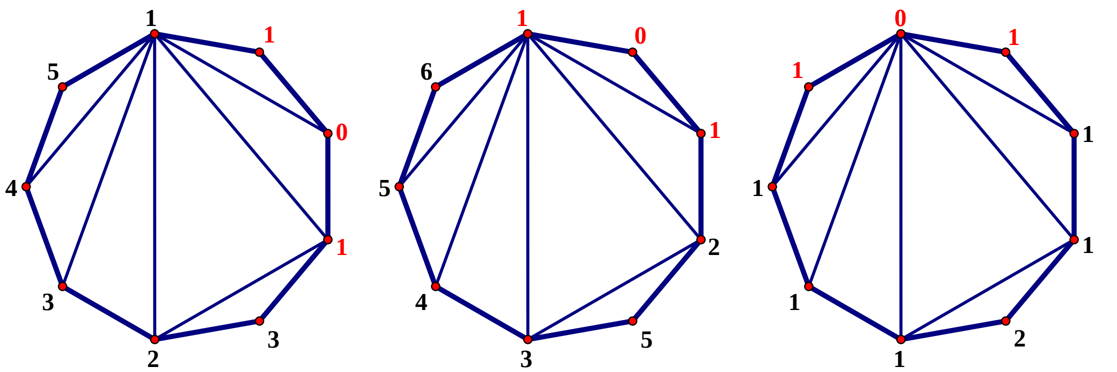


圖 10：包含 6 階法里數列 F_6 的 frieze pattern（3 斜行版本）所對應的三角剖分之 0 轉換圖

但由於包含 6 階法里數列的 frieze pattern（3 斜行）其三角剖分的 0 轉換圖並沒有對稱性且須畫三個九邊形來判讀，既不美又有些繁瑣。因此我們不太滿意，於是做另一嘗試，在 frieze patterns 裡面加入任意給定的 n 階法里數列（2 斜行版本），以圖 11 為例，我們給出了包含 5 階法里數列的 frieze pattern，左斜行為分母數列<1, 5, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 5, 1>，右斜行為分子數列<0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 1>，可得 $F_5=\left\langle \frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1} \right\rangle$。

事實上，我們有用 Python 程式跑出包含 2 階到 8 階的法里數列 $F_2, F_3, \cdots, F_8$。（附錄三）

註：理論上給定自然數 n 值，我們寫的程式都可造出包含 F_n 的 frieze pattern（3 斜行版本或 2 斜行版本），但 n 值愈大，造出的 frieze pattern 會大到即使縮小字體 A4 紙也放不下，故我們在附錄二（3 斜行版本）只列出 2 到 12 階，附錄三（2 斜行版本）只列出 2 到 8 階。

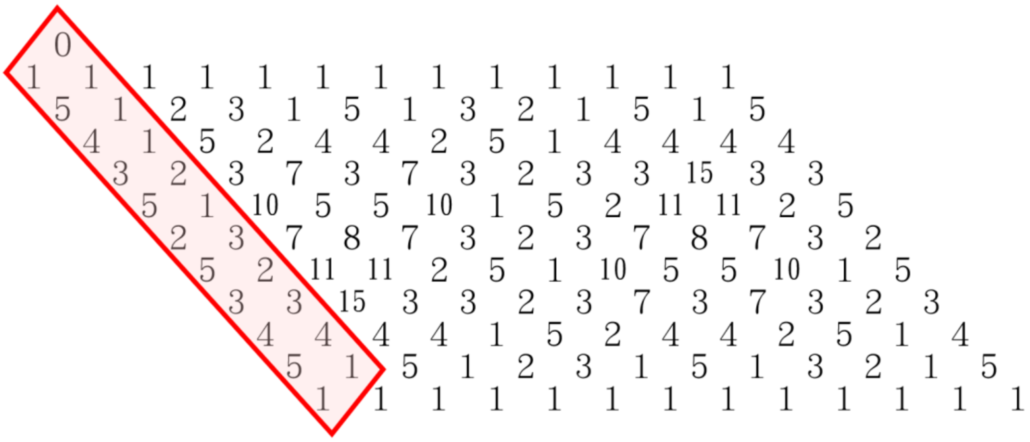


圖 11：包含 5 階法里數列 F_5 的 frieze pattern（2 斜行版本，左斜行為分母，右斜行為分子）

我們也可以畫出如圖 11 中包含 5 階法里數列 F_5 的 frieze pattern 對應三角剖分的雙重 0 轉換圖，如圖 12，左圖由 $\frac{0}{1}$ 開始逆時針旋轉至 $\frac{1}{1}$ 的法里數列，右圖為由 $\frac{1}{1}$ 開始順時針旋轉至 $\frac{1}{0}$ (即無限大)為延伸(extension)的法里數列。附錄四我們給出包含 Farey Sequence (F_2 到 F_8) 的 frieze patterns 所對應三角剖分的雙重 0 轉換圖。

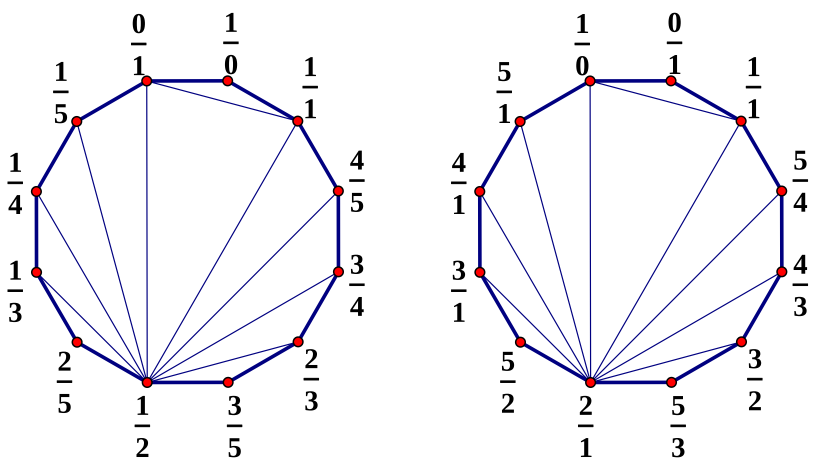


圖 12：包含 5 階法里數列 F_5 的 frieze pattern（2 斜行版本）所對應的三角剖分之雙重 0 轉換圖。左圖分母為圖 11 的第一斜行，分子為第二斜行；右圖恰為左圖的分子、分母交換而得。

(四) 具有鋸齒狀 1（以下稱「具 1-鋸齒」）的 frieze patterns 之研究

我們初次看到具 1-鋸齒的 frieze patterns 是在 J. H. Conway 與 R. K. Guy 所著的 The Book of Numbers ([5])一書中的 Frieze Patterns 主題，其原始問題如下圖 13(b)：([5], p74)

(a)

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	?	?	?	?	?	?	?	
0	0	0	0	0	0	0	0	

(b)

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	?	?	?	?	?	?	?	
1	1	1	1	1	1	1	1	

圖 13：(b)具 1-鋸齒的 frieze patterns 與(a)具 0-鋸齒的 additive frieze patterns

前面介紹不少 frieze pattern 的相關定理及性質，我們現在對 frieze pattern 有了基礎的了解。我們發現只要用么模法則就可以推出(b)的完整圖，如圖 14。

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	4	2	1	3	2	4	1	2	2	4	2	1	3	2	4
1	3	7	7	$\boxed{1}$	2	5	7	3	1	3	7	7	1	2	5	7	3
1	10	12	3	1	3	17	5	2	$\boxed{1}$	10	12	3	1	3	17	5	2
3	17	5	2	$\boxed{1}$	10	12	3	1	3	17	5	2	1	10	12	3	1
5	7	3	1	3	7	7	$\boxed{1}$	2	5	7	3	1	3	7	7	1	2
2	4	1	2	2	4	2	1	3	2	4	1	2	2	4	2	1	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

圖 14：圖 13(b)中具 1-鋸齒的 frieze pattern 完整圖

而這個 1-鋸齒的 frieze pattern 對應的三角剖分圖如圖 15。

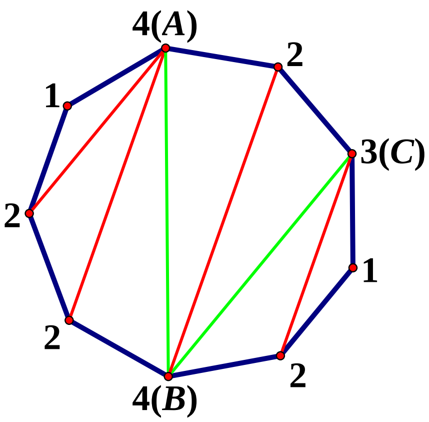


圖 15：圖 14 具 1-鋸齒的 frieze pattern 所對應的 9 邊形三角剖分圖

我們發現圖 13(b) 的 1 形成鋸齒（zigzag）狀（每一列數字 1 的下方列的 1 可以任意向左或向右移，包含皆向右移或皆向左移的直線狀），這是前面舉的 frieze pattern 例子裡都沒有的特徵，並且這鋸齒狀也和圖 14 有直接對應關係。

此鋸齒狀被兩個轉折點(方框標示)分成三段。若把轉折點也算進去，這三段分別由 3、3、2 個 1 所組成。而圖 15 的頂點中連出大於或等於 2 個對角線共有三個，也就是 A、B、C 三點。不難發現，這三個點分別連出了 3、3、2 條對角線，而且有兩條綠色的「共用對角線」。這顯示出鋸齒狀的 1 的形狀和多邊形三角剖分的對角線有極密切的相關。

這時我們開始疑惑，看到圖 15 中 A、B、C 點分別有 3、3、2 條對角線，那為什麼對應的鋸齒狀的 1 要由上往下長度分別為 3、3、2 呢？難道不能是 2、3、3 嗎？結果圖 14 果然也包含了長度為 2、3、3 的鋸齒 1，也就是以綠色標示的。而且這兩條鋸齒 1 是滑動鏡射對稱的。

於是，我們找了更多具 1-鋸齒的 frieze pattern，如圖 16：

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
5 1 2 2 2 3 1 2 5 1 2 2 2 3 1 2
4 1 3 3 5 2 1 9 4 1 3 3 5 2 1 9
3 1 4 7 3 1 4 7 3 1 4 7 3 1 4 7
2 1 9 4 1 3 3 5 2 $\boxed{1}$ 9 4 1 3 3 5
1 2 5 1 2 2 2 3 1 2 5 1 2 2 2 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

圖 16：另一個具 1-鋸齒的 frieze pattern

鋸齒狀的轉折點以方框標示，發現其分為長度 4 和 2 的兩段，其對應的三角剖分如圖 17。可以看到，A 和 B 點分別連出 4 和 2 條對角線，而有一條綠色共用邊，和 frieze pattern 的鋸齒狀 1 竟然也相符！

於是我們思考，frieze pattern 要有鋸齒狀 1，其對應的多邊形三角剖分要有什麼條件呢？我們用程式跑了四邊形到八邊形所有可能的三角剖分對應的 frieze pattern，歸納出了定理五。

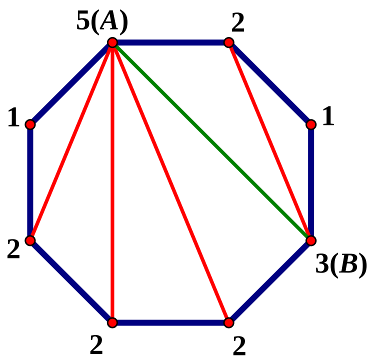


圖 17：圖 15 對應的八邊形三角剖分

定理五：

一 Frieze Pattern 有鋸齒狀的 1 若且唯若其對應的多邊形三角剖分不存在三對角線所圍成的封閉三角形。

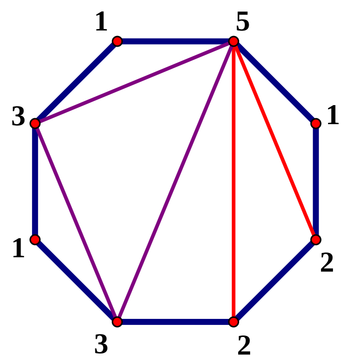


圖 18：有「對角線三角形」的八邊形三角剖分圖

1 1 1 1 1(丙)1 1 1 1(甲)1 1 1 1(丁)1 1(乙)1

1 3 2 2 1 5 1 3 1 3 2 2 1 5 1 3

2 5 3 1 4 4 2 2 2 5 3 1 4 4 2 2

3 7 $\boxed{1}$ 3 3 7 $\boxed{1}$ 3 3 7 1 3 3 7 1 3

4 2 2 2 5 3 1 4 4 2 2 2 5 3 1 4

1 3 1 3 2 2 1 5 1 3 1 3 2 2 1 5

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

圖 19：圖 18 對應的 frieze pattern，標示有(甲)、(乙)、(丙)、(丁)四個鋸齒狀結構

舉例來說，圖 18 裡號碼 5、3、3 的頂點構成了紫色三角形，此三角形的三邊都是對角線。而圖 19 果然也沒有鋸齒狀 1。然而，我們仍可以找到數個鋸齒狀結構，其中 1 個 1 被換成 2，以顏色標記出來分別為(甲)到(丁)。那這些鋸齒狀又和三角剖分有什麼對應關係呢？

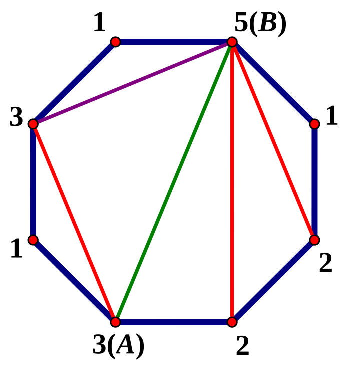


圖 20：圖 18 的第一種看法

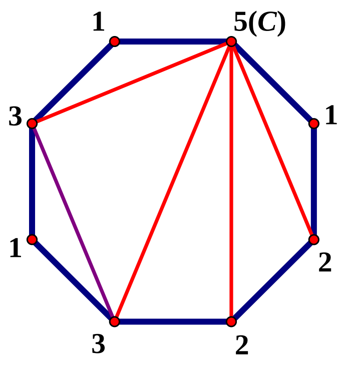


圖 21：圖 18 的第二種看法

我們先依照圖 20 的看法，視為 *A* 點和 *B* 點分別連出 2 和 3 條對角線，綠色為共用對角線，並且 *A* 點的 2 條又夾出 1 條紫色的對角線。此時這對應的會是圖 19 裡編號(甲)的鋸齒。可以看到此鋸齒是由 1、2、1 和 1、1、1 兩段所組成(若中間轉折的 1 重複計算)。*A* 點連出的兩條對角線和中間夾的對角線就是對應到 1、2、1 (中間的對角線對應到 2)。而因為綠色對角線為共用，所以鋸齒(甲)中間的 1 會有轉折。而如前面提到的，可以先看 *B* 點再看 *A* 點，對應到的就會是鋸齒(丙)。

而我們若依照圖 21 的看法，視為 *C* 點連出了 4 條對角線，並且第 1 和 2 條中間夾了 1 條對角線，得到的就會是鋸齒(乙)。鋸齒(乙)由上到下為 1、2、1、1、1，其中的 1、2、1 對應的就是第 1 和 2 條對角線以及夾的對角線。後兩個 1 對應的就是剩下 2 條對角線。同時，圖 21 也可以看成是 *C* 點的第 3 和 4 條對角線中間夾了另一對角線，這對應到的就會是鋸齒(丁)。

而若要證明以上提到的，即多邊形三角剖分的對角線和鋸齒結構的關係，我們必須回到圖 6 的操作，也就是 0 轉換。

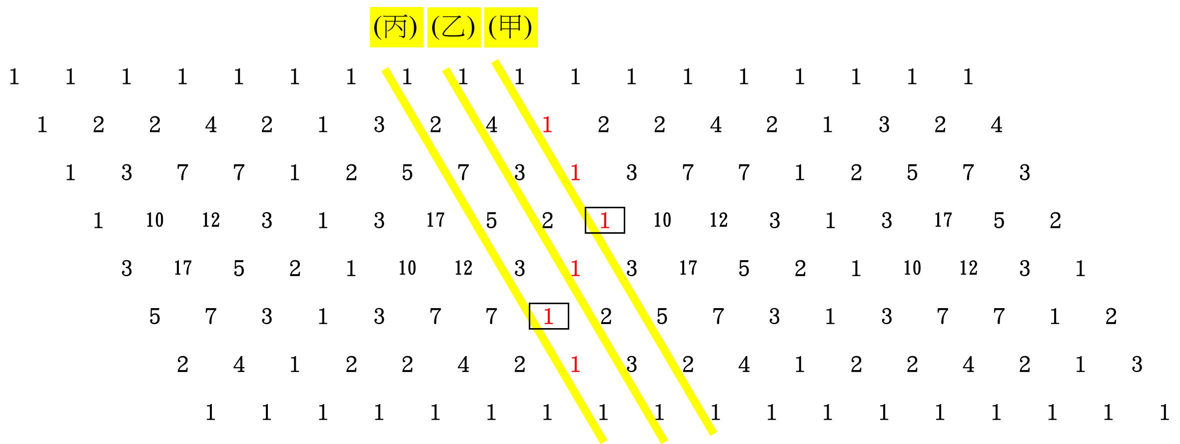


圖 22：圖 13(b)中具 1-鋸齒的 frieze pattern

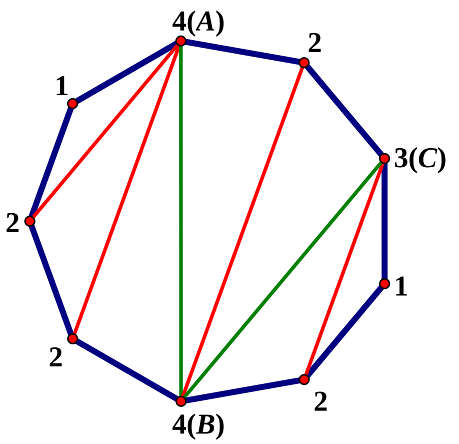


圖 23：圖 22 對應的九邊形三角剖分

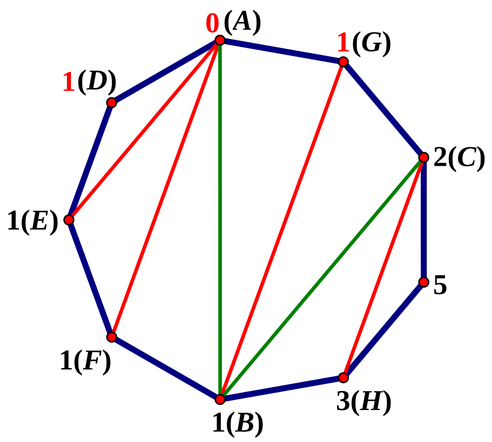


圖 24：圖 23 以 *A* 點為基準進行 0 轉換

我們必須先介紹 0 轉換的一個性質，那就是若以一點 P 為基準進行 0 轉換，頂點的數字為 1 若且唯若此頂點與點 P 存在連線。

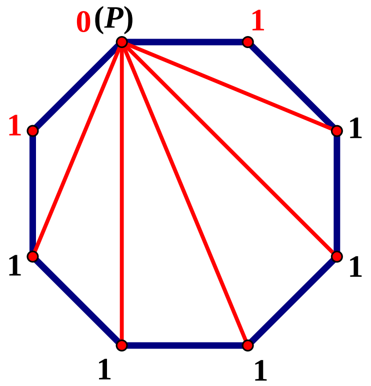


圖 25：一個以 P 點為基準進行 0 轉換的八邊形三角剖分

若此多邊形的三角剖分如圖 25，所有對角線皆連到一點 P，顯然經過 0 轉換後除了 P 點外所有點都會是 1。

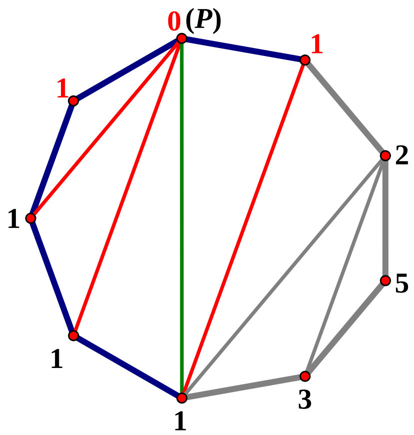


圖 26：一個以 P 點為基準進行 0 轉換的九邊形三角剖分

若此多邊形的三角剖分如圖 26，不是所有對角線都有連到一個點，上述性質還是會成立。這是因為任一點如 P 點加上其對角線和鄰邊所連結的頂點可以形成一多邊形（圖 26 以藍色標示），此多邊形也會被三角剖分。不只如此，此多邊形也會是圖 25 的型態，所有的對角線都會連到 P 點。因此我們若以 P 點為基準進行 0 轉換，這些頂點全部都會是 1。此外，一個點若要是 1，其必須和一個 0 和一個 1 連線。但是除了 P 點的鄰邊以及對角線所連的點外，其他點都不會與 P 點連線，也就代表不會跟 0 連線，所以自然會大於等於 2。故上述性質得證。

現在可以來回答為什麼 *A*、*B*、*C* 點分別有 3、3、2 條對角線，frieze pattern 就會有鋸齒狀 1，而且被分為長度 3、3、2 的段落了。剛才提過，若以 *A* 為基準對圖 23 進行 0 轉換，由 0 開始的逆時針數列(不包含 0)為(甲)斜行。因為前一頁提過的性質，*A* 點連出去的 *D*、*E*、*F*、*B*，4 點都會是 1，代表(甲)斜行首四個數字都會是 1。此時 *B* 點所對應的數字是(甲)斜行的方框 1。

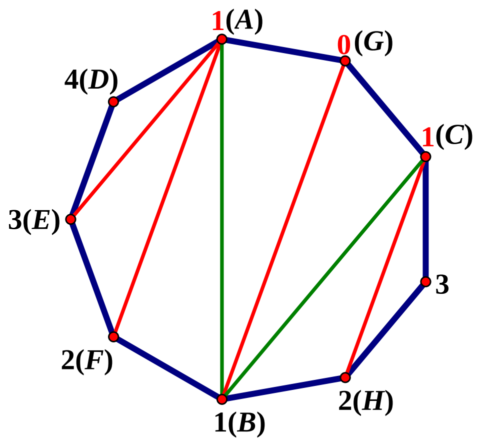


圖 27：以 *G* 點為基準進行 0 轉換

接著我們把 *A* 點順時針的下一個點 *G* 當作基準進行 0 轉換，如圖 27。我們剛剛討論的最後一點 *B* 點現在所對應 frieze pattern 的數字會變成哪一個呢?因為我們的基準順時針移動了一步，所以對應的斜行會往左變成(乙)斜行。而且 *G* 點逆時針到 *B* 點所經過的數字比 *A* 點到 *B* 點還要多一個，代表現在 *B* 點所對應的數字會在方框 1 的下一列。綜合以上所說，我們可以知道現在 *B* 點所對應的數字會在方框 1 的左下方，也就是圖 22(乙)斜行中間的底線 1。

若我們再重複一次前面的動作，把點 *C* 當基準進行 0 轉換，*B* 點所對應的數字也會位於底線 1 的左下方，也就是圓圈 1。然而，*C* 點的對角線除了連到 *B* 點，還有連到 *B* 點逆時針的下個點 *H* 點，所以圓圈 1 的右下角也會是 1。而 *H* 點的下一個點因為與 *C* 點相鄰，所以也會是 1。這個 1 對應的就是(丙)斜行最後一個 1。故此 frieze pattern 存在鋸齒狀 1。

根據以上的流程，只要多邊形的三角剖分沒有對角線三角形，其對應的 frieze pattern 就會有鋸齒狀 1，而且其轉折點的位置(相當於分段的長度)也會跟頂點連出幾條對角線有關。

(五) additive frieze patterns 的相關研究

最後，我們將原始 frieze patterns 部分條件改變，將原始 frieze patterns 中任意菱形結構四個數：

$$\begin{matrix} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{matrix}$$

將其關係 $ad-bc=1$ 改變為 $(a+d)-(b+c)=1$ （以下皆簡稱此關係為**「菱形法則（diamond rule）」**），並將原本上下兩列都由數字 1 組成，改為都由 0 所組成，我們將此新的結構稱為：additive frieze patterns。

我們第一次看到 additive frieze Pattern 是來自 J. H. Conway 與 R. K. Guy 所著的 The Book of Numbers ([5])一書中的 frieze patterns 主題（前文已提過），書中列出了圖 13(a)、13(b)問題，所以我們再重新看一下第 10 頁的圖 13：

請利用「菱形法則」填滿以下的 frieze patterns。

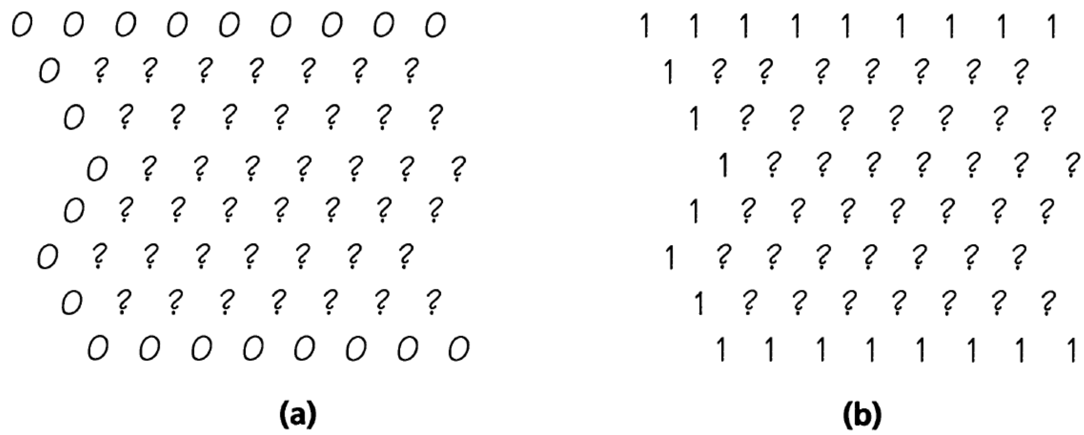


FIGURE 3.8 *Fill in these friezes, using the diamond rule.*

圖 28： (a)具 0-鋸齒的 additive frieze patterns 與(b)具 1-鋸齒的 frieze patterns

其中(a)為 additive frieze pattern，(b)為 multiplicative frieze pattern，由於 multiplicative frieze pattern 我們前面已作過相關研究，以下我們僅討論(a)部分的問題，以下為作者（J. H. Conway 與 R. K. Guy）於書中提供的答案：

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 …
0 1 2 5 6 4 3 0 1 2 5 6 4 3 0 …
0 2 6 10 9 6 2 0 2 6 10 9 6 2 0 …
0 5 10 12 10 4 1 0 5 10 12 10 4 1 0 …
0 2 8 11 12 7 2 0 2 8 11 12 7 2 0 …
0 1 4 8 10 8 4 0 1 4 8 10 8 4 0 …
0 2 3 6 5 4 1 0 2 3 6 5 4 1 0 …
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 …

圖 29：圖 28(a)具 0-鋸齒的 additive frieze patterns 完整版

如圖 29，當給定的 additive frieze patterns 第一列及最後一列皆為 0，且存在第一列到最後一列的數字 0 形成鋸齒（zigzag）狀（每一列數字 0 的下方列的 0 可以任意向左或向右移，包含皆向右移或皆向左移的直線狀），將第二列緊鄰 0 的前 6 個數由左至右依序以 1 2 5 6 4 3 代入後，利用任一菱形結構中四數滿足的關係$(a+d)-(b+c)=1$（以下皆簡稱此關係為**「菱形法則（diamond rule）」**），可求出其他列所有數字。透過作者提供的這一組解，我們經過一番研究，逐漸掌握此 additive frieze patterns 結構的規律及並猜測生成方式與數量，更進一步還找到當給定列數較少時，所有的旋轉對稱及水平鏡射對稱及其個數，得到以下幾個猜測：

〔猜測一〕〔定理六〕

給定 n+2 列的 additive frieze pattern，其第一列及最後一列數字皆為 0，則
「此 additive frieze pattern 具 0-鋸齒」的充要條件為
「其第二列數字 0 的右邊連續 n 個數字為 1 到 n 的單峰排列」。
（第二列 1 到 n 單峰排列的 n 個數字，由左至右只能先遞增後遞減、或純遞增、或純遞減排列。）

在看到圖 29 這一組解後，我們一開始就猜測 n+2 列的 additive frieze patterns 中，第二列 0 右邊應該有 n 個數，這 n 個數應為 1 到 n 的自然數，且其排列應有如這組解般的先遞增再遞減的單峰現象。後來我們手動找了幾個例子，都是對的。之後寫 python 程式大量檢驗在 n 值不大於 6 時的所有可能，我們發現的結論都是正確的。因此形成了〔猜測一〕的論述，之後更利用〔猜測一〕陸續推得〔猜測二〕及〔猜測三〕的證明。

而〔猜測二〕的證出，更是大大提升了我們對〔猜測一〕的信心，但苦於無法證出〔猜測一〕，因為無法確定第二列是否還存在非 1 到 n 的其他 n 個數（甚至更多數）的排列是否也有此結果？所以即使算暫時得到〔猜測二〕、〔猜測三〕的證明，那也是得建立在〔猜測一〕成立的基礎上，但因基礎是虛的，往上再蓋大廈也是枉然。本來已打定主意將〔猜測一〕列入此研究的「未來展望」，沒想到最後我們居然意外地在網路上找到 1973 年的 G. C. Shephard 關於 additive frieze pattern 的論文，並利用其中的主定理成功證得〔猜測一〕。

〔猜測二〕〔定理七〕

給定 $n+2$ 列的 additive frieze patterns 中，其第一列及最後一列數字皆為 0，則

(1) 第二列 1 到 n 連續 n 個自然數的單峰排列數恰有 2^{n-1} 種。

(2) 第一列到最後一列的 0 所形成的鋸齒狀總數也一樣共有 2^{n-1} 種。

(3) (1) 與 (2) 兩者之間存在一一對應的關係。

〔猜測二〕的證明：

第二列的連續 n 個非零數字的排列數，與第一列到最後一列的 0 所形成的鋸齒狀總數的一一對應法則如下述：

先將鋸齒狀第 1 列到第 n+2 列鋸齒狀的 0 編號為 0 到 n+1，以 $O_0, O_1, \ldots, O_{n+1}$ 表示。

考慮 1 到 n 的任意單峰排列中，對任意 1 到 n-1 的正整數 i，若 i 往 i+1 的方向為向右，則在 O_i 的右下方寫下 O_{i+1}；若 i 往 i+1 的方向為向左，則在 O_i 的左下方寫下 O_{i+1}。

（詳見 p.24 定理六：必要條件的證明）

由於第一列與第 n+2 列數字全為 0，故我們無法區分第一列往第二列 0 與第 n+1 列 0 往第 n+2 列 0 是向右下還是向左下，在此依方向變動數最少為原則，我們規定：

O_0 往 O_1 的方向與 O_1 往 O_2 的方向相同，O_n 往 O_{n+1} 的方向與 O_{n-1} 往 O_n 方向相同。

（事實上，第 1 列及第 n+2 列皆為 0，故其完全不影響 0-鋸齒的形狀，故考慮 0-鋸齒移動方向只需考慮第 2 列的 O_1 到第 3 列的 O_2，第 3 列的 O_2 到第 4 列的 O_3，⋯，第 n 列的 O_{n-1} 到第 n+1 列的 O_n 即可）

(1) 欲計算第二列 1 到 n 的單峰排列數，先由最大數 n 開始排列，只有 1 個排法，再依由大到小順序依序排 n-1, n-2, …, 1，因為單峰排列，故每一個接下來的數只能排在已有排列的最右邊或最左邊（若此數不排在最外側，則會有左右同時高於此數字，此時至少有兩峰，已非單峰排列），故有 2 種排法，故從 n-1 排到 1，恰有 2^{n-1} 種排法。

此排法亦可逆過來看，想像將 1 到 n 依序排在一座山的兩側，先排 1，有左側或右側 2 種方法，接下來排 2，也有左右兩側 2 種方法，若該側已有數字，堆疊於其上方，…，排 n-1 時，亦有 2 種排法，但排最後的 n 時，只有最高峰 1 個排法，故有 2^{n-1} 種排法。

(2) 對任意 1 到 n-1 的正整數 i，因 O_i 往 O_{i+1} 方向只可能往左下或往右下 2 種選法，故共有 2^{n-1} 種選法，不同的選法造出不同的 0-鋸齒（由於第一列及第 n+2 列皆為 0，換言之 O_0、O_{n+1} 可放在該列任一位置，故 O_0 往 O_1 的方向及 O_n 往 O_{n+1} 的方向等於無從選擇，也不影響 0-鋸齒的總數），故 0-鋸齒的總數共有 2^{n-1} 種。

(3) 給定任一個 1 到 n 的 2^{n-1} 種單峰排列，對任意 1 到 n-1 的正整數 i，因 i 往的 i+1 方向只可能向左或右，分別對應到 O_i 到 O_{i+1} 方向只可能往左下或往右下（詳見 p.24 定理六：必要條件的證明），故兩者之間一一對應，故 1 到 n 的單峰排列及所有可能的 0-鋸齒的總數皆為 2^{n-1} 種。

研究列數為 n+2（ $n \ge 2$ ）的 additive frieze patterns 的對稱類型，我們發現其皆有「平移對稱 H」（n+2 列的 additive frieze patterns 循環週期為 n+1），其中有一部分還同時具有「旋轉 180°對稱 R」，還有另一部分同時具有「水平鏡射對稱 H」（因其同時具平移及水平鏡射，故亦有「滑動鏡射 G」），當 $n \ge 2$ 時，旋轉對稱與水平鏡射對稱不會同時成立，所有對稱僅限於（**平移 T**）、（**平移＋旋轉 TR**）、（**平移＋水平鏡射＋滑動鏡射 THG**）這三種（但 $n = 1$ 時，五種對稱 **TRHVG** 同時具備）。除了計算出 n+2 列 additive frieze patterns 的總數量，我們也分別計算出具（平移＋旋轉 **TR**）對稱與（平移＋水平鏡射＋滑動鏡射 **THG**）對稱的數量。就是以下的〔猜測三〕。

〔猜測三〕〔定理八〕

具 0-鋸齒且首末兩列皆為數字 0 的 n+2 列 additive frieze patterns 中，

(1) 當 n 為正奇數時，具有水平鏡射對稱的 additive frieze patterns 個數共有 $2^{\frac{n-1}{2}}$ 個。

(2) 當 n 為自然數時，具有旋轉對稱的 additive frieze patterns 個數共有 $2^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}$ 個。
其中，$\lceil x \rceil$ 為上高斯函數或天花板函數(ceiling function)，表示不小於 x 的最小整數。

〔猜測三〕的證明：

(1) 前面已證明第二列的連續 n 個非零數字的單峰排列數，與第一列到最後一列的 0 所形成的鋸齒狀總數的一一對應，故考慮鏡射對稱的個數只需考慮對稱軸上方 0 的鋸齒狀數即可（因為對稱軸下方 0 的鋸齒形狀與上方 0 的鋸齒形狀對稱，故由對稱軸上方 0 的鋸齒形狀唯一決定）。

當 $n = 2k-1,\ \ k \in N$ 時，共有 2k+1 列，對稱軸洽為第 k+1 列，上方有第 1 列 O_0 到第 k 列 O_{k-1} 的鋸齒狀，由於第 1 列 O_0 到 O_1 的移動方向與第二列 O_1 到 O_2 移動方向相同方向一致，故只要考慮 O_1 到 O_2、O_2 到 O_3、⋯、O_{k-1} 到 O_k 的移動方向（左下或右下），共 2^{k-1} 個。

(2) (i) 當 n = 2k-1 時，共有 2k+1 列，對稱軸洽為第 k+1 列，上方有第 1 列 O_0 到第 k 列 O_{k-1} 的鋸齒狀，由於第 1 列 O_0 到 O_1 的移動方向與第二列 O_1 到 O_2 移動方向相同方向一致，故只需考慮 O_1 到 O_2、O_2 到 O_3、…、O_{k-1} 到 O_k 的移動方向（左下或右下），共 $2^{k-1} = 2^{\left\lceil \frac{2k-2}{2} \right\rceil} = 2^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}$ 個。

(ii) 當 $n = 2k$ 時，共有 $2k+2$ 列，上半有第 1 列 O_0 到的鋸齒狀到第 $k+1$ 列 O_k 的鋸齒狀，我們先從最中間兩列的 0 (第 $k+1$ 列 O_k 與第 $k+2$ 列 O_{k+1}) 開始，O_k 至 O_{k+1} 的移動方向可右下或左下 2 種，均不會影響其旋轉對稱性。（見 p.43 附錄五 $n = 6$ 的旋轉對稱）又由於第 1 列 O_0 到 O_1 的移動方向與第二列 O_1 到 O_2 移動視同方向一致，故只需考慮 O_1 到 O_2、O_2 到 O_3、…、O_{k-1} 到 O_k 的移動方向（左下或右下），共 2^{k-1} 種，在乘上中間兩列的 2 種可能方向，總共有 $2\cdot 2^{k-1} = 2^k = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}$ 個。

綜合(i)(ii)可知：具有旋轉對稱的 additive frieze patterns 個數共有 $2^{\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil}$ 個

〔猜測三〕中，我們有用程式找出所有 n 不大於 7 的旋轉對稱及水平鏡射對稱，附錄四我們列出 $n = 6, 7$ 的結論供參考。

前文已提過，以上三個猜測中，〔猜測二〕、〔猜測三〕皆可由〔猜測一〕推得，但〔猜測一〕我們苦思許久，無法證得。當時我們幾乎可以確定，1 到 n 的單峰排列會滿足所有條件，但無法確定是否仍有其他 1 到 n 的排列也會滿足所有條件？此外猜測二證明中的鋸齒狀總數也只是理論值，其存在性亦無法證得。雖然在 $n \le 6$ 時，我們有寫 python 程式驗證，結論都是正確的，但一般情況的 n 值仍無法確認是否都是正確的？

後來，我們透過查論文資料後發現，在 1973 年 J.H. Conway and H.S.M. Coxeter 關於 multiplicative frieze patterns 的兩篇論文提出後的幾個月內，G. C. Shephard 於同年度(1973)在同一期刊提出 additive frieze patterns 的相關研究（Shephard [7]）。

他在論文「Additive frieze patterns and Multiplication Tables」中提出了以下幾個重要定理：

先介紹一下 Shephard 論文 [7] 中的符號設定：

設 additive frieze patterns 的第一列皆為 0，第二列數字為 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$，第三列數字為 $a_{12}, a_{23}, a_{34}, \cdots$，其中 $a_{i,\ i+1}$ 為介於 a_i, a_{i+1} 之間下一列的數（菱形結構四數共分為三列，最下列的數），第三列數字為 $a_{123}, a_{234}, \cdots$，以下如圖類推。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\cdot\cdot & & \cdot\cdot & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\
& \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & \\
& & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & a_{12} & & a_{23} & & a_{34} & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & \\
& & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & a_{123} & & a_{234} & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & & \\
& & & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & a_{1234} & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & & &
\end{array}
$$

圖 30：additive frieze patterns 主定理（main theorem）的符號設定

定理九〔主定理（main theorem）〕：（[6] (6), p.180）

在任意的 additive frieze pattern 中，任給 $p<q$，必有

$$a_{p\cdots q}=\sum_{i=p}^{q}a_i-t_{q-p}$$

其中 $t_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ 為第 n 個三角形數（the nth triangular number）。

由於此定理實在太好用了！我們的〔猜測一〕及〔猜測二〕的存在性皆可由此主定理推得，故將其證明摘錄如下：

定理九〔主定理〕的證明：

對 $q-p$ 作數學歸納法。

1. 當 $q-p=1$，$a_{pq}=a_{p,p+1}=a_p+a_{p+1}-t_1 \Leftrightarrow a_p+a_{p+1}=(a_{pq}+0)+1$，

右式根據菱形法則，顯然成立。

2. 設 $q-p=k\ (k\geq 1)$ 時成立，則

當 $q-p=k+1\geq 2$ 時，考慮菱形結構四數

$$\begin{array}{ccc} & a_{p+1,\cdots,q-1} & \\ a_{p,\cdots,q-1} & & a_{p+1,\cdots,q} \\ & a_{p,\cdots,q} & \end{array}$$

可得

$$\begin{aligned} a_{p,\cdots,q} &= a_{p,\cdots,q-1}+a_{p+1,\cdots,q}-a_{p+1,\cdots,q-1}-1 \\ &= \sum_{i=p}^{q-1}a_i+\sum_{i=p+1}^{q}a_i-\sum_{i=p+1}^{q-1}a_i-2t_{q-p-1}+t_{q-p-2}-1 \\ &= \sum_{i=p}^{q-1}a_i+\sum_{i=p+1}^{q}a_i-\sum_{i=p+1}^{q-1}a_i-t_{q-p} \end{aligned}$$

其中等式 $t_r=2t_{r-1}-t_{r-2}+1$ 成立。

由數學歸納法得證 (1) 式成立。

系理十：

任意給定 n+2 列的 additive frieze pattern，首末兩列皆為數字 0，

則其第二列任意連續 n+1 個數之和必為三角形數 t_n。（[6] (8), p.180）

系理十的證明：

由主定理知 $a_{1,2,\cdots,n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}a_i-t_n$ ，又 $a_{1,2,\cdots,n+1}$ 為第 n+2 列數，其值為 0，故得 $\sum_{i=1}^{n+1}a_i=t_n$ ，得證。

系理十一：

任意給定 n+2 列的 additive frieze pattern，首末兩列皆為數字 0，
則將此 additive frieze pattern 向左或向右平移 n+1 個數後恆等不變。
（即 n+2 列的 additive frieze pattern，其週期為 n+1。）（[6] (9), p.181）

系理十一的證明：

設第二列連續 n+2 個數字為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+2}$ ，由系理十知

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_i=\sum_{i=2}^{n+2}a_i=t_n \Rightarrow a_1=a_{n+2} ,$$

故向左或向右平移 n+1 個數後，第二列的數字排列恆等不變。
而由「菱形法則」知第三列以下各列的數字都數都由上兩列唯一決定，
故知整個 n+2 列的 additive frieze pattern，向左或向右平移 n+1 個數後恆等不變。

以下我們用主定理及以上的系理來證明定理六〔猜測一〕：

定理六的證明：

1. 充分條件的證明：

由系理十一，可設第二列連續 2n+2 個數字為 $0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, 0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ，

我們列表如下（令第二列的 $a_0=0$ ，所有 a_i 的下標 i 都取模 n+1 下的同餘）：

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n$$

$$a_{01} \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{3,n-2} \quad a_{n-2,n-1} \quad a_{n-1,n} \quad a_{n0} \quad a_{01} \quad a_{12} \quad a_{23} \quad a_{3,n-2} \quad a_{n-2,n-1} \quad a_{n-1,n}$$

$$a_{012} \quad a_{123} \quad a_{2\sim n-2} \quad a_{3\sim n-1} \quad a_{n-2\sim n} \quad a_{n-1\sim 0} \quad a_{n\sim 1} \quad a_{012} \quad a_{123} \quad a_{2\sim n-2} \quad a_{3\sim n-1} \quad a_{n-2\sim n}$$

$$a_{0\sim 3} \quad a_{1\sim n-2} \quad a_{2\sim n-1} \quad a_{3\sim n} \quad a_{n-2\sim 0} \quad a_{n-1\sim 1} \quad a_{n\sim 2} \quad a_{0\sim 3} \quad a_{1\sim n-2} \quad a_{2\sim n-1} \quad a_{3\sim n}$$

(1) 因存在 0-鋸齒，故知第三列 $a_{n0}=0$ 或 $a_{01}=0$（不妨令 $a_{n0}=0$ ，即 0 鋸齒向左下），

由菱形法則可得： $a_n+a_0=0+a_{n0}+1 \Rightarrow a_n=1$（即 0 的左方為 1）。

(2) 因存在 0-鋸齒，故知第四列 $a_{n-1\sim 0}=0$ 或 $a_{n\sim 1}=0$（不妨令 $a_{n\sim 1}=0$ ，即 0 鋸齒向右下），

由主定理可得： $a_n+a_0+a_1-t_2=a_{n\sim 1} \Rightarrow 1+0+a_1-3=0 \Rightarrow a_1=2$

（即 1 0 的右方為 2，以下稱 1 0 區塊{0, 1}）。

(3) 因存在 0-鋸齒，故知第五列 $a_{n-1\sim 1}=0$ 或 $a_{n\sim 2}=0$（不妨令 $a_{n\sim 2}=0$，即 0 鋸齒向右下），

由主定理可得：$a_n+a_0+a_1+a_2-t_3=a_{n\sim 2}\Rightarrow 1+0+2+a_2-6=0\Rightarrow a_2=3$

（即 1 0 2 的右方為 3，以下稱 1 0 2 區塊{0, 1, 2}）。

(4) 由上述推論過程，可知第二列的數字 0 的左或右數字為 1（0 鋸齒向右下，則 1 在 0 右方；0 鋸齒向左下，則 1 在 0 左方），此兩數形成長度 2 的區塊{0, 1}，

接下來的數字 2 在此區塊{0, 1}的左方或右方（0 鋸齒向右下，則 2 在{0, 1}右方；0 鋸齒向左下，則 2 在{0, 1}左方），此三數形成長度 3 的區塊{0, 1, 2}，

接下來的數字 3 在此區塊{0, 1, 2}的左方或右方（0 鋸齒向右下，則 3 在{0, 1, 2}右方；0 鋸齒向左下，則 3 在{0, 1, 2}左方），此四數形成長度 4 的區塊{0, 1, 2, 3}，

以此類推，可設數字 *n*-1 在區塊{0,1,2, … ,*n*-2}的左方或右方（0 鋸齒向右下，則 *n*-1 在{0,1,2, … , *n*-2}右方；0 鋸齒向左下，則 *n*-1 在{0,1,2, … , *n*-2}左方），此 *n* 個數形成長度 *n* 的區塊{0,1,2, … , *n*-1}，（*n* =2, 3, 4 已成立）。因存在 0-鋸齒，設第 *n*+1 列 $a_{n-i\sim n-i+n-1}=0$ 或 $a_{n-i+1\sim n-i+n}=0$（不妨令 $a_{n-i\sim n-i+n-1}=0$，即 0 鋸齒向左），由主定理可得：

$a_{n-i}+a_{n-i+1}+\cdots+a_{n-i+n-1}-t_n=a_{n-i\sim n-i+n-1}\Rightarrow a_{n-i}+0+1+2+\cdots+(n-1)-t_n=0\Rightarrow a_{n-i}=n$，

即 *n* 在此區塊{0,1,2, … , *n*-1}的左方，此 *n*+1 個數形成長度 *n*+1 的區塊{0,1, 2, … , *n*}。

(5) 可知第二列的數字為從 0 開始到 *n*，緊鄰 0 往右寫 1 或是往左寫 1（視 0 鋸齒向右下或向左下而定），接下來再往最右方寫 2 或往最左方寫 2，⋯，當寫到最後一數 *n* 時，由 0 向右觀察，數字遞增中，設有 *k* 個，分別為 $r_1<r_2<\cdots<r_k$；由 0 向左觀察，數字遞增中，設有 *n-k* 個，設為 $l_{n-k}>\cdots>l_2>l_1$。

此時第二列有連續 *n*+1 個數：$l_{n-k}>\cdots>l_2>l_1>0<r_1<r_2<\cdots<r_k$，因第二列週期為 *n*+1（系理十一），故將左邊 *n-k* 個數同時向右平移 *n*+1，得

$0<r_1<r_2<\cdots<r_k\neq l_{n-k}>\cdots>l_2>l_1>0$

故知 0 右邊 1 到 *n* 共 *n* 個數的排列為先遞增再遞減的單峰排列。

但不排除純遞增排列 0 1 2 ⋯ *n* 及純遞減排列 *n* ⋯ 2 1 0（即 0 *n* ⋯ 2 1），得證。

2. 必要條件的證明：

設第 2 列為 0 右邊 *n* 個自然數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為 1 到 *n* 的單峰排列，令 $a_i=n$

令 $0<a_1<a_2<\cdots<a_{i-1}<n>a_{i+1}>a_{i+2}>\cdots>a_n$，

（i =1 時，第二列 0 右邊 *n* 個數嚴格遞減，$i=n$ 時，第二列 0 右邊 *n* 個數嚴格遞增）

因第二列週期為 *n*+1（系理十一），故將右邊 *n-i* 個數同時向左平移 $n+1$，可得

$a_{i+1} > a_{i+2} > \cdots > a_n > 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{i-1} < n$

(1) 故知 $a_1 = 1$ 或 $a_n = 1$，不妨令 $a_1 = 1$，則由主定理知：

0, a_1（0, 1）為邊長 2 的倒三角形下方數為 $0 + a_1 - t_1 = 0 + 1 - t_1 = 0$

（即 1 在 0 的右方，則 0 鋸齒向右下）

(2) 接下來 $a_2 = 2$ 或 $a_n = 2$，不妨令 $a_2 = 2$，則由主定理知：

0, a_1, a_2（0, 1, 2）為邊長 3 的倒三角形最下方數字為 $0 + a_1 + a_2 - t_2 = 0 + 1 + 2 - t_2 = 0$

（即 2 在 0, 1 的最右方，則 0 鋸齒向右下）

(3) 接下來 $a_3 = 3$ 或 $a_n = 3$，不妨令 $a_n = 3$，則由主定理知：

a_n,0, a_1, a_2（3, 0, 1, 2）為邊長的倒三角形最下方數字為 $3 + 0 + 1 + 2 - t_3 = 0$

（即 3 在 0, 1, 2 的最左方，則 0 鋸齒向左下）

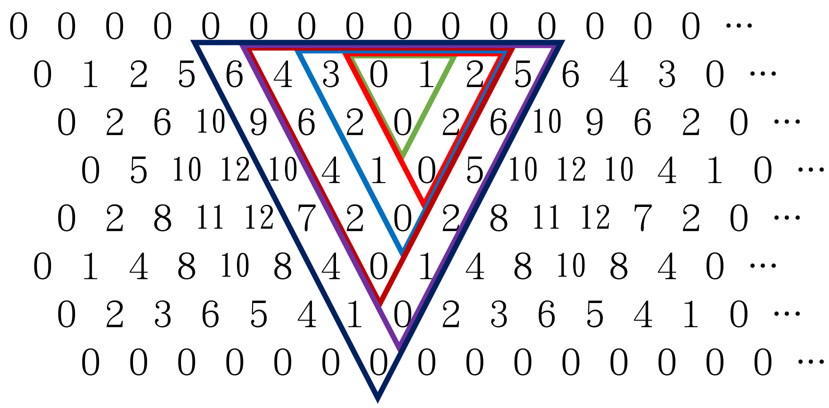


圖 31：定理六必要條件的證明示意圖，可明顯看出：第二列的 0 到 1 向右，0 鋸齒向右下；1 到 2 向右，0 鋸齒向右下；2 到 3 向左，0 鋸齒向左下；3 到 4 向左，0 鋸齒向左下；4 到 5 向右，0 鋸齒向右下；5 到 6 向左，0 鋸齒向左下。

(4) 以此類推，可設當排列為 $a_{j_1}, \ldots, 3, 0, 1, 2, \ldots, a_{j_{n-1}}$ 時，則由主定理知：

邊長 n 的倒三角形最下方數字為 $0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) - t_{n-1} = 0$

(5) 接下來，當 n 在 $a_{j_1}, \ldots, 3, 0, 1, 2, \ldots, a_{j_{n-1}}$ 最左方時，

$a_{j_1}, \ldots, 3, 0, 1, 2, \ldots, a_{j_{n-1}}, n$ 為邊長 n+1 的倒三角形最下方數字為

$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n - t_n = 0$（即 n 在 0 ~ n-1 排列的最左方，則 0 鋸齒向左下）

由以上可證得當 0 右邊 n 個自然數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為 1 到 n 的單峰排列時，

此 additive frieze pattern 具 0-鋸齒。

定理六證畢。

系理十二：（[6] (11), p.181）

任意給定具 0-鋸齒的 n+2 列 additive frieze pattern，首末兩列皆為數字 0，
若 r 為 1 到 n+1 的任一正整數，
則第二列連續 r 個數之和必大於或等於 t_{r-1}。

證明：

由主定理知：第二列任意連續 n+1 個數之和 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0+1+2+\cdots+n=t_n$

又由定理六知第二列 0 右方必為 1 到 n 的單峰排列，

故連續 r 個數必為 r 個相異非負整數，其和必大於或等於 $0+1+2+\cdots+(r-1)=\dfrac{r(r-1)}{2}=t_{r-1}$，

證畢。

系理十二的意義，在於確認具 0-鋸齒的 n+2 列 additive frieze pattern 在首末兩列 0 之間的整數必皆為非負整數。

最後，總結一下目前我們對 additive frieze patterns 的研究，主要還是集中在具 0-鋸齒的相關研究，我們找出首末兩列皆 0 的 n+2 列 additive frieze pattern 具 0-鋸齒的充要條件為其第二列 0 右邊必為自然數 1 到 n 的單峰排列，也確認具 0-鋸齒與 1 到 n 單峰排列有一一對應的關係，並計算出具 0-鋸齒 additive frieze pattern 數量及所有可能對稱的數量。

但對一般的（不一定具 0-鋸齒）首末兩列皆 0 的 n+2 列 additive frieze pattern 生成方式，能不能找到類似 multiplicative frieze pattern 與 n 邊形三角剖分一一對應的這種生成方式呢？且一般的 additive frieze patterns 總數量是多少呢？這些問題在目前仍是未知之謎，等待我們繼續深入研究。

參、 研究結果與討論

一、研究結果

(一) 提出 frieze patterns、Farey sequence 部份關聯性，並成功造出包含 n 階法里數列 (3 斜行版本) 的 Frieze patterns， $n = 2, 3, 4, \cdots, 12$ 。

(二) 成功造出包含 n 階法里數列 (2 斜行版本) 的 frieze patterns， $n = 2, 3, 4, \cdots, 8$ ，並利用對應三角剖分的雙重 0 轉換圖，得到 n 階的法里數列及其對應延伸的法里數列。

(三) 提出具 1-鋸齒 multiplicative frieze patterns 的充要條件，並給出證明。

(四) 探討不具備 1-鋸齒 multiplicative frieze patterns 的情況，並利用對應的三角剖分研討，給出證明，提出詮釋。

(五) 計算具 0 -鋸齒的 n+2 列 additive frieze patterns 的數量，並給出證明。

(六) 提出具 0 -鋸齒的 n+2 列 additive frieze patterns 的充要條件，並給出證明。

(七) 找出在 $n \leq 7$ 時，具 0 -鋸齒的 n+2 列 additive frieze patterns 的旋轉對稱及水平鏡射對稱，計算並證明出一般 n 值的旋轉對稱、水平鏡射對稱的 additive frieze patterns 數量。

二、討論

(一) 我們的研究成果，大多透過觀察及找實例猜測結論，寫程式驗證，再設法找出證明。想不出證明卡關之時，我們會利用搜尋相關論文方式，看能否找到有人做過相同或類似的問題，並學習、運用其論證、解釋的手法。

(二) 我們雖有找出 frieze patterns、Farey sequence 部份關聯性，但仍稍嫌薄弱，由於 Farey sequence 與 Ford circles 的密切關聯，我們原本想找出包含 n 階法里數列的 frieze patterns 其幾何意義，也做了不少嘗試，但仍無法提出幾何意義或表徵。也許將來可利用對應的多邊形三角剖分，配合參考資料 [9] 裡的 Farey diagram，繼續深入研究。

(三) 作品中部份 multiplicative frieze pattern 及 additive frieze pattern 的證明仍不夠嚴謹，須再多查詢相關論文，學習更多數學工具。

肆、 結論與運用

本作品提出 frieze patterns、Farey sequence 部份關聯性，並成功造出包含任意給定的 *n* 階法里數列的 frieze patterns。

最大的成果是完整解決 Conway 和 Guy 在 The Book of Numbers 一書中提出的問題，提出具 1-鋸齒 multiplicative frieze patterns 的充要條件，並給出證明。以及提出具 0-鋸齒的 additive frieze patterns 的充要條件，並給出證明。

本作品也提供了多個 python 程式，包括可快速畫出 frieze patterns 對應的三角剖分，給定第二列前 *n* 個數字或給定任一斜行數字造出整個 frieze pattern，還有可嵌入任意 *n* 階法里數列的 frieze pattern（3 斜行版本及 2 斜行版本），可加速對這個領域的相關研究。

Frieze patterns 在應用上可能與結晶學及對稱群有關，而各種類型的對稱也可運用於建築中楣板的裝飾、各種邊框設計。

伍、 參考資料

[1] 高佳晏，數字夾心餅，第 54 屆全國科展國中組數學科作品說書(2014)，取自
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/54/pdf/030405.pdf

[2] 高佳晏，當 Frieze 遇上 Fibonacci，2015 年臺灣國際科展優勝作品集(2015)，取自
https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2015/pdf/010049.pdf

[3] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns, Math. Gaz. 57 (1973), 87 – 94.

[4] J.H. Conway and H.S.M. Coxeter, Triangulated polygons and frieze patterns(continued), Math. Gaz. 57 (1973), 175 – 183.

[5] J.H. Conway and R.K. Guy, The Book of Numbers, Springer-Verlag, New York (1996) , 74 –76.

[6] G.C. Shephard. Additive frieze patterns and multiplication tables. Math. Gaz., 60 (1973), 178 – 184

[7] R.P. Stanley, Bijective Proof Problems (2009), 44 ，取自 https://math.mit.edu/~rstan/bij.pdf

[8] Frieze group, From Wikipedia, the free encyclopedia，取自
https://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group

[9] Allen Hatcher, Topology of Numbers, AMS(the American Mathematical Society) (2022) , 20-32

[10] G. H. Hardy, E. M.Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (sixth ed.), Oxford University Press (2008), 28-44

附錄

一、程式碼(Python)

(一) 輸入第二列，輸出乘法 Frieze

```
while True:

    #用 OS(第二列)計算 Frieze Pattern---------------------------------------------
    OS=[]
    res=input("請輸入 Frieze Pattern 的第二行:\n")
    for i in res:
        OS.append(int(i))

    #S=Set of 各列

    #S 加入第一列
    S=[[]]
    for i in range(len(OS)):
        S[0].append(1)

    #S 加入第二列
    S.append(OS)


    #S 加入剩餘的列
    for i in range(1,len(OS)-2):
        S.append([])

        for j in range(len(OS)):
            #設定除數
            if i==1:
                div=1
            else:
                try:
                    div=S[i-1][j+1]
                except IndexError:
                    div=S[i-1][0]   #[0]是因為 Frieze Pattern 會循環

            #新增元素
            try:
                S[i+1].append(round((S[i][j]*S[i][j+1]-1)/div))
            except IndexError:
                S[i+1].append(round((S[i][j]*S[i][0]-1)/div))    #[i][0]是因為循環

    print(S)  #普通輸出

    #排版輸出--------------------------------------------------

    for i in range(len(OS)-1):

        #輸出每行開頭的空格
        for k in range(i):
            print("   ",end="")

        for l in range(2):
            #for l in range(2)是為了印兩遍
            for j in range(len(OS)):
                if S[i][j]<10:
                    print((chr(ord(str(S[i][j]))+65248)),end="") #若個位數則為全型，佔兩格正常空間
                else:
                    print(S[i][j],end="")  #否則為半型，佔兩格正常空間
                print("    ",end="")

        print("")

    print("")
    print("")
```

(二) 輸入 Fn 的 n，輸出包含 Fn 的乘法 Frieze

```
import math

while True:
    n = int(input("請輸入 Fn 的 n 值(輸出 Frieze):\n"))
    F=[[0,1],[1,1]]

    for i in range(1,n+1):
        if i ==1:
            continue  #因為 F1 已經先寫好了
        for j in range(1,i):
            if (math.gcd(i,j)==1):
                F.append([j,i])  #如果分子分母互質則新增

    #開始排序----------------------------------------------------------------
    #Fs=F sorted
    Fs=[[0,1],[1,1]]
    for i in range(len(F)-2):
        for j in range(10000):
            if (F[i+2][0]/F[i+2][1])<(Fs[j][0]/Fs[j][1]):
                Fs.insert(j,F[i+2])
                break

    #用 Farey 計算 Frieze Pattern----------------------------------------------
    S=[]
    a=round((len(Fs)-1)/2)

    #帶入第一斜行(用分母)
    for i in range(a+1):
        S.append([Fs[i][1]])
    S.append([1])

    #帶入第二斜行(用 0 開始的分子)
    for i in range(1,a+1):
        S[i-1].append(Fs[i][0])

    #添加第二斜行無法直接帶入的兩個數
    S[len(S)-2].append(round((S[a-1][1]*S[a+1][0]+1)/S[a][0]))
    S[len(S)-1].append(1)

    #計算其他斜行
    for i in range(2,a+3):
        for j in range(a+1):
            if j ==0:
                S[0].append(1)
            else:
                S[j].append(round((S[j-1][i]*S[j+1][i-1]+1)/S[j][i-1]))
        S[a+1].append(1)

    #排版輸出----------------------------------------------------------------

    print(S)

    for i in range(len(S)):
        #輸出每行開頭的空格
        for k in range(i):
            print("   ",end="") #每行開頭的空格

        for l in range(2):
            #for l in range(2)是為了印兩遍
            for j in range(len(S[0])):
                if S[i][j]<10:
                    print((chr(ord(str(S[i][j]))+65248)),end="") #若個位數則為全型，佔兩格正常空間
                else:
                    print(S[i][j],end="")  #否則為半型，佔兩格正常空間
                print("    ",end="")

        print("")

    print("")
    print("")
```

(三) 輸入第二列，輸出加法 Frieze

```
while True:
    A=[[]]
    #G=[0,1,4,5,3,2]
    G=[]
    for i in input("請輸入第一行(例:014532)"):
        G.append(int(i))

    for i in range(len(G)):
        A[0].append(0)

    A.append(G)

    print(G)
    for i in range(2,len(G)+1):
        A.append([])
        for j in range(0,len(G)):
            if j==len(G)-1:
                A[i].append(A[i-1][j]+A[i-1][0]-A[i-2][0]-1)
            else:
                A[i].append(A[i-1][j]+A[i-1][j+1]-A[i-2][j+1]-1)
    print(A)


    #輸出----------------------------------------------
    for i in range(len(G)+1):
        #輸出每行開頭的空格
        for k in range(i):
            print("   ",end="")

        for l in range(3):
            #for l in range(2)是為了印兩遍
            for j in range(len(G)):
                if A[i][j]<10:
                    print((chr(ord(str(A[i][j]))+65248)),end="") #若個位數則為全型，佔兩格正常空間
                else:
                    print(A[i][j],end="")  #否則為半型，佔兩格正常空間
                print("    ",end="")

        print("")

    print("")
    print("")
```

(四) 輸入第二列的最大數字，輸出所有的加法 Frieze

```
n=int(input("請輸入 n(第二行之最大值)"))
G=[]
Z=[]
#生成 Set of 生成數列------------------------------------
S=[]
#1=右邊，0=左邊
for i in range(2**(n-1)):
    S.append([])
    #print(str(bin(i)))
    for j in (range(len(str(bin(i))))):
        if j > 1: #不要讀二進位的 0b
            S[i].append(int(str(bin(i))[j]))

for i in range(2**(n-1)):
    if len(S[i])<(n-1):
        for j in range((n-1)-len(S[i])):
            S[i].insert(0,0)
print (S)

#將 Set of 生成數列轉為 Set of 第二行----------------------------
for a in range(len(S)):
    Z.append([])
    Z[a].append(n)
    for i in range(n-1,0,-1):
        if S[a][i-1]==1:
            Z[a].append(i)
        else:
            Z[a].insert(0,i)
for i in range(len(Z)):
    Z[i].insert(0,0)

print(Z)

for num in range(len(Z)):
    A=[[]]
    G=Z[num]
    print(G)
    A.append(G)
    for i in range(len(G)):
        A[0].append(0)

    for i in range(2,len(G)+1):
        A.append([])
        for j in range(0,len(G)):
            if j==len(G)-1:
                A[i].append(A[i-1][j]+A[i-1][0]-A[i-2][0]-1)
            else:
                A[i].append(A[i-1][j]+A[i-1][j+1]-A[i-2][j+1]-1)
    print(A)


    #輸出---------------------------------------------
    for i in range(len(G)+1):
        #輸出每行開頭的空格
        for k in range(i):
            print("   ",end="")

        for l in range(3):
            #for l in range(2)是為了印兩遍
            for j in range(len(G)):
                if A[i][j]<10:
                    print((chr(ord(str(A[i][j]))+65248)),end="") #若個位數則為全型，佔兩格正常空間
                else:
                    print(A[i][j],end="")  #否則為半型，佔兩格正常空間
                print("    ",end="")

        print("")

    print("")
    print("")
```

(五) 輸入第二列，輸出三角剖分圖

```
import turtle
import math
print(turtle.screensize())
turtle.screensize(canvwidth=1300, canvheight=1300,
                  bg=None)
print(turtle.screensize())
A=[] #list of nums in the second row
B=[] #lsit of the coordinates of nodes
num=input("Please enter the second row of the Frieze Pattern : ")
for i in range(len(num)):
    A.append(int(num[i]))

# Drawing the ouline---------------------------------
t = turtle.Turtle()
t.setheading(180)
t.penup()
t.goto(-30,200)
t.pendown()
t.width(4)
t.color("blue")
n = len(A)

#l = int(input("Enter the length of the sides of the polygon : "))
l=round(340*math.sin(6.283/n))

for i in range(n): #Adding the coordinates
    B.append(t.pos())
    t.left(360/n)
    t.forward(l-1)
    t.width(10)
    t.forward(1) #Drawing the nodes
    t.width(4)

#Drawing the diagonals------------------------------
t.width(2)
t.color("black")
loc=0 #the location of t (0~n-1)
ind=0 #how many diagonal lines are there
while (ind!=n-3): #Draw until already draw n-3 diagonal lines

    if (A[loc]==1):
        #Subtract three nums by 1
        A[loc]-=1
        be=1 #How many steps backward does it need to get to 0
        af=1 #How many steps forward does it need to get to 0
        while (A[(loc-be)%n]==0):
            be+=1
        while (A[(loc+af)%n]==0):
            af+=1
        A[(loc-be)%n]-=1
        A[(loc+af)%n]-=1

        #Draw the diagonal line
        t.penup()
        t.goto(B[(loc-be)%n][0],B[(loc-be)%n][1])
        t.pendown()
        t.goto(B[(loc+af)%n][0],B[(loc+af)%n][1])

        #Update loc & ind
        loc=(loc+af)%n
        ind+=1

    else:
        #If the num isn't one, move to the next node
        loc=(loc+1)%n

t.hideturtle()
print("Done!")
```

(六) 輸入 Farey 分母列及分子列，輸出乘法 Frieze

```
import math


while True:
    n = int(input("請輸入 Fn 的 n 值(輸出 Frieze):\n"))

    F=[[0,1],[1,1]]

    for i in range(1,n+1):
        if i ==1:
            continue  #因為 F1 已經先寫好了
        for j in range(1,i):
            if (math.gcd(i,j)==1):
                F.append([j,i])  #如果分子分母互質則新增

    #開始排序--------------------------------------------------------------

    #Fs=F sorted
    Fs=[[0,1],[1,1]]

    #例: F3 為[[0,1],[1,1],[1,2],[1,3],[2,3]]，i 為 0,1,2，對應到 F[2,3,4]
    for i in range(len(F)-2):
        for j in range(10000):
            if (F[i+2][0]/F[i+2][1])<(Fs[j][0]/Fs[j][1]):
                Fs.insert(j,F[i+2])
                break



    #用 Farey 計算 Frieze Pattern-----------------------------------------------

    S=[]
    a=len(Fs)-2
    #帶入第一斜行(用分母)
    for i in range(a+1):
        S.append([Fs[i][1]])
    S.append([1])



    #帶入第二斜行(用 0 開始的分子)


    for i in range(1,a+1):
        S[i-1].append(Fs[i][0])

    #添加第二斜行無法直接帶入的兩個數
    S[len(S)-2].append(round((S[a-1][1]*S[a+1][0]+1)/S[a][0]))
    S[len(S)-1].append(1)


    #計算其他斜行
    for i in range(2,a+3):
        for j in range(a+1):
            if j ==0:
                S[0].append(1)
            else:
                S[j].append(round((S[j-1][i]*S[j+1][i-1]+1)/S[j][i-1]))
        S[a+1].append(1)



    #排版輸出---------------------------------------------------

    print(S)
```

二、包含法里數列 F_n $(2 \le n \le 12)$ 的 frieze pattern（3 斜行版本）

$\boxed{F_2}$

1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 2 1 2 1 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_3}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 2 2 1 3 1 2 2 1
2 1 3 1 2 2 1 3 1 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_4}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
4 1 2 2 2 1 4 1 2 2 2 1
3 1 3 3 1 3 3 1 3 3 1 3
2 1 4 1 2 2 2 1 4 1 2 2
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_5}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
5 1 2 3 1 3 2 1 5 1 2 3 1 3 2 1
4 1 5 2 2 5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4
3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3 3 2 3 3
5 1 4 4 1 5 2 2 5 1 4 4 1 5 2 2
2 1 5 1 2 3 1 3 2 1 5 1 2 3 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_6}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
6 1 2 2 3 1 3 2 1 6 1 2 2 3 1 3 2 1
5 1 3 5 2 2 5 1 5 5 1 3 5 2 2 5 1 5
4 1 7 3 3 3 2 4 4 4 1 7 3 3 3 2 4 4
3 2 4 4 4 1 7 3 3 3 2 4 4 4 1 7 3 3
5 1 5 5 1 3 5 2 2 5 1 5 5 1 3 5 2 2
2 1 6 1 2 2 3 1 3 2 1 6 1 2 2 3 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_7}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

7 1 2 2 3 1 4 2 1 4 2 1 7 1 2 2 3 1 4 2 1 4 2 1

6 1 3 5 2 3 7 1 3 7 1 6 6 1 3 5 2 3 7 1 3 7 1 6

5 1 7 3 5 5 3 2 5 3 5 5 5 1 7 3 5 5 3 2 5 3 5 5

4 2 4 7 8 2 5 3 2 14 4 4 4 2 4 7 8 2 5 3 2 14 4 4

7 1 9 11 3 3 7 1 9 11 3 3 7 1 9 11 3 3 7 1 9 11 3 3

3 2 14 4 4 4 2 4 7 8 2 5 3 2 14 4 4 4 2 4 7 8 2 5

5 3 5 5 5 1 7 3 5 5 3 2 5 3 5 5 5 1 7 3 5 5 3 2

7 1 6 6 1 3 5 2 3 7 1 3 7 1 6 6 1 3 5 2 3 7 1 3

2 1 7 1 2 2 3 1 4 2 1 4 2 1 7 1 2 2 3 1 4 2 1 4

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_8}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

8 1 2 2 2 3 1 5 1 3 1 4 2 1 8 1 2 2 2 3 1 5 1 3 1 4 2 1

7 1 3 3 5 2 4 4 2 2 3 7 1 7 7 1 3 3 5 2 4 4 2 2 3 7 1 7

6 1 4 7 3 7 3 7 1 5 5 3 6 6 6 1 4 7 3 7 3 7 1 5 5 3 6 6

5 1 9 4 10 5 5 3 2 8 2 17 5 5 5 1 9 4 10 5 5 3 2 8 2 17 5 5

4 2 5 13 7 8 2 5 3 3 11 14 4 4 4 2 5 13 7 8 2 5 3 3 11 14 4 4

7 1 16 9 11 3 3 7 1 16 9 11 3 3 7 1 16 9 11 3 3 7 1 16 9 11 3 3

3 3 11 14 4 4 4 2 5 13 7 8 2 5 3 3 11 14 4 4 4 2 5 13 7 8 2 5

8 2 17 5 5 5 1 9 4 10 5 5 3 2 8 2 17 5 5 5 1 9 4 10 5 5 3 2

5 3 6 6 6 1 4 7 3 7 3 7 1 5 5 3 6 6 6 1 4 7 3 7 3 7 1 5

7 1 7 7 1 3 3 5 2 4 4 2 2 3 7 1 7 7 1 3 3 5 2 4 4 2 2 3

2 1 8 1 2 2 2 3 1 5 1 3 1 4 2 1 8 1 2 2 2 3 1 5 1 3 1 4

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_9}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

9 1 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 2 1 5 2 1 9 1 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 2 1 5 2 1

8 1 3 3 5 2 3 3 4 4 2 5 1 4 9 1 8 8 1 3 3 5 2 3 3 4 4 2 5 1 4 9 1 8

7 1 4 7 3 5 2 11 3 7 3 2 3 7 4 7 7 7 1 4 7 3 5 2 11 3 7 3 2 3 7 4 7 7

6 1 9 4 7 3 7 8 5 10 1 5 5 3 27 6 6 6 1 9 4 7 3 7 8 5 10 1 5 5 3 27 6 6

5 2 5 9 4 10 5 13 7 3 2 8 2 20 23 5 5 5 2 5 9 4 10 5 13 7 3 2 8 2 20 23 5 5

9 1 11 5 13 7 8 18 2 5 3 3 13 17 19 4 4 9 1 11 5 13 7 8 18 2 5 3 3 13 17 19 4 4

4 2 6 16 9 11 11 5 3 7 1 19 11 14 15 3 7 4 2 6 16 9 11 11 5 3 7 1 19 11 14 15 3 7

7 1 19 11 14 15 3 7 4 2 6 16 9 11 11 5 3 7 1 19 11 14 15 3 7 4 2 6 16 9 11 11 5 3

3 3 13 17 19 4 4 9 1 11 5 13 7 8 18 2 5 3 3 13 17 19 4 4 9 1 11 5 13 7 8 18 2 5

8 2 20 23 5 5 5 2 5 9 4 10 5 13 7 3 2 8 2 20 23 5 5 5 2 5 9 4 10 5 13 7 3 2

5 3 27 6 6 6 1 9 4 7 3 7 8 5 10 1 5 5 3 27 6 6 6 1 9 4 7 3 7 8 5 10 1 5

7 4 7 7 7 1 4 7 3 5 2 11 3 7 3 2 3 7 4 7 7 7 1 4 7 3 5 2 11 3 7 3 2 3

9 1 8 8 1 3 3 5 2 3 3 4 4 2 5 1 4 9 1 8 8 1 3 3 5 2 3 3 4 4 2 5 1 4

2 1 9 1 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 2 1 5 2 1 9 1 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 2 1 5

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_{10}}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
10 1 2 2 2 2 3 1 4 2 1 6 1 3 2 1 5 2 1 10 1 2 2 2 2 3 1 4 2 1 6 1 3 2 1 5 2 1
9 1 3 3 3 5 2 3 7 1 5 5 2 5 1 4 9 1 9 9 1 3 3 3 5 2 3 7 1 5 5 2 5 1 4 9 1 9
8 1 4 4 7 3 5 5 3 4 4 9 3 2 3 7 4 8 8 8 1 4 4 7 3 5 5 3 4 4 9 3 2 3 7 4 8 8
7 1 5 9 4 7 8 2 11 3 7 13 1 5 5 3 31 7 7 7 1 5 9 4 7 8 2 11 3 7 13 1 5 5 3 31 7 7
6 1 11 5 9 11 3 7 8 5 10 4 2 8 2 23 27 6 6 6 1 11 5 9 11 3 7 8 5 10 4 2 8 2 23 27 6 6
5 2 6 11 14 4 10 5 13 7 3 7 3 3 15 20 23 5 5 5 2 6 11 14 4 10 5 13 7 3 7 3 3 15 20 23 5 5
9 1 13 17 5 13 7 8 18 2 5 10 1 22 13 17 19 4 4 9 1 13 17 5 13 7 8 18 2 5 10 1 22 13 17 19 4 4
4 2 20 6 16 9 11 11 5 3 7 3 7 19 11 14 15 3 7 4 2 20 6 16 9 11 11 5 3 7 3 7 19 11 14 15 3 7
7 3 7 19 11 14 15 3 7 4 2 20 6 16 9 11 11 5 3 7 3 7 19 11 14 15 3 7 4 2 20 6 16 9 11 11 5 3
10 1 22 13 17 19 4 4 9 1 13 17 5 13 7 8 18 2 5 10 1 22 13 17 19 4 4 9 1 13 17 5 13 7 8 18 2 5
3 3 15 20 23 5 5 5 2 6 11 14 4 10 5 13 7 3 7 3 3 15 20 23 5 5 5 2 6 11 14 4 10 5 13 7 3 7
8 2 23 27 6 6 6 1 11 5 9 11 3 7 8 5 10 4 2 8 2 23 27 6 6 6 1 11 5 9 11 3 7 8 5 10 4 2
5 3 31 7 7 7 1 5 9 4 7 8 2 11 3 7 13 1 5 5 3 31 7 7 7 1 5 9 4 7 8 2 11 3 7 13 1 5
7 4 8 8 8 1 4 4 7 3 5 5 3 4 4 9 3 2 3 7 4 8 8 8 1 4 4 7 3 5 5 3 4 4 9 3 2 3
9 1 9 9 1 3 3 3 5 2 3 7 1 5 5 2 5 1 4 9 1 9 9 1 3 3 3 5 2 3 7 1 5 5 2 5 1 4
2 1 10 1 2 2 2 2 3 1 4 2 1 6 1 3 2 1 5 2 1 10 1 2 2 2 2 3 1 4 2 1 6 1 3 2 1 5
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_{11}}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
11 1 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 3 2 2 1 6 2 1 11 1 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 3 2 2 1 6 2 1
10 1 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 5 5 3 1 5 11 1 10 10 1 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 5 5 3 1 5 11 1 10
9 1 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 2 8 7 1 4 9 5 9 9 9 1 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 2 8 7 1 4 9 5 9 9
8 1 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 9 3 11 2 3 7 4 44 8 8 8 1 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 9 3 11 2 3 7 4 44 8 8
7 1 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 7 13 4 3 5 5 3 35 39 7 7 7 1 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 7 13 4 3 5 5 3 35 39 7 7
6 2 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 12 10 17 1 7 8 2 26 31 34 6 6 6 2 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 12 10 17 1 7 8 2 26 31 34 6 6
11 1 13 6 16 9 11 3 22 7 8 5 17 13 4 2 11 3 17 23 27 29 5 5 11 1 13 6 16 9 11 3 22 7 8 5 17 13 4 2 11 3 17 23 27 29 5 5
5 2 7 19 11 14 4 13 17 5 13 7 22 3 7 3 4 25 15 20 23 24 4 9 5 2 7 19 11 14 4 13 17 5 13 7 22 3 7 3 4 25 15 20 23 24 4 9
9 1 22 13 17 5 17 10 12 8 18 9 5 5 10 1 33 22 13 17 19 19 7 4 9 1 22 13 17 5 17 10 12 8 18 9 5 5 10 1 33 22 13 17 19 19 7 4
4 3 15 20 6 21 13 7 19 11 23 2 8 7 3 8 29 19 11 14 15 33 3 7 4 3 15 20 6 21 13 7 19 11 23 2 8 7 3 8 29 19 11 14 15 33 3 7
11 2 23 7 25 16 9 11 26 14 5 3 11 2 23 7 25 16 9 11 26 14 5 3 11 2 23 7 25 16 9 11 26 14 5 3 11 2 23 7 25 16 9 11 26 14 5 3
7 3 8 29 19 11 14 15 33 3 7 4 3 15 20 6 21 13 7 19 11 23 2 8 7 3 8 29 19 11 14 15 33 3 7 4 3 15 20 6 21 13 7 19 11 23 2 8
10 1 33 22 13 17 19 19 7 4 9 1 22 13 17 5 17 10 12 8 18 9 5 5 10 1 33 22 13 17 19 19 7 4 9 1 22 13 17 5 17 10 12 8 18 9 5 5
3 4 25 15 20 23 24 4 9 5 2 7 19 11 14 4 13 17 5 13 7 22 3 7 3 4 25 15 20 23 24 4 9 5 2 7 19 11 14 4 13 17 5 13 7 22 3 7
11 3 17 23 27 29 5 5 11 1 13 6 16 9 11 3 22 7 8 5 17 13 4 2 11 3 17 23 27 29 5 5 11 1 13 6 16 9 11 3 22 7 8 5 17 13 4 2
8 2 26 31 34 6 6 6 2 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 12 10 17 1 7 8 2 26 31 34 6 6 6 2 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 12 10 17 1 7
5 3 35 39 7 7 7 1 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 7 13 4 3 5 5 3 35 39 7 7 7 1 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 7 13 4 3 5
7 4 44 8 8 8 1 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 9 3 11 2 3 7 4 44 8 8 8 1 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 9 3 11 2 3
9 5 9 9 9 1 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 2 8 7 1 4 9 5 9 9 9 1 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 2 8 7 1 4
11 1 10 10 1 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 5 5 3 1 5 11 1 10 10 1 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 5 5 3 1 5
2 1 11 1 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 3 2 2 1 6 2 1 11 1 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 3 2 2 1 6
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

$\boxed{F_{12}}$

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
12 1 2 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 4 1 3 2 1 6 2 1 12 1 2 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 4 1 3 2 1 6 2 1
11 1 3 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 7 3 2 5 1 5 11 1 11 11 1 3 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 7 3 2 5 1 5 11 1 11
10 1 4 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 3 5 5 3 2 4 9 5 10 10 10 1 4 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 3 5 5 3 2 4 9 5 10 10
9 1 5 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 14 2 8 7 1 7 7 4 49 9 9 9 1 5 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 14 2 8 7 1 7 7 4 49 9 9
8 1 6 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 11 9 3 11 2 3 12 3 39 44 8 8 8 1 6 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 11 9 3 11 2 3 12 3 39 44 8 8
7 1 13 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 19 7 13 4 3 5 5 5 29 35 39 7 7 7 1 13 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 19 7 13 4 3 5 5 5 29 35 39 7 7
6 2 7 13 6 16 9 11 3 22 7 8 8 12 10 17 1 7 8 2 48 26 31 34 6 6 6 2 7 13 6 16 9 11 3 22 7 8 8 12 10 17 1 7 8 2 48 26 31 34 6 6
11 1 15 7 19 11 14 4 13 17 5 21 5 17 13 4 2 11 3 19 43 23 27 29 5 5 11 1 15 7 19 11 14 4 13 17 5 21 5 17 13 4 2 11 3 19 43 23 27 29 5 5
5 2 8 22 13 17 5 17 10 12 13 13 7 22 3 7 3 4 28 17 38 20 23 24 4 9 5 2 8 22 13 17 5 17 10 12 13 13 7 22 3 7 3 4 28 17 38 20 23 24 4 9
9 1 25 15 20 6 21 13 7 31 8 18 9 5 5 10 1 37 25 15 33 17 19 19 7 4 9 1 25 15 20 6 21 13 7 31 8 18 9 5 5 10 1 37 25 15 33 17 19 19 7 4
4 3 17 23 7 25 16 9 18 19 11 23 2 8 7 3 9 33 22 13 28 14 15 33 3 7 4 3 17 23 7 25 16 9 18 19 11 23 2 8 7 3 9 33 22 13 28 14 15 33 3 7
11 2 26 8 29 19 11 23 11 26 14 5 3 11 2 26 8 29 19 11 23 11 26 14 5 3 11 2 26 8 29 19 11 23 11 26 14 5 3 11 2 26 8 29 19 11 23 11 26 14 5 3
7 3 9 33 22 13 28 14 15 33 3 7 4 3 17 23 7 25 16 9 18 19 11 23 2 8 7 3 9 33 22 13 28 14 15 33 3 7 4 3 17 23 7 25 16 9 18 19 11 23 2 8
10 1 37 25 15 33 17 19 19 7 4 9 1 25 15 20 6 21 13 7 31 8 18 9 5 5 10 1 37 25 15 33 17 19 19 7 4 9 1 25 15 20 6 21 13 7 31 8 18 9 5 5
3 4 28 17 38 20 23 24 4 9 5 2 8 22 13 17 5 17 10 12 13 13 7 22 3 7 3 4 28 17 38 20 23 24 4 9 5 2 8 22 13 17 5 17 10 12 13 13 7 22 3 7
11 3 19 43 23 27 29 5 5 11 1 15 7 19 11 14 4 13 17 5 21 5 17 13 4 2 11 3 19 43 23 27 29 5 5 11 1 15 7 19 11 14 4 13 17 5 21 5 17 13 4 2
8 2 48 26 31 34 6 6 6 2 7 13 6 16 9 11 3 22 7 8 8 12 10 17 1 7 8 2 48 26 31 34 6 6 6 2 7 13 6 16 9 11 3 22 7 8 8 12 10 17 1 7
5 5 29 35 39 7 7 7 1 13 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 19 7 13 4 3 5 5 5 29 35 39 7 7 7 1 13 6 11 5 13 7 8 5 9 11 3 19 7 13 4 3 5
12 3 39 44 8 8 8 1 6 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 11 9 3 11 2 3 12 3 39 44 8 8 8 1 6 11 5 9 4 10 5 13 2 14 4 7 11 9 3 11 2 3
7 4 49 9 9 9 1 5 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 14 2 8 7 1 7 7 4 49 9 9 9 1 5 5 9 4 7 3 7 8 5 3 5 9 4 14 2 8 7 1 7
9 5 10 10 10 1 4 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 3 5 5 3 2 4 9 5 10 10 10 1 4 4 4 7 3 5 2 11 3 7 1 11 5 5 3 5 5 3 2 4
11 1 11 11 1 3 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 7 3 2 5 1 5 11 1 11 11 1 3 3 3 3 5 2 3 3 4 4 2 2 6 6 1 7 3 2 5 1 5
2 1 12 1 2 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 4 1 3 2 1 6 2 1 12 1 2 2 2 2 2 3 1 4 1 5 1 3 1 7 1 2 4 1 3 2 1 6
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

二、包含法里數列 F_n $(2 \le n \le 8)$ 的 frieze pattern （2 斜行版本）

F_2

1 1 1 1 1 1 1 1
2 1 2 1 2 1 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1

F_3

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

F_4

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
4 1 2 3 2 1 4 1 4 1 2 3 2 1 4 1
3 1 5 5 1 3 3 3 3 1 5 5 1 3 3 3
2 2 8 2 2 2 8 2 2 2 8 2 2 2 8 2
3 3 3 3 1 5 5 1 3 3 3 3 1 5 5 1
4 1 4 1 2 3 2 1 4 1 4 1 2 3 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

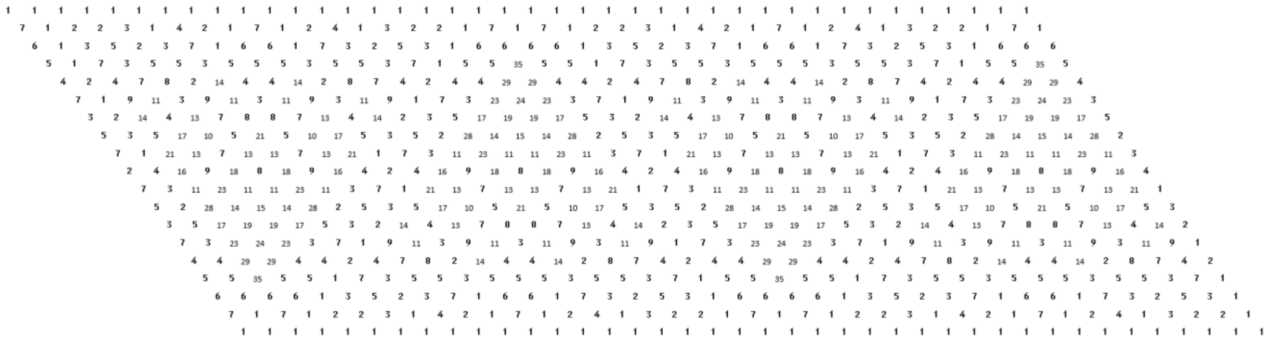
F_5

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
5 1 2 3 1 5 1 3 2 1 5 1 5 1 2 3 1 5 1 3 2 1 5 1
4 1 5 2 4 4 2 5 1 4 4 4 4 1 5 2 4 4 2 5 1 4 4 4
3 2 3 7 3 7 3 2 3 3 15 3 3 2 3 7 3 7 3 2 3 3 15 3
5 1 10 5 5 10 1 5 2 11 11 2 5 1 10 5 5 10 1 5 2 11 11 2
2 3 7 8 7 3 2 3 7 8 7 3 2 3 7 8 7 3 2 3 7 8 7 3
5 2 11 11 2 5 1 10 5 5 10 1 5 2 11 11 2 5 1 10 5 5 10 1
3 3 15 3 3 2 3 7 3 7 3 2 3 3 15 3 3 2 3 7 3 7 3 2
4 4 4 4 1 5 2 4 4 2 5 1 4 4 4 4 1 5 2 4 4 2 5 1
5 1 5 1 2 3 1 5 1 3 2 1 5 1 5 1 2 3 1 5 1 3 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

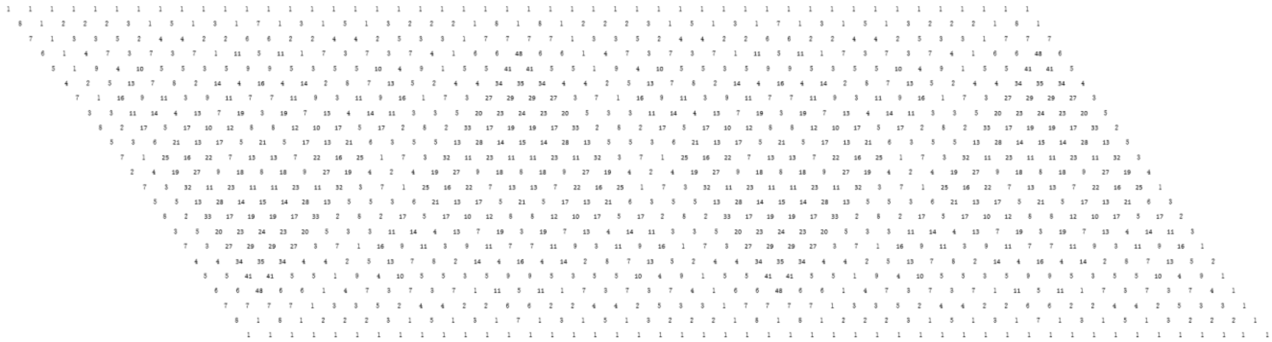
F_6

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
6 1 2 2 3 1 5 1 3 2 2 1 6 1 6 1 2 2 3 1 5 1 3 2 2 1 6 1
5 1 3 5 2 4 4 2 5 3 1 5 5 5 5 1 3 5 2 4 4 2 5 3 1 5 5 5
4 1 7 3 7 3 7 3 7 1 4 4 24 4 4 1 7 3 7 3 7 3 7 1 4 4 24 4
3 2 4 10 5 5 10 4 2 3 3 19 19 3 3 2 4 10 5 5 10 4 2 3 3 19 19 3
5 1 13 7 8 7 13 1 5 2 14 15 14 2 5 1 13 7 8 7 13 1 5 2 14 15 14 2
2 3 9 11 11 9 3 2 3 9 11 11 9 3 2 3 9 11 11 9 3 2 3 9 11 11 9 3
5 2 14 15 14 2 5 1 13 7 8 7 13 1 5 2 14 15 14 2 5 1 13 7 8 7 13 1
3 3 19 19 3 3 2 4 10 5 5 10 4 2 3 3 19 19 3 3 2 4 10 5 5 10 4 2
4 4 24 4 4 1 7 3 7 3 7 3 7 1 4 4 24 4 4 1 7 3 7 3 7 3 7 1
5 5 5 5 1 3 5 2 4 4 2 5 3 1 5 5 5 5 1 3 5 2 4 4 2 5 3 1
6 1 6 1 2 2 3 1 5 1 3 2 2 1 6 1 6 1 2 2 3 1 5 1 3 2 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

F_7

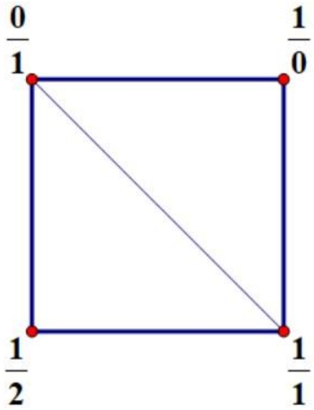


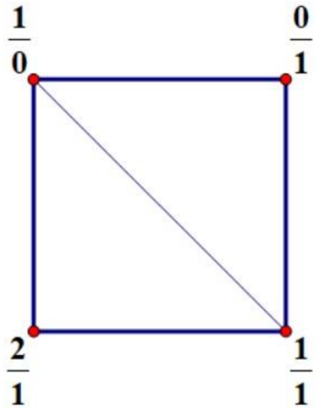
F_8



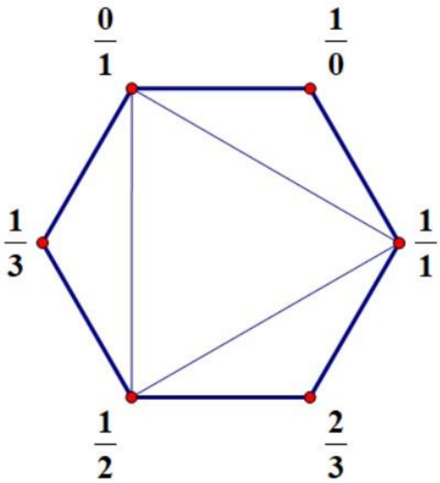
三、包含 Farey sequence (F_2到 F_8) 的 frieze patterns 所對應的三角剖分的雙重 0 轉換圖

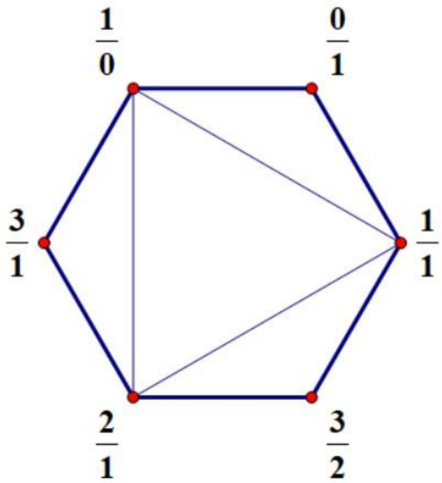
F_2



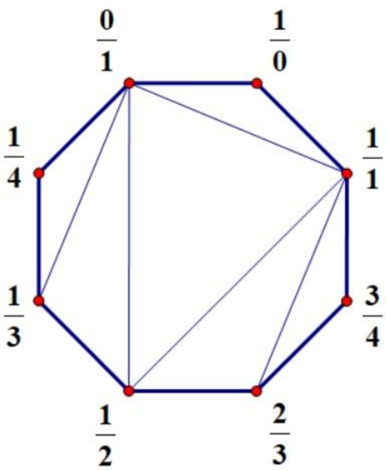


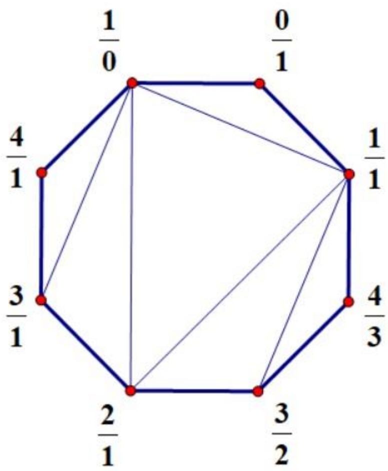
F_3



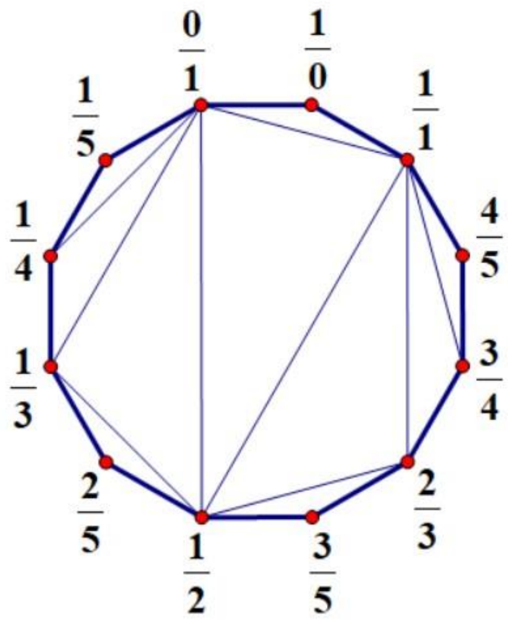


F_4

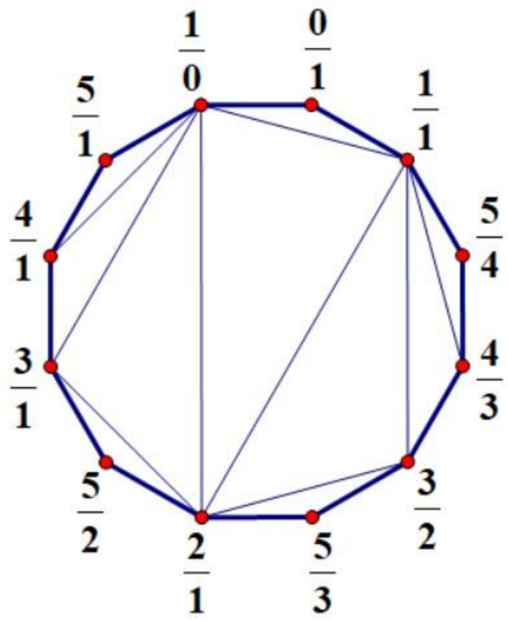




F_5

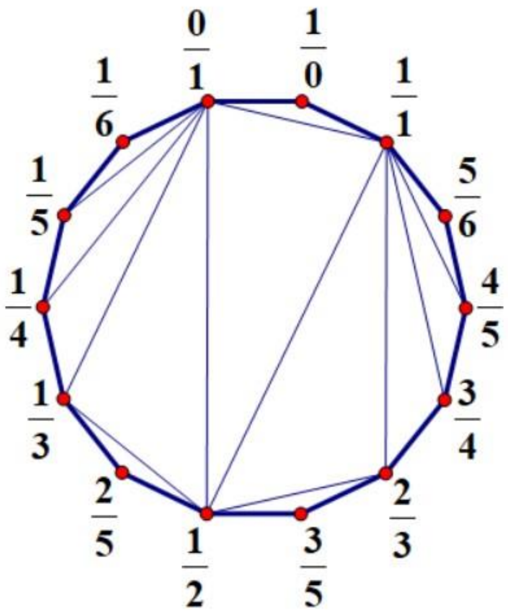


0/1
1/0
1/1
4/5
3/4
2/3
3/5
1/2
2/5
1/3
1/4
1/5

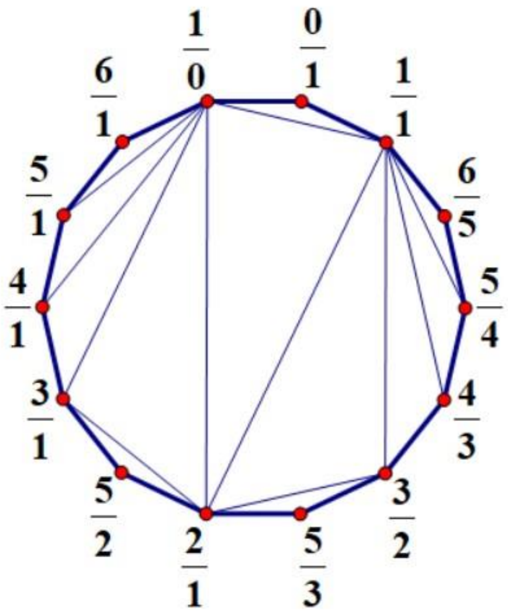


1/0
0/1
1/1
5/4
4/3
3/2
5/3
2/1
5/2
3/1
4/1
5/1

F_6

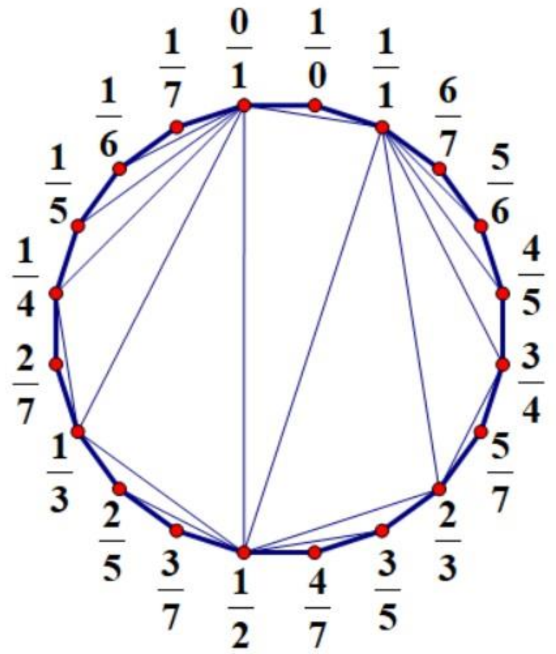


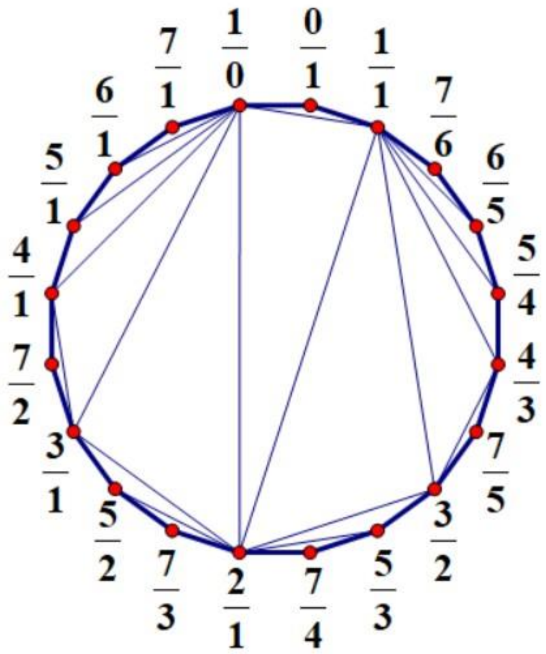
0/1
1/0
1/1
5/6
4/5
3/4
2/3
3/5
1/2
2/5
1/3
1/4
1/5
1/6



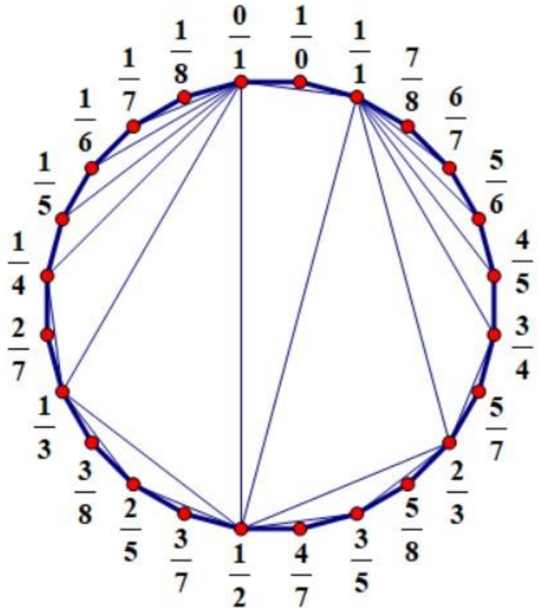
1/0
0/1
1/1
6/5
5/4
4/3
3/2
5/3
2/1
5/2
3/1
4/1
5/1
6/1

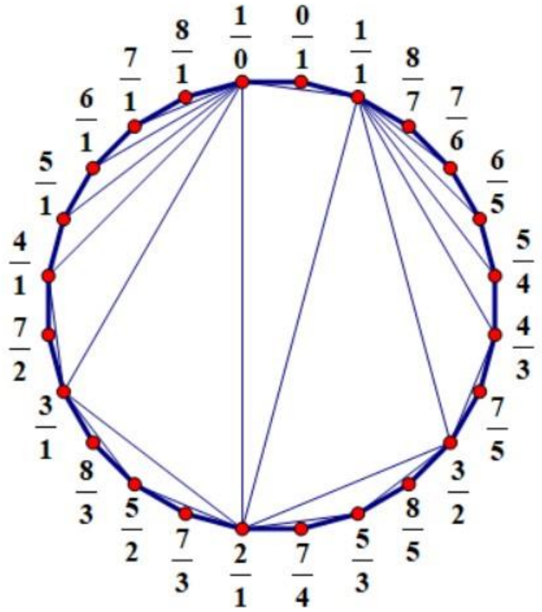
F_7


$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$


$\frac{1}{0}$ $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{6}{1}$ $\frac{7}{1}$

F_8


$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$


$\frac{1}{0}$ $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{7}{6}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{5}{1}$ $\frac{6}{1}$ $\frac{7}{1}$ $\frac{8}{1}$

五、$n=6$時，additive frieze pattern的旋轉對稱（共$2^{\left\lceil\frac{6-1}{2}\right\rceil}=8$組）

旋轉 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6 0
0 2 4 6 8 10 5 0 2 4 6 8 10 5 0
0 3 6 9 12 8 4 0 3 6 9 12 8 4 0
0 4 8 12 9 6 3 0 4 8 12 9 6 3 0
0 5 10 8 6 4 2 0 5 10 8 6 4 2 0
0 6 5 4 3 2 1 0 6 5 4 3 2 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 2

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 2 4 5 6 3 0 1 2 4 5 6 3 0
0 2 5 8 10 8 2 0 2 5 8 10 8 2 0
0 4 8 12 11 6 1 0 4 8 12 11 6 1 0
1 6 11 12 8 4 0 1 6 11 12 8 4 0 1
2 8 10 8 5 2 0 2 8 10 8 5 2 0 2
3 6 5 4 2 1 0 3 6 5 4 2 1 0 3
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 3 5 6 4 2 0 1 3 5 6 4 2 0
0 3 7 10 9 5 1 0 3 7 10 9 5 1 0
1 6 11 12 9 3 0 1 6 11 12 9 3 0 1
3 9 12 11 6 1 0 3 9 12 11 6 1 0 3
5 9 10 7 3 0 1 5 9 10 7 3 0 1 5
4 6 5 3 1 0 2 4 6 5 3 1 0 2 4
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 5 6 4 3 2 0 1 5 6 4 3 2 0

0 5 10 9 6 4 1 0 5 10 9 6 4 1 0

3 9 12 10 6 2 0 3 9 12 10 6 2 0 3

6 10 12 9 3 0 2 6 10 12 9 3 0 2 6

6 9 10 5 0 1 4 6 9 10 5 0 1 4 6

4 6 5 1 0 2 3 4 6 5 1 0 2 3 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 5

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 3 4 6 5 1 0 2 3 4 6 5 1 0

1 4 6 9 10 5 0 1 4 6 9 10 5 0 1

2 6 10 12 9 3 0 2 6 10 12 9 3 0 2

3 9 12 10 6 2 0 3 9 12 10 6 2 0 3

5 10 9 6 4 1 0 5 10 9 6 4 1 0 5

5 6 4 3 2 0 1 5 6 4 3 2 0 1 5

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 4 6 5 3 1 0 2 4 6 5 3 1 0 2

1 5 9 10 7 3 0 1 5 9 10 7 3 0 1 5

3 9 12 11 6 1 0 3 9 12 11 6 1 0 3 9

6 11 12 9 3 0 1 6 11 12 9 3 0 1 6 11

7 10 9 5 1 0 3 7 10 9 5 1 0 3 7 10

5 6 4 2 0 1 3 5 6 4 2 0 1 3 5 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 3 6 5 4 2 1 0 3 6 5 4 2 1 0

2 8 10 8 5 2 0 2 8 10 8 5 2 0 2

6 11 12 8 4 0 1 6 11 12 8 4 0 1 6

8 12 11 6 1 0 4 8 12 11 6 1 0 4 8

8 10 8 2 0 2 5 8 10 8 2 0 2 5 8

5 6 3 0 1 2 4 5 6 3 0 1 2 4 5

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 8

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 6 5 4 3 2 1 0 6 5 4 3 2 1 0 6

5 10 8 6 4 2 0 5 10 8 6 4 2 0 5 10

8 12 9 6 3 0 4 8 12 9 6 3 0 4 8 12

9 12 8 4 0 3 6 9 12 8 4 0 3 6 9 12

8 10 5 0 2 4 6 8 10 5 0 2 4 6 8 10

5 6 0 1 2 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

五、 $n=7$時，additive frieze pattern 的旋轉對稱（共 $2^{\left\lceil\frac{7-1}{2}\right\rceil}=8$組）

旋轉 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 2 3 4 5 6 7 0 1 2 3 4 5 6 7

0 2 4 6 8 10 12 6 0 2 4 6 8 10 12 6

0 3 6 9 12 15 10 5 0 3 6 9 12 15 10 5

0 4 8 12 16 12 8 4 0 4 8 12 16 12 8 4

0 5 10 15 12 9 6 3 0 5 10 15 12 9 6 3

0 6 12 10 8 6 4 2 0 6 12 10 8 6 4 2

0 7 6 5 4 3 2 1 0 7 6 5 4 3 2 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 2

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 2 5 6 7 4 3 0 1 2 5 6 7 4 3

0 2 6 10 12 10 6 2 0 2 6 10 12 10 6 2

0 5 10 15 14 11 4 1 0 5 10 15 14 11 4 1

2 8 14 16 14 8 2 0 2 8 14 16 14 8 2 0

4 11 14 15 10 5 0 1 4 11 14 15 10 5 0 1

6 10 12 10 6 2 0 2 6 10 12 10 6 2 0 2

4 7 6 5 2 1 0 3 4 7 6 5 2 1 0 3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 3 4 6 7 5 2 0 1 3 4 6 7 5 2

0 3 6 9 12 11 6 1 0 3 6 9 12 11 6 1

1 5 10 14 15 11 4 0 1 5 10 14 15 11 4 0

2 8 14 16 14 8 2 0 2 8 14 16 14 8 2 0

4 11 15 14 10 5 1 0 4 11 15 14 10 5 1 0

6 11 12 9 6 3 0 1 6 11 12 9 6 3 0 1

5 7 6 4 3 1 0 2 5 7 6 4 3 1 0 2

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 6 7 5 4 3 2 0 1 6 7 5 4 3 2

0 6 12 11 8 6 4 1 0 6 12 11 8 6 4 1

4 11 15 13 9 6 2 0 4 11 15 13 9 6 2 0

8 13 16 13 8 3 0 3 8 13 16 13 8 3 0 3

9 13 15 11 4 0 2 6 9 13 15 11 4 0 2 6

8 11 12 6 0 1 4 6 8 11 12 6 0 1 4 6

5 7 6 1 0 2 3 4 5 7 6 1 0 2 3 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 5

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 3 4 5 7 6 1 0 2 3 4 5 7 6 1

1 4 6 8 11 12 6 0 1 4 6 8 11 12 6 0

2 6 9 13 15 11 4 0 2 6 9 13 15 11 4 0

3 8 13 16 13 8 3 0 3 8 13 16 13 8 3 0

4 11 15 13 9 6 2 0 4 11 15 13 9 6 2 0

6 12 11 8 6 4 1 0 6 12 11 8 6 4 1 0

6 7 5 4 3 2 0 1 6 7 5 4 3 2 0 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 5 7 6 4 3 1 0 2 5 7 6 4 3 1

1 6 11 12 9 6 3 0 1 6 11 12 9 6 3 0

4 11 15 14 10 5 1 0 4 11 15 14 10 5 1 0

8 14 16 14 8 2 0 2 8 14 16 14 8 2 0 2

10 14 15 11 4 0 1 5 10 14 15 11 4 0 1 5

9 12 11 6 1 0 3 6 9 12 11 6 1 0 3 6

6 7 5 2 0 1 3 4 6 7 5 2 0 1 3 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 3 4 7 6 5 2 1 0 3 4 7 6 5 2 1
2 6 10 12 10 6 2 0 2 6 10 12 10 6 2 0
4 11 14 15 10 5 0 1 4 11 14 15 10 5 0 1
8 14 16 14 8 2 0 2 8 14 16 14 8 2 0 2
10 15 14 11 4 1 0 5 10 15 14 11 4 1 0 5
10 12 10 6 2 0 2 6 10 12 10 6 2 0 2 6
6 7 4 3 0 1 2 5 6 7 4 3 0 1 2 5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

旋轉 8

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 7 6 5 4 3 2 1 0 7 6 5 4 3 2 1
6 12 10 8 6 4 2 0 6 12 10 8 6 4 2 0
10 15 12 9 6 3 0 5 10 15 12 9 6 3 0 5
12 16 12 8 4 0 4 8 12 16 12 8 4 0 4 8
12 15 10 5 0 3 6 9 12 15 10 5 0 3 6 9
10 12 6 0 2 4 6 8 10 12 6 0 2 4 6 8
6 7 0 1 2 3 4 5 6 7 0 1 2 3 4 5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

五、 $n=7$時，additive frieze pattern的水平鏡射對稱（共$2^{\frac{7-1}{2}}=8$組）

水平鏡射 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 2 3 7 6 5 4 0 1 2 3 7 6 5 4 0

0 2 4 9 12 10 8 3 0 2 4 9 12 10 8 3 0

0 3 9 13 15 12 6 2 0 3 9 13 15 12 6 2 0

0 7 12 15 16 9 4 1 0 7 12 15 16 9 4 1 0

3 9 13 15 12 6 2 0 3 9 13 15 12 6 2 0 3

4 9 12 10 8 3 0 2 4 9 12 10 8 3 0 2 4

3 7 6 5 4 0 1 2 3 7 6 5 4 0 1 2 3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 2

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 2 4 7 6 5 3 0 1 2 4 7 6 5 3 0

0 2 5 10 12 10 7 2 0 2 5 10 12 10 7 2 0

0 4 10 14 15 11 5 1 0 4 10 14 15 11 5 1 0

1 8 13 16 15 8 3 0 1 8 13 16 15 8 3 0 1

4 10 14 15 11 5 1 0 4 10 14 15 11 5 1 0 4

5 10 12 10 7 2 0 2 5 10 12 10 7 2 0 2 5

4 7 6 5 3 0 1 2 4 7 6 5 3 0 1 2 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 3

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 3 5 7 6 4 2 0 1 3 5 7 6 4 2 0 1

0 3 7 11 12 9 5 1 0 3 7 11 12 9 5 1 0 3

1 6 12 15 14 9 3 0 1 6 12 15 14 9 3 0 1 6

3 10 15 16 13 6 1 0 3 10 15 16 13 6 1 0 3 10

6 12 15 14 9 3 0 1 6 12 15 14 9 3 0 1 6 12

7 11 12 9 5 1 0 3 7 11 12 9 5 1 0 3 7 11

5 7 6 4 2 0 1 3 5 7 6 4 2 0 1 3 5 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 4

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 1 4 5 7 6 3 2 0 1 4 5 7 6 3 2 0 1

0 4 8 11 12 8 4 1 0 4 8 11 12 8 4 1 0 4

2 7 13 15 13 8 2 0 2 7 13 15 13 8 2 0 2 7

4 11 16 15 12 5 0 1 4 11 16 15 12 5 0 1 4 11

7 13 15 13 8 2 0 2 7 13 15 13 8 2 0 2 7 13

8 11 12 8 4 1 0 4 8 11 12 8 4 1 0 4 8 11

5 7 6 3 2 0 1 4 5 7 6 3 2 0 1 4 5 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 5

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 3 6 7 5 4 1 0 2 3 6 7 5 4 1 0 2

1 4 8 12 11 8 4 0 1 4 8 12 11 8 4 0 1 4

2 8 13 15 13 7 2 0 2 8 13 15 13 7 2 0 2 8

5 12 15 16 11 4 1 0 5 12 15 16 11 4 1 0 5 12

8 13 15 13 7 2 0 2 8 13 15 13 7 2 0 2 8 13

8 12 11 8 4 0 1 4 8 12 11 8 4 0 1 4 8 12

6 7 5 4 1 0 2 3 6 7 5 4 1 0 2 3 6 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 6

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 4 6 7 5 3 1 0 2 4 6 7 5 3 1 0 2

1 5 9 12 11 7 3 0 1 5 9 12 11 7 3 0 1 5

3 9 14 15 12 6 1 0 3 9 14 15 12 6 1 0 3 9

6 13 16 15 10 3 0 1 6 13 16 15 10 3 0 1 6 13

9 14 15 12 6 1 0 3 9 14 15 12 6 1 0 3 9 14

9 12 11 7 3 0 1 5 9 12 11 7 3 0 1 5 9 12

6 7 5 3 1 0 2 4 6 7 5 3 1 0 2 4 6 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 3 5 6 7 4 2 1 0 3 5 6 7 4 2 1 0 3

2 7 10 12 10 5 2 0 2 7 10 12 10 5 2 0 2 7

5 11 15 14 10 4 0 1 5 11 15 14 10 4 0 1 5 11

8 15 16 13 8 1 0 3 8 15 16 13 8 1 0 3 8 15

11 15 14 10 4 0 1 5 11 15 14 10 4 0 1 5 11 15

10 12 10 5 2 0 2 7 10 12 10 5 2 0 2 7 10 12

6 7 4 2 1 0 3 5 6 7 4 2 1 0 3 5 6 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

水平鏡射 8

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 4 5 6 7 3 2 1 0 4 5 6 7 3 2 1 0 4

3 8 10 12 9 4 2 0 3 8 10 12 9 4 2 0 3 8

6 12 15 13 9 3 0 2 6 12 15 13 9 3 0 2 6 12

9 16 15 12 7 0 1 4 9 16 15 12 7 0 1 4 9 16

12 15 13 9 3 0 2 6 12 15 13 9 3 0 2 6 12 15

10 12 9 4 2 0 3 8 10 12 9 4 2 0 3 8 10 12

6 7 3 2 1 0 4 5 6 7 3 2 1 0 4 5 6 7

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

【評語】010047

本作品主要探討整數 Frieze patterns，共分為兩大部分。第一部份的主要結果是定理五，給出一個 Frieze Pattern 如果有鋸齒狀的 1，則若且唯若對應之多邊形三角剖分不存在三對角線所圍成的三角形。這的確是一個不錯的結果，在評審現場也給出新的嚴格證明。本作品第二部份研究 additive Frieze Patterns。此部份主要結果是定理六(Conjecture 1) 有關於 0 鋸齒性質的充要條件。這是一個相對困難的結果(對比第一部份定理五)，然而此結果卻是 Theorem 9 (1973) 已知結果的直接推論，因此貢獻度不高。本作品最後使用程式碼產生乘法與加法的一些 Frieze patterns，但是與全文的關聯性不高。