

# 2023 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

作品編號 010037

參展科別 數學

作品名稱 半正鑲嵌圖形中的捷徑問題

得獎獎項

就讀學校 臺北市立永春高級中學

指導教師 蔡春風

作者姓名 蘇靖洋

關鍵詞 半正鑲嵌、捷徑問題、方法數

## 作者簡介



我是蘇靖洋，目前就讀臺北市立永春高中三年級數理資優班。我從小就對數學有極大興趣，國中的時候加入資優班，第一次接觸專題，並且在當中學習到了許多東西。上高中後延續國中的基礎，學會了更多數學解題技巧、並思考更多數學的難題。我從高一就開始進行研究，在過程中學到了如何尋找文獻，也因此觸及到許多自己不曾接觸過的領域，了解前人做過的研究，並且沉浸在其中，未來會繼續朝向數學研究的道路發展。

## Abstract

This study originated from the problem of number calculation of minimum trails in square grid region, into Archimedean tilings, and k-law graphics which is composed of several regular polygons. All 8 kinds of Archimedean tilings and 2-law, 3-law graphics are included, namely, the Trihexagonal Tiling, the Truncated Hexagonal Tiling, the Snub Trihexagonal Tiling, the Rhombi Trihexagonal Tiling, the Truncated Trihexagonal Tiling, the Snub Square Tiling, the Elongated Square Tiling, and the Truncated Square Tiling.

In this study, we found that we can convert the shortcut problem in the Archimedean tilings to which in the rectangular checkerboard through appropriate transformation. We called it “shortcut isomorphic” since the both graphs have the same number of shortcuts. We derived all the general solutions, and also classified the form of the general solutions into two major types, then analyzed relation between Conway Notation and these types of general solutions.

And we also divide graphs into complex graphs and simple graphs, and explore some mathematical properties in depth by studying complex graphs.

## 摘要

本研究從在方格棋盤中走捷徑的問題出發，推廣至由多個相異正多邊形所組成的半正鑲嵌圖形和 k 律鑲嵌圖形，其沿格線走捷徑的方法數與最短路徑。研究中，我針對所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形及 2 律、3 律鑲嵌圖形的各一種圖形進行分類探討，包括截半六邊形、截角六邊形、扭稜六邊形、小斜方截半六邊形、大斜方截半六邊形、扭稜正方形、異扭稜正方形、截角正方形圖形。我將每種棋盤進行「轉正」，使它對應於唯一的矩形棋盤，達到「捷徑同構」，因而原本半正鑲嵌圖中的捷徑問題就等價於方格棋盤的捷徑問題。我將走捷徑方法數的通解分類，發現有組合數類、以及階差與指數混合兩大類，並分析康威表示法與通解的關係。並且我還將圖形分為複雜與單純，藉由研究複雜圖形來深入探討一些數學性質。

## 壹、研究動機

在學排列組合的時候有學到走捷徑的方法數的問題，其中走捷徑方法數的計算方式令我印象深刻。某次去餐廳吃飯時，無意間發現地板是由正方形與正八邊形所組成的，這些由兩種相異正多邊形所組成的鑲嵌圖形中，每個邊皆等長，因此我認為這類的圖形也一樣可以算出最短路徑的方法數及最短路徑的步數，所以進一步去做這個研究。

## 貳、研究目的

- 一、定義並分類各種鑲嵌圖形及棋盤。
- 二、探討所有半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數。
- 三、探討所有半正鑲嵌單純棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數。
- 四、探討所有半正鑲嵌複雜棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數。
- 五、將所有半正鑲嵌棋盤走捷徑方法數的通解形式分類，分析康威表示法與通解的關係。
- 六、探討部分  $k$  律鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數。
- 七、探討部分  $k$  律鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數。

## 參、文獻回顧

平面上，有許多正多邊形可以互相拼鋪，無縫填滿整個平面，稱為鑲嵌 (Dangelo & West, 2000)。首先，我要探討所有由兩種不同的正多邊形進行平面鑲嵌的半正鑲嵌圖形種類。我從文獻當中得知，半正鑲嵌圖形是指由多個正多邊形鑲嵌組成並且可密鋪於無限延伸平面的圖形，並且其中對於每個頂點，周遭的圖形規律總共只有一種 (張玉琪, 2009)，而有  $k$  種規律的圖形我稱為  $k$  律鑲嵌 (Wikipedia, 2022)，所以本文探討的是 1 律鑲嵌。

我在半正鑲嵌圖形的命名中，參考了康威所提出的康威多面體表示法(Wikipedia, 2022)，當中類似幾何變換的名稱例如：截角、截半、小斜方、大斜方、扭稜，這些都是用來說明圖形是從哪個正多邊形經過哪個操作得來的。康威表示法將 1 律鑲嵌圖形分為 8 大類，本研究窮舉這 8 大類圖形，進行細部分類討論，並計算研究目的中的通解。

## 肆、研究設備與器材

### 一、研究軟體與工具

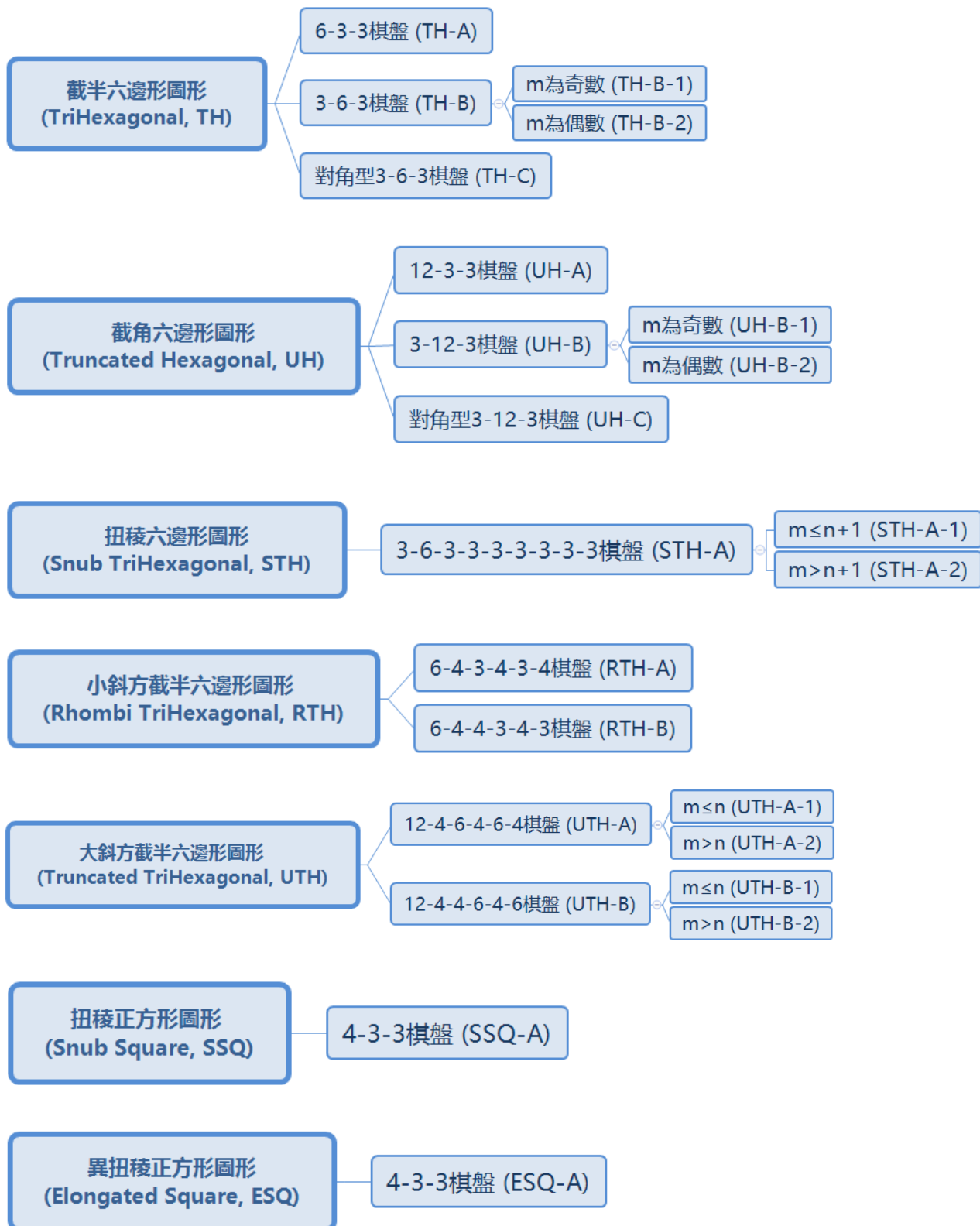
紙、筆、電腦、印表機、The Geometer's Sketchpad、GeoGebra。

### 二、研究流程與架構

本研究按照以下流程進行。

- (一) 定義各種類圖形的一單位。
- (二) 利用 The Geometer's Sketchpad 作圖，列印並裁剪。
- (三) 定義 A 點與 B 點的位置。
- (四) 實際拼湊圖形，並嘗試進行轉正的動作。
- (五) 藉由轉正後的圖形，求出最少步數與方法數的通解。
- (六) 將無法轉正的圖形，手動進行計算並從數值中分析規律。
- (七) 求出無法轉正的圖形的最少步數與方法數的通解。

本研究參考康威表示法，將所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形分類並取縮寫如下圖 1。



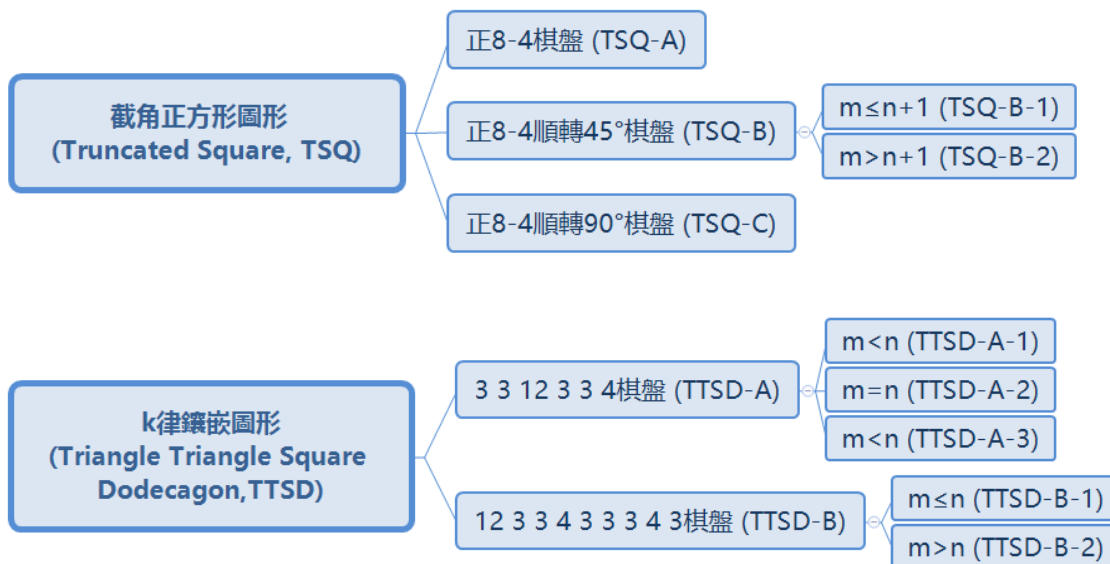


圖 1：研究架構與棋盤名稱定義圖

## 伍、研究過程

### 一、名詞定義

- (一) 棋盤大小  $m \times n$ ：我定義一個棋盤由多個一單位圖形構成，並且該棋盤的名稱與一單位圖形的名稱相同，而往右  $m$  個單位圖形往上  $n$  個單位圖形的棋盤為  $m \times n$  的棋盤，下圖 2 為該棋盤的一單位圖形，則下圖 3 即為  $4 \times 2$  的棋盤。

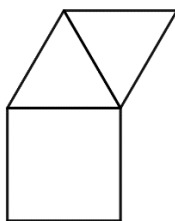


圖 2：棋盤的一單位圖形

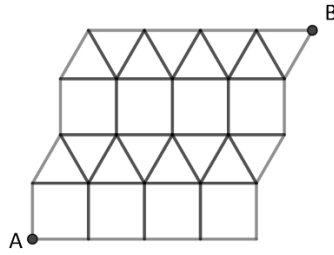


圖 3：一個 $4 \times 2$ 的棋盤

- (二) 各圖形的 A、B 點：各圖形當中 A 點的位置都為先找最下面的邊，在從這些邊上在找最左邊的點。而 B 點的位置都為先找最上面的邊，在從這些邊上找最右邊的點，但當中有八個例外分別是 UH-A、UH-B、UH-C、UTH-A、ESQ-A、TSQ-C、TTSD-A、TTSD-B，由於篇幅考量上述八個棋盤的 A、B 點將在下面的研究結果中呈現。
- (三) 步數：從 A 點走到 B 點的過程中所經過的邊長數。
- (四) 函數  $S(m, n)$ ：在一圖形的  $m \times n$  棋盤中，從 A 點走到 B 點的最少步數。
- (五) 函數  $M(m, n)$ ：在一圖形的  $m \times n$  棋盤中，從 A 點走捷徑到 B 點的方法數。
- (六) 轉正：將半正鑲嵌棋盤與方格棋盤進行格線的一一對應，使得從 A 到 B 走捷徑的方法數不變（但邊長有可能改變）。
- (七) 捷徑同構：指經過轉正後，此半正鑲嵌棋盤與其對應的方格棋盤之間的關係。
- (八) 半正鑲嵌單純圖形、棋盤：以該圖形為一單位圖形所構成的棋盤，經由轉正後方法數通解計算方式與方格棋盤方法數通解計算方式相同的半正鑲嵌圖形，而以該圖形為一單位圖形所構成的棋盤也稱為半正鑲嵌單純棋盤。
- (九) 半正鑲嵌複雜圖形、棋盤：以該圖形為一單位圖形所構成的棋盤，經由轉正後方法數通解計算方式與方格棋盤方法數通解計算方式相異的半正鑲嵌圖形，而以該圖形為一單位圖形所構成的棋盤也稱為半正鑲嵌複雜棋盤。


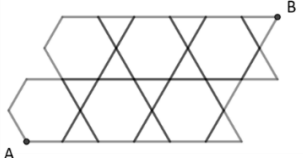
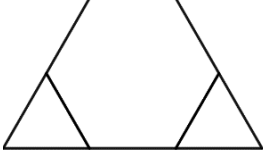
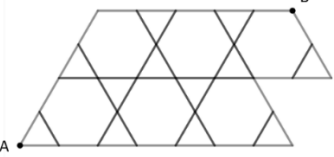
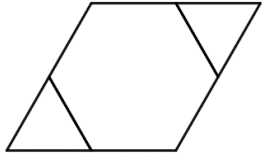
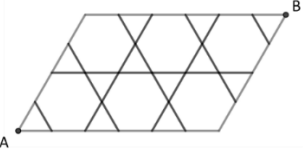
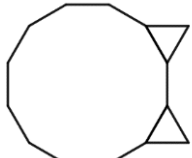
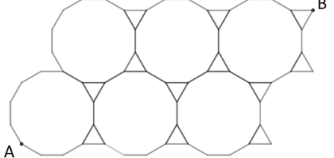
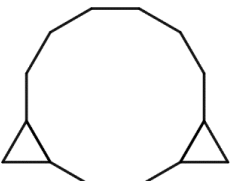
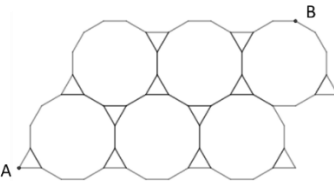
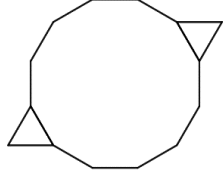
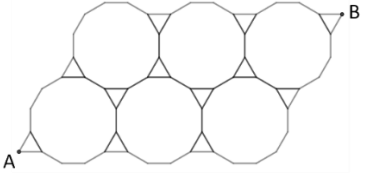
## 二、定義並分類各種鑲嵌圖形及棋盤

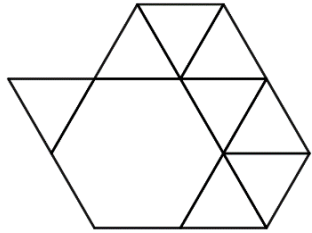
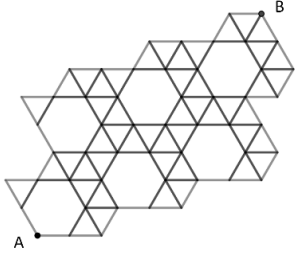
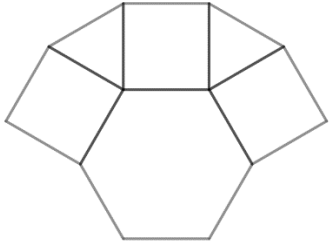
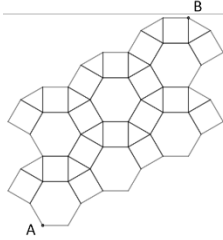
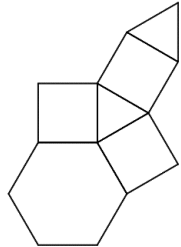
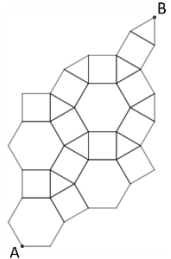
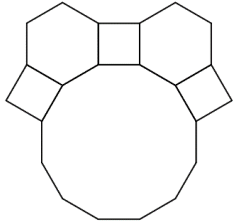
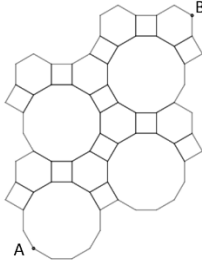
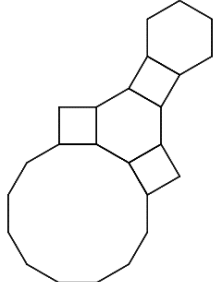
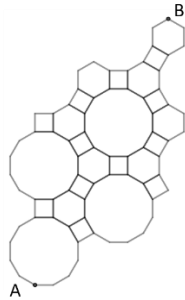
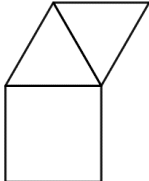
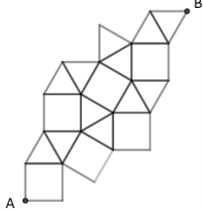
首先，我依序定義 TH-A、TH-B、TH-C、UH-A、UH-B、UH-C、STH-A、RTH-A、RTH-

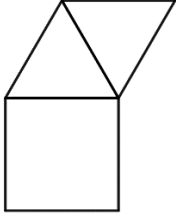
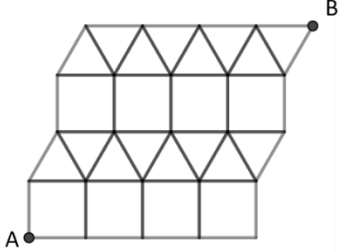
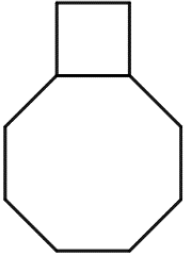
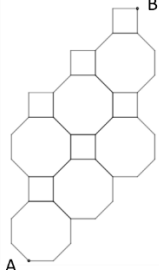
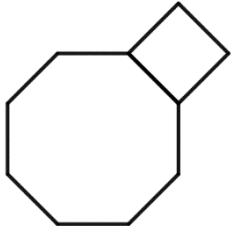
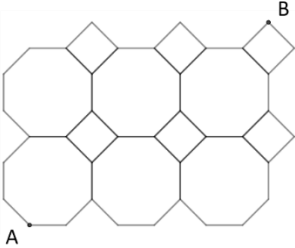
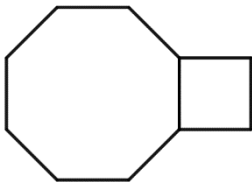
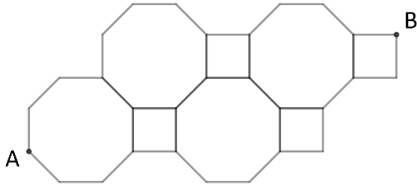
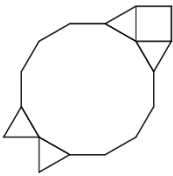
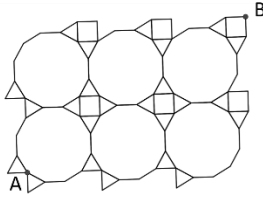
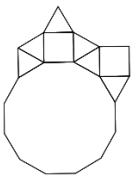
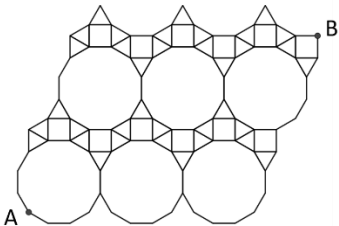


B、UTH-A、UTH-B、SSQ-A、ESQ-A、TSQ-A、TSQ-B、TSQ-C、TTSD-A、TTSD-B 的一單位圖形和棋盤樣貌，如下表 1 所示。

表 1：各棋盤的一單位圖形和棋盤樣貌

名稱	一單位圖形	棋盤樣貌
TH-A		
TH-B		
TH-C		
UH-A		
UH-B		
UH-C		

STH-A		
RTH-A		
RTH-B		
UTH-A		
UTH-B		
SSQ-A		

ESQ-A		
TSQ-A		
TSQ-B		
TSQ-C		
TTSD-A		
TTSD-B		

三、探討半正鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數

(一) TH-A 棋盤

TH-A 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，且 $S(1,1) = 3$ ，所以得到 $S(m,n) = 2m + 2n - 1$ 。

(二) TH-B-1 棋盤

TH-B-1 棋盤在 $m$ 為奇數時棋盤右邊會不完整，而我實際嘗試後知道， $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，且 $S(1,1) = 3$ ，所以得到 $S(m,n) = 2m + 2n - 1$ 。

(三) TH-B-2 棋盤

TH-B-2 棋盤在 $m$ 為偶數時棋盤右邊是完整的，並且 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，且 $S(2,1) = 6$ ，所以其通解為 $S(m,n) = 2m + 2n$ 。

(四) TH-C 棋盤

TH-C 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，且 $S(1,1) = 4$ ，所以得到 $S(m,n) = 2m + 2n$ 。

(五) UH-A 棋盤

UH-A 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 6$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 2$ 。

(六) UH-B-1 棋盤

UH-B-1 棋盤在 $m$ 為奇數時棋盤右邊的樣貌不完整，而我實際嘗試後知道， $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 3$ 。

#### (七) UH-B-2 棋盤

UH-B-1 棋盤在 $m$ 為偶數時棋盤右邊是完整，並且 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(2,1) = 11$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 1$ 。

#### (八) UH-C 棋盤

UH-C 棋盤在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+4，且 $S(1,1) = 7$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 4n - 1$ 。

#### (九) STH-A-1 棋盤

透過實際操作可以發現 STH-A 棋盤在 $m = n + 1$ 會出現一個分界線，而 $m < n + 1$ 跟 $m = n + 1$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+2，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+3，且 $S(1,1) = 4$ ，所以得到 $S(m,n) = 2m + 3n - 1$ 。

#### (十) STH-A-2 棋盤

同上 STH-A 棋盤在 $m = n + 1$ 會出現一個分界線，而 $m > n + 1$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+3，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+2，且 $S(3,1) = 9$ ，所以得到 $S(m,n) = 3m + 2n - 2$ 。

(十一) RTH-A 棋盤

RTH-A 棋盤的最少步數在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+3，且 $S(1,1) = 4$ ，所以得到 $S(m,n) = 3m + 3n - 2$ 。

(十二) RTH-B 棋盤

RTH-A 棋盤的最少步數在 $m$ 跟 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+3，且 $S(1,1) = 6$ ，所以得到 $S(m,n) = 3m + 3n$ 。

(十三) UTH-A-1 棋盤

透過實際操作可以發現 UTH-A 棋盤在 $m = n$ 會出現一個分界線，而 $m < n$ 跟 $m = n$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+4，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+6，且 $S(1,1) = 8$ ，所以得到 $S(m,n) = 4m + 6n - 2$ 。

(十四) UTH-A-2 棋盤

同上 UTH-A 棋盤在 $m = n$ 會出現一個分界線，而 $m > n$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+6，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+4，且 $S(2,1) = 14$ ，所以得到 $S(m,n) = 6m + 4n - 2$ 。

(十五) UTH-B-1 棋盤

透過實際操作可以發現 UTH-B 棋盤在 $m = n$ 會出現一個分界線，而 $m < n$ 跟 $m = n$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+4，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+6，且 $S(1,1) = 11$ ，所

以得到 $S(m, n) = 4m + 6n + 1$ 。

#### (十六) UTH-B-2 棋盤

同上 UTH-B 棋盤在 $m = n$ 會出現一個分界線，而 $m > n$ 時，當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+6，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+4，且 $S(2,1) = 15$ ，所以得到 $S(m, n) = 6m + 4n - 1$ 。

#### (十七) SSQ-A 棋盤

SSQ-A 棋盤在 $m$ 為奇數和偶數時棋盤右邊的樣貌會不一樣，所以經由研究後得到數據，觀察數據發現，當 $n$ 加一時，其最少步數都會跟著+2，而 $m$ 加一時，會呈現+1跟+2的情況輪流出現，所以我決定將 $m$ 為奇數和 $m$ 為偶數時的情況分別討論，所以可得 $m$ 為奇數時其通解為 $S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - \frac{1}{2}$ ，而 $m$ 為偶數時其通解為 $S(m, n) = \frac{3}{2}m + 2n - 1$ 。

#### (十八) ESQ-A 棋盤

ESQ-A 棋盤當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+1，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+2，且 $S(1,1) = 3$ ，所以其最少步數通解為 $S(m, n) = m + 2n$

#### (十九) TSQ-A 棋盤

TSQ-A 棋盤當 $m$ 加一時，最短路徑的步數會+3，而 $n$ 加一時，最短路徑的步數會+4且 $S(1,1) = 5$ ，所以得到 $S(m, n) = 3m + 4n - 2$ 。

#### (二十) TSQ-B-1 棋盤

透過實際操作可以發現 TSQ-B 棋盤在  $m = n + 1$  會出現一個分界線，而  $m < n + 1$  跟  $m = n + 1$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+1，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+3，且  $S(1,1) = 5$ ，所以得到  $S(m,n) = m + 3n + 1$ 。

#### (二十一) TSQ-B-2 棋盤

同上 TSQ-B 棋盤在  $m = n + 1$  會出現一個分界線，而  $m > n + 1$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+3，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+1，且  $S(3,1) = 9$ ，所以得到  $S(m,n) = 3m + n - 1$ 。

#### (二十二) TSQ-C 棋盤

TSQ-C 棋盤當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+4，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+3 且  $S(1,1) = 5$ ，所以得到  $S(m,n) = 4m + 3n - 2$ 。

### 四、探討所有半正鑲嵌單純棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數

#### (一) TH-A 棋盤

TH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 4 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤的走捷徑的方法數算法，就等價於方格棋盤的方法數算法了，接著我觀察  $m$ 、 $n$  方向每加一單位的圖形規律，得出通解  $M(m,n) = C_n^{m+n-1}$ 。



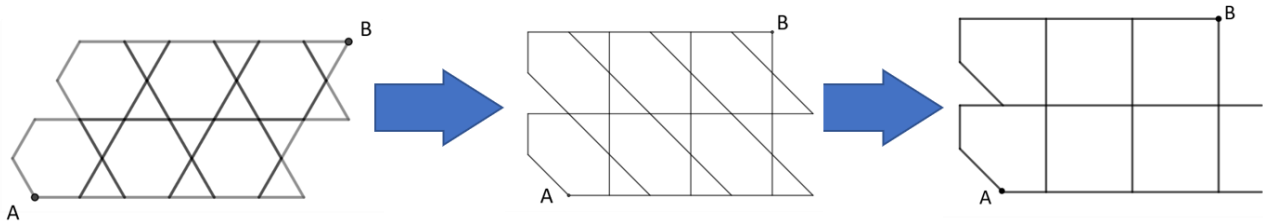


圖 4：TH-A 棋盤的轉正過程

## (二) TH-B-1 棋盤

同樣的 TH-B-1 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而當中某些斜線的有無不影響方法數，且  $m$  為奇數時棋盤右邊會不完整，導致走捷徑時完全不會經過右邊的圖形，所以我將右邊的棋盤全部去掉，則可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 5 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤的走捷徑的方法數算法，就等價於方格棋盤的方法數算法了，接著我觀察  $m$ 、 $n$  方向每加一單位的圖形規律，得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

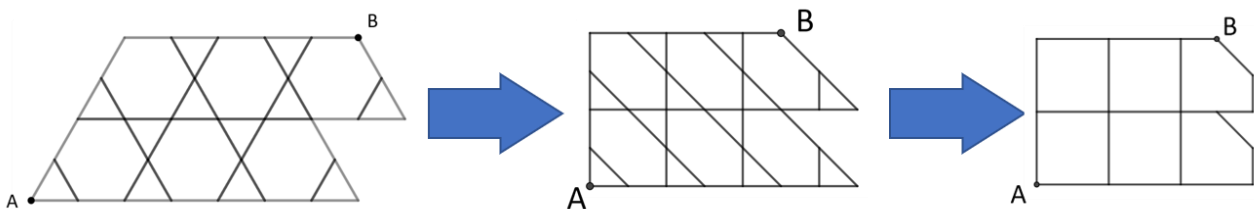


圖 5：TH-B-1 棋盤的轉正過程

## (三) TH-B-2 棋盤

同樣的 TH-B-2 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 6 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤在  $m$  為偶數時，實際上就是一個完整的方格棋盤，得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

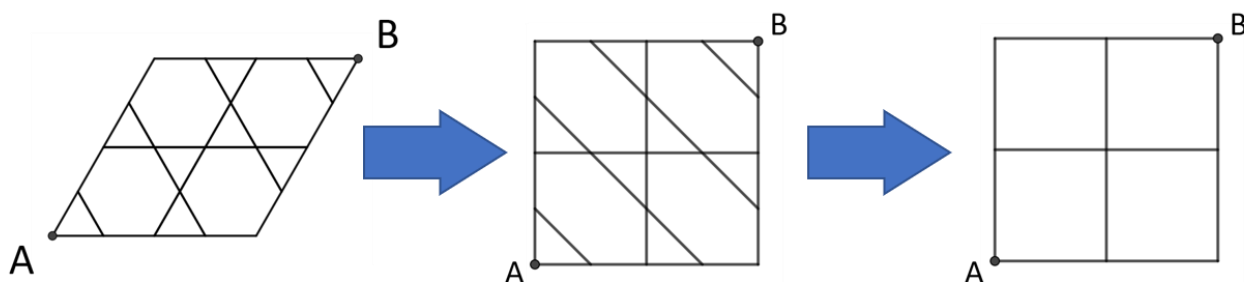


圖 6：TH-B-2 棋盤的轉正過程

#### (四) TH-C 棋盤

同樣的 TH-C 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 7 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

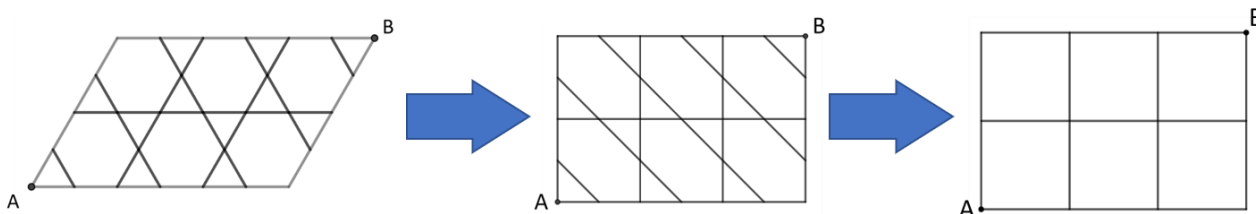


圖 7：TH-C 棋盤的轉正過程

#### (五) UH-A 棋盤

經由研究後我發現 UH-A 棋盤的方法數問題與 TH-A 棋盤的方法數問題相似，因為兩棋盤的差異只有正六邊形和正十二邊形而已，且三角形擺放方式遵從一樣的規則，所以 UH-A 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 8 所示，與 TH-A 棋盤經由轉正後

的棋盤實際上只有長度不同，但棋盤的結構是相同的，所以 UH-A 棋盤的方法數通解就跟 TH-A 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

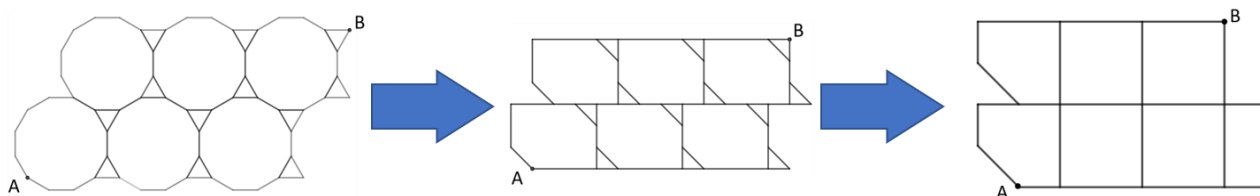


圖 8：UH-A 棋盤的轉正過程

### (六) UH-B-1 棋盤

同上我發現 UH-B-1 棋盤的方法數問題與 TH-B-1 棋盤的方法數問題相似，UH-B-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 9 所示，與 TH-B-1 棋盤經由轉正後的棋盤實際上只有長度不同，但棋盤的結構是相同的，所以 UH-B-1 棋盤的方法數通解就跟 TH-B-1 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n-1}$ 。

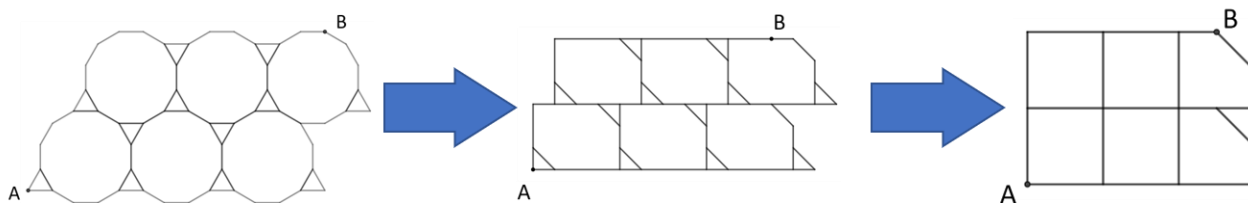


圖 9：UH-B-1 棋盤的轉正過程

### (七) UH-B-2 棋盤

同上 UH-B-2 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 10 所示，UH-

B-2 棋盤的方法數通解就跟 TH-B-2 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

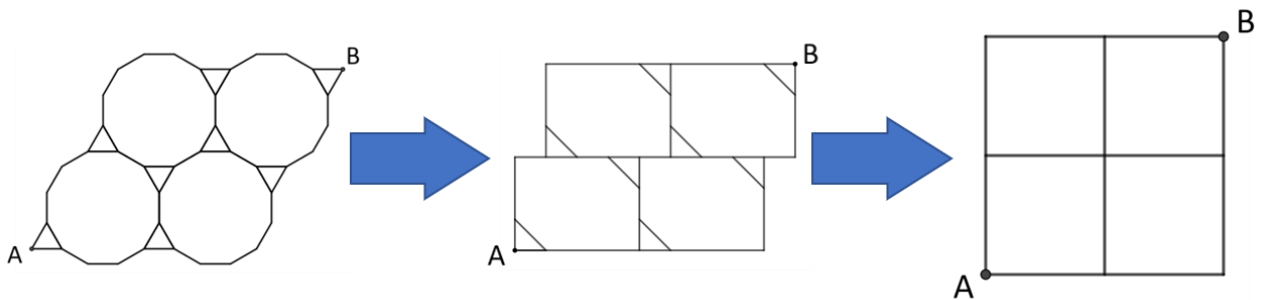


圖 10：UH-B-2 棋盤的轉正過程

### (八) UH-C 棋盤

同上 UH-C 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線與轉彎處的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 11 所示，UH-C 棋盤的方法數通解就跟 TH-C 棋盤的方法數通解一樣是  $M(m, n) = C_n^{m+n}$ 。

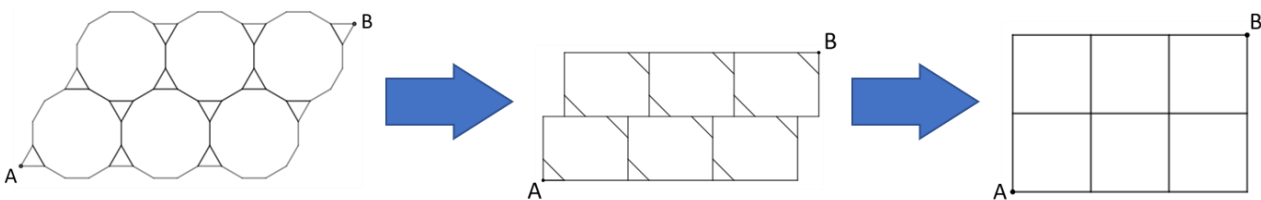


圖 11：UH-C 棋盤的轉正過程

### (九) RTH-A 棋盤

RTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤，而當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我可以將它拉到同一水平線上，並且刪掉旁邊走捷徑不會經過的地方，

則再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 12 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解 $M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n-1}$ 。

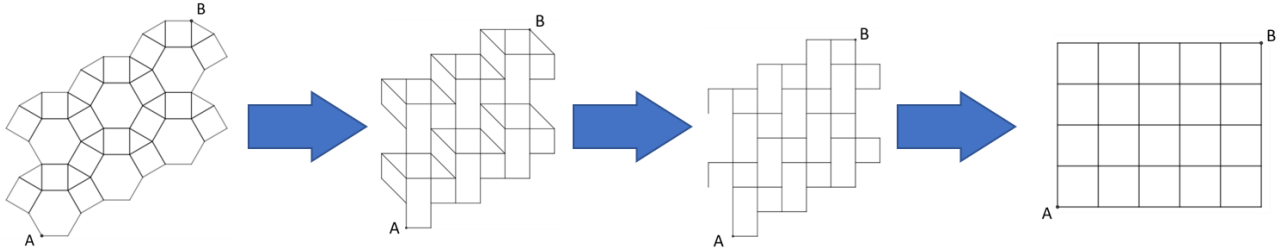


圖 12：RTH-A 棋盤的轉正過程

(十) RTH-B 棋盤

同上 RTH-B 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤，而當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我可以將它拉到同一水平線上，並且刪掉旁邊走捷徑不會經過的地方，則再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 13 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解 $M(m, n) = C_{2n}^{2m+2n}$ 。

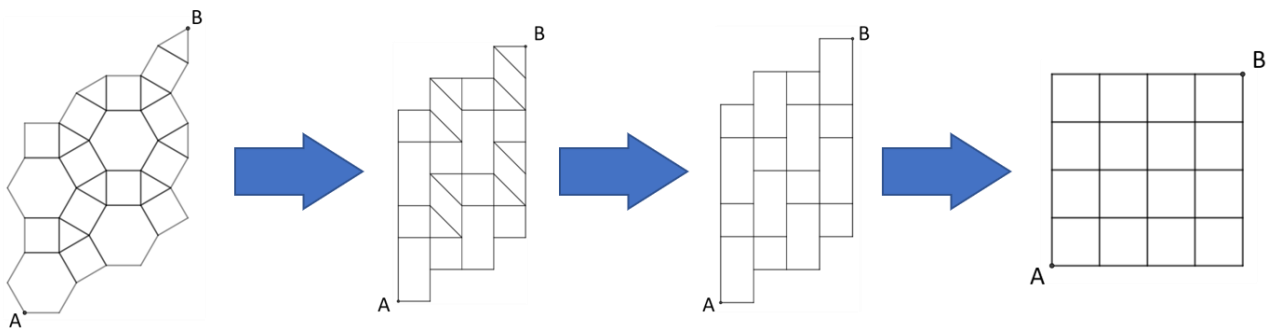


圖 13：RTH-B 棋盤的轉正過程

(十一) ESQ-A 棋盤

ESQ-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而當中某些斜線的有無不影響方法數，所以我可以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 14 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上就是一個完整的方格棋盤，所以得出通解 $M(m, n) = C_{2n}^{m+2n}$ 。

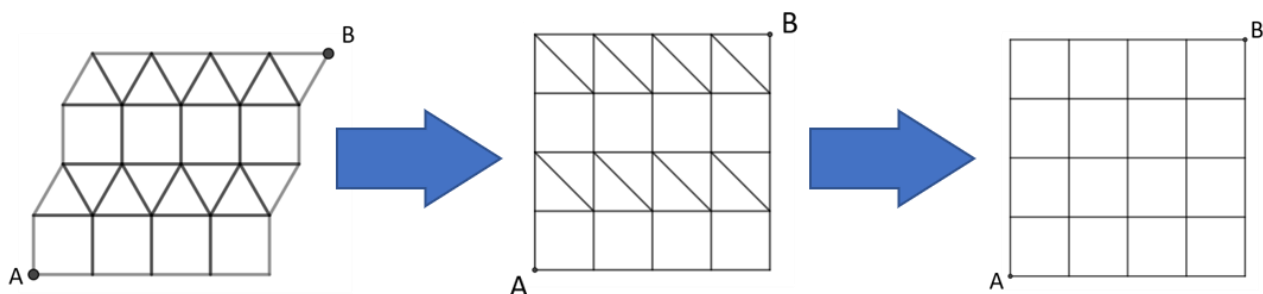


圖 14：ESQ-A 棋盤的轉正過程

## 五、探討所有半正鑲嵌複雜棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數

### (一) STH-A-1 棋盤

STH-A-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 15 所示，而可以發現當中會有走斜線的情況，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據後觀察圖形規律。

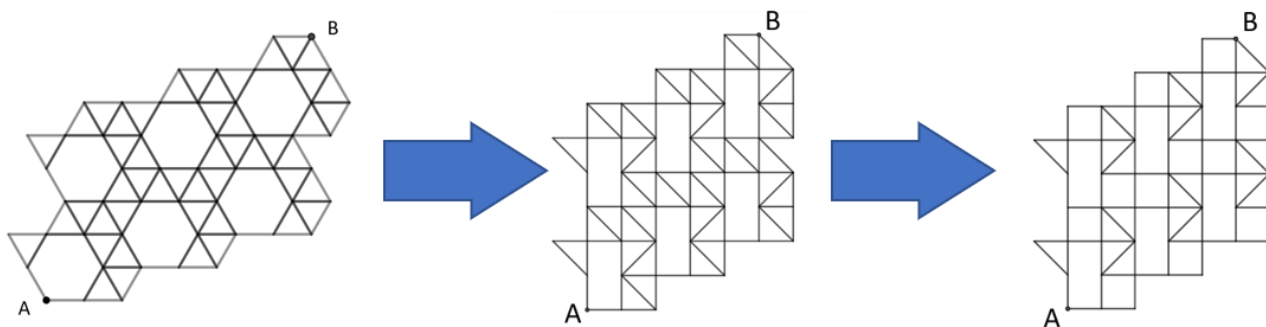


圖 15：STH-A-1 棋盤的轉正過程

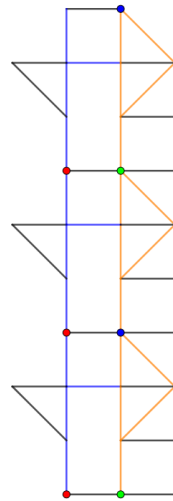


圖 16：STH-A-1 棋盤的圖形規律

觀察上圖 16，上圖中藍線部分恆為 1，所以單一層的紅點到藍點會使得方法數加二，而橘線部分由於從綠點到藍點中間會有走斜線的情況發生，所以會使得方法數加綠點的累積方法數的兩倍，得到遞迴式  $M(1, n) = 2M(1, n - 1) + 2, (n \geq 2)$  則經由計算得到通解  $M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$ ：

$$M(1,2) + 2 = 2(M(1,1) + 2) = 2 \times 6$$

$$M(1,3) + 2 = 2(M(1,2) + 2)$$

$$M(1,4) + 2 = 2(M(1,3) + 2)$$

⋮

$$M(1, n) + 2 = 2(M(1, n - 1) + 2)$$

×

---


$$M(1, n) + 2 = 2^{n-1} \times 6$$

$$\Rightarrow M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$$

得到數據後觀察圖形規律得到通解為  $M(n + 1, n) = 2^n$ ，且同時得到遞迴式  $M(n, n) = (n + 1) \times M(n + 1, n) + (n - 1) \times M(n, n - 1) (n \geq 1, n \in N)$ ，而因為  $M(n + 1, n) = 2^n$ ，則通

解為 $M(n, n) = (n + 1) \times 2^n + (n - 1) \times 2^{n-1}$ 。

## (二) STH-A-2 棋盤

同上 STH-A-1 棋盤經過捷徑同構轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 17 所示，發現當中會有走斜線的情況，所以我再算方法數的時候，無法仿照方格棋盤的方式，所以我實際去進行計算得到數據後觀察圖形規律得到遞迴式 $M(m + 2, 1) = 5M(m + 1, 1) - 6M(m, 1), (m \geq 2)$ ，而我利用特徵方程式的方式求出通解（葉東進，2013），得到通解 $M(m, 1) = 2(3^{m-1} - 2^{m-1}), (m \geq 2)$ ：

$$x^2 = 5x - 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \vee 2$$

$$\Rightarrow M(m + 2, 1) = b_1 \times 3^m + b_2 \times 2^m$$

$$m = 2, m = 3 \text{ 代入 } M(m + 2, 1) = b_1 \times 3^m + b_2 \times 2^m \text{ 得}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(4, 1) = 9b_1 + 4b_2 = 38 \\ M(5, 1) = 27b_1 + 8b_2 = 130 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 6 \\ b_2 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(m + 2, 1) = 6 \times 3^m - 4 \times 2^m$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 6 \times 3^{m-2} - 4 \times 2^{m-2}$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 2 \times 3^{m-1} - 2^m$$

$$\Rightarrow M(m, 1) = 2(3^{m-1} - 2^{m-1}), (m \geq 2)$$



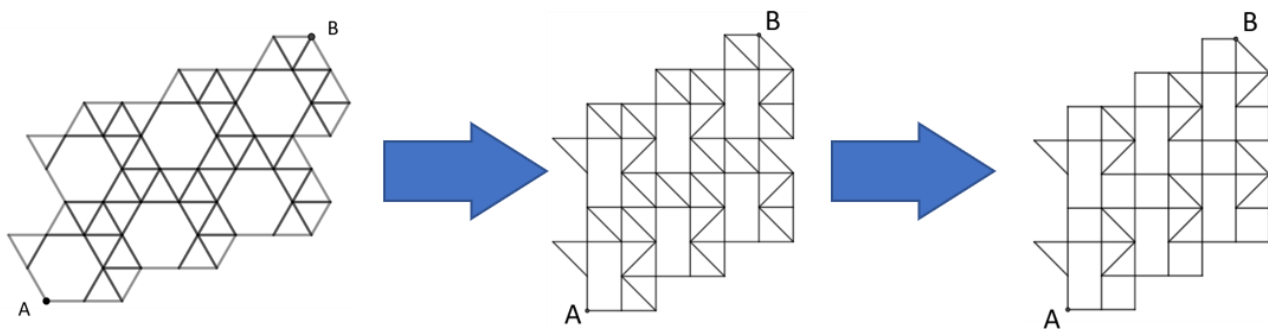


圖 17：STH-A-2 棋盤的轉正過程

### (三) UTH-A-1 棋盤

UTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 18 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我發現需要分成  $m \leq n$  及  $m > n$  討論，我實際計算得到數據後觀察圖形規律得到遞迴式  $M(1, n + 1) = 3M(1, n) + 3^{n-1} \times 4, (n \geq 1)$ 。

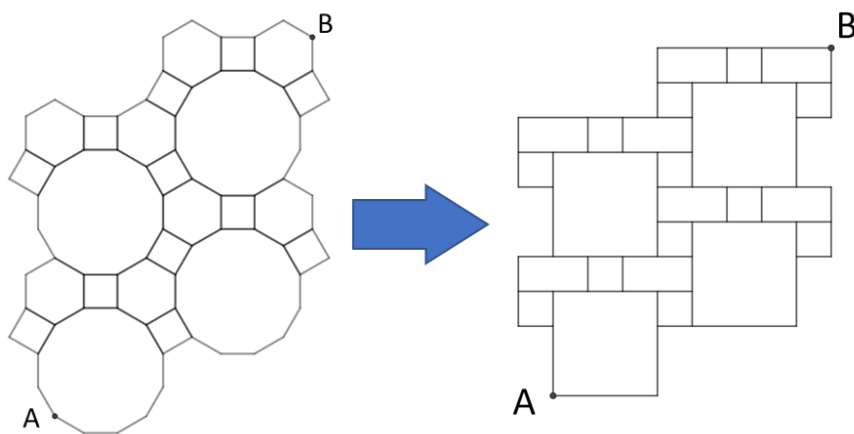


圖 18：UTH-A-1 棋盤的轉正過程

### (四) UTH-A-2 棋盤

同上 UTH-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 19 所示，而經過轉正後我

可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我發現需要分成 $m \leq n$ 及 $m > n$ 討論，我實際計算得到數據後觀察圖形規律得到遞迴式 $M(m + 2, 1) = 6M(m + 1, 1) - M(m, 1) - 4, (m \geq 1)$ 。

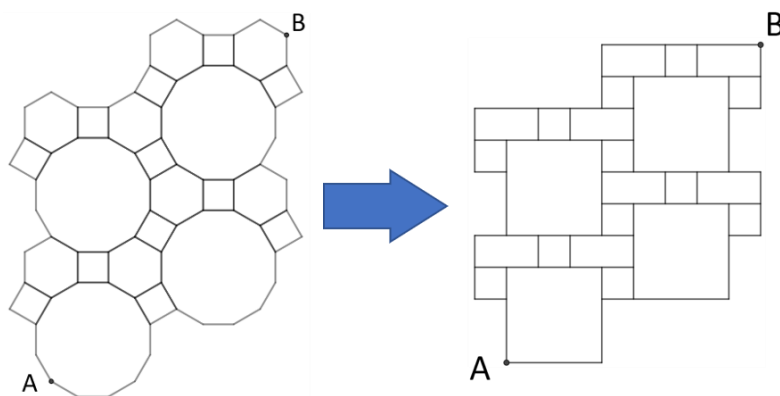


圖 19：UTH-A-2 棋盤的轉正過程

#### (五) UTH-B-1 棋盤

UTH-B 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下 20 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我發現需要分成 $m \leq n$ 及 $m > n$ 討論，但目前我還沒有得到推出通解。

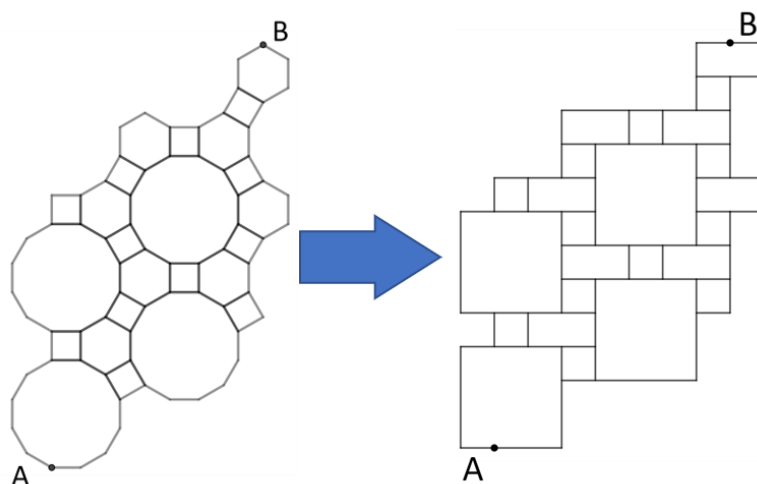


圖 20：UTH-B-1 棋盤的轉正過程

(六) UTH-B-2 棋盤

同上 UTH-B 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤如下圖 21 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我發現需要分成  $m \leq n$  及  $m > n$  討論，而我實際去進行計算得到數據，接著再列出前後兩項的差，得到數據後觀察圖形規律得到遞迴式  $34(M(m+3,1) - M(m+2,1)) = (M(m+5,1) - M(m+4,1)) + (M(m+1,1) - M(m,1))$ , ( $m \geq 1$ )。用特徵方程式的方式求出通解（葉東進，2013），得到通解  $M(m+1,1) - M(m,1) = (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^m + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^m$ , ( $m \geq 2$ ) ( $M(1,1) = 9$ )：

$$34(M(m+3,1) - M(m+2,1)) = (M(m+5,1) - M(m+4,1)) + (M(m+1,1) - M(m,1))$$

$$\Rightarrow (M(m+5,1) - M(m+4,1)) = 34(M(m+3,1) - M(m+2,1)) - (M(m+1,1) - M(m,1))$$

$$x^4 = 34x^2 - 1$$

$$\Rightarrow x^4 - 34x^2 + 1 =$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 4}}{2} = 17 \pm 2\sqrt{72}$$

$$\Rightarrow x = (3 + \sqrt{8})V(3 - \sqrt{8})V(-\sqrt{8} - 3)V(\sqrt{8} - 3)$$

$$\Rightarrow (M(m+1,1) - M(m,1)) = b_1(3 + \sqrt{8})^m + b_2(3 - \sqrt{8})^m + b_3(-\sqrt{8} - 3)^m + b_4(\sqrt{8} - 3)^m$$

$m = 1, m = 2, m = 3, m = 4$  代入上式得

$$\Rightarrow \begin{cases} M(2,1) - M(1,1) = b_1(3 + \sqrt{8})^1 + b_2(3 - \sqrt{8})^1 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^1 + b_4(\sqrt{8} - 3)^1 = 48 \\ M(3,1) - M(2,1) = b_1(3 + \sqrt{8})^2 + b_2(3 - \sqrt{8})^2 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^2 + b_4(\sqrt{8} - 3)^2 = 280 \\ M(4,1) - M(3,1) = b_1(3 + \sqrt{8})^3 + b_2(3 - \sqrt{8})^3 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^3 + b_4(\sqrt{8} - 3)^3 = 1632 \\ M(5,1) - M(4,1) = b_1(3 + \sqrt{8})^4 + b_2(3 - \sqrt{8})^4 + b_3(-\sqrt{8} - 3)^4 + b_4(\sqrt{8} - 3)^4 = 9512 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) + \sqrt{8}(b_1 + b_3 - b_2 - b_4) = 48 \\ 17(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 6\sqrt{8}(b_1 + b_4 - b_2 - b_3) = 280 \\ 99(b_1 + b_2 - b_3 - b_4) + 35\sqrt{8}(b_1 + b_4 - b_2 - b_3) = 1632 \\ 577(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 204\sqrt{8}(b_1 + b_3 - b_2 - b_4) = 9512 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b_1 + b_2 - b_3 - b_4) = 8 \\ (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 8 \\ (b_1 + b_4 - b_2 - b_3) = 6\sqrt{2} \\ (b_1 + b_3 - b_2 - b_4) = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 4 + 3\sqrt{2} \\ b_2 = 4 - 3\sqrt{2} \\ b_3 = 0 \\ b_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(m+1, 1) - M(m, 1) = (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^m + (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^m$$

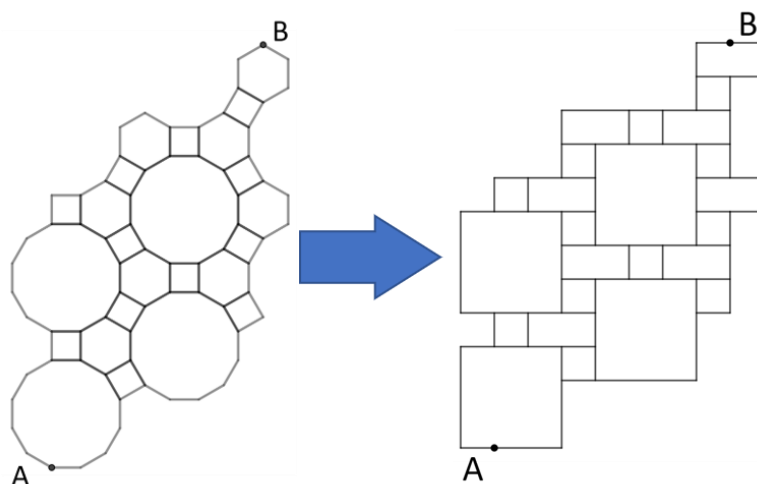


圖 21：UTH-B-2 棋盤的轉正過程

### (七) SSQ-A 棋盤

SSQ-A 棋盤經過捷徑同構的轉正成的類方格棋盤，以及因當中某些斜線和直線的有無不影響方法數，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成方格棋盤如下圖 22 所示，而可以發現該轉正後的棋盤是不完整的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算，得到數據後觀察圖形規律得到在  $m$  為奇數時遞迴式  $M(m, n) = 2M(m-1, n) + M(m, n-1)$ ， $m$  為奇數時遞迴式  $M(m, n) = M(m-1, n) + M(m, n-1)$ ，並且發現在  $m$  為奇數時隨著  $m$  變大， $m$  固定  $n$  變動的數列會呈現  $m$  階差為  $2^{\frac{m+1}{2}}$  的數列，且也發現在  $m$  為偶數時隨著  $m$  變大， $m$  固定  $n$  變動的數列會呈現  $m$  階差為  $2^{\frac{m}{2}}$  的數列，綜合上述情況並且參考《藉題

發揮，得意忘形》(葉東進，2013)，得到下列通解形式。

$$\begin{cases} M(1, n) = 2n + 1 \\ M(m, n) = \left(\frac{3}{2} - (-1)^m \times \frac{1}{2}\right) \times \sum_{k=1}^n M(m-1, k) \end{cases}$$

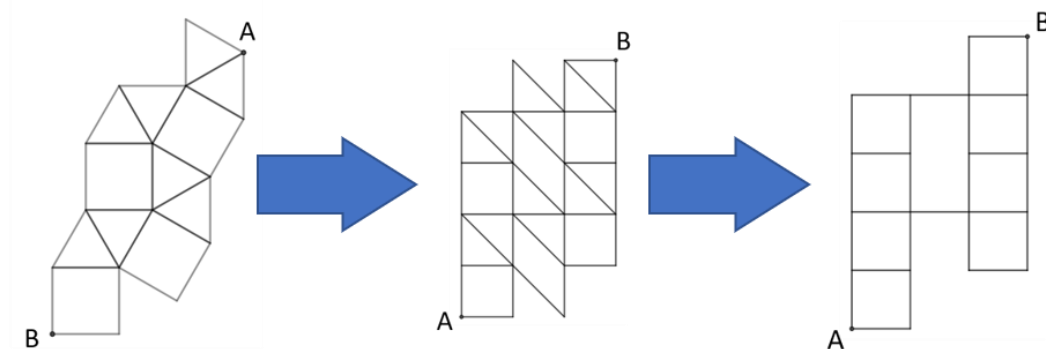


圖 22：SSQ-A 棋盤的轉正過程

#### (八) TSQ-A 棋盤

TSQ-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我可以將它拉到同一水平線上，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 23 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據如下表 2 所示。

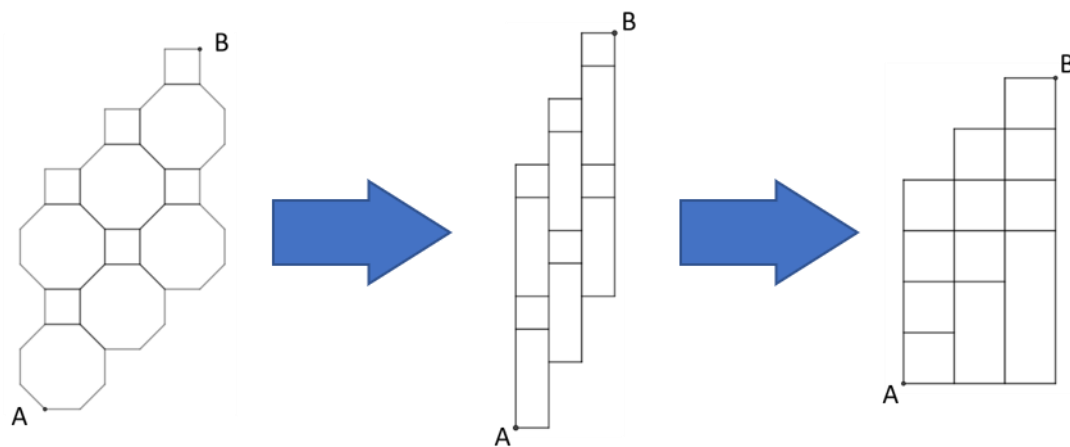


圖 23：TSQ-A 棋盤的轉正過程

表 2：TSQ-A 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 1$	3	7	15	31
$n = 2$	5	18	58	179
$n = 3$	7	33	133	497
$n = 4$	9	52	248	968
$n = 5$	11	75	411	1591
$n = 6$	13	102	630	2381

觀察上表發現 $m = 1$ 時 $M(1, n) = 2n + 1$ ，還有 $m = 2$ 時遞迴式 $M(2, n) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + n$ ，也發現 $m$ 固定 $n$ 變動的數列會呈現 $m$ 階差為 $2^m$ 的數列，但目前我並沒有得到一般式或是遞迴關係，所以並不能求得任意 $m \times n$ 棋盤的方法數。

### (九) TSQ-B-1 棋盤

經由研究後我發現，我無法藉由適當的方式將 TSQ-B 棋盤轉正成方格棋盤，所以我實際去進行計算得到數據，並且去觀察當中的圖形規律，而在觀察研究數據後我發現其在 $m$ 、 $n$ 滿

足( $m = n + p, p \in N$ )或是( $n = m + p, p \in N$ )時，他的方法數會呈現等差數列排列，這就代表只要我有 $n = 1$ 、 $n = 2$ 、 $m = 1$ 、 $m = 2$ 的通解，就可以藉由相減來獲得公差來得到所求的值。

以下是在 $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$ 其中一值固定情況下 TSQ-B-1 棋盤的方法數的通解，如下表 3 所示。

表 3：TSQ-B-1 棋盤在 $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$ 時的方法數通解

	通解
$m = 1$	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$
$m = 2$	$M(2, n) = 2^n(n - 1) + 1$
$m = n + 1$	$M(n + 1, n) = 1$

而因為在 $m$ 跟 $n$ 同時+1時，每一次的方法數皆會成等差，其 $n$ 、 $m$ 同時變動的方法數的公差之通解就以 $m = 1$ 、 $m = 2$ 時的通解為基礎，當 $m < n$ ，其 $n$ 、 $m$ 同時變動的方法數的公差之通解就是 $2^{n+1}(n - 1) + 2, (n \geq 1)$ ，為方便理解，我列出其部分方法數及公差如下表 4 所示。

表 4：TSQ-B-1 部分方法數及公差舉例

	$M(n, n)$	$M(n, n + 1)$	$M(n, n + 2)$
公差	$n = 1$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 2	$n = 2$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 10	$n = 3$ 代入 $2^{n+1}(n - 1) + 2$ 得公差為 34
第一項	$n = 1$ 代入 $M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 3	$n = 2$ 代入 $M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 7	$n = 3$ 代入 $M(1, n) = 2^{n+1} - 1$ 得 第一項為 15
$n = 1$	$M(1, 1) = 3$	$M(1, 2) = 7$	$M(1, 3) = 15$
$n = 2$	$M(2, 2) = 5$	$M(2, 3) = 17$	$M(2, 4) = 49$

$n = 3$	$M(3,3) = 7$	$M(3,4) = 27$	$M(3,5) = 83$
---------	--------------	---------------	---------------

(十) TSQ-B-2 棋盤

同上經由研究後我發現，我無法藉由適當的方式將 TSQ-B 棋盤轉正成方格棋盤，所以我實際去進行計算得到數據，並且去觀察當中的圖形規律，而在觀察研究數據後我發現其在  $m$ 、 $n$  滿足  $(m = n + p, p \in N)$  或是  $(n = m + p, p \in N)$  時，他的方法數會呈現等差數列排列，這就代表只要我有  $n = 1$ 、 $n = 2$ 、 $m = 1$ 、 $m = 2$  的通解，就可以藉由相減來獲得公差來得到所求的值。

以下是在  $n = 1$ 、 $n = 2$  其中一值固定情況下 TSQ-B-2 棋盤的方法數的通解，如下表 5 所示。

表 5：TSQ-B-2 棋盤在  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的方法數通解

	通解
$n = 1$	$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1, (m \geq 2)$
$n = 2$	$M(m, 2) = 2^{m-2}(m - 3) + 1, (m \geq 3)$

而因為在  $m$  跟  $n$  同時 +1 時，每一次的方法數皆會成等差，其  $n$ 、 $m$  同時變動的方法數的公差之通解就是以  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的通解為基礎當  $m > n$  時，其公差的通解就是  $2^{m-1}(m - 3) + 2, (m \geq 2)$ ，為方便理解，我列出其部分方法數及公差如下表 6 所示。

表 6：TSQ-B-2 棋盤部分方法數及公差舉例

	$M(m, m)$	$M(m, m + 1)$	$M(m, m + 2)$
--	-----------	---------------	---------------



公差	$m = 3$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 2	$m = 4$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 10	$m = 5$ 代入 $2^{m-1}(m - 3) + 2$ 得 公差為 34
第一項	$m = 3$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 3	$m = 4$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 7	$m = 5$ 代入 $M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ 得第一項為 15
$m = 3$	$M(3,3) = 3$	$M(3,4) = 7$	$M(3,5) = 15$
$m = 4$	$M(4,4) = 5$	$M(4,5) = 17$	$M(4,6) = 49$
$m = 5$	$M(5,5) = 7$	$M(5,6) = 27$	$M(5,7) = 83$

(十一) TSQ-C 棋盤

TSQ-C 棋盤與 TSQ-A 棋盤實際上只是  $m$  跟  $n$  的方向顛倒過來而已，而 TSQ-C 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我可以將它拉到同一水平線上，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 24 所示，同樣的經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個內部缺邊的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據如下表 7 所示。

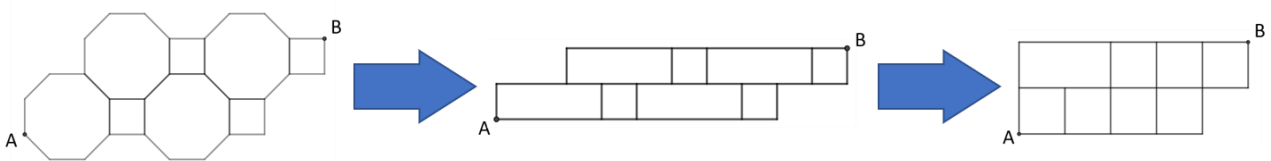


圖 24：TSQ-C 棋盤的轉正過程

表 7：TSQ-C 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 1$	3	5	7	9	11	13

$n = 2$	7	18	33	52	75	102
$n = 3$	15	58	133	248	411	630
$n = 4$	31	179	497	968	1591	2381

觀察上表發現 $n = 1$ 時 $M(m, 1) = 2m + 1$ ，還有 $n = 2$ 時遞迴式 $M(m, 2) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + m$ ，也發現 $n$ 固定 $m$ 變動的數列會呈現 $n$ 階差為 $2^n$ 的數列，但目前我並沒有得到一般式或是遞迴關係，所以並不能求得任意 $m \times n$ 棋盤的方法數。

## 六、將所有半正鑲嵌棋盤走捷徑方法數的通解形式分類，分析康威表示法與通解的關係

各棋盤的通解形式如下表 8 所示，而可以觀察到經過扭稜變換(SSQ, ESQ)的棋盤，在轉正成方格棋盤後都無法以傳統的方法進行方法數計算，所以通解都不是以組合數的方式呈現，而是階差關係。我推測這是因為有多個正三角形放在一起，導致轉正成方格棋盤後會有可以走斜線的情況。我也發現在八種半正鑲嵌圖形中唯一有正八邊形的圖形(TSQ)，其通解除了階差加指數外還有純粹的公差加指數的形式，我猜測這與當中的正八邊形有關，但目前研究資料還不足以判斷，希望在未來研究 $k$ 律鑲嵌時可以弄清楚當中的奧秘。

表 8：各棋盤的方法數通解形式

公差加指數	階差加指數	組合數
TSQ-B	SSQ-A、TSQ-A、 TSQ-C	TH-A、TH-B、TH-C、UH-A、UH-B、 UH-C、RTH-A、RTH-A、ESQ-A

## 七、探討部分 $k$ 律鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數

(一) TTSD-A-1 棋盤(2 律鑲嵌)：

透過實際操作可以發現 TTSD-A 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，在  $m < n$  時，當  $m$  加一，最短路徑的步數會+2，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+4，且  $S(1,2) = 10$ ，所以得到  $S(m,n) = 2m + 4n$ 。

(二) TTSD-A-2 棋盤(2 律鑲嵌)：

同上 TTSD-A 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，在  $m = n$  時，當  $m$ 、 $n$  加一時，最短路徑的步數會+6，且  $S(1,1) = 7$ ，所以得到  $S(m,m) = 6m + 1$ 。

(三) TTSD-A-3 棋盤(2 律鑲嵌)：

同上 TTSD-A 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，在  $m > n$  時，當  $m$  加一，最短路徑的步數會+4，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+2，且  $S(2,1) = 10$ ，所以得到  $S(m,n) = 4m + 2n$ 。

(四) TTSD-B-1 棋盤(3 律鑲嵌)：

透過實際操作可以發現 TTSD-B 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，而  $m < n$  跟  $m = n$  時，當  $m$  加一時，最短路徑的步數會+3，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+5，且  $S(1,1) = 7$ ，所以得到  $S(m,n) = 3m + 5n - 1$ 。

(五) TTSD-B-2 棋盤(3 律鑲嵌)：

同上 TTSD-A 棋盤在  $m = n$  會出現一個分界線，在  $m > n$  時，當  $m$  加一，最短路徑的步數會+4，而  $n$  加一時，最短路徑的步數會+4，且  $S(2,1) = 10$ ，所以得到  $S(m,n) = 4m + 4n - 2$ 。

## 八、探討部分 k 律鑲嵌棋盤中，由 A 點沿格線走捷徑到 B 點的方法數

### (一) TTSD-A-1 棋盤(2 律鑲嵌)：

TTSD-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，而由於當中某些轉彎對於方法數是不影響的，所以我可以將它拉到同一斜直線上，所以再經過一次捷徑同構將棋盤轉正成類方格棋盤如下圖 25 所示，而經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個有斜線的方格棋盤，所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據如下表 9 所示。

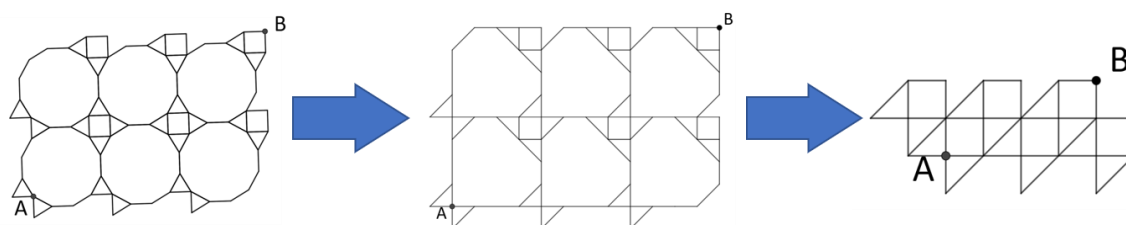


圖 25：TTSD-A 棋盤的轉正過程

表 9：TTSD-A 棋盤的方法數研究數據

$n \backslash m$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$n = 1$	2	1	2	4
$n = 2$	1	2	1	2
$n = 3$	2	1	2	1
$n = 4$	4	2	1	2
$n = 5$	8	4	2	1
$n = 6$	16	8	4	2

觀察上表發現  $m < n$  時， $n - m$  越大方法數越大，且呈現 2 的冪次。且  $M(2,1) = 1$ ，所以得到  $M(m,n) = 2^{n-m-1}$ 。

(二) TTSD-A-2 棋盤(2 律鑲嵌)：

同上 TTSD-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個有斜線的方格棋盤。所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據如上表 9 所示。觀察上表發現 $m = n$ 時 $M(m, m) = 2$ 。

(三) TTSD-A-3 棋盤(2 律鑲嵌)：

同上 TTSD-A 棋盤可以經過捷徑同構轉正成類方格棋盤，經過轉正後我可以發現該棋盤實際上是一個有斜線的方格棋盤。所以我在算方法數的時候無法仿照方格棋盤的方式，我實際去進行計算得到數據如上表 9 所示。觀察上表發現 $m > n$ 時， $m - n$ 越大方法數越大，且呈現 2 的冪次。且 $M(1,2) = 1$ ，所以得到 $M(m, n) = 2^{m-n-1}$ 。

(四) TTSD-B-1 棋盤(3 律鑲嵌)：

經由研究後我發現，我無法藉由適當的方式將 TTSD-B 棋盤轉正成方格棋盤，所以我實際去進行計算得到數據，並且去觀察當中的圖形規律，而在觀察研究數據後我發現其方法數通解在 $m$ 、 $n$ 加一時，方法數與 $m$ 、 $n$ 有 2 的冪次關係，而當中在 $n = 1$ 和 $m = n = 1$ 時有例外，所以我需要將最少步數的方法數通解分三段討論，如下表 10 所示。

表 10：不同條件下的 $12(3\ 3\ 4\ 3)^2$ 棋盤最少步數通解：

條件	通解
$m = n = 1$	$M(1,1) = 2$
$m > 1, n = 1$	$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$
$n > 1$	$M(m, n) = 2^{m+n-2}$

## 陸、研究結果與討論

本研究探討平面上存在的所有 8 種 1 律半正鑲嵌圖形，其所形成的棋盤中，從 A 到 B 走捷徑的最少步數與方法數通解，並將這些通解分類羅列如下。

### 一、最少步數及方法數的通解

表 11：各棋盤的最少步數及方法數的通解

棋盤	$S(m, n)$	$M(m, n)$
TH-A	$2m + 2n - 1$	$C_n^{m+n-1}$
TH-B-1	$2m + 2n - 1$	$C_n^{m+n-1}$
TH-B-2	$2m + 2n$	$C_n^{m+n}$
TH-C	$2m + 2n$	$C_n^{m+n}$
UH-A	$4m + 4n - 2$	$C_n^{m+n-1}$
UH-B-1	$4m + 4n - 3$	$C_n^{m+n-1}$
UH-B-2	$4m + 4n - 1$	$C_n^{m+n}$
UH-C	$4m + 4n - 1$	$C_n^{m+n}$
STH-A-1	$2m + 3n - 1$	$M(1, n) = 2^n \times 3 - 2$ $M(n + 1, n) = 2^n$ $M(n, n) = (n + 1) \times 2^n + (n - 1) \times 2^{n-1}$
STH-A-2	$3m + 2n - 2$	$2(3^{m-1} - 2^{m-1}), (m \geq 2)(n \text{ 為 } 1 \text{ 的情況})$
RTH-A	$3m + 3n - 2$	$C_{2n}^{2m+2n-1}$
RTH-B	$3m + 3n$	$C_{2n}^{2m+2n}$
UTH-A-1	$4m + 6n - 2$	$M(1, n + 1) = 3M(1, n) + 3^{n-1} \times 4$ $(n \geq 1)。$

UTH-A-2	$6m + 4n - 2$	$M(m + 2, 1) = 6M(m + 1, 1) - M(m, 1) - 4$ $(m \geq 1)$
UTH-B-1	$4m + 6n + 1$	尚未確定
UTH-B-2	$6m + 4n - 1$	$1 + \sum_{k=0}^{m-1} (4 + 3\sqrt{2})(3 + \sqrt{8})^k$ $+ (4 - 3\sqrt{2})(3 - \sqrt{8})^k$ (n 為 1 的情況)
SSQ-A	$\frac{3}{2}m + 2n - \frac{1}{2}, (m \text{ 為奇數})$ $\frac{3}{2}m + 2n - 1, (m \text{ 為偶數})$	$\begin{cases} M(1, n) = 2n + 1 \\ M(m, n) = \left(\frac{3}{2} - (-1)^m \times \frac{1}{2}\right) \times \sum_{k=1}^n M(m-1, k) \end{cases}$
ESQ-A	$m + 2n$	$C_{2n}^{m+2n}$
TSQ-A	$3m + 4n - 2$	$M(1, n) = 2n + 1$ $M(2, n) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + n$ $M(m, 1) = 2^{m+1} - 1$
TSQ-B-1	$m + 3n + 1$	公差通解： $2^{n+1}(n - 1) + 2, (n \geq 1)$ 方法數通解如表 12。
TSQ-B-2	$3m + n - 1$	公差通解： $2^{m-1}(m - 3) + 2, (m \geq 2)$ 方法數通解如表 13。
TSQ-C	$4m + 3n - 2$	$M(m, 1) = 2m + 1$ $M(m, 2) = 2 \times \sum_{k=1}^n (2n + 1) + m$ $M(m, 1) = 2^{m+1} - 1$
TTSD-A-1	$2m + 4n$	$2^{n-m-1}$
TTSD-A-2	$6m + 1$	2
TTSD-A-3	$4m + 2n$	$2^{m-n-1}$
TTSD-B-1	$3m + 5n - 1$	$M(1, 1) = 2$

		$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1$ $M(m, n) = 2^{m+n-2}$
TTSD-B-2	$4m + 4n - 2$	$M(m, n) = 2^{m+n-2}$

表 12：TSQ-B-1 棋盤在  $m = 1$ 、 $m = 2$ 、 $m = n + 1$  時的方法數通解

	通解
$m = 1$	$M(1, n) = 2^{n+1} - 1$
$m = 2$	$M(2, n) = 2^n(n - 1) + 1$
$m = n + 1$	$M(n + 1, n) = 1$

表 13：TSQ-B-2 棋盤在  $n = 1$ 、 $n = 2$  時的方法數通解

	通解
$n = 1$	$M(m, 1) = 2^{m-1} - 1, (m \geq 2)$
$n = 2$	$M(m, 2) = 2^{m-2}(m - 3) + 1, (m \geq 3)$

## 二、康威表示法與通解形式的關係

各棋盤的通解形式如上表 8 所示，經過扭稜變換(SSQ, ESQ)的棋盤，轉正後的通解都是階差關係。在八種半正鑲嵌圖形中唯一有正八邊形的圖形(TSQ)，其通解除了階差加指數外還有純粹的公差加指數的形式。



## 柒、結論與未來展望

### 一、結論

本研究中將傳統的走捷徑問題放到半正鑲嵌圖中，這是前人少有的嘗試，而在本研究中所做的轉正動作更是本研究的突破點，讓原本很複雜的圖形棋盤的方法數計算，可以重新回到較為單純的方格棋盤去計算，在本研究中我窮舉了由兩種正多邊形所構成的半正鑲嵌圖形及由三種正多邊形所構成的 2、3 律鑲嵌圖形，其走捷徑的方法數及步數，但可惜的是有一些圖形的方法數我只有得到一部分的通解。

### 二、未來展望

而本研究未來希望可以研究出任意型態不完整（或有斜線）的方格棋盤之走捷徑方法數通解，若能夠成功研究出結果，或許對於類似一路領先這類問題，可以將原本問題轉換到方格棋盤上來解決的問題有所幫助。

而我也希望能繼續研究其他的 $k$ 律鑲嵌圖形。此外本研究當中我有些棋盤尚未推出完整的通解，主要是因為轉正成方格棋盤後該方格棋盤是不完整或是有斜線，使得我無法用傳統的方法計算，未來我希望能聚焦在這些特殊鑲嵌圖形，然後深入探討一些數學性質。

## 捌、參考文獻

1. Critchlow, K. (1970). *Order in Space: A Design Source Book*. New York: Viking Press.
2. Dangelo, J. P. & West, D. B. (2000). *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs* (2nd. ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall Press.
3. Wikipedia (2021). Euclidean Tilings by Convex Regular Polygons。2021 年 9 月 9 日，取自

[https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean\\_tilings\\_by\\_convex\\_regular\\_polygons](https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_tilings_by_convex_regular_polygons)。

4. Wikipedia (2021). List of Euclidean Uniform Tilings。2021 年 9 月 13 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Euclidean\\_uniform\\_tilings](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings)。
5. Wikipedia (2022). List of Euclidean uniform tilings。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_Euclidean\\_uniform\\_tilings](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings)。
6. Wikipedia (2022)。Conway polyhedron notation。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Conway\\_polyhedron\\_notation](https://en.wikipedia.org/wiki/Conway_polyhedron_notation)。
7. Wikipedia (2022)。Duality (mathematics)。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://en.wikipedia.org/wiki/Duality\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Duality_(mathematics))。
8. 張玉琪 (2009 年)。虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
9. 葉東進 (2013 年)。藉題發揮，得意忘形 (第一版)。臺北市：三民。
10. 維基百科 (2022 年)。半正鑲嵌圖。2022 年 1 月 1 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%8A%E6%AD%A3%E9%91%B2%E5%B5%8C%E5%9C%96>。
11. 維基百科 (2022 年)。不完全正鑲嵌圖。2022 年 1 月 8 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8D%E5%AE%8C%E5%85%A8%E6%AD%A3%E9%91%B2%E5%B5%8C%E5%9C%96>。
12. 維基百科 (2022 年)。康威多面體表示法。2022 年 1 月 9 日，取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%B7%E5%A8%81%E5%A4%9A%E9%9D%A2%E9%AB%94%E8%A1%A8%E7%A4%BA%E6%B3%95>。
13. 維基百科 (2022 年)。截角 (幾何)。2022 年 1 月 9 日，取自 [https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%88%AA%E8%A7%92\\_\(%E5%B9%BE%E4%BD%95\)](https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%88%AA%E8%A7%92_(%E5%B9%BE%E4%BD%95))。
14. 蘇靖洋、鄭富中 (2022 年)。2022 臺灣國際科學展覽會參展作品專輯：「半正鑲嵌圖形中的捷徑問題」。國立臺灣科學教育館。<https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2022/mathematics.html>

## 【評語】 010037

本作品探討半正鑲嵌棋盤上，由 A 點沿格線走到 B 點的最少步數，以及方法數的問題。經由適當的轉換，作者簡潔地估算了方法數。整體而言，比起先前作品進步不少。

作品中的計算幾乎涵蓋了單一規律的兩種正多邊形鑲嵌棋盤，但大半是轉正成格子點棋盤的特例，其餘個案則未做討論。建議日後可針對無法轉正的案例做深入研究。也可思考如何統整個別結果，得到較通用的準則。